Univ.-Prof. Dr. Robinson Kruse-Becher

32681
Zeitreihenökonometrie
Leseprobe

Einheit 1

Einführung und Stationäre Zeitreihen

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Der Inhalt dieses Studienbriefs wird gedruckt auf Recyclingpapier (80 g/m2, weiß), hergestellt aus 100 % Altpapier.

Zeitreihenökonometrie - Einführung

Prof. Dr. Robinson Kruse-Becher

FernUniversität in Hagen
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Angewandte Statistik

Gegenstand des Kurses

- Zeitreihenanalyse für univariate und multivariate Datensätze
- Methoden der angewandten Zeitreihenökonometrie
- Anwendungsgebiete in der makroökonomischen Analyse und der Finanzwirtschaft
- Begleitkurs zum neuen Modul 32611 Empirische Makrökonomik

Anspruch

- Praktische Fragen der empirischen Modellierung stehen im Vordergrund
- Gründliche Methodenkenntnisse werden vermittelt
- Kritische Reflexion der ökonometrischen Verfahren
- Anwendungsbeispiele in R ergänzen die Darstellung unterschiedlicher Methoden
- Direkter Bezug zu Fragestellungen der empirischen Makroökonomik
- Vorkenntnisse in Mathematik und Statistik sind erforderlich

Thematik

- Behandelte Themen: Univariate Zeitreihenanalyse, Trends, Strukturbrüche und Einheitswurzeln, Multivariate Analyse für stationäre Zeitreihen, Strukturelle Modelle und Kointegration in Einzel- und Mehrgleichungssystemen
- Ausgelassene Themen: Saisonalität und langes Gedächtnis (komplexe Spezialthemen)
- Die Darstellung der Methoden ist so formal wie nötig
- Im Vordergrund steht die empirische Modellierung
- Literaturangaben zu tiefer gehenden Fragestellungen; mögliche Themen für Seminar- und Abschlussarbeiten

Lehr- und Lernformate

- Lehr- und Lernformat: Lehrtext als Grundlage, Videovorlesungen (asynchron) und synchrone Übungsveranstaltungen
- Grundlage des Kurses ist der Lehrtext von Bernhard Pfaff: Analyis of Integrated and Cointegrated Time Series with R, 2. Auflage 2008, Springer, erschienen in der Reihe "Use R!" bei Springer
- Volltextzugriff (E-Book, online) über die Universitätsbibliothek
- R ist eine führende open-source Statistiksoftware
- Alle R Codes und Daten sind verfügbar zur Replikation der Ergebnisse
- Zu dem verwendeten Lehrtext existieren direkt verknüpfte R Pakete
- Kombinierbar mit RStudio (IDE)

Inhaltsverzeichnis

1. Univariate Analyse stationärer Zeitreihen (Kapitel 1)
2. Univariate Analyse nichtstationärer Zeitreihen (Kapitel 3)
3. Bestimmung des Integrationsgrads (Kapitel 5 und 6)
4. Multivariate Analyse stationärer Zeitreihen (Kapitel 2)
5. Kointegration (Kapitel 4, 7 und 8)

Die Kapitelangaben beziehen sich auf Pfaff (2008)

Zeitreihenökonometrie - Stationäre Zeitreihen

Prof. Dr. Robinson Kruse-Becher

FernUniversität in Hagen
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
Lehrstuhl für Angewandte Statistik

Univariate Analyse stationärer Zeitreihen

- Lernziele
- Einführung
- Stationarität
- Autoregressive Prozesse
- Moving Average Prozesse
- Autoregressive Moving Average Prozesse
- Zusammenfassung
- Literatur

Lernziele

- Verständnis fundamentaler Konzepte der Zeitreihenanalyse
- Verständnis für die unterschiedlichen Eigenschaften von Zeitreihen
- Sicherer Umgang mit AR, MA und gemischten ARMA Prozessen
- Fähigkeit zur empirischen Modellierung und Prognose

Definition diskreter Zeitreihen Prozesse

- Eine (diskrete) Zeitreihe ist definiert als eine zeitlich geordnete Sequenz von Zufallsvariablen
- Diskret meint hier einen fixen zeitlichen Abstand
- Bei zeitstetigen Prozessen wird dieser infinitesimal
- Wir betrachten ausschließlich zeitdiskrete Prozesse
- Ein stochastischer Prozess kann wie folgt formalisiert werden:

$$\{y(s,t), s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}\}$$

- Für jedes $t \in \mathcal{T}$ ist $y(\cdot, t)$ eine Zufallsvariable auf dem Stichprobenraum $\mathcal{S}$ und eine Realisation dieses stochastischen Prozesses ist $y(s, \cdot)$ für jedes $s \in \mathcal{S}$ mit Bezug auf den Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$

Definition diskreter Zeitreihen Prozesse

- Für jedes $t \in \mathcal{T}$ ist $y(\cdot, t)$ eine Zufallsvariable auf dem Stichprobenraum $\mathcal{S}$ und eine Realisation dieses stochastischen Prozesses ist $y(s, \cdot)$ für jedes $s \in \mathcal{S}$ mit Bezug auf den Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$
- In der Praxis beobachten wir Realisationen eines unbekannten stochastischen Prozesses

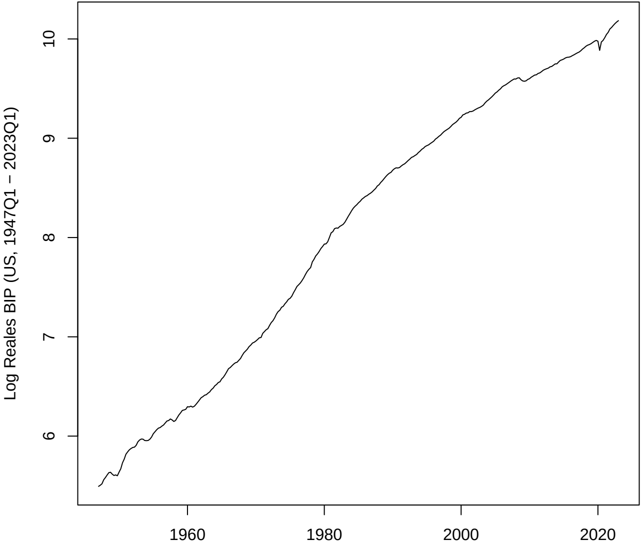
$$\{y_1, y_2, ..., y_T\}$$

mit $t = 1, 2, ..., T \in \mathcal{T}$

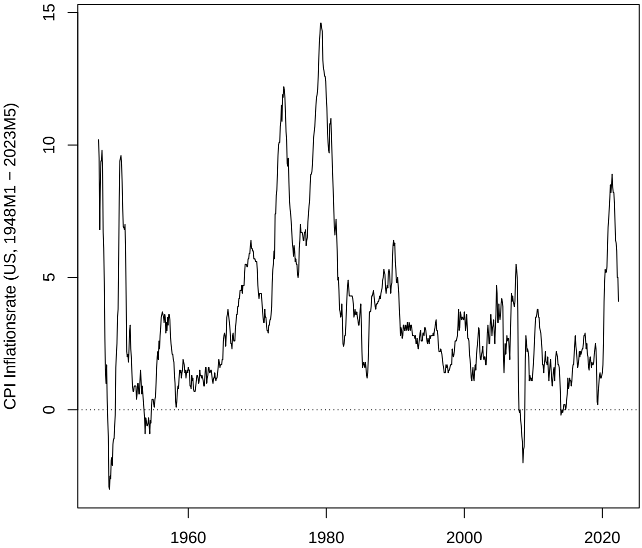
Grundidee

- Eine Grundidee der Zeitreihenanalyse (und verwandter Gebiete) ist, den zu Grunde liegenden stochastischen daten-generierenden Prozess (DGP) auf Basis der beobachteten Daten zu modellieren
- Dabei wird also von den empirisch zur Verfügung stehenden Daten auf den zu Grunde liegenden Prozess geschlossen
- Eine der augenscheinlich wichtigsten Eigenschaften von Zeitreihen ist der "Trend"
- Darüber hinaus ist die zeitliche Abhängigkeit von großem Interesse (Autokorrelation)

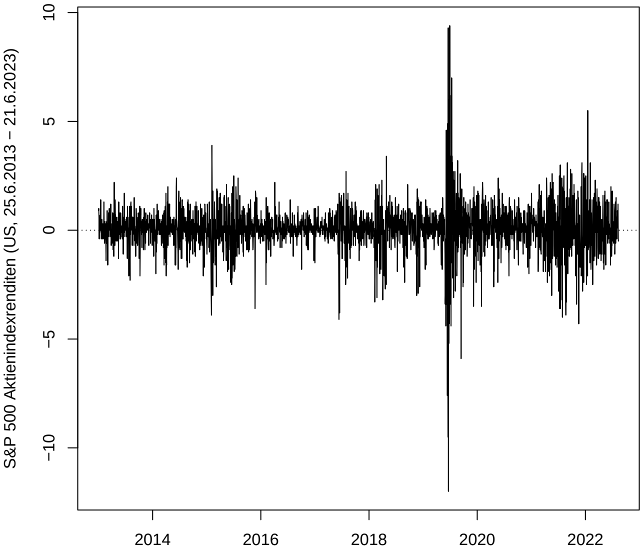
Beispiele - Reales BIP in den USA



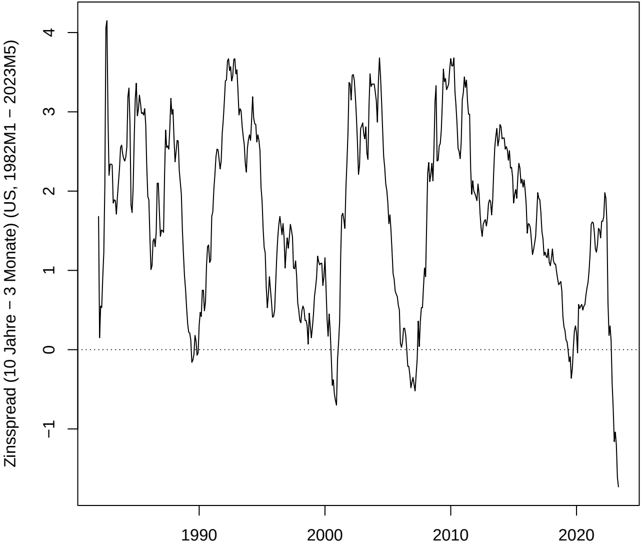
Beispiele - Inflationsrate in den USA



Beispiele - Aktienrenditen in den USA



Beispiele - Zinsspread in den USA



Stationarität

- Eines der wichtigsten Charakteristika von Zeitreihen ist die Stationarität bzw. die Nichtstationarität
- Wir unterscheiden die schwache und die starke (bzw. strikte) Form der Stationarität

Schwache Stationarität

- Ein stochastischer Prozess ist schwach stationär, wenn folgende Bedingungen gemeinsam erfüllt sind
- (1) $E[y_t] = \mu < \infty$ für alle Zeitpunkte $t \in \mathcal{T}$
- (2) $E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = \gamma_j$ für alle $t, j \in \mathcal{T}$
- Da diese Definition die ersten beiden endlichen Momente (Erwartungswert und (Ko-)Varianz) betrifft, spricht man auch von Stationarität zweiter Ordnung oder Kovarianz-Stationarität
- Bedingung (1) betrifft den endlichen Erwartungswert von y_t: Dieser muss konstant über die Zeit sein

Schwache Stationarität

- Ein linearer Trend wäre eine Verletzung dieser Bedingung
- Bedingung (2) betrifft zunächst für $j = 0$ die (endliche) Varianz von y_t: Diese muss konstant über die Zeit sein
- Für $j \neq 0$ beschäftigt sich die zweite Bedingung mit den Autokovarianzen: Diese dürfen nur von dem Zeitabstand j abhängen, aber nicht von dem Zeitpunkt t
- Die Autokovarianzstruktur muss also überall im Zeitverlauf dieselbe sein
- Autokovarianzen bestimmen die Autokorrelation und somit die (lineare) zeitliche Abhängigkeit in y_t
- Die Verletzung einer der Bedingungen (auch in Teilen) reicht aus, um einen Prozess als nichtstationär zu klassifizieren

Strikte Stationarität

- Die strikte (oder auch starke) Stationarität verlangt

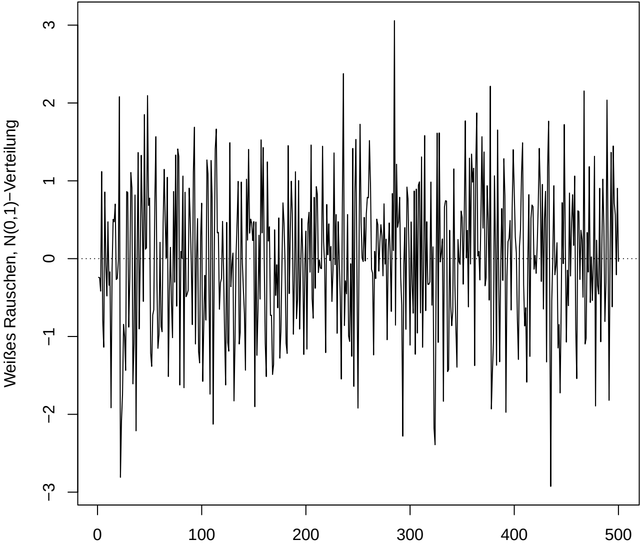
$$F(y_1, y_2, ..., y_T) = F(y_{1+j}, y_{2+j}, ..., y_{T+j}) \quad \forall t, j \in \mathcal{T}$$

  wobei $F(\cdot)$ die gemeinsame Verteilungsfunktion ist
- Diese Definition geht über die ersten beiden Momente hinaus und verlangt dass die gesamte gemeinsame Verteilungsfunktion bei Zeitverschiebung um j dieselbe ist
- Ein strikt stationärer Prozess (mit endlichen zweiten Momenten) ist somit auch schwach stationär
- Andersherum muss das nicht gelten, da ein Prozess die ersten beiden Bedingungen der schwachen Stationarität erfüllen kann, aber diese Bedingungen nicht für höhere Momente gelten
- In der Praxis beschäftigen wir uns mit der schwachen Stationarität
- (Ergodizität wird im Folgenden nicht benötigt)

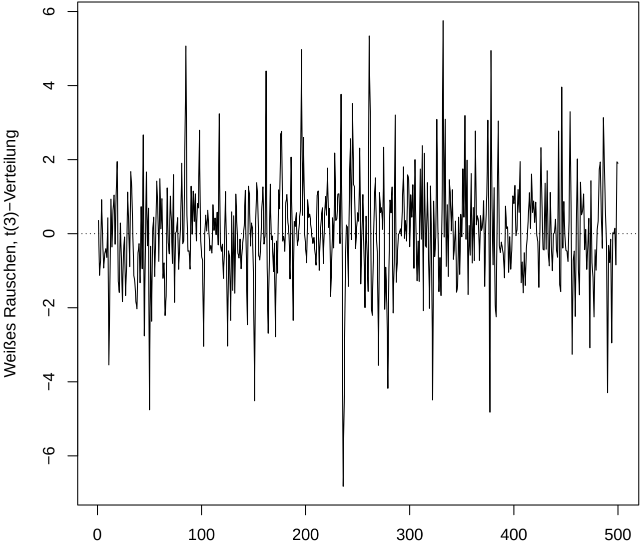
Weißes Rauschen

- Das weiße Rauschen ε_t ist der simpelste Zeitreihenprozess
- Eigenschaften: $E[\varepsilon_t] = 0$, $E[\varepsilon_t^2] = \sigma_\varepsilon^2$ und $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}] = 0$ für alle $t \neq j$
- Das weiße Rauschen ist (schwach und strikt) stationär
- Unter zusätzlicher Normalverteilung, handelt es sich um Gaußsches weißes Rauschen, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- In diesem Fall sind Unkorreliertheit und Unabhängigkeit äquivalent

Beispiel - Simuliertes Gaußsches weißes Rauschen



Beispiel - Simuliertes weißes Rauschen, $t(3)$-Verteilung



Autoregressive Prozesse erster Ordnung

- Da das weiße Rauschen keinerlei zeitliche Abhängigkeit beinhaltet, wenden wir uns nun dynamischen Prozessen zu
- In autoregressiven Prozessen treiben vergangene Werte die aktuellen und zukünftigen
- Es besteht also eine zeitliche Abhängigkeit
- Der einfachste Fall ist der AutoRegressive (AR) Prozess 1. Ordnung, AR(1):

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

  wobei ε_t ein weißes Rauschen ist
- Es handelt sich um eine Differenzengleichung deren Pfad durch den autoregressiven Parameter ϕ bestimmt wird

Autoregressive Prozesse erster Ordnung

- Für $\phi = 0$ gibt es keine zeitliche Abhängigkeit und y_t ist damit eine Konstante c plus weißes Rauschen ε_t
- Für $\phi > 0$ besteht eine positive Abhängigkeit von y_t zu dem Wert aus der Vorperiode y_{t-1}
- Für den Fall, dass $\phi = 1$ gilt, akkumulieren sich die Schocks ε_i $(i = 1, 2, ..., t)$ und führen zu einem nichtstationären Prozess y_t
- In diesem wichtigen Fall weist y_t eine sogenannte Einheitswurzel auf
- Dieses Kapitel beschränkt sich auf den kovarianzstationären Fall von $0 < \phi < 1$
- Der Fall von $-1 < \phi < 0$ kann analog behandelt werden, ist jedoch kaum von praktischer Relevanz

Alternative Darstellung

- Wiederholtes Einsetzen der dynamischen Gleichung in sich selbst ergibt

$$y_t = c + \phi(c + \phi y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = c + \phi(c + \phi(c + \phi y_{t-3} + \varepsilon_{t-2})) + \varepsilon_t$$

welches zu

$$y_t = (c + \varepsilon_t) + \phi(c + \varepsilon_{t-1}) + \phi^2(c + \varepsilon_{t-2}) + \phi^3(c + \varepsilon_{t-3}) + \ldots$$

führt; die (stabile) Lösung für $0 < \phi < 1$ lautet

$$y_t = c/(1 - \phi) + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}$$

Eigenschaften

- Dieser Prozess hat folgende wichtige Eigenschaften
- (1) $\mu = E[y_t] = \frac{c}{1-\phi}$
- (2) $\gamma_0 = E[(y_t - \mu)^2] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$
- (3) $\gamma_j = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\phi^j}{1-\phi^2}$
- Aus Eigenschaft (1) ergibt sich ein zeitlich konstanter Erwartungswert, der nicht gleich Null sein muss
- Eigenschaft (2) zeigt die zeitlich konstante Varianz und Eigenschaft (3) führt vor, dass die Autokovarianzen γ_j lediglich von j abhängen, aber nicht von t
- Damit sind alle Bedingungen der schwachen Stationarität erfüllt
- Zudem ist zu erkennen, dass der autoregressive Parameter ϕ alle genannten Größen beeinflusst

Autokorrelationsfunktion (ACF)

- Aus der Autokovarianzfunktion γ_j folgt die Autokorrelationsfunktion (ACF)

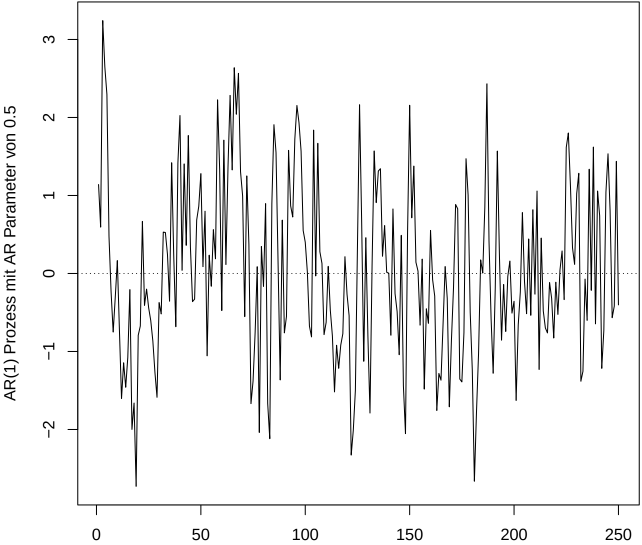
$$\varrho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$$

- Im behandelten Fall ergibt sich demnach

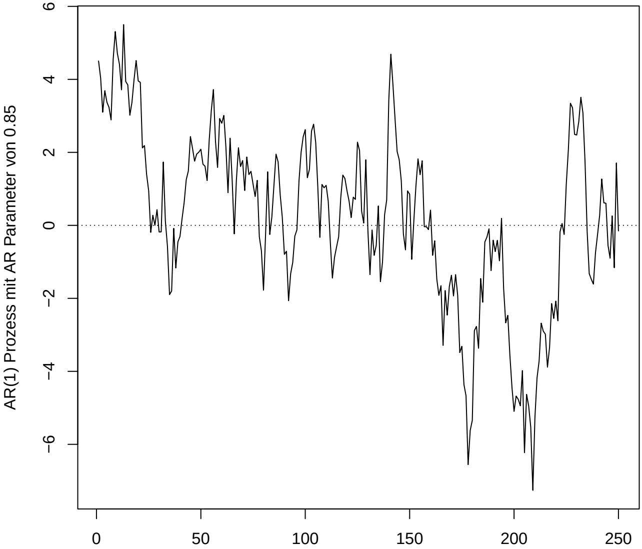
$$\varrho_j = \phi^j$$

- Damit ist die ACF exponentiell abklingend und strebt gegen 0
- Der autoregressive Parameter ϕ beeinflusst die Stärke der zeitlichen Abhängigkeit

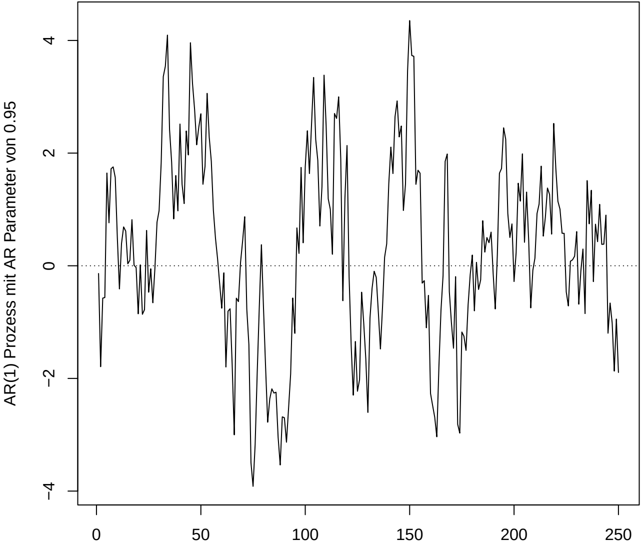
Beispiel - Simulierter AR(1) Prozess, $c = 0$, $\phi = 0.5$



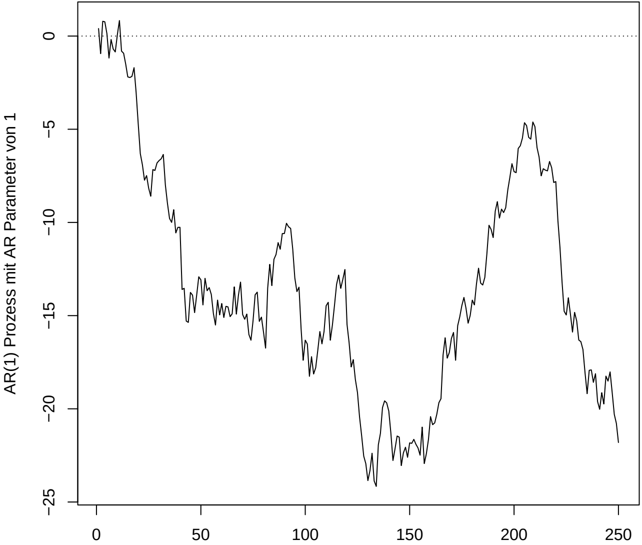
Beispiel - Simulierter AR(1) Prozess, $c = 0$, $\phi = 0.85$



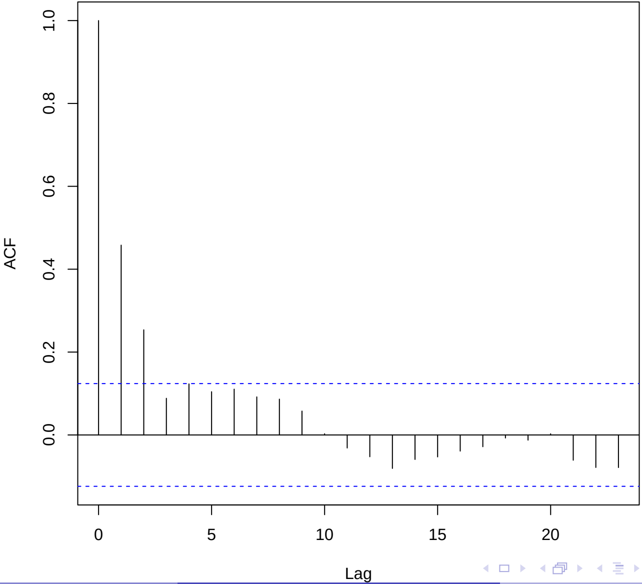
Beispiel - Simulierter AR(1) Prozess, $c = 0$, $\phi = 0.95$



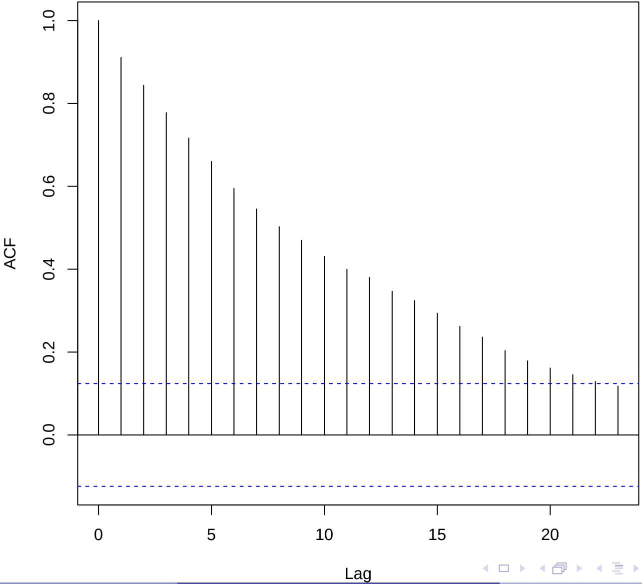
Beispiel - Simulierter AR(1) Prozess, $c = 0$, $\phi = 1$



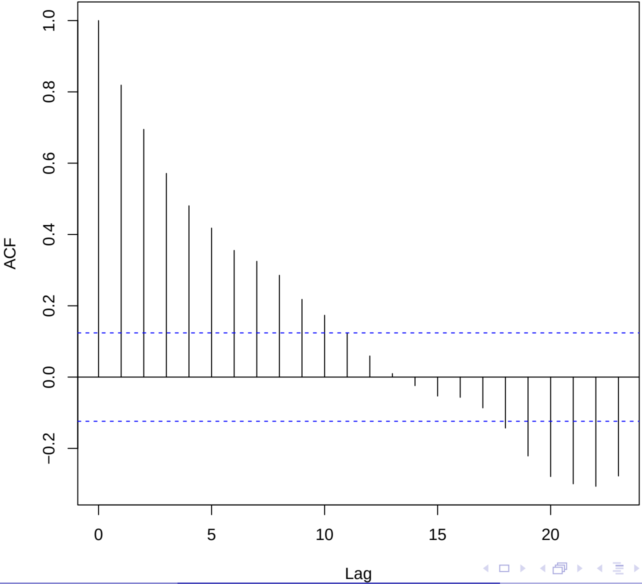
Beispiel - Simulierte ACF, AR(1) Prozess, $c = 0$, $\phi = 0.5$



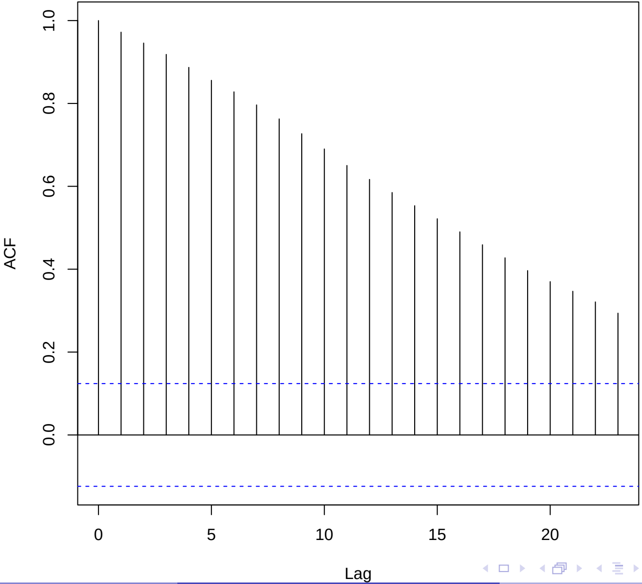
Beispiel - Simulierte ACF, AR(1) Prozess, $c = 0$, $\phi = 0.85$



Beispiel - Simulierte ACF, AR(1) Prozess, $c = 0$, $\phi = 0.95$



Beispiel - Simulierte ACF, AR(1) Prozess, $c = 0$, $\phi = 1$



Höhere Ordnungen

- Um komplexere Dynamiken zu beschreiben, kann die Ordnung des autoregressiven Prozesses erhöht werden

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

  Wir sprechen nun von einem AR(p) Prozess; p ist die Lagordnung
- Dieser Prozess kann etwas komplexere Abhängigkeitsstrukturen erzeugen als der simple AR(1) Prozess
- Wir nutzen das Konzept des charakteristischen AR-Polynoms um die Stationariät zu untersuchen
- Dazu benötigen wir den Lag Operator