

Ökonomische Interpretationen der Skalenvariablen u in der DEA

Andreas Dellnitz, Andreas Kleine und Wilhelm Rödder

Diskussionsbeitrag Nr. 480

August 2012

Diskussionsbeiträge der Fakultät für Wirtschaftswissenschaft
der FernUniversität in Hagen

Herausgegeben vom Dekan der Fakultät

Alle Rechte liegen bei den Verfassern

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Präliminarien	3
3	Zentrische Skalierung von T zu T_r	5
4	Zentrische Skalierung von DMU k zu DMU'k	9
5	Zusammenführung von Kapitel 3 und 4	14
6	Beziehungen CCR, BCC und ZS	16
7	SkalenvARIABLE u_k und Drehung	20
	7.1 Aktivität, Effizienzniveau und Skalenertrag	20
	7.2 Kreuzeffizienz und Kreuzskalenertrag	23
8	Zusammenfassung und Ausblick	24
	Literatur	26
	Anhang A	27
	Anhang B	28
	Anhang C	29

Abbildungsverzeichnis

1	BCC-Technologie T für vier DMUs.	7
2	Technologie für T_r	8
3	Zentrische Skalierung DMU 4 zu DMU'4.	12
4	ZS-Klassifikation.	13
5	Supereffiziente DMU'2	14
6	Kritischer Bereich für DMU 4.	16
7	Von DMU 3 zur mpss-DMU.	18
8	Skalenertrag und Effizienzniveau.	22

Tabellenverzeichnis

1	BCC optimale Lösung der vier DMUs.	8
2	Aktivitäten, Effizienz, SE und Gewichte	21

1 Einführung

Die DEA ermöglicht bekanntlich eine vergleichende Effizienzanalyse von Wirtschaftseinheiten, sogenannten Decision-Making-Units oder kurz DMUs. Dazu werden über einen vergangenen Zeitraum Inputs = Ressourcenverbräuche und Outputs = Ergebnisse wirtschaftlichen Handelns – sogenannte Aktivitäten – betrachtet und miteinander verglichen. Resultat ist dann für jede DMU ihre relative Effizienz in Bezug auf eine Vergleichsgruppe. Neben dieser relativen Effizienz erhält jede dieser DMUs jedoch zahlreiche weitere Informationen:

- Sie kann die Effizienzbewertung z.B. unter der Annahme konstanter oder variabler Skalenerträge SE vornehmen. Je nach Wahl des Modells erhält sie ihre technische und Skaleneffizienz oder lediglich ihre technische Effizienz.
- In jedem dieser Modelle erfährt sie, welche Wirtschaftseinheiten als Vorbild bzw. Referenz dienen können und in welchem Maße diese zur Vorbildfunktion beitragen. Diese Informationen liefern in der sogenannten Envelopment-Form die optimalen Werte von Variablen, den Aktivitätsniveaus.
- Sie erkennt an der optimalen Lösung eines jeden Modells, wann sie wegen Input-/ Outputverschwendung ineffizient ist und wie sie diesen Mangel beheben kann.
- Im Modell unter variablen SE lässt sich auch die Skalenertragslage ablesen. Bereits in der bahnbrechenden Arbeit von Banker, Charnes, u. Cooper (1984) zeigten die Autoren auf S. 1086-1087 für eine effiziente DMU, dass in der Multiplier-Form das Vorzeichen einer Variablen u die Skalenertragslage angibt. Der Beweis erfolgt über eine geometrische Charakterisierung der unterstützenden Hyperebene der Technologie zur betreffenden DMU.

Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012) präzisieren diese Ergebnisse und leiten einen analytischen Ausdruck für den SE – und nicht nur für die Lage (!) – für jede DMU und sogar für jede beliebige Aktivität der Technologie ab. Dennoch wird die Rolle der Variablen u in der Literatur bis heute stiefmütterlich behandelt. Was genau ist ihre ökonomische Bedeutung, erlaubt der Wert dieser Variablen eine anschauliche Interpretation ihres Einflusses auf die Effizienz, über die bekannten rein formalen mathematischen Darstellungen hinaus?

Solchen Fragen ist dieser Beitrag gewidmet. Er ist dementsprechend wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 werden die Grundmodelle der DEA, soweit sie hier Verwendung finden, dargelegt. In Kapitel 3 wird die Technologie einer Transformation unterzogen, der sogenannten zentrischen Skalierung ZS. Es kann dann gezeigt werden, dass die Variable u die Änderungsrate der Effizienz unter dieser Transformation misst. Kapitel 4 betrachtet nunmehr eine ZS nicht der gesamten Technologie, sondern der zu bewertenden DMU und zeigt ein äquivalentes Ergebnis wie in Kapitel 3 auf. Kapitel 5 führt die beiden Ansätze zusammen. Kapitel 6 liefert die Transformation einer beliebigen DMU zu einer solchen mit maximaler Produktivität (most productive scale size, kurz mpss). Diese Transformation wurde schon von Banker (1984) hergeleitet, erscheint jedoch jetzt unter dem Gesichtspunkt der ZS in einem neuen Licht. Kapitel 7 schließlich greift die von Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012) behandelte Berechnung des SE wieder auf und vertieft insofern, als nun der dort entwickelte Ausdruck zielführend umgeformt wird. SE, Effizienz, Input und Output werden auf ihre Interdependenzen hin untersucht, ebenso wie Kreuzeffizienzen und Kreuzskalenerträge. Kapitel 8 fasst zusammen und zeigt weitere Forschungsrichtungen auf.

2 Präliminarien

Die klassische Envelopment-Form der DEA mit ihren verschiedenen Expansionsvarianten zeigt Aufgabe (1); hierbei steht U für Unbeschränktheit, D für Dilatation, R für Reduktion und B für Beschränktheit. Die Aktivitäten $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ sind die zeitraumbezogenen Inputs und Outputs der DMU j , $j = 1$ bis J , ansonsten wird der Leser auf die verwendete und erläuterte Symbolik in Rödder u. Reucher (2011), Rödder u. Reucher (2012) sowie Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012) verwiesen. Mittels \uparrow bzw. \downarrow werden in diesem Beitrag bekannte oder unmittelbar plausible Transformationen bzw. Rücktransformationen und mit \longleftrightarrow Dualbeziehungen gekennzeichnet. CCR und BCC sind die bekannten Akronyme für die folgenden Spezialfälle U und B. Zudem stellen wir auf eine Input-orientierte Betrachtung ab, für weitere Orientierungen vgl. z.B. Cooper, Seiford, u. Tone (2007).

Für DMU k , $k \in \{1, \dots, J\}$ berechne

$$\begin{aligned} \min h_k \\ h_k \mathbf{x}_k - \alpha_k \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{x}_j &\geq \mathbf{0} \quad (1) \\ \alpha_k \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{y}_j &\geq \mathbf{y}_k \\ \sum_j \lambda_{kj} &= 1 \\ \lambda_{kj} &\geq 0 \quad \forall j, \quad h_k \text{ frei} \end{aligned}$$

und $\quad \text{U} : \alpha_k > 0 \quad \text{D} : \alpha_k \geq 1 \quad \text{R} : 0 < \alpha_k \leq 1 \quad \text{B} : \alpha_k = 1$

$$\downarrow \mu_{kj} = \alpha_k \cdot \lambda_{kj} \quad \uparrow \alpha_k = \sum_j \mu_{kj} \quad \lambda_{kj} = \mu_{kj} / \alpha_k$$

$$\begin{array}{ll}
\min h_k & \max g_k = \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k + u_k \\
h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \mu_{kj} \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0} \quad (2) & \xleftrightarrow{\text{dual}} \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k = 1 \quad (3) \\
\sum_j \mu_{kj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_k & \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j + u_k - \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j \leq 0 \quad \forall j \\
\mu_{kj} \geq 0 \quad \forall j \text{ und } h_k \text{ frei} & \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \geq \mathbf{0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{und } \quad \text{U : —} & \text{(CCR)} \quad \text{und } \quad \text{U : } u_k = 0 \quad \text{(CCR)} \\
\text{D : } \sum_j \mu_{kj} \geq 1 & \text{D : } u_k \geq 0 \\
\text{R : } \sum_j \mu_{kj} \leq 1 & \text{R : } u_k \leq 0 \\
\text{B : } \sum_j \mu_{kj} = 1 & \text{(BCC)} \quad \text{B : } u_k \text{ frei} \quad \text{(BCC)}
\end{array}$$

Fügt man zur CCR Envelopment-Form $\sum_j \mu_{kj} = \alpha_k$ und α_k frei hinzu, so ist diese Restriktion redundant und die Multiplier-Form (3) erfährt keine Veränderung. Wählt man jedoch $\alpha_k = \alpha_k^0$ fest, so entstehen die modifizierten Formen (4) und (5).

$$\begin{array}{ll}
\min h_k & \max g_k = \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k + \alpha_k^0 u_k \\
h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \mu_{kj} \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0} \quad (4) & \xleftrightarrow{\text{dual}} \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k = 1 \quad (5) \\
\sum_j \mu_{kj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_k & \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j + u_k - \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j \leq 0 \quad \forall j \\
\sum_j \mu_{kj} = \alpha_k^0 & \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \geq \mathbf{0} \text{ und } u_k \text{ frei} \\
\mu_{kj} \geq 0 \quad \forall j \text{ und } h_k \text{ frei} &
\end{array}$$

Alle aufgeführten Aufgaben (1) bis (5) finden in den Folgekapiteln Verwendung.

3 Zentrische Skalierung von T zu T_r

In der Multiplier-Form BCC ist laut Aufgabe (3) B u_k der Schattenpreis (Dual Price) der Konvexitätsbedingung von (2) B. Aus der Sensitivitätsanalyse der linearen Optimierung ist bekannt, dass die Variation eines Koeffizienten im Begrenzungsvektor eines linearen Programms eine entsprechende Veränderung des Zielfunktionswerts proportional zum Schattenpreis nach sich zieht, (vgl. Domschke u. Drexl (2011), S. 37ff). So bewirkt im BCC Modell (2) B eine (hinreichend kleine) Änderung der rechten Seite der Konvexitätsbedingung um Δ eine Anpassung der Effizienz h_k von DMU k um das Δ -fache des Schattenpreises u_k . Dieser formale Zusammenhang ist allerdings ökonomisch nicht unmittelbar nachvollziehbar. Ziel dieses und des folgenden Kapitels ist es, eine einleuchtende Interpretation zu geben. Dazu sind zunächst ausgehend von (2) B bzw. (1) B, also dem BCC-Modell, Transformationen nötig, deren Gesamtheit wir zentrische Skalierung ZS der Technologie nennen. Diese Transformationen sind zunächst rein formal. Sie können zu Unzulässigkeit, zu Supereffizienz oder zu (In-)Effizienz führen. Mehr dazu am Ende von Kapitel 4.

$$\begin{aligned} \min h_k \\ h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{x}_j &\geq \mathbf{0} \quad (1) \text{ B} \\ \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{y}_j &\geq \mathbf{y}_k \\ \sum_j \lambda_{kj} &= 1 \\ \lambda_{kj} &\geq 0 \quad \forall j, h_k \text{ frei} \end{aligned}$$

↓ 1 wird zu $r = 1 + \Delta$ mit $\Delta > -1$

$$\begin{aligned}
\min h_k & & \max \tilde{g}_k &= \tilde{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{y}_k + r \cdot \tilde{u}_k \\
h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \lambda'_{kj} \mathbf{x}_j &\geq \mathbf{0} \quad (6) & \xleftrightarrow{\text{dual}} & \tilde{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{x}_k = 1 \quad (7) \\
\sum_j \lambda'_{kj} \mathbf{y}_j &\geq \mathbf{y}_k & & \tilde{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{y}_j + \tilde{u}_k - \tilde{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{x}_j \leq 0 \quad \forall j \\
\sum_j \lambda'_{kj} &= r & & \tilde{\mathbf{U}}_k, \tilde{\mathbf{V}}_k \geq \mathbf{0} \text{ und } \tilde{u}_k \text{ frei} \\
\lambda'_{kj} &\geq 0 \quad \forall j \text{ und } h_k \text{ frei}
\end{aligned}$$

$$\downarrow \nu_{kj} = \lambda'_{kj}/r \quad \text{bzw.} \quad \lambda'_{kj} = \nu_{kj} \cdot r$$

$$\begin{aligned}
\min h_k & \\
h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \nu_{kj} \cdot r \cdot \mathbf{x}_j &\geq \mathbf{0} \\
\sum_j \nu_{kj} \cdot r \cdot \mathbf{y}_j &\geq \mathbf{y}_k \\
\sum_j \nu_{kj} &= 1 \\
\nu_{kj} &\geq 0 \quad \forall j, h_k \text{ frei}
\end{aligned}$$

$$\downarrow \mathbf{x}'_j = r \cdot \mathbf{x}_j \text{ und } \mathbf{y}'_j = r \cdot \mathbf{y}_j \quad \uparrow \text{setze } \tilde{u}_k = \bar{u}_k/r, \tilde{\mathbf{U}}_k = \bar{\mathbf{U}}_k, \tilde{\mathbf{V}}_k = \bar{\mathbf{V}}_k$$

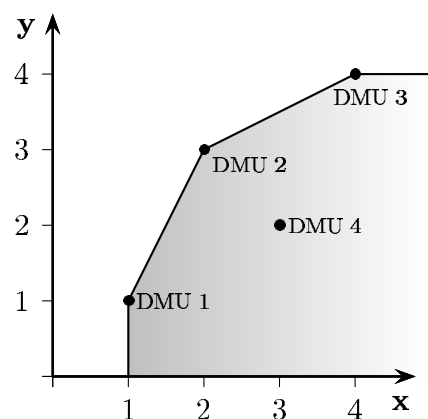
$$\begin{aligned}
\min h_k & & \max \bar{g}_k &= \bar{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{y}_k + \bar{u}_k \\
h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \nu_{kj} \mathbf{x}'_j &\geq \mathbf{0} \quad (8) & \xleftrightarrow{\text{dual}} & \bar{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{x}_k = 1 \quad (9) \\
\sum_j \nu_{kj} \mathbf{y}'_j &\geq \mathbf{y}_k & & \bar{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{y}'_j + \bar{u}_k - \bar{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{x}'_j \leq 0 \quad \forall j \\
\sum_j \nu_{kj} &= 1 & & \bar{\mathbf{U}}_k, \bar{\mathbf{V}}_k \geq \mathbf{0} \text{ und } \bar{u}_k \text{ frei} \\
\nu_{kj} &\geq 0 \quad \forall j \text{ und } h_k \text{ frei}
\end{aligned}$$

Das Ganze liest sich wie folgt. Von (1) B ausgehend wird die rechte Seite der Konvexitätsbedingung verändert; das führt zu Problem (6). Die darauf folgende Transformation und die Umbenennung der Inputs und Outputs – die eigentliche zentrische Skalierung (!) – führt zu (8). Die ZS skaliert also alle Aktivitäten der DMUs und mithin die gesamte Technologie von T zu T_r ; für $r < 1$ zum Ursprung hin und für $r > 1$ vom Ursprung weg.

Bitte beachten Sie, dass lediglich $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ nicht dieser ZS unterliegt. Aufgabe (8) errechnet also die Effizienz der *alten* DMU k bzgl. der Technologie zu den *neuen* DMUs j .

BEISPIEL.

Zur Verdeutlichung der Abhandlung betrachte man vier DMUs mit jeweils einem Input und einem Output wie in Abbildung 1 mit der dazugehörigen BCC-Technologie.



Aktivitäten:
 $(1,1), (2,3), (4,4), (3,2)$.

Abbildung 1: BCC-Technologie T für vier DMUs.

Die optimale Lösung $\mathbf{U}_k^*, \mathbf{V}_k^*, u_k^*, g_k^*$ zu den vier abgebildeten DMUs bzgl. Aufgabe (3) B entnehmen Sie Tabelle 1.

Tabelle 1: BCC optimale Lösung der vier DMUs.

DMU k	\mathbf{U}_k^*	\mathbf{V}_k^*	u_k^*	g_k^*
$k = 1$	0.50	1.00	0.50	1.00
$k = 2$	0.25	0.50	0.25	1.00
$k = 3$	0.50	0.25	-1.00	1.00
$k = 4$	$0.1\bar{6}$	$0.3\bar{3}$	$0.1\bar{6}$	0.50

Es wird eine zentrische Skalierung mit $\Delta = -0.1$ und somit $r = 1 - 0.1 = 0.9$ durchgeführt. Der Ausschnitt in Abbildung 2 zeigt DMU 4 und die Effizienzisoquante der DMUs 1,2 (durchgezogene Linie) sowie der DMUs'1,2 (gestrichelte Linie).

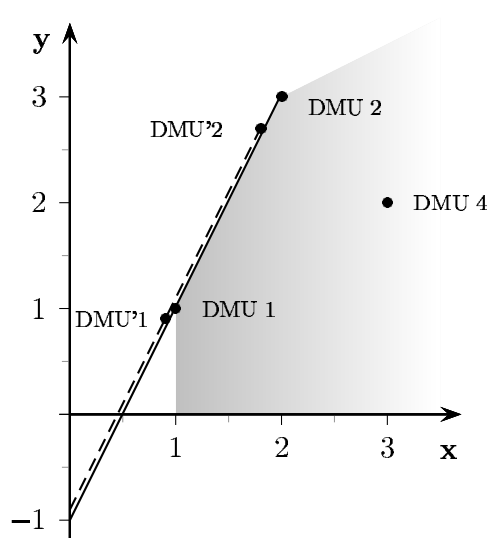


Abbildung 2: Technologie für T_r .

Vollziehen Sie bitte nach:

- Die Aktivität $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ von DMU'1 ist $(0.9, 0.9)$ und von DMU'2 $(2.7, 1.8)$.
- Der Anstieg der gestrichelten Geraden ist $\frac{2.7-0.9}{1.8-0.9} = 2$ und sie läuft durch $(0.9, 0.9)$. Daraus ergibt sich die Geradengleichung zu $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} - 0.9$.
- Die Input-Projektion von DMU 4 auf diese Gerade liefert $\mathbf{x}^p = 1.45$.
- Während die Effizienz von DMU 4 in der alten Technologie T 0.5 betrug, ist sie in der neuen Technologie T_r $1.45/3 = 0.48\bar{3}$.

Da vor ZS $u_4^* = 0.1\bar{6}$ betrug und da $u_4^* \cdot (-0.1) = -0.01\bar{6}$ sowie $0.5 - 0.01\bar{6} = 0.48\bar{3}$, kann man also feststellen: Die Dualvariable u_4^* vor ZS ist die Änderungsrate der Effizienz von DMU 4 bei zentrischer Skalierung von T zu T_r . Eine wohl erwartete und dennoch bemerkenswerte Eigenschaft dieser ZS ist der Erhalt aller (Kreuz-)Effizienzen zwischen den DMU' kl . Die ZS verzerrt die Technologie T (kreuz-)effizienztreu; zur Erläuterung des Begriffs Kreuzeffizienzen vergleiche man wieder Rödder u. Reucher (2011), Rödder u. Reucher (2012) sowie Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012). Um den Gedankenfluss hier nicht zu unterbrechen, verweisen wir für weitere Details auf Abschnitt 7.2 und Anhang A.

4 Zentrische Skalierung von DMU k zu DMU' k

Auch jetzt ist u_k der Schattenpreis auf die Konvexitätsbedingung in (2) B. Auch jetzt wird die rechte Seite verändert, jedoch nicht T, sondern nur DMU k transformiert. Wiederum sind die Transformationen rein formal und können zu Unzulässigkeit, Supereffizienz und (In-) Effizienz bei den entsprechenden Aufgaben führen. Weitere Ausführungen hierzu finden Sie am Ende dieses Kapitels.

Man beginnt mit der abgewandelten BCC-Form (6), transformiert wie schon im vorigen Kapitel, dividiert dann alle Ungleichungen durch r und erhält

nach zentrischer Skalierung der DMU k die Aufgabe (10). Die entsprechenden Dualisierungen und Rücktransformationen sind selbsterläuternd, sie werden im Folgekapitel gebraucht. Man beachte, dass diesmal die Technologie T unverändert bleibt, während jedoch die zu bewertende DMU k mit $1/r$ zentrisch skaliert wird.

$$\begin{array}{ll}
\min h_k & \max \tilde{g}_k = \tilde{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{y}_k + r \cdot \tilde{u}_k \\
h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \lambda'_{kj} \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0} \quad (6) & \xleftrightarrow{\text{dual}} \tilde{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{x}_k = 1 \quad (7) \\
\sum_j \lambda'_{kj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_k & \tilde{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{y}_j + \tilde{u}_k - \tilde{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{x}_j \leq 0 \quad \forall j \\
\sum_j \lambda'_{kj} = r & \tilde{\mathbf{U}}_k, \tilde{\mathbf{V}}_k \geq \mathbf{0} \text{ und } \tilde{u}_k \text{ frei} \\
\lambda'_{kj} \geq 0 \quad \forall j \text{ und } h_k \text{ frei} &
\end{array}$$

$$\downarrow \nu_{kj} = \lambda'_{kj}/r \quad \text{bzw.} \quad \lambda'_{kj} = \nu_{kj} \cdot r$$

$$\begin{array}{ll}
\min h_k & \\
h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \nu_{kj} \cdot r \cdot \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0} & | : r \\
\sum_j \nu_{kj} \cdot r \cdot \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_k & | : r \\
\sum_j \nu_{kj} = 1 & \\
\nu_{kj} \geq 0 \quad \forall j, h_k \text{ frei} &
\end{array}$$

$$\downarrow \mathbf{x}'_k = \mathbf{x}_k/r \text{ und } \mathbf{y}'_k = \mathbf{y}_k/r \quad \uparrow \text{setze } \tilde{u}_k = \hat{u}_k/r, \tilde{\mathbf{U}}_k = \hat{\mathbf{U}}_k/r, \tilde{\mathbf{V}}_k = \hat{\mathbf{V}}_k/r$$

$$\begin{aligned}
\min h_k & & \max \hat{g}_k &= \hat{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{y}'_k + \hat{u}_k \\
h_k \mathbf{x}'_k - \sum_j \nu_{kj} \mathbf{x}_j &\geq \mathbf{0} & \xleftrightarrow{\text{dual}} & \hat{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{x}'_k = 1 & (11) \\
\sum_j \nu_{kj} \mathbf{y}_j &\geq \mathbf{y}'_k & & \hat{\mathbf{U}}_k^T \mathbf{y}_j + \hat{u}_k - \hat{\mathbf{V}}_k^T \mathbf{x}_j \leq 0 \quad \forall j \\
\sum_j \nu_{kj} &= 1 & & \hat{\mathbf{U}}_k, \hat{\mathbf{V}}_k \geq \mathbf{0} \text{ und } \hat{u}_k \text{ frei} \\
\nu_{kj} &\geq 0 \quad \forall j \text{ und } h_k \text{ frei} & &
\end{aligned}$$

Auch diesmal soll der Vorgang ZS an dem bereits bekannten Fall von 4 DMUs exemplifiziert werden.

BEISPIEL (FORTSETZUNG).

Man betrachte wieder die DMUs aus Abbildung 1. Abbildung 3 zeigt nochmals die Effizienzisoquante der DMUs 1,2 und die zentrisch skalierte DMU'4 mit der Aktivität $(3, 2)/0.9 = (3.\bar{3}, 2.\bar{2})$. Die Input-Projektion von DMU'4 auf den Technologierand – beschrieben durch die Gleichung $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} - 1$ – errechnet sich wegen $2.\bar{2} = 2\mathbf{x}^p - 1$ zu $\mathbf{x}^p = 1.6\bar{1}$. Damit folgt für die Effizienz $1.6\bar{1}/3.\bar{3} = 0.48\bar{3}$ ($= 0.5 - 0.1 \cdot 0.1\bar{6}$). Die Dualvariable u_4^* vor ZS ist wie schon in Kapitel 3 die Änderungsrate der Effizienz von DMU 4 zu DMU'4. Zentrische Skalierungen von T zu T_r und von DMU k zu DMU' k liefern also für diesen Fall das gleiche Ergebnis. Wegen der Konstruktionsvorschriften bei der zentrischen Skalierung ist dies zu erwarten, dennoch beweisen wir im Folgekapitel die Allgemeingültigkeit der Aussage.

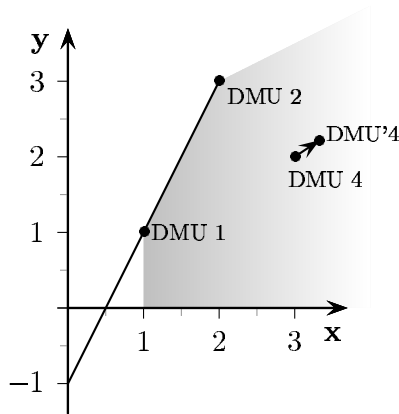


Abbildung 3: Zentrische Skalierung DMU 4 zu DMU'4.

Es bleibt an dieser Stelle noch die Klärung der Frage, wann eine ZS zu Unzulässigkeit, Supereffizienz oder (In-) Effizienz führt. Zunächst zur ZS von DMU k zu DMU' k . Die Antwort liefert Aufgabe (10).

- Zunächst muss $(\mathbf{x}'_k, \mathbf{y}'_k)$ wirklich durch ZS hervorgegangen sein, das ist laut Konstruktionsvorschrift hier stets gegeben.
- Dann muss \mathbf{y}'_k durch Konvexkombination der \mathbf{y}_j erreichbar sein, andernfalls liegt Unzulässigkeit vor.
- Ansonsten liegt die skalierte DMU' k in T und ist (in-)effizient oder sie liegt ausserhalb von T und ist supereffizient.

Das bekannte Beispiel mag zur Illustration dienen.

BEISPIEL (FORTSETZUNG).

Für die bereits bekannten vier DMUs und ihre BCC-Technologie hat man nach Aufgabe (10) die anschließende Klassifikation gemäß Abbildung 4.

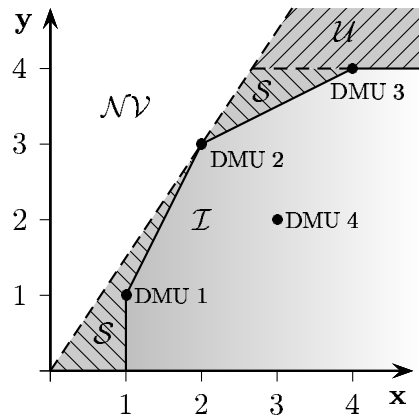


Abbildung 4: ZS-Klassifikation.

- \mathcal{NV} ist aus der Menge der Aktivitäten aus T durch zentrische Skalierung nicht konstruierbar.
- \mathcal{U} ist aus der Menge der Aktivitäten aus T durch zentrische Skalierung konstruierbar, aber der jeweilige Output nicht durch Konvexkombination der \mathbf{y}_j erreichbar.
- \mathcal{S} ist aus der Menge der Aktivitäten aus T durch zentrische Skalierung konstruierbar, jede zu bewertende zentrisch skalierte Aktivität $(\mathbf{x}'_k, \mathbf{y}'_k) \in \mathcal{S}$ ist jedoch supereffizient.
- \mathcal{I} ist aus der Menge der Aktivitäten aus T durch zentrische Skalierung konstruierbar, jede zu bewertende zentrisch skalierte Aktivität $(\mathbf{x}'_k, \mathbf{y}'_k) \in \mathcal{I}$ ist dann (in-)effizient.

Hinweis: Abbildung 4 zeigt die Situation für die zentrische Skalierung einer DMU k . Fällt dann eine solche DMU in obige Bereiche, gelten die Aussagen. Natürlich kann die Abbildung auch zur Visualisierung der Technologieskalierung von T zu T_r dienen. Diesmal würde T_r gezeigt und die alte DMU k fiel dann in die jeweiligen Gebiete $\mathcal{U}, \mathcal{S}, \mathcal{I}$. Achtung: \mathcal{NV} bleibt bei beiden Skalierungsformen unerreichbar.

BEISPIEL (FORTSETZUNG).

Für $\Delta = 0.1$ zeigt Abbildung 5 die zentrische Skalierung der DMU 2 zur DMU'2 mit der Aktivität $(1.\overline{81}, 2.\overline{72})$. Mit den optimalen Gewichten $\mathbf{U}_2^* = 0.25$, $\mathbf{V}_2^* = 0.5$ und $u_2^* = 0.25$ ergibt sich $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} - 1$ (vgl. Gerade in Abbildung 3) mit einem projizierten Input $\mathbf{x}^p = 1.\overline{863}$ und damit eine Supereffizienz von $g_2^* = 1 + 0.1 \cdot 0.25 = 1.025$.

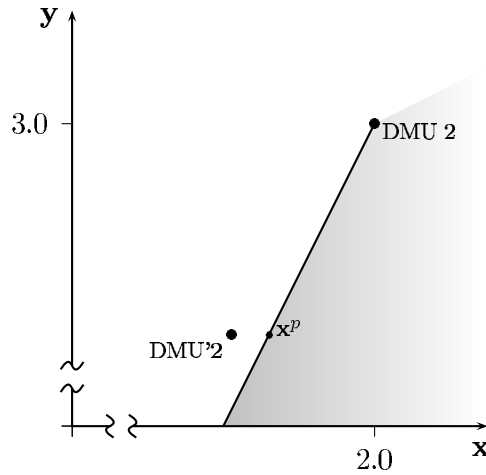


Abbildung 5: Supereffiziente DMU'2

5 Zusammenführung von Kapitel 3 und 4

Anhand eines numerischen Beispiels zeigten wir in Kapitel 3 und 4, dass die ZS von T zu T_r für die nicht transformierte DMU k die gleiche neue Effizienz liefert, wie sie die zentral skalierte DMU' k in der alten Technologie erfährt. Über die Beispielrechnung hinaus sollen diese Ergebnisse jetzt mathematisch untermauert werden. Alle folgenden Ausführungen gehen von einer bestimmten optimalen Lösung der Aufgabe (3) B aus. Diese optimale Lösung verbindet gleichsam die Ergebnisse von Kapitel 3 und 4.

Nach Kapitel 3 Gleichung (9) hat man nämlich für die entsprechende Optimallösung \bar{g}_k^* , $\bar{\mathbf{U}}_k^*$, $\bar{\mathbf{V}}_k^*$, \bar{u}_k^* die Gleichung $\bar{\mathbf{U}}_k^{*T} \mathbf{y}_k + \bar{u}_k^* - \bar{g}_k^* \bar{\mathbf{V}}_k^{*T} \mathbf{x}_k = 0$. Wegen

der Variablentransformation hin zu Aufgabe (7) erhält man

$$\frac{\tilde{\mathbf{U}}_k^{*T} \mathbf{y}_k + r \tilde{u}_k^*}{\tilde{\mathbf{V}}_k^{*T} \mathbf{x}_k} = \bar{g}_k^*. \quad (12)$$

Nach Kapitel 4 Gleichung (11) gilt für deren entsprechende Optimallösung \hat{g}_k^* , $\hat{\mathbf{U}}_k^*$, $\hat{\mathbf{V}}_k^*$, \hat{u}_k^* die Gleichung $\hat{\mathbf{U}}_k^{*T}(\mathbf{y}_k/r) + \hat{u}_k^* - \hat{g}_k^* \hat{\mathbf{V}}_k^{*T}(\mathbf{x}_k/r) = 0$. Wegen der erneuten Variablentransformation hin zu Aufgabe (7) ergibt das

$$r \cdot \tilde{\mathbf{U}}_k^{*T}(\mathbf{y}_k/r) + r \cdot \tilde{u}_k^* - \hat{g}_k^* \cdot r \cdot \tilde{\mathbf{V}}_k^{*T}(\mathbf{x}_k/r) = 0.$$

Division durch r und Auflösen nach \hat{g}_k^* führt zu

$$\frac{(\tilde{\mathbf{U}}_k^{*T} \mathbf{y}_k)/r + \tilde{u}_k^*}{(\tilde{\mathbf{V}}_k^{*T} \mathbf{x}_k)/r} = \hat{g}_k^*. \quad (13)$$

Multiplizieren von Zähler und Nenner mit r in (13) liefert $\hat{g}_k^* = \bar{g}_k^*$.

Zu Beginn von Kapitel 3 wurde darauf hingewiesen, dass das u_k die Änderungsrate der Effizienz bei "kleiner" ZS ist. Diese Aussage hat allgemein nur Gültigkeit, wenn die Input-orientierte Projektion einer DMU k bei Variation der rechten Seite der Konvexitätsbedingung auf die gleiche Hyperebene wie in (3) B fällt. Dann gilt nämlich $\tilde{\mathbf{U}}_k^*$, $\tilde{\mathbf{V}}_k^*$, \tilde{u}_k^* gleich \mathbf{U}_k^* , \mathbf{V}_k^* , u_k^* . Folglich ist unter dieser einschränkenden Voraussetzung die Aussage auch allgemeingültig: u_k^* ist die Änderungsrate der Effizienz von DMU k unter ZS. Dies gilt bekanntlich nur für betraglich hinreichend kleine Δ , damit der aus der Sensitivitätsanalyse bekannte Stabilitäts- bzw. kritische Bereich nicht verlassen wird. Aus den genannten Gründen bietet es sich an, u als SkalenvARIABLE zu bezeichnen.

BEISPIEL (FORTSETZUNG).

Abbildung 6 zeigt, wie sich für DMU 4 die Grenzen des kritischen Bereichs ergeben. Eine Input-orientierte Projektion einer zentrisch skalierten DMU'4 fällt in diesem Fall stets auf eine Konvexkombination aus der DMU 1 und

DMU 2. Die untere Grenze (vgl. Punkt A) resultiert demnach aus einer zentrischen Skalierung mit $r = 2$ bzw. $\Delta = 1$ und die obere Grenze (vgl. Punkt B) analog aus $r = 0.\bar{6}$ bzw. $\Delta = -0.\bar{3}$. Dieser graphisch unmittelbar einsichtige kritische Bereich $\Delta \in [-0.\bar{3}, 1.0]$ lässt sich selbstverständlich ebenfalls aus einer Sensitivitätsanalyse herleiten (vgl. Anhang C). Mit den optimalen Gewichten $\mathbf{U}_4^* = 0.1\bar{6}$, $\mathbf{V}_4^* = 0.\bar{3}$ und $u_4^* = 0.1\bar{6}$ der DMU 4 folgt gemäß (7) für die Effizienzwerte aus diesem Bereich: $g_4^* = 0.\bar{3} + 0.1\bar{6} \cdot r = 0.5 + 0.1\bar{6} \cdot \Delta$. So ist beispielsweise für $\Delta = -0.\bar{3}$ die zentrische skalierte DMU'4 mit $\mathbf{x} = 4.5$ und $\mathbf{y} = 3$ (Punkt B) durch einen Effizienzwert von $g_4^* = 0.5 - 0.1\bar{6} \cdot 0.\bar{3} = 0.\bar{4}$ gekennzeichnet.

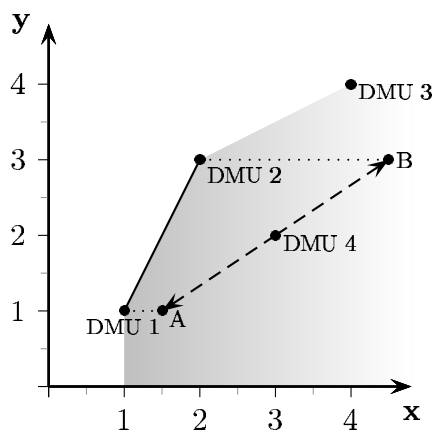


Abbildung 6: Kritischer Bereich für DMU 4.

6 Beziehungen CCR, BCC und ZS

Dieses Kapitel will Bekanntes wieder aufgreifen, nämlich die Überführung einer beliebigen DMU k in eine mpss, vgl. Banker (1984). Man geht dabei in zwei Schritten vor: Zunächst wird DMU k zu DMU' k zentrisch skaliert. Diese ZS wird dabei so gewählt, dass DMU' k die gleiche CCR- und BCC-Effizienz aufweist. Ihre Input-Projektion ist dann eine mpss. Für diese Schritte benötigt man folgende Hilfsaussagen:

- Hat eine DMU k unter CCR die Effizienz h_k^* , so auch jede zentral skalierte DMU k mit der Aktivität $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)/r$. Den etwas aufwändigen Beweis in der Envelopment-Form stellen wir in den Anhang B. Trivial wird der Nachweis in der Quotientenform, da eine ZS von DMU k die Quotienten nicht beeinflusst. Eine Skizze auch dieser Überlegungen fügen wir ebenfalls im Anhang B bei.
- Ist eine BCC-effiziente DMU k auch CCR-effizient, so ist sie eine mpss. Einen mathematischen Beweis für diese einleuchtende Tatsache findet der Leser bei Banker u. Thrall (1992), proposition 1.
- Hat eine DMU k mit der BCC-Effizienz $h_k^* (< 1)$ auch die CCR-Effizienz h_k^* , so ist ihre Input-orientierte Projektion eine mpss.

Löst man (2) U, berechnet $\alpha_k^* = \sum_j \mu_{kj}^*$ und löst dann (4) bzw. (6) mit $\alpha_k^0 = \alpha_k^* = r$, so erhält man (14).

$$\begin{aligned}
& \min h_k \\
& h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \lambda'_{kj} \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0} \quad (14) \\
& \sum_j \lambda'_{kj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_k \\
& \sum_j \lambda'_{kj} = r = \alpha_k^* \\
& \lambda'_{kj} \geq 0 \quad \forall j, \quad h_k \text{ frei}
\end{aligned}$$

Nun kann man die Überlegungen zur zentrischen Skalierung von DMU k wieder aufgreifen. Jedoch mit dem Unterschied, dass es nun weder zur Super-effizienz noch zur Unzulässigkeit kommt. Mit $(\mathbf{x}'_k, \mathbf{y}'_k) = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)/\alpha_k^*$ ergibt

sich

$$\begin{aligned}
 & \min h_k \\
 & h_k \mathbf{x}'_k - \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0} \quad (15) \\
 & \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}'_k \\
 & \sum_j \lambda_{kj} = 1 \\
 & \lambda_{kj} \geq 0 \quad \forall j, h_k \text{ frei}
 \end{aligned}$$

Insgesamt hat man: Das optimale h_k^* in (2) U = optimales h_k^* in (1) U = optimales h_k^* in (14) = optimales h_k^* in (15). Mit anderen Worten: Die CCR (In-)Effizienz in (1) bzw. (2) U ist also gleich der CCR (In-) Effizienz der zentrisch skalierten DMU' k und diese wiederum gleich der BCC (In-) Effizienz der zentrisch skalierten DMU' k . Ihre Input-Projektion ist somit eine mpss-DMU. Die folgende Abbildung 7 verdeutlicht die Zusammenhänge.

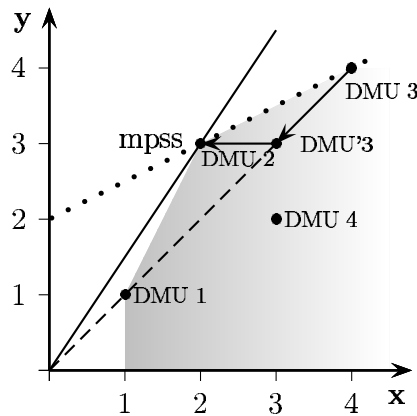


Abbildung 7: Von DMU 3 zur mpss-DMU.

Da dieser Beitrag den virtuellen Preisen und insbesondere der Rolle der u -Variablen gewidmet ist, soll nun noch der Einfluss der Überführung von DMU k in eine mpss auf Veränderung dieser Variablen hin untersucht werden.

Wie für die Quotientenform in Anhang B gezeigt wird, ändern sich die virtuellen Preise $\mathbf{U}_k^*, \mathbf{V}_k^*$ der CCR-optimalen Lösung für DMU k bei Übergang zu DMU' k nicht. Bei radialer Inputreduktion um den Faktor h_k^* werden sie jedoch in Aufgabe (3) U zu $\mathbf{U}_k^*/h_k^*, \mathbf{V}_k^*/h_k^*$. Man vergleiche hierzu Rödder u. Reucher (2012), S. 469. Dabei ist die SkalenvARIABLE u_k stets Null. *Eine* unterstützende Hyperebene durch die mpss-DMU lautet also

$$\mathbf{U}_k^{*T}/h_k^* \cdot \mathbf{y} + 0 - 1 \cdot \mathbf{V}_k^{*T}/h_k^* \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Für den Spezialfall in Abbildung 7 ist diese Hyperebene dargestellt als die durchgezogene Linie durch DMU 2.

Eine *weitere* ausgezeichnete Hyperebene soll ebenfalls analysiert werden. Hierzu betrachte man nochmals die Aufgaben (11) und (7). Im Optimum und für $r = \alpha_k^*$ hat man $\hat{u}_k^* = \alpha_k^* \tilde{u}_k^*$. Ist nun unter den einschränkenden Annahmen wie schon in Kapitel 5 im Nachgang zu (13) $\tilde{\mathbf{U}}_k^*, \tilde{\mathbf{V}}_k^*, \tilde{u}_k^*$ gleich $\mathbf{U}_k^*, \mathbf{V}_k^*, u_k^*$ – der Leser sei auf die dortigen Ausführungen verwiesen –, so gilt $\hat{u}_k^* = \alpha_k^* u_k^*$. Bekanntlich wirkt die dann erfolgende Input-Projektion auch auf diese Variable. Ist h_k^* die CCR-(In-)Effizienz von DMU k und DMU' k (!), so wird aus \hat{u}_k^* nunmehr \hat{u}_k^*/h_k^* . Man vergleiche hierzu wiederum Rödder u. Reucher (2012), ebenda. Insgesamt hat man also:

Für die mpss nimmt die u -Variable den Wert $\frac{\alpha_k^* \cdot u_k^*}{h_k^*}$ an.

Die entsprechende unterstützende Hyperebene ist damit

$$\mathbf{U}_k^{*T}/h_k^* \cdot \mathbf{y} + \frac{\alpha_k^* \cdot u_k^*}{h_k^*} - 1 \cdot \mathbf{V}_k^{*T}/h_k^* \cdot \mathbf{x} = 0;$$

sie ist als gepunktete Linie in Abbildung 7 dargestellt.

7 SkalenvARIABLE u_k und DREHUNG

7.1 Aktivität, Effizienzniveau und Skalenertrag

In Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012) entwickeln die Autoren mit Gleichung (16) einen exakten Ausdruck für den Skalenertrag einer Aktivität (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , die auf der Effizienzisoquante der DMU k mit den Optimalgewichten \mathbf{U}_k^* , \mathbf{V}_k^* , u_k^* liegt:

$$\epsilon_k = \delta \frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y} + u_k^*}{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}}. \quad (16)$$

(16) hat folgende Bedeutung. Bei radialer Inputerhöhung $\mathbf{x} \rightarrow (1 + \delta)\mathbf{x}$ muss sich \mathbf{y} zu $(1 + \epsilon_k)\mathbf{y}$ verändern, will man die Effizienz erhalten. Der Ausdruck scheint nur von \mathbf{U}_k^* , u_k^* und \mathbf{y} abzuhängen. Der folgende Satz verdeutlicht jedoch die Zusammenhänge zwischen Skalenertrag, Gewichten sowie Output und Input besser, als sie an Ausdruck (16) erkennbar sind.

SATZ. *Es sei \mathbf{U}_k^* , \mathbf{V}_k^* , u_k^* fest und g beliebig. Dann ist (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ein Punkt auf der Hyperebene $\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y} + u_k^* - g \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x} = 0$ zum Effizienzniveau g . Für die radialen Änderungen $\mathbf{x} \rightarrow (1 + \delta)\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} \rightarrow (1 + \epsilon_k)\mathbf{y}$ hat man*

$$\mathbf{U}_k^{*T} (1 + \epsilon_k) \mathbf{y} + u_k^* - g \mathbf{V}_k^{*T} (1 + \delta) \mathbf{x} = 0 \iff \epsilon_k = \delta \frac{g \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}}{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}}. \quad (17)$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}_k^{*T} (1 + \epsilon_k) \mathbf{y} + u_k^* - g \mathbf{V}_k^{*T} (1 + \delta) \mathbf{x} = 0 \\ \iff & \cancel{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}} + \epsilon_k \mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y} + \cancel{u_k^*} - \cancel{g \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}} - \delta g \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x} = 0 \\ \iff & \delta \frac{g \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}}{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}} = \epsilon_k \end{aligned} \quad \square$$

Der Skalenertrag ϵ_k bleibt also für festes \mathbf{U}_k^* , \mathbf{V}_k^* , u_k^* und für ein \mathbf{y} gleich, solange $g \cdot \mathbf{x} = \text{konstant}$ ist.

BEISPIEL (FORTSETZUNG).

Wir greifen wieder zurück auf das mehrfach bemühte Beispiel und betrachten jetzt die DMU $k = 2$. Sie hat die Effizienz $g_k^* = 1$ und erreicht diese z.B. mit den optimalen Gewichten $\mathbf{U}_k^* = 0.25$, $\mathbf{V}_k^* = 0.50$, $u_k^* = 0.25$. Eine ihrer Effizienzisoquanten hat also die Form $0.25\mathbf{y} + 0.25 - 1 \cdot 0.50\mathbf{x} = 0$ bzw. $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} - 1$. Wählt man andere Effizienzen g als die optimale, erhält man die Geradenschar

$$0.25\mathbf{y} + 0.25 - g \cdot 0.50\mathbf{x} = 0 \text{ bzw. } \mathbf{y} = g \cdot 2\mathbf{x} - 1.$$

Abbildung 8 zeigt einige Beispiele dieser Geradenschar. Für jede dieser Geraden gilt nun wegen des obigen Satzes: Solange $g \cdot \mathbf{x}$ konstant bleibt und damit auch \mathbf{y} (!), ändert sich der Skalenertrag nicht. Die Abbildung 6 zeigt auch diesen Zusammenhang deutlich. Für $\mathbf{y} = 4$ und $\delta = 0.1$ erhält man mit $\epsilon_k = 0.125$ die Werte in Tabelle 2.

Tabelle 2: Aktivitäten, Effizienz, SE und Gewichte

g	\mathbf{x}	$g \cdot \mathbf{x}$	$(1 + \delta)\mathbf{x}$	\mathbf{y}	$\mathbf{y}(1 + 0.125)$
1	2.5	2.5	2.75	4	4.5
0.625	4	2.5	4.4	4	4.5
0.5	5	2.5	5.5	4	4.5

Auffallend ist in Abbildung 8, dass alle Geraden zu verschiedenen Effizienzniveaus bei gleichem $\mathbf{U}_k^*, \mathbf{V}_k^*, u_k^*$ den gleichen \mathbf{y} -Achsenabschnitt haben. Im Beispiel ist das der Punkt ($\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{y} = -1$). Er ist der Drehpunkt der Effizienzgeraden. Auch dieser Zusammenhang soll nun allgemeiner beleuchtet werden.

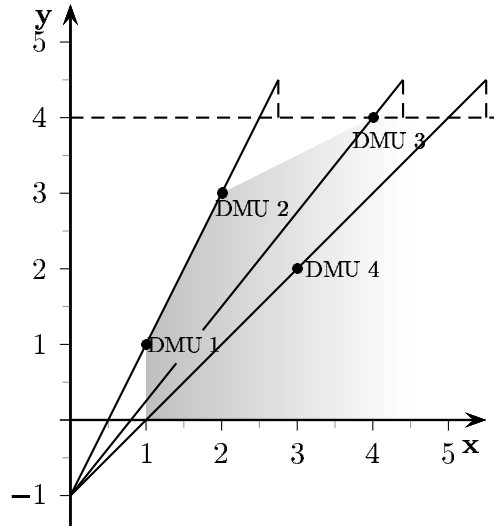


Abbildung 8: Skalenertrag und Effizienzniveau.

Für ein festes $\mathbf{U}^0, \mathbf{V}^0, u^0$ und beliebiges g beschreibt die Gleichung

$$\mathbf{U}^{0T} \mathbf{y} + u^0 - g \mathbf{V}^{0T} \mathbf{x} = 0 \quad (18)$$

eine Hyperebene in (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . Für jedes zulässige (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ist g die Effizienz von (\mathbf{x}, \mathbf{y}) bzgl. des Gewichtungssystems $\mathbf{U}^0, \mathbf{V}^0, u^0$.

Es sei $\mathbf{Y}^0 = \{\mathbf{y} : \mathbf{U}^{0T} \mathbf{y} + u^0 = 0\}$. Dann liegt $\mathbf{x}^0 = 0, \mathbf{y}^0 \in \mathbf{Y}^0$ für jedes (!) g auf (18). Die implizite Entsprechung von (18) ist

$$g = \frac{\mathbf{U}^{0T} \mathbf{y} + u^0}{\mathbf{V}^{0T} \mathbf{x}}. \quad (19)$$

(19) ist in $\mathbf{x}^0 = 0, \mathbf{y}^0 \in \mathbf{Y}^0$ nicht definiert, hat dort aber für jedes g (!) eine hebbare Singularität. Die Aktivität $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ hat gleichsam jede Effizienz g . Abbildung 8 zeigt genau diese Zusammenhänge für den einfachen zweidimensionalen Fall. Der Punkt $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (0, -1)$ ist die erwähnte Singularität. Durch ihn laufen alle Geraden mit verschiedenen g . Sie alle entstehen durch Drehung in dieser Singularität.

7.2 Kreuzeffizienz und Kreuzskalenertrag

Abbildung 8 verdeutlichte das Wechselspiel zwischen Input und Effizienzniveau bei gleichem Output. Bei nochmaliger Betrachtung zeigt sich nunmehr, dass jede der dargestellten Aktivitäten auf einer der zunächst willkürlich erscheinenden Effizienzgeraden liegt. Allerdings wahren die scheinbar zufälligen Effizienzgeraden zum jeweiligen Niveau g den inputorientierten Abstand zu einer speziellen Effizienzgeraden, nämlich zu der Geraden der DMU $k = 2$. Man bezeichnet sie auch als Kreuzeffizienzgeraden oder Kreuzeffizienzisquanten. Sie sind beschrieben durch

$$\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y} + u_k^* - g_{kl}^* \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x} = 0. \quad (20)$$

Jede der Kreuzeffizienzgeraden durchläuft also mindestens eine DMU l , der in (20) eingebundene Effizienzwert g_{kl} heißt Kreuzeffizienz und berechnet sich wie folgt:

$$g_{kl}^* = \frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l + u_k^*}{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}. \quad (21)$$

Hierbei erfährt die DMU l also eine Effizienzbewertung anhand der virtuellen Preise der optimierten DMU k .

Ein weiterer Index soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, der sogenannte Kreuzskalenertrag. In Tabelle 2 ist die Aktivität (4, 4) zur DMU 3 sowie ihre Kreuzeffizienz aus Sicht der DMU 2 angegeben, sie hat den Wert 0.625. Weiterhin wurde für $\delta = 0.1$ der Skalenertrag mit 0.125 beziffert; er lässt sich über die Gleichung (20) bestimmen.

$$\epsilon_{kl} = \delta \frac{g_{kl}^* \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l}. \quad (22)$$

ϵ_{kl} ist also der Kreuzskalenertrag und wiederum eine Bewertung der DMU l aus der Perspektive der DMU k , für weiterführende Erläuterungen vgl. man abermals Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012).

8 Zusammenfassung und Ausblick

Bereits in ihrer bahnbrechenden Arbeit identifizierten die Autoren Banker, Charnes, u. Cooper (1984) das Vorzeichen der Variablen u in der Inputorientierten Multiplierform der DEA-Aufgabe als Indikator für die Skalenertragslage einer effizienten DMU. Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012) verallgemeinerten diese Aussage in mehrfacher Hinsicht: für den nichteffizienten Fall, für beliebige Aktivitäten in der Technologie und aus Sicht anderer DMUs. Bekanntlich ist u der Schattenpreis der Konvexitätsbedingung in der entsprechenden Envelopmentform unter variablen Skalenerträgen, dem sogenannten BCC-Modell. Sieht man von Entartungsfällen ab, liefert er also die Änderungsrate der Effizienz bei Variation der rechten Seite dieser Konvexitätsbedingung. Das ist mathematisch sattsam bekannt, ökonomisch jedoch nicht unmittelbar nachvollziehbar.

Der vorliegende Beitrag setzt hier an und zeigt auf, dass dieser Schattenpreis als Änderungsrate der Effizienz einer DMU unter sogenannten zentrischen Skalierungen verstanden werden kann:

- Welche Effizienzänderung erfährt eine DMU bei zentrischer Skalierung der gesamten Technologie.
- Welche Effizienzänderung erfährt eine zentrisch skalierte DMU bei fixer Technologie.

Beide Skalierungen sind voneinander ableitbar und führen zum gleichen Ergebnis. Hierbei ist es unwesentlich, ob die Skalierungen reale Änderungen von Inputs/Outputs bedeuten oder lediglich Skalentransformationen. Es bietet sich also an, u als Skalenvariable zu bezeichnen.

Bereits 1984 zeigte Banker, wie eine beliebige DMU durch gezielte Maßnahmen in eine solche mit maximaler Produktivität (mpss) überführt werden kann. Ein Prozessschritt hierbei ist wiederum die zentrische Skalierung. Daher können die zu diesen Transformationen gewonnenen Erkenntnisse weiterhelfen und zur Berechnung aller virtuellen Preise und der Skalenvariablen

der mpss-DMU dienen.

Ein weiterer Untersuchungsgegenstand dieser Schrift ist der Zusammenhang zwischen Effizienzniveau, Skalenertrag und virtuellen Preisen von Aktivitäten. Wie man leicht nachweist, ist für feste Preise der Skalenertrag bei fixen Outputs immer gleich, solange sich die jeweiligen Produkte aus Effizienz und Inputs nicht ändern. Mit anderen Worten: Bei einer Drehung = Effizienzänderung einer Effizienzisoquante bleibt der Skalenertrag bei fixen Outputs gleich, wenn man den entsprechenden Input wählt. Besser als eine verbale Beschreibung verdeutlicht Abbildung 8 den Zusammenhang.

Der Rest der Arbeit greift Erkenntnisse aus Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012) zu Kreuzeffizienzen und Kreuzskalenerträgen wieder auf und verbindet sie mit dem Inhalt des vorliegenden Beitrags. Je mehr man Kreuzbewertungen zulässt, umso häufiger rücken Aktivitäten außerhalb der Technologie ins Blickfeld:

- Bei negativen Kreuzeffizienzen erzeugt die Projektion auf die Effizienzisoquante der bewertenden DMU negative Inputs.
- Der Fixpunkt bei Drehung von Effizienzisoquanten ist im Allgemeinen ebenfalls eine unzulässige Aktivität.

Nun scheint die Betrachtung solcher unzulässigen Aktivitäten dem Grundgedanken der DEA zu widersprechen, die ja gerade die Bildung der Technologie aus real beobachteten Aktivitäten als zentralen Analysebaustein verwendet. Können dennoch solche unzulässigen Aktivitäten reale Sachverhalte widerspiegeln? Was bedeutet ein negativer Output bei positivem Input, wie in Abbildung 8, oder ein positiver Output bei negativem Input, wie ihn etwa Abbildung 5 in Rödder, Kleine, u. Dellnitz (2012) zeigt? Kann man durch eine geeignete ökonomische Interpretation der SkalenvARIABLEN u dieser Frage beikommen? Solche Überlegungen sind Gegenstand eines nächsten Beitrags.

Literatur

- [Banker 1984] BANKER, R. D.: Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. In: *European Journal of Operational Research (EJOR)* 17 (1984), S. 35–44
- [Banker u. a. 1984] BANKER, R. D. ; CHARNES, A. ; COOPER, W. W.: Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. In: *Management Science* 30 (1984), S. 1078–1091
- [Banker u. Thrall 1992] BANKER, R. D. ; THRALL, R. M.: Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis. In: *European Journal of Operational Research* 62 (1992), S. 74–84
- [Cooper u. a. 2007] COOPER, W. W. ; SEIFORD, L. M. ; TONE, K.: *Data Envelopment Analysis – A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. New York : Springer, 2007
- [Domschke u. Drexl 2011] DOMSCHKE, W. ; DREXL, A.: *Einführung in Operations Research*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2011
- [Rödder u. a. 2012] RÖDDER, W. ; KLEINE, A. ; DELLNITZ, A.: Returns To Scale Revisited – towards Cross-RTS. (2012). – Manuskript unter Begutachtung
- [Rödder u. Reucher 2011] RÖDDER, W. ; REUCHER, E.: A Consensual Peer-based DEA-Model with Optimized Cross-Efficiencies – Input Allocation instead of Radial Reduction. In: *European Journal of Operational Research (EJOR)* 212 (2011), S. 148–154
- [Rödder u. Reucher 2012] RÖDDER, W. ; REUCHER, E.: Advanced X-Efficiencies for CCR- and BCC-Models – towards Peer-based DEA Controlling. In: *European Journal of Operational Research (EJOR)* 219 (2012), S. 467–476

Anhang A

Behauptung: Bei $ZS \ T \rightarrow T_r$ bleiben alle (Kreuz)-Effizienzen zwischen den DMU' kl erhalten. $g_{kl}^* = \frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l + u_k^*}{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}$ sind die Kreuzeffizienzen vor ZS . Skaliert man nun alle DMUs gemäß $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}'_j = r \cdot \mathbf{x}_j$ $\mathbf{y}_j \rightarrow \mathbf{y}'_j = r \cdot \mathbf{y}_j$, so hat man die Kreuzeffizienzen nach ZS $g'_{kl} = \frac{\mathbf{U}'_k{}^T \mathbf{y}'_l + u'_k}{\mathbf{V}'_k{}^T \mathbf{x}'_l}$.

$$\text{Die Behauptung ist: } g'_{kl} = \frac{\mathbf{U}'_k{}^T \mathbf{y}'_l + u'_k}{\mathbf{V}'_k{}^T \mathbf{x}'_l} = \frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l + u_k^*}{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l}$$

Die Dualisierung von (A1) zu (A2) und (A3) zu (A4) lässt den Zusammenhang zwischen den jeweiligen virtuellen Preisen erkennen. Errechnet man nun mit den optimalen Preisen die Kreuzeffizienzen g'_{kl} , so sieht man sofort die Gleichheit mit g_{kl}^* .

$$\begin{aligned} \min h'_k & & \max g'_k = \mathbf{U}'_k{}^T \mathbf{y}'_k + u'_k \\ h'_k \mathbf{x}'_k - \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{x}'_j & \geq \mathbf{0} \quad (\text{A1}) & \xleftrightarrow{\text{dual}} & \mathbf{V}'_k{}^T \mathbf{x}'_k = 1 & (\text{A2}) \\ \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{y}'_j & \geq \mathbf{y}'_k & & \mathbf{U}'_k{}^T \mathbf{y}'_j + u'_k - \mathbf{V}'_k{}^T \mathbf{x}'_j \leq 0 \quad \forall j \\ \sum_j \lambda_{kj} & = 1 & & \mathbf{U}'_k, \mathbf{V}'_k \geq \mathbf{0} \text{ und } u'_k \text{ frei} \\ \lambda_{kj} & \geq 0 \quad \forall j \text{ und } h_k \text{ frei} \end{aligned}$$

$\downarrow : r$

$\uparrow \mathbf{V}'_k = \mathbf{V}_k/r, \mathbf{U}'_k = \mathbf{U}_k/r, u'_k = u_k$

$$\begin{aligned}
\min h_k & & \max g_k = \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k + u_k \\
h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0} \quad (\text{A3}) & \quad \xleftrightarrow{\text{dual}} & \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k = 1 \quad (\text{A4}) \\
\sum_j \lambda_{kj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_k & & \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j + u_k - \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j \leq 0 \quad \forall j \\
\sum_j \lambda_{kj} = 1 & & \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \geq \mathbf{0} \text{ und } u_k \text{ frei} \\
\lambda_{kj} \geq 0 \quad \forall j \text{ und } h_k \text{ frei} & &
\end{aligned}$$

Anhang B

Gezeigt werden soll die einleuchtende Tatsache, dass eine zentrische Skalierung die CCR-Effizienz einer DMU nicht verändert. Dazu löst man zunächst (2) U und h_k^* , μ_{kj}^* sei die optimale Lösung. Dann löst man (B1):

$$\begin{aligned}
& \min h'_k \\
\text{u.d.N.:} \quad & h'_k (\mathbf{x}_k/r) - \sum_{j \neq k} \mu'_{kj} \mathbf{x}_j - \mu'_{kk} (\mathbf{x}_k/r) \geq \mathbf{0} \quad (\text{B1}) \\
& \sum_{j \neq k} \mu'_{kj} \mathbf{y}_j + \mu'_{kk} (\mathbf{y}_k/r) \geq (\mathbf{y}_k/r) \\
& \mu'_{kj} \geq 0, h'_k \text{ frei}
\end{aligned}$$

Behauptung: $\mu'_{kk} = \mu_{kk}^*$, $\mu'_{kj} = \mu_{kj}^*/r$ $j \neq k$, $h'_k = h_k^*$ löst (B1).

Beweis: Angenommen $\exists \mu_{kj}^{**}$ $j \neq k$, μ_{kk}^{**} , h_k^{**} zulässig für (B1) und es gelte $h_k^{**} < h_k^*$. Wähle $\mu_{kk}^{**} = \mu_{kk}^*$, $\mu_{kj}^{**} = \mu_{kj}^* \cdot r$, $h_k^{**} = h_k^*$, dann gilt

$$\begin{aligned}
h_k^{**}(\mathbf{x}_k/r) &= \sum_{j \neq k} (\mu_{kj}^{**}/r) \mathbf{x}_j - \mu_{kk}^{**}(\mathbf{x}_k/r) \geq \mathbf{0} & | \cdot r \\
&\sum_{j \neq k} (\mu_{kj}^{**}/r) \mathbf{y}_j + \mu_{kk}^{**}(\mathbf{y}_r/r) \geq \mathbf{y}_k/r & | \cdot r \\
&\mu_{kj}^{**} \geq 0
\end{aligned}$$

$h_k^{**} = h_k'^{**} < h_k^*$ liefert dann einen Widerspruch zur Optimalität von h_k^* in (2) U.

Einfacher gestaltet sich der Nachweis der Invarianz der CCR-Effizienz einer DMU k unter ZS in der Quotientenform. Dazu betrachtet man die klassische Aufgabe (B2) und die Aufgabe (B3) zur Effizienzbestimmung der ZS DMU' k . (B2) und (B3) sind offensichtlich äquivalent.

Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden in (B2) und (B3) solche virtuellen Preise verwendet, die der Normierungsbedingung in (3) genügen.

$$\begin{aligned}
\max g_k &= \frac{\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k}{\mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k} & \max g_k &= \frac{\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k/r}{\mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k/r} \\
\frac{\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j}{\mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j} &\leq 1 \quad \forall j & \frac{\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j}{\mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j} &\leq 1 \quad \forall j \neq k & (B3) \\
\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k &\geq \mathbf{0} & \frac{\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j/r}{\mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j/r} &\leq 1 \quad j = k \\
&& \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k &\geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{B2}$$

Anhang C

Durch eine Sensitivitätsanalyse der Konvexitätsbedingung ist der kritische Bereich bestimmbar. Aus dem linearen Programm (1) B für die DMU 4

$$\begin{aligned} \min h_4 \\ 3h_4 - \lambda_{41} - 2\lambda_{42} - 4\lambda_{43} - 3\lambda_{44} &\geq 0 \\ \lambda_{41} + 3\lambda_{42} + 4\lambda_{43} + 2\lambda_{44} &\geq 2 \\ \lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + \lambda_{44} &= 1 \\ \lambda_{41}, \lambda_{42}, \lambda_{43}, \lambda_{44} &\geq 0, h_4 \text{ frei} \end{aligned}$$

ergibt sich aus der Multiplikation mit der zur optimalen Lösung korrespondierenden inversen Basismatrix und der rechten Seite

$$\begin{pmatrix} -0.\bar{3} & 0.1\bar{6} & 0.1\bar{6} \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 + \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.1\bar{6} \cdot \Delta \\ 0.5 - 0.5 \cdot \Delta \\ 0.5 + 1.5 \cdot \Delta \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Nichtnegativitätsbedingung garantiert die primale Zulässigkeit und führt zu den Grenzen des kritischen Bereichs: $-0.\bar{3} \leq \Delta \leq 1$. Diese Information liefern im Übrigen die meisten Standardsolver für lineare Programme in einem Range Report.

Die Diskussionspapiere ab Nr. 183 (1992) bis heute, können Sie im Internet unter <http://www.fernuni-hagen.de/FBWIWI/> einsehen und zum Teil downloaden.

Ältere Diskussionspapiere selber erhalten Sie nur in den Bibliotheken.

Nr	Jahr	Titel	Autor/en
420	2008	Stockkeeping and controlling under game theoretic aspects	Fandel, Günter Trockel, Jan
421	2008	On Overdissipation of Rents in Contests with Endogenous Intrinsic Motivation	Schlepütz, Volker
422	2008	Maximum Entropy Inference for Mixed Continuous-Discrete Variables	Singer, Hermann
423	2008	Eine Heuristik für das mehrdimensionale Bin Packing Problem	Mack, Daniel Bortfeldt, Andreas
424	2008	Expected A Posteriori Estimation in Financial Applications	Mazzoni, Thomas
425	2008	A Genetic Algorithm for the Two-Dimensional Knapsack Problem with Rectangular Pieces	Bortfeldt, Andreas Winter, Tobias
426	2008	A Tree Search Algorithm for Solving the Container Loading Problem	Fanslau, Tobias Bortfeldt, Andreas
427	2008	Dynamic Effects of Offshoring	Stijepic, Denis Wagner, Helmut
428	2008	Der Einfluss von Kostenabweichungen auf das Nash-Gleichgewicht in einem nicht-kooperativen Disponenten-Controller-Spiel	Fandel, Günter Trockel, Jan
429	2008	Fast Analytic Option Valuation with GARCH	Mazzoni, Thomas
430	2008	Conditional Gauss-Hermite Filtering with Application to Volatility Estimation	Singer, Hermann
431	2008	Web 2.0 auf dem Prüfstand: Zur Bewertung von Internet-Unternehmen	Christian Maaß Gotthard Pietsch
432	2008	Zentralbank-Kommunikation und Finanzstabilität – Eine Bestandsaufnahme	Knütter, Rolf Mohr, Benjamin
433	2008	Globalization and Asset Prices: Which Trade-Offs Do Central Banks Face in Small Open Economies?	Knütter, Rolf Wagner, Helmut
434	2008	International Policy Coordination and Simple Monetary Policy Rules	Berger, Wolfram Wagner, Helmut
435	2009	Matchingprozesse auf beruflichen Teilarbeitsmärkten	Stops, Michael Mazzoni, Thomas
436	2009	Wayfindingprozesse in Parksituationen - eine empirische Analyse	Fließ, Sabine Tetzner, Stefan
437	2009	ENTROPY-DRIVEN PORTFOLIO SELECTION a downside and upside risk framework	Rödder, Wilhelm Gartner, Ivan Ricardo Rudolph, Sandra
438	2009	Consulting Incentives in Contests	Schlepütz, Volker

439	2009	A Genetic Algorithm for a Bi-Objective Winner-Determination Problem in a Transportation-Procurement Auction"	Buer, Tobias Pankratz, Giselher
440	2009	Parallel greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid	Kubach, Timo Bortfeldt, Andreas Tilli, Thomas Gehring, Hermann
441	2009	SEM modeling with singular moment matrices Part I: ML-Estimation of time series	Singer, Hermann
442	2009	SEM modeling with singular moment matrices Part II: ML-Estimation of sampled stochastic differential equations	Singer, Hermann
443	2009	Konsensuale Effizienzbewertung und -verbesserung – Untersuchungen mittels der Data Envelopment Analysis (DEA)	Rödder, Wilhelm Reucher, Elmar
444	2009	Legal Uncertainty – Is Harmonization of Law the Right Answer? A Short Overview	Wagner, Helmut
445	2009	Fast Continuous-Discrete DAF-Filters	Mazzoni, Thomas
446	2010	Quantitative Evaluierung von Multi-Level Marketingsystemen	Lorenz, Marina Mazzoni, Thomas
447	2010	Quasi-Continuous Maximum Entropy Distribution Approximation with Kernel Density	Mazzoni, Thomas Reucher, Elmar
448	2010	Solving a Bi-Objective Winner Determination Problem in a Transportation Procurement Auction	Buer, Tobias Pankratz, Giselher
449	2010	Are Short Term Stock Asset Returns Predictable? An Extended Empirical Analysis	Mazzoni, Thomas
450	2010	Europäische Gesundheitssysteme im Vergleich – Effizienzmessungen von Akutkrankenhäusern mit DEA –	Reucher, Elmar Sartorius, Frank
451	2010	Patterns in Object-Oriented Analysis	Blaimer, Nicolas Bortfeldt, Andreas Pankratz, Giselher
452	2010	The Kuznets-Kaldor-Puzzle and Neutral Cross-Capital-Intensity Structural Change	Stijepic, Denis Wagner, Helmut
453	2010	Monetary Policy and Boom-Bust Cycles: The Role of Communication	Knütter, Rolf Wagner, Helmut
454	2010	Konsensuale Effizienzbewertung und –verbesserung mittels DEA – Output- vs. Inputorientierung –	Reucher, Elmar Rödder, Wilhelm
455	2010	Consistent Modeling of Risk Averse Behavior with Spectral Risk Measures	Wächter, Hans Peter Mazzoni, Thomas

456	2010	Der virtuelle Peer – Eine Anwendung der DEA zur konsensualen Effizienz- bewertung –	Reucher, Elmar
457	2010	A two-stage packing procedure for a Portuguese trading company	Moura, Ana Bortfeldt, Andreas
458	2010	A tree search algorithm for solving the multi-dimensional strip packing problem with guillotine cutting constraint	Bortfeldt, Andreas Jungmann, Sabine
459	2010	Equity and Efficiency in Regional Public Good Supply with Imperfect Labour Mobility – Horizontal versus Vertical Equalization	Arnold, Volker
460	2010	A hybrid algorithm for the capacitated vehicle routing problem with three-dimensional loading constraints	Bortfeldt, Andreas
461	2010	A tree search procedure for the container relocation problem	Forster, Florian Bortfeldt, Andreas
462	2011	Advanced X-Efficiencies for CCR- and BCC-Modell – Towards Peer-based DEA Controlling	Röder, Wilhelm Reucher, Elmar
463	2011	The Effects of Central Bank Communication on Financial Stability: A Systematization of the Empirical Evidence	Knütter, Rolf Mohr, Benjamin Wagner, Helmut
464	2011	Lösungskonzepte zur Allokation von Kooperationsvorteilen in der kooperativen Transportdisposition	Strangmeier, Reinhard Fiedler, Matthias
465	2011	Grenzen einer Legitimation staatlicher Maßnahmen gegenüber Kreditinstituten zur Verhinderung von Banken- und Wirtschaftskrisen	Merbecks, Ute
466	2011	Controlling im Stadtmarketing – Eine Analyse des Hagener Schaufensterwettbewerbs 2010	Fließ, Sabine Bauer, Katharina
467	2011	A Structural Approach to Financial Stability: On the Beneficial Role of Regulatory Governance	Mohr, Benjamin Wagner, Helmut
468	2011	Data Envelopment Analysis - Skalenerträge und Kreuzskalenerträge	Wilhelm Rödder Andreas Dellnitz
469	2011	Controlling organisatorischer Entscheidungen: Konzeptionelle Überlegungen	Lindner, Florian Scherer, Ewald
470	2011	Orientierung in Dienstleistungsumgebungen – eine explorative Studie am Beispiel des Flughafen Frankfurt am Main	Fließ, Sabine Colaci, Antje Nesper, Jens

471	2011	Inequality aversion, income skewness and the theory of the welfare state	Weinreich, Daniel
472	2011	A tree search procedure for the container retrieval problem	Forster, Florian Bortfeldt, Andreas
473	2011	A Functional Approach to Pricing Complex Barrier Options	Mazzoni, Thomas
474	2011	Bologna-Prozess und neues Steuerungsmodell – auf Konfrontationskurs mit universitären Identitäten	Jost, Tobias Scherm, Ewald
475	2011	A reduction approach for solving the rectangle packing area minimization problem	Bortfeldt, Andreas
476	2011	Trade and Unemployment with Heterogeneous Firms: How Good Jobs Are Lost	Altenburg, Lutz
477	2012	Structural Change Patterns and Development: China in Comparison	Wagner, Helmut
478	2012	Demografische Risiken – Herausforderungen für das finanzwirtschaftliche Risikomanagement im Rahmen der betrieblichen Altersversorgung	Merbecks, Ute
479	2012	“It’s all in the Mix!” – Internalizing Externalities with R&D Subsidies and Environmental Liability	Endres, Alfred Friehe, Tim Rundshagen, Bianca
480	2012	Ökonomische Interpretationen der Skalenvariablen u in der DEA	Dellnitz, Andreas Kleine, Andreas Rödter, Wilhelm