1 Schätzen von Parametern

1.0 Einleitung

Das vorliegende Kapitel stellt eine Einführung in das Schätzen von Parametern dar, was besagen will, dass es hier **nicht** um das **Schätzen einer beliebigen unbekannten Verteilung** geht, was Kapitel 2 vorbehalten bleibt, **sondern** um die **Spezifikation eines Parameters als geschätzter wahrer Parameter im Rahmen einer parametrisierten, durch die Funktionalform der Dichte festgelegten Klasse von W–Maßen.**

Behandelt werden die bekannten Forderungen an gute Schätzer wie **Erwartungstreue** (Abschnitt 1.3) und **Minimalvarianz** (Abschnitt 1.4), wobei das **Stichprobenmittel** bzw. die **Stichprobenvarianz als Standarddemonstrationsobjekte** dienen.
Wegen des nicht vorhandenen stochastischen Rüstzeuges müssen verschiedene Beweise unterbleiben; gleichwohl erscheint es uns als richtig, bereits hier das Konzept der Minimalvarianz zu präsentieren.

Schließlich wird in Abschnitt 1.5 und 1.6 das **Maximum Likelihood Prinzip** als eine Methode zur Bestimmung von Schätzern eingebracht.

Viel Augenmerk wird zu Beginn auf das Verständnis des (außermathematischen) Schätzproblems gelegt, nämlich, dass aus einer Kollektion von Stichprobenverteilungen die wahre Verteilung bestimmt werden soll, die sich (und nur diese) durch die Stichprobenrealisationen offenbart.

1.1 Statistische Experimente und Stichproben

Zur Einführung in das Schätzen und Testen von Parametern sei $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ ein vorgegebener Messraum mit $\mathbb{H}$ als sogenannten **Stichprobenraum** sowie $\mathcal{W} = \{P_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ **eine durch die nichtleere Menge Γ (Parameterraum) bijektiv parametrisierte Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf** $\mathbb{H}$, die im Rahmen zu betrachtender statistischer Experimente auf **spezielle Klassen von Wahrscheinlichkeitsmaßen eingeschränkt** werden. Von $\mathcal{W}$ sprechen wir auch als von einer **Kollektion von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. Stichprobenverteilungen**.

In diesem Kapitel über das Schätzen von Parametern (parametrische Statistik) geht es nicht darum, ein unbekanntes W–Maß **schlechthin** zu schätzen — diese Aufgabe ist Kapitel 2 vorbehalten —, sondern **ein solches W–Maß aus einer vorgegebenen, durch eine spezielle Funktionalform der Dichten vordefinierte Klasse $\mathcal{W}$ von W–Maßen durch Spezifizieren des Parameters zu schätzen.**

Um einen Zugang zur Problemsicht der schließenden Statistik zu geben, sei dem Statistiker konkret ein Element $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \mathbb{H}$, die **sogenannte (Stichproben–) Realisation,** vorgelegt, von der er weiß, dass sie **unter genau einer**, der sogenannten **wahren — ihm, dem Statistiker allerdings unbekannten — Stichprobenverteilung** $P_{\text{wahr}} \in \mathcal{W}$ zustandegekommen ist.

Aufgabe des Statistikers ist es aufgrund einer (unter der **wahren Verteilung zustandegekommenen**,) konkret gegebenen Stichprobenrealisation $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ die **wahre Stichprobenverteilung** bzw. den ihr zugeordneten sogenannten **wahren Parameter** zu mutmaßen.

Diese Mutmaßung ist je nach den Zielsetzungen (Schätzen, Testen etc.) an gewisse vordefinierte Formen gebunden.
In der **Schätztheorie** beispielsweise soll genau eine Verteilung als die **gemutmaßt wahre Verteilung** benannt werden.

In der **Testtheorie** wird die durch die Aufgabenstellung vorgegebene Kollektion $\mathcal{W}$ in zwei Teilkollektionen $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ mit $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}$ und $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ zerlegt. Hier hat sich der Statistiker — nun einmal losgelöst von Standardterminologien — dahingehend zu äußern, ob **die wahre Verteilung in $\mathcal{W}_1$ oder $\mathcal{W}_2$ liegt.**

Dem methodisch arbeitenden Statistiker wird es natürlich nicht nur darum gehen, zu einer konkret vorgelegten Stichprobenrealisation eine Mutmaßung zur wahren Verteilung abzugeben, vielmehr wird er alle Elemente von $\mathbb{H}$ als potentielle, unter der wahren Verteilung zustandegekommene Stichprobenrealisationen im Auge haben; ihnen allen gilt es eine Mutmaßung zuzuordnen.

Die von einem methodisch arbeitenden Statistiker zu erwartende Antwort wird also in einer Abbildung (z.B. Schätz– oder Testabbildung):

$$\textsf{Stichprobenraum} \quad \longrightarrow \quad \textsf{Raum der Mutmaßungen zur wahren Verteilung}$$

gegeben werden.

Die folgenden Definitionen sind grundlegend.

1.1.1 Definition

(1) *Sei* $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ *ein Messraum und* $\mathcal{W} := \{P_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ *eine nicht–leere, durch die Menge* Γ *bijektiv parametrisierte Menge von W–Maßen* P_γ*,* $\gamma \in \Gamma$*, auf* $\mathcal{H}$*.*

Dann heißt das Tripel $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *ein* **statistischer Raum***.* $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ *heißt* **Stichprobenraum***,* $\mathcal{W}$ *eine* **Kollektion von W–Maßen** *bzw.* **eine Kollektion möglicher Stichprobenverteilungen** *sowie* Γ *der* **Parameterraum** *von* $\mathcal{W}$*. Die Elemente von* Γ *heißen* **Parameter***.*

(2) *Der statistische Raum* $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *heißt speziell ein* **statistisches Experiment***, wenn unter den W–Maßen von* $\mathcal{W}$ **genau ein, allerdings unbekanntes W–Maß** *als* **zutreffendes** *oder* **wahres** *ausgezeichnet ist,* **das sich durch Elemente** $x \in \mathbb{H}$ **als dessen sogenannte (Stichproben–)Realisationen offenbart***. Der der unbekannten* **wahren Verteilung zugeordnete Parameter** *heißt der* **wahre Parameter***.*

1.1.2 Bemerkungen

(1) Der statistische Raum steht in gewisser Analogie zum Wahrscheinlichkeitsraum. Der statistische Raum bildet den Hintergrund zu zunächst 'technischen' Untersuchungen im Sinne der Vorbereitung auf die Formulierung und Lösung statistischer Problemstellungen.

(2) Über die Art der Kollektion $\mathcal{W}$ wird im Einzelnen verfügt, beispielsweise dadurch, dass der Typ der Verteilung, also z.B. die Funktionalform der Verteilung festgelegt wird. Ist $\mathcal{W}$ beispielsweise als spezielle Klasse von Normalverteilungen festgelegt, so reduziert sich die Aufgabe des Statistikers auf Aussagen zu Parametern der vorgegebenen Klasse von Normalverteilungen.

(3) Kommt es im Rahmen eines statistischen Experiments zu Realisationen, so sind dies die **Realisationen der wahren Verteilung**.
Nur die wahre Verteilung kann Realisationen hinterlassen.

In Definition 1.1.1 ist der sogenannte Stichprobenraum als ein nicht weiter spezifizierter Messraum $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ eingeführt worden. In vielen Fällen bietet sich in naheliegender Weise der $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ als Stichprobenraum an. Oft allerdings können Stichprobenrealisationen außerhalb einer gewissen Teilmenge $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^n$ ausgeschlossen werden, wobei wir aus technischen Gründen $\mathbb{H} \in \mathcal{B}^n$ annehmen. Als σ–Algebra $\mathcal{H}$ über $\mathbb{H}$ bietet sich die Spur $\mathbb{H} \cap \mathcal{B}^n$ (vgl. WI 2.1.9(4)) von $\mathcal{B}^n$ in $\mathbb{H}$ an. Dies veranlasst uns zur folgenden Definition.

1.1.3 Definition

Ein Stichprobenraum bzw. Messraum $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ *mit*

$$\mathbb{H} \in \mathcal{B}^n \tag{i}$$

$$\mathcal{H} := \mathbb{H} \cap \mathcal{B}^n \tag{ii}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ *heißt* **reeller (**n**–)Stichprobenraum** *bzw.* **reeller** n**–Messraum**.

Die Begriffe des Produktes von statistischen Räumen bzw. der der Potenz eines statistischen Raumes werden speziellen statistischen Räumen gerecht. Die Definitionen für statistische Experimente entsprechen denen für statistische Räume und werden hier unterdrückt.

1.1.4 Definition

(1) *Seien* $(\mathbb{H}_j, \mathcal{H}_j, \mathcal{W}_j)$ *statistische Räume mit* $\mathcal{W}_j = \{P_{j,\gamma_j} \,|\, \gamma_j \in \Gamma_j\}$, $j \in \mathbb{N}_n$. *Dann heißt der statistische Raum* $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *mit*

$$\mathbb{H} = \mathop{\times}_{j=1}^{n} \mathbb{H}_j \quad , \quad \mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}_j \quad \textit{und} \quad \mathcal{W} = \left\{ \bigotimes_{j=1}^{n} P_{j,\gamma_j} \,\middle|\, (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathop{\times}_{j=1}^{n} \Gamma_j \right\}$$

das **Produkt der statistischen Räume** $(\mathbb{H}_j, \mathcal{H}_j, \mathcal{W}_j)$, $j \in \mathbb{N}_n$.

(2) *Sei* $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$ *ein statistischer Raum mit* $\mathcal{W}_0 = \{P_{0,\gamma} \,|\, \gamma \in \Gamma\}$*, so heißt der statistische Raum* $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *die* n**–te Potenz** *von* $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$*, wenn*

$$\mathbb{H} = \bigtimes_{j=1}^{n} \mathbb{H}_0 \quad , \quad \mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}_0 \quad \text{und} \quad \mathcal{W} = \left\{ P_\gamma = \bigotimes_{j=1}^{n} P_{0,\gamma} \,\middle|\, \gamma \in \Gamma \right\}$$

gilt.

1.1.5 Bemerkung

Das Produkt statistischer Räume (mit Parameterräumen Γ_j, $j \in \mathbb{N}_n$) besitzt als Parameterrraum offenbar das kartesische Produkt $\bigtimes_{j=1}^{n} \Gamma_j$, während der Parameterraum der n–ten Potenz eines statistischen Raumes mit Parameterraum Γ wiederum der Parameterraum Γ ist.

Die Begriffe des **'statistischen Raumes'** bzw. der des **'statistischen Experimentes'** sind mit dem Anliegen eingeführt worden, statistische Problemstellungen zu beschreiben bzw. verständlich zu machen, wobei **beim statistischen Experiment 'eine wahre Verteilung'** postuliert wird.

Mit dem Begriff von der **Stichprobe** (als eine Abbildung) bzw. der **Stichprobenrealisation** (als deren Funktionswert) verbinden sich Modellvorstellungen, wie sich dem Statistiker die wahre Verteilung offenbart.

Oft wird als Ausgangsraum des stochastischen Geschehens ein **abstrakter**, wegen der möglicherweise waltenden Komplexität **nicht näher spezifizierter W–Raum** $(\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P})$ postuliert. $\tilde{P}$ steht für ein **den Zufall steuerndes, unbekanntes W–Maß**. Die Zufallsentscheidungen $\omega \in \Omega$, die unter $\tilde{P}$ zustande kommen, sind einer direkten Beobachtung nicht zugänglich, sondern werden vermöge einer **Zufallsvariablen**, der sogenannten **Stichprobe**

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P}) \to (\mathbb{H}, \mathcal{H})$$

in den **Stichprobenraum** $\mathbb{H}$ abgebildet, wo die **(Stichproben–)Realisationen** $x := X(\omega)$ beobachtet werden können.

Das Bild $\tilde{P}_X$ von $\tilde{P}$ unter der Stichprobe X ist als die **wahre Verteilung ein Element von** $\mathcal{W}$ **über** $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$.

Motiviert durch das Gesagte führen wir im Sinne einer **vorläufigen** Definition den Begriff der Stichprobe ein.

1.1.6 Definition – vorläufig –

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P})$ ein W–Raum, $(\mathbb{H}_j, \mathcal{H}_j)$ für $j \in \mathbb{N}_n$ Stichprobenräume und $(X_j \,|\, j \in \mathbb{N}_n)$ eine Familie von Zufallsvariablen $X_j : (\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P}) \to (\mathbb{H}_j, \mathcal{H}_j)$.

(1) Dann heißt die Abbildung

$$X \;:=\; (X_1, \ldots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P}) \to \Big(\mathop{\times}_{j=1}^{n} \mathbb{H}_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}_j \Big)$$

(n–)Stichprobe oder Stichprobe vom (Stichproben–) Umfang n; und X_j **(j–te) Stichprobenvariable**, $j \in \mathbb{N}_n$.

(2) Ist die Familie $(X_j \,|\, j \in \mathbb{N}_n)$ unabhängig, so heißt X **eine unabhängige (n–) Stichprobe**.

(3) Gilt für alle $j \in \mathbb{N}_n$ $(\mathbb{H}_j, \mathcal{H}_j) = (\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0)$ und ist X eine unabhängige Stichprobe derart, dass alle Stichprobenvariablen dieselbe Verteilung besitzen, so heißt X **eine einfache (n–)Stichprobe**.

In diesem Falle heißt $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0)$ **Merkmalraum (von X)**.

1.1.7 Definition

Sei $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ ein Stichprobenraum und $(\mathbb{D}, \mathcal{D})$ ein Messraum.
Eine $\mathcal{H}$–$\mathcal{D}$–messbare Abbildung $T : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ heißt eine **Statistik**.

1.1.8 Schreibweisen

(1) Eine Statistik T induziert für jedes $\gamma \in \Gamma$ ein W–Maß auf $\mathcal{D}$, nämlich das Bild $P_{\gamma,T} := (P_\gamma)_T$ von P_γ unter T.

Die Gesamtheit dieser durch T auf $\mathcal{D}$ induzierten Verteilungen bezeichnen wir mit $\mathcal{W}_T$:

$$\mathcal{W}_T \;:=\; \left\{ P_{\gamma,T} \,\middle|\, \gamma \in \Gamma \right\}.$$

(2) Im folgenden wird für $\gamma \in \Gamma$ der unter der Verteilung P_γ gebildete Erwartungswert mit $E_\gamma(T)$ und die Varianz von T mit $V_\gamma(T)$ bezeichnet.

Man beachte, dass zwar die Verteilungen P_γ, $\gamma \in \Gamma$, i.a. als voneinander verschieden angenommen werden; dies muss für $P_{\gamma,T}$ allerdings nicht mehr notwendig zutreffen.

Die folgenden beiden Beispiele dienen dazu, Ihnen die eingeführten Schreibweisen zu veranschaulichen.

1.1.9 Beispiel

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine einfache Stichprobe mit nach $B(1,p)$ verteilten X_j. Obwohl für die Anwendungen die Fälle $p = 0$ bzw. $p = 1$ meist uninteressant sind, wählen wir als Menge der möglichen Stichprobenverteilungen die Menge $\mathcal{W} = \left\{ \bigotimes_{j=1}^n B(1,p) \,\middle|\, p \in [0;1] \right\}$ mit dem Parameterraum $\Gamma = [0;1]$.

Überlegen Sie sich nun bitte, dass mit der durch

$$T(x) \ = \sum_{j=1}^{n} x_j, \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n,$$

definierten Statistik

$$T : (\{0,1\}^n, \mathcal{P}(\{0,1\}^n)) \ \longrightarrow \ \left(\mathbb{N}_n^0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_n^0)\right)$$

die Beziehung

$$\mathcal{W}_T \ = \ \left\{ B(n,p) \,\middle|\, p \in [0;1] \right\}$$

und daher $E_p(T) = np$ sowie $V_p(T) = np(1-p)$, $p \in [0;1]$, gilt.

1.1.10 Beispiel

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine einfache Stichprobe mit gemäß $N(a, \sigma^2)$ verteilten X_j, wobei a und σ^2 unbekannt seien. Dann bekommen wir den Stichprobenraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ sowie die Menge

$$\mathcal{W} \ := \ \left\{ \bigotimes_{j=1}^{n} N(a, \sigma^2) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \right\}$$

von möglichen Stichprobenverteilungen mit dem Parameterraum $\Gamma = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})$. Ist dagegen z.B. σ^2 bekannt, so erhalten wir die Menge

$$\mathcal{W}_{\sigma^2} \ := \ \left\{ \bigotimes_{j=1}^{n} N(a, \sigma^2) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

mit dem Parameterraum $\Gamma = \mathbb{R}$.

Bei der Definition der Begriffe 'Stichprobe' bzw. 'Stichprobenvariable' in 1.1.6 hat man sich eines abstrakten, letzlich aber völlig belanglosen W–Raumes $(\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P})$ bedient.

Wie aus den Beispielen 1.1.9 bzw. 1.1.10 klar wird, kommt es aber lediglich auf das Bildmaß $\tilde{P}_X$ an. Tatsächlich ist es für die Statistik typisch, dass man **nur** die Verteilung (Bildmaß) einer Stichprobe zu spezifizieren hat, z.B. wie in 1.1.10 gesehen als $\bigotimes_{j=1}^n N(a, \sigma^2)$. Der W–Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P})$, wie auch die **Abbildung** Stichprobe treten völlig in den Hintergrund.

Das Gesagte veranlasst uns zu einer Neufassung des statistischen Modells der Stichprobe. Die volle Bedeutung dieser Neufassung ergibt sich aber erst durch Satz 1.1.13, der durch Satz 1.1.12 vorbereitet wird.

1.1.11 Das statistische Modell der Stichprobe (Neufassung)

(1) In der Definition 1.1.6 wird der Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit dem Messraum $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ mit $\mathbb{H} := \times_{j=1}^n \mathbb{H}_j$ und $\mathcal{H} := \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{H}_j$ identifiziert.
Das den Zufall steuernde W–Maß wird wiederum mit $\tilde{P}$ bezeichnet.

(2) Die Stichprobenvariablen X_j der Stichprobe $X = (X_1, \dots, X_n)$ sind die **Projekionen** von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{H}_j$:

$$X_j : \mathbb{H} \to \mathbb{H}_j, \tag{i}$$

$$X_j(x) := x_j, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}. \tag{ii}$$

Satz 1.1.12 dient der technischen Vorbereitung.

1.1.12 Satz

Seien $(\mathbb{H}_j, \mathcal{H}_j, P_j)$, $j \in \mathbb{N}_n$, W–Räume und $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, P)$ deren Produkt.
Weiter sei $X := (X_1, \dots, X_n)$ mit

$$\left.\begin{array}{l} X_j : \mathbb{H} \to \mathbb{H}_j \\ X_j(x) := x_j, \, x \in \mathbb{H} \end{array}\right\} , \; j \in \mathbb{N}_n,$$

d.h. die X_j sind Projektionen von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{H}_j$, $j \in \mathbb{N}_n$.
Dann gilt

(1) $\left(\bigotimes_{j=1}^n P_j\right)_{X_j} = P_j \; , \; j \in \mathbb{N}_n,$

(2) $\left(\bigotimes_{j=1}^n P_j\right)_X = \left(\bigotimes_{j=1}^n P_j\right)_{id_{\mathbb{H}}} = \bigotimes_{j=1}^n P_j,$

(3) $X_1, \ldots, X_n$ sind stochastisch unabhängig.

Beweis:

Zunächst gilt:

$$X_j^{-1}(A_j) = (\Omega_1 \times \ldots \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \Omega_n) =: \overline{A}_j, \qquad A_j \in \mathbb{H}_j,\ j \in \mathbb{N}_n.$$

Damit folgt

$$\Big(\bigotimes_{j=1}^n P_j\Big)_{X_j}(A_j) = \Big(\bigotimes_{j=1}^n P_j\Big)(\overline{A}_j) = P_j(A_j), \qquad A_j \in \mathbb{H}_j,\ j \in \mathbb{N}_n,$$

d.h. es gilt (1). (2) ist unmittelbar einsichtig, während (3) nun eine unmittelbare Konsequenz aus (1) und (2) ist, vgl WI, Satz 7.4.3. □

Wie der folgende Satz lehrt, impliziert ein **Produkt statistischer Räume** bzw. die **Potenz eines statistischen Raumes** $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$ eine **unabhängige** bzw. eine **einfache Stichprobe**.

1.1.13 Satz

(1) *Sei* $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *das Produkt der statistischen Räume* $(\mathbb{H}_j, \mathcal{H}_j, \mathcal{W}_j)$ *mit* $\mathcal{W}_j := \{P_{j,\gamma_j} \,|\, \gamma_j \in \Gamma_j\}$, $j \in \mathbb{N}_n$, *und* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *eine Stichprobe gemäß 1.1.11 .*
Dann sind $X_1, \ldots, X_n$ *unabhängig, d.h* X *ist unabhängig.*

(2) *Ist* $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ *speziell die* n*–te Potenz des statistischen Raumes* $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$, *so ist* X *einfach.*

Beweis:

(1) Ist eine unmittelbare Konsequenz aus 1.1.12(2).

(2) Gilt insbesondere

$$\Big(\bigotimes_{j=1}^n P_{j,\gamma_j}\Big) = \bigotimes_{j=1}^n P_{0,\gamma} = P_{0,\gamma}^n,$$

so sind die X_j nicht nur unabhängig, sondern auch identisch verteilt:

$$\left(P_{0,\gamma}^n\right)_{X_j} = P_{0,\gamma}, \qquad \gamma \in \Gamma,$$

d.h. X ist in diesem Falle einfach. □

1.1.14 Bemerkung

Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine einfache Stichprobe mit gemäß $P_{0,\bar{\gamma}} \in \mathcal{W}_0 := \{P_{0,\gamma} \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ verteilten Stichprobenvariablen X_j,, $j \in \mathbb{N}_n$, so ist man insgesamt auf ein statistisches Experiment mit der n–ten Potenz $(\mathbb{H}_0^n, \mathcal{H}_0^n, \mathcal{W}_0^n)$ von $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$ als statistischen Raum $(\mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathcal{W})$ geführt.

Das den Zufall steuernde W-Maß $\tilde{P}$ über $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ ist nach der 'Neufassung des statistischen Modelles der Stichprobe', vgl. 1.1.11, **nichts anderes als die (freilich unbekannte) n–te Potenz $P_{0,\overline{\gamma}}^n$ der wahren Verteilung $P_{0,\overline{\gamma}}$ über $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0)$.**

Die **Verallgemeinerung** des Gesagten auf den Fall einer **unabhängigen Stichprobe bietet sich unmittelbar an.**

Selbstbeurteilung

Die Begriffsbildungen sind eigentlich alle nicht schwer, dennoch kann es Mühe bereiten, die Fülle der Begriffsbildungen zu übersehen und ihr Zusammenspiel zu erkennen.

Erläutern sie den Begriff der wahren Verteilung im Rahmen eines statistischen Experimentes.

Erläutern Sie den Begriff der Stichprobe.

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen dem Produkt eines statistischen Raumes und einer unabhängigen Stichprobe bzw. zwischen der Potenz eines statistischen Raumes $(\mathbb{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$ und einer einfachen Stichprobe

Es liegt eine Stichprobenrealisation vor. Unter welcher Verteilung ist diese zustande gekommen?