Prof. Dr. Matthias Thimm

Modul 64402

Formale Argumentation

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Formale Argumentation

2.1 Grundlagen zur abstrakten Argumentation

Version 0.7, 2023/08/18

Prof. Dr. Matthias Thimm
Artificial Intelligence Group, FernUniversität in Hagen

Abstrakte Argumentation ist ein Formalismus der formalen Wissensrepräsentation, der auf einfache Art und Weise Argumentationsszenarien repräsentieren und visualisieren kann. Hier wird von der inneren Struktur von Argumenten abstrahiert und diese einzig durch Knoten in einem gerichteten Graphen dargestellt. Argumentationsgraphen fokussieren sich dann einzig auf eine Repräsentation von *Konflikten* zwischen Argumenten, die durch gerichtete Kanten dargestellt werden. Auch wenn dieser Formalismus stark von konkreten Argumentationsszenarien abstrahiert, so ist er sehr ausdrucksstark und in der Lage, auch erweiterte Konzepte zu repräsentieren.

In Abschnitt 2.1.1 stellen wir die Struktur der abstrakten Argumentationsgraphen vor und diskutieren in Abschnitt 2.1.2 die Grundbegriffe *Konfliktfreiheit* und *Zulässigkeit*. Wir betrachten dann der Reihe nach die vier klassischen Semantiken für abstrakte Argumentationsgraphen: die *vollständige Semantik* (Abschnitt 2.1.3), die *präferierte Semantik* (Abschnitt 2.1.4), die *grundierte Semantik* (Abschnitt 2.1.5) und die *stabile Semantik* (Abschnitt 2.1.6).

2.1.1 Abstrakte Argumentationsgraphen

Die zentralen Strukturen in der abstrakten Argumentation sind *abstrakte Argumentationsgraphen* (engl. *abstract argumentation frameworks*), die wie folgt definiert sind.

Definition 1. Ein (abstrakter) Argumentationsgraph F ist ein Tupel $F = (A, R)$, wobei A eine endliche Menge von *Argumenten* ist und $R \subseteq A \times A$ ist die *Angriffsrelation*.

Gilt für einen Argumentationsgraphen $F = (A, R)$ und $a, b \in A$ die Relation $(a, b) \in R$, so sagen wir auch, dass das Argument a das Argument b *angreift*. Statt $(a, b) \in R$ schreiben wir auch aRb. Ein Argumentationsgraph kann in natürlicher Weise als gerichteter Graph dargestellt werden.

Beispiel 1. Wir betrachten ein (ungemein vereinfachtes) Szenario aus dem Rechtswesen, das durch den folgenden Text beschrieben ist:

> John wird des Mordes an Mary verdächtigt. Normalerweise ist jedoch jemand unschuldig, solange seine Schuld nicht bewiesen wurde. Es gibt jedoch zwei Zeugenaussagen von Carl und Dave. Carl sagt, dass John Mary mit einem Messer ermordet hat. Dave sagt, dass John Mary mit einer Pistole erschossen hat. Eine Autopsie von Mary hat gezeigt, dass sie keine Schussverletzung hat.

Aus dieser Beschreibung können wir die folgenden Argumente $a_1, \ldots, a_5$ identifizieren:

- a_1: John wurde des Mordes an Mary verdächtigt, deswegen ist er schuldig.
- a_2: Solange seine Schuld nicht eindeutig bewiesen ist, ist John unschuldig.
- a_3: Carl behauptet, dass John Mary mit einem Messer ermordet hat. John kann deswegen nicht unschuldig sein.
- a_4: Dave behauptet, dass John Mary mit einer Pistole erschossen hat. John kann deswegen nicht unschuldig sein.
- a_5: Der Autopsiebericht zeigt, dass Mary keine Schussverletzung hat. Sie kann deswegen nicht erschossen worden sein.

Wir gehen weiterhin davon aus, dass eine Person nicht gleichzeitig auf zwei verschiedene Art und Weisen ermordet werden kann und dass die bloße Verdächtigung eines Mordes die Grundannahme der Unschuld nicht angreifen kann. Daraus ergibt sich die Formalisierung als Argumentationsgraph $F_{\mathrm{rw}} = (A_{\mathrm{rw}}, R_{\mathrm{rw}})$ mit

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{rw}} &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \\ R_{\mathrm{rw}} &= \{(a_2, a_1), (a_3, a_2), (a_4, a_2), (a_3, a_4), (a_4, a_3), (a_5, a_4)\} \end{aligned}$$

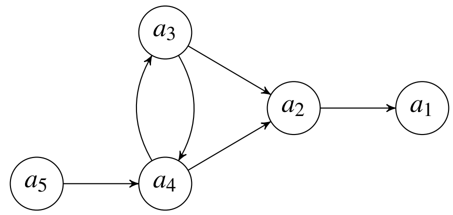

Abbildung 1: Der Argumentationsgraph F_{rw} aus Beispiel 1.

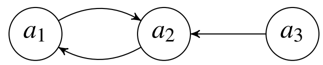

Abbildung 2: Der Argumentationsgraph F_{med} aus Beispiel 2.

Der Argumentationsgraph F_{rw} ist in Abbildung 1 dargestellt.

Beispiel 2. Wir betrachten ein einfaches medizinisches Szenario, bei dem eine Behandlungsstrategie für einen gegebenen Patienten gefunden werden soll. Wir betrachten dazu die folgenden drei Argumente:

- a_1: Der Patient leidet unter Bluthochdruck, deswegen sollte man Diuretika verschreiben.
- a_2: Der Patient leidet unter Bluthochdruck, deswegen sollte man Betablocker verschreiben.
- a_3: Der Patient leidet unter einem Lungenemphysem, dies ist eine Kontraindikation für die Verschreibung von Betablockern.

Eine weitere Bedingung in unserem Szenario ist, dass wir dem Patienten nur ein einziges Medikament verschreiben möchten. Daraus ergibt sich die Formalisierung als Argumentationsgraph $F_{\text{med}} = (A_{\text{med}}, R_{\text{med}})$ mit

$$A_{\text{med}} = \{a_1, a_2, a_3\}$$
$$R_{\text{med}} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_3, a_2)\}$$

Der Argumentationsgraph F_{med} ist in Abbildung 2 dargestellt.

Beispiel 3. Zur späteren Illustration verschiedenster Konzepte betrachten wir noch ein abstraktes Beispiel eines Argumentationsgraphen $F_{\text{ex}} = (A_{\text{ex}}, R_{\text{ex}})$ gegeben durch

$$A_{\text{ex}} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$
$$R_{\text{ex}} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_3), (a_6, a_2), (a_3, a_7), (a_4, a_8), (a_6, a_5), (a_6, a_7), (a_7, a_6), (a_8, a_7), (a_8, a_8)\}$$

Der Argumentationsgraph F_{ex} ist in Abbildung 3 dargestellt.

Für einen Argumentationsgraphen $F = (A, R)$ und $S \subseteq A$ schreiben wir

$$S_F^+ = \{b \in A \mid \exists a \in S : aRb\}$$
$$S_F^- = \{b \in A \mid \exists a \in S : bRa\}$$

Mit anderen Worten, S_F^+ ist die Menge aller Argumente, die von (wenigstens) einem Argument aus S angegriffen werden und S_F^- ist die Menge aller Argumente, die (wenigstens) ein Argument aus S angreifen.

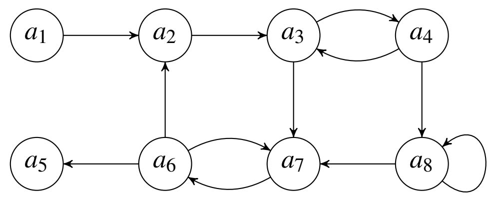

Abbildung 3: Der Argumentationsgraph F_{ex} aus Beispiel 3.

Beispiel 4. Wir führen Beispiel 3 fort. Hier gilt

$$\begin{aligned}
\{a_1,a_4\}^+_{F_{\text{ex}}} &= \{a_2,a_3,a_8\} & \{a_1,a_4\}^-_{F_{\text{ex}}} &= \{a_3\} \\
\{a_3,a_6\}^+_{F_{\text{ex}}} &= \{a_2,a_4,a_5,a_7\} & \{a_3,a_6\}^-_{F_{\text{ex}}} &= \{a_2,a_4,a_7\} \\
\{a_3,a_6,a_7\}^+_{F_{\text{ex}}} &= \{a_2,a_4,a_5,a_6,a_7\} & \{a_3,a_6,a_7\}^-_{F_{\text{ex}}} &= \{a_2,a_3,a_4,a_6,a_7,a_8\} \\
\{a_8\}^+_{F_{\text{ex}}} &= \{a_7,a_8\} & \{a_8\}^-_{F_{\text{ex}}} &= \{a_4,a_8\} \\
\{a_1,a_4,a_5,a_7\}^+_{F_{\text{ex}}} &= \{a_2,a_3,a_6,a_8\} & \{a_1,a_4,a_5,a_7\}^-_{F_{\text{ex}}} &= \{a_3,a_6,a_8\}
\end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass sich die Operatoren $+$ und $-$ monoton verhalten.

Lemma 1. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S,T \subseteq A$. Es gilt*

1. *$S \subseteq T$ impliziert $S^+_F \subseteq T^+_F$.*
2. *$S \subseteq T$ impliziert $S^-_F \subseteq T^-_F$.*

Beweis.

1. Sei $S \subseteq T$ und sei $a \in S^+_F$. Dann gibt es $b \in S$ mit bRa. Da $S \subseteq T$ folgt $b \in T$ und damit $a \in T^+_F$.
2. Sei $S \subseteq T$ und sei $a \in S^-_F$. Dann gibt es $b \in S$ mit aRb. Da $S \subseteq T$ folgt $b \in T$ und damit $a \in T^-_F$. □

2.1.2 Konfliktfreiheit und Zulässigkeit

Abstrakte Argumentationsgraphen repräsentieren argumentative Szenarien und können damit als *Wissensbasis* aufgefasst werden: sie repräsentieren das *explizite* Wissen über Argumente und ihre direkten Relationen. Allerdings geben sie keinen expliziten Hinweis darüber, welche Argumente wir *akzeptieren* können, d. h., welche Argumente sich gegenüber anderen Argumenten behaupten. Argumentationsgraphen stellen die *Syntax* der Sprache der abstrakten Argumentation dar und um mit ihnen zu schlussfolgern benötigen wir eine *Semantik*, d. h., eine Methode, um Argumentationsgraphen *auswerten* zu können. Dies ist (beispielsweise) analog zur Syntax und Semantik einer aussagenlogischen Sprache: hier wird eine aussagenlogische Wissensbasis (also eine Menge aussagenlogischer Formeln) durch aussagenlogische Interpretationen interpretiert und wir sind an jenen Interpretationen interessiert, die alle Formeln erfüllen (die *Modelle* der Wissensbasis). Bei der abstrakten Argumentation übernehmen Mengen von Argumenten die Rolle der Interpretationen und eine Menge von Argumenten, die in einer gegebenen Weise den Argumentationsgraph „erfüllen“, nennen wir *Extension*. Für einen Argumentationsgraphen $F = (A,R)$ und eine Menge $S \subseteq A$ ist S also eine Extension, wenn S ein „plausibles“ Ergebnis der Argumentation in F darstellt. Alle Argumente in S sind dann für uns „akzeptabel“. Eine formale Definition der Begriffe „Plausibilität“ und „Akzeptanz“ ist für Argumentationsgraphen relativ schwierig und wir werden uns im Folgenden mit verschiedenen Möglichkeiten beschäftigen, diese Begriffe zu präzisieren.

Eine allgemein akzeptierte Minimalbedingung, um eine Menge von Argumenten als plausibles Ergebnis einer Argumentation anzusehen, ist ihre *Konfliktfreiheit*.

Definition 2. Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S heißt *konfliktfrei* in F gdw. für alle $a,b \in S$, $(a,b) \notin R$.

Mit anderen Worten, eine Menge von Argumenten kann nur als plausibel angesehen werden, wenn es unter ihnen keine Angriffe gibt.

Beispiel 5. Wir führen Beispiel 4 fort. Von den dort betrachteten Mengen sind

$$\{a_1,a_4\},\{a_3,a_6\},\{a_1,a_4,a_5,a_7\}$$

konfliktfrei und

$$\{a_3,a_6,a_7\},\{a_8\}$$

nicht konfliktfrei. Es ist insbesondere zu beachten, dass keine Menge, die a_8 enthält, konfliktfrei sein kann.

Lemma 2. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *S ist konfliktfrei*
2. $S \cap S_F^+ = \emptyset$
3. $S \cap S_F^- = \emptyset$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch einen Ringschluss.

- 1. $\Rightarrow$ 2.: Sei S konfliktfrei und nehme an, dass $a \in S \cap S_F^+$. Wegen $a \in S_F^+$ gibt es ein $b \in S$ mit bRa. Da auch $a \in S$, kann S nicht konfliktfrei sein. Also folgt $S \cap S_F^+ = \emptyset$.
- 2. $\Rightarrow$ 3.: Es gelte $S \cap S_F^+ = \emptyset$. Angenommen, $a \in S \cap S_F^-$. Wegen $a \in S_F^-$ gibt es ein $b \in S$ mit aRb. Da $a \in S$, folgt $b \in S_F^+$. Es folgt also $b \in S \cap S_F^+$ im Widerspruch zur Voraussetzung und damit $S \cap S_F^- = \emptyset$.
- 3. $\Rightarrow$ 1.: Es gelte $S \cap S_F^- = \emptyset$. Angenommen, S ist nicht konfliktfrei, dann gibt es $a,b \in S$ mit aRb. Da $b \in S$, folgt $a \in S_F^-$ und damit $a \in S \cap S_F^-$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist S konfliktfrei. □

Nach der Konfliktfreiheit ist die *Zulässigkeit* die zweite wichtige Eigenschaft zur Konkretisierung eines Begriffs der „Plausibilität“. Um eine Menge von Argumenten S als Extension ansehen zu können, müssen die Argumente in S sich gegenüber den Argumenten außerhalb von S (also in $A \setminus S$) behaupten können. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff der *Verteidigung*.

Definition 3. Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph, $S \subseteq A$ und $a \in A$. Die Menge S *verteidigt* das Argument a in F gdw. es für alle $b \in A$ mit bRa ein $c \in S$ gibt mit cRb.

Eine Menge S verteidigt also ein Argument a, wenn alle Angriffe auf a von S abgewehrt werden können.

Beispiel 6. Wir führen Beispiel 3 fort und betrachten weiterhin den Argumentationsgraphen aus Abbildung 3. Hier gilt beispielsweise

- $\{a_3\}$ verteidigt a_6,
- $\{a_1,a_3\}$ verteidigt a_3,
- $\{a_3,a_8\}$ verteidigt a_8,
- $\{a_4,a_7\}$ verteidigt a_5 und
- $\{a_4,a_6\}$ verteidigt a_1.

Die letzte Aussage ist wahr, da a_1 überhaupt nicht angegriffen wird und die Bedingung von *Verteidigung* trivial erfüllt ist. Tatsächlich gilt, dass a_1 von jeder Menge $S \subseteq A_{\text{ex}}$ verteidigt wird.

Führen wir den Begriff *Konfliktfreiheit* zusammen mit der Bedingung, dass alle Argumente der betrachteten Menge verteidigt werden, so erhalten wir den Begriff der *Zulässigkeit*.

Definition 4. Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S heißt *zulässig* in F gdw. S konfliktfrei ist und jedes a mit $a \in S$ verteidigt wird.

Beispiel 7. Wir führen Beispiel 3 fort und betrachten weiterhin den Argumentationsgraphen aus Abbildung 3. Beispiele für zulässige Mengen sind

$$\{a_1,a_3\},\{a_1,a_3,a_6\},\{a_4,a_5,a_7\},\{a_4\}$$

Andererseits gilt

- Die Menge $\{a_1,a_3,a_8\}$ ist nicht zulässig, da sie nicht konfliktfrei ist.
- Die Menge $\{a_3\}$ ist nicht zulässig, da a_3 nicht vor a_2 verteidigt wird.
- Die Menge $\{a_4,a_5\}$ ist nicht zulässig, da a_5 nicht vor a_6 verteidigt wird. Durch Hinzunahme von a_7 erhalten wir hier allerdings wieder eine zulässige Menge $\{a_4,a_5,a_7\}$.

Zulässigkeit ist eine minimale Voraussetzung für die Definition einer Reihe von Semantiken für abstrakte Argumentationsgraphen[1], reicht allerdings nicht aus, um den Begriff von „Plausibilität" voll zu beschreiben. Es gilt nämlich, dass die leere Menge ($\emptyset$) für jeden beliebigen Argumentationsgraphen eine zulässige Menge darstellt (bitte überzeugen Sie sich, dass $\emptyset$ trivial die Bedingung aus Definition 4 erfüllt). Diese Eigenschaft macht Zulässigkeit alleine als Semantik viel zu schwach. Betrachten wir beispielsweise wieder den Argumentationsgraphen in Abbildung 3, so sehen wir, dass das Argument a_1 nicht angegriffen wird. Es macht also in jedem Fall Sinn, a_1 zu akzeptieren (da keine Gründe dagegen sprechen) und jede sinnvolle Extension sollte damit auch a_1 enthalten. Wir werden uns mit diesem Aspekt im nächsten Unterkapitel weiter beschäftigen. Wir machen zuvor aber noch ein paar abschließende Beobachtungen zur Zulässigkeit.

Lemma 3. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Dann ist S zulässig gdw. S konfliktfrei ist und $S_F^- \subseteq S_F^+$.*

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen.

- „$\Rightarrow$":
  Sei S zulässig. Dann ist nach Definition 4 S auch konfliktfrei, es bleibt zu zeigen: $S_F^- \subseteq S_F^+$. Sei also $a \in S_F^-$, d. h., es gibt ein $b \in S$ mit aRb. Da S zulässig ist und damit alle seine Elemente verteidigt, gibt es ein $c \in S$ mit cRa. Daraus folgt $a \in S_F^+$.
- „$\Leftarrow$":
  Sei S konfliktfrei und $S_F^- \subseteq S_F^+$. Um die Bedingung von Definition 4 zu erfüllen, bleibt zu zeigen, dass S jedes a mit $a \in S$ verteidigt. Sei also $a \in S$ beliebig $b \in A$ ein Argument mit bRa. Es gilt also $b \in S_F^-$. Wegen $S_F^- \subseteq S_F^+$ folgt, dass $b \in S_F^+$ und somit gibt es ein $c \in S$ mit cRb. Also wird a von S verteidigt. □

Das folgende Resultat ist auch bekannt als *(Dungs) fundamentales Lemma*:

Lemma 4. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Ist S zulässig und verteidigt $a \in A$, dann ist auch $S \cup \{a\}$ zulässig.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $S_1 = S \cup \{a\}$ konfliktfrei ist und jedes seiner Elemente verteidigt.

1. *Konfliktfreiheit*: Nehme an, dass S_1 nicht konfliktfrei ist. Da S konfliktfrei war, muss der Konflikt das neue Argument a involvieren. Also gibt es ein $b \in S$ mit bRa oder aRb. Da S zulässig ist und a verteidigt, gibt es ein Argument $c \in S$, das den entsprechenden Angreifer angreift, also cRb oder cRa. Da S konfliktfrei ist, kann cRb nicht möglich sein, es gilt also cRa. Da S aber a verteidigt, muss es ein weiteres Argument $d \in S$ geben mit dRc. Dies widerspricht wiederum der Konfliktfreiheit von S.

[1] In Kapitel 2.5 werden wir uns allerdings auch einige Alternativen anschauen.

2. $S_1 = S \cup \{a\}$ *verteidigt jedes seiner Elemente*: da S zulässig war, wird jedes $b \in S$ schon von S_1 verteidigt. Das Argument a wird lt. Voraussetzung von S (und somit S_1) verteidigt. □

Eine Verallgemeinerung des fundamentalen Lemmas stellt das folgende Resultat dar, dessen Beweis Übungsaufgabe ist.

Lemma 5. *Sei $F = (A, R)$ ein Argumentationsgraph und $S_1, S_2 \subseteq A$. Sind S_1 und S_2 zulässig und ist $S_1 \cup S_2$ konfliktfrei, dann ist $S_1 \cup S_2$ auch zulässig.*

2.1.3 Die vollständige Semantik

Das *fundamentale Lemma* (Lemma 4) hat bereits gezeigt, dass die Aufnahme verteidigter Argumente die Zulässigkeit einer Menge nicht gefährdet. Eine Aufnahme aller verteidigter Argumente bringt uns zu dem Begriff der *vollständigen Semantik*.

Definition 5. Sei $F = (A, R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S heißt eine *vollständige Extension* von F gdw. S zulässig ist und für jedes Argument $a \in A$, das von S verteidigt wird, gilt $a \in S$.

Mit anderen Worten, eine vollständige Extension S bildet also eine in sich geschlossene Menge akzeptabler Argumente: alle Argumente in S werden verteidigt und keine weiteren Argumente werden verteidigt.

Beispiel 8. Wir führen Beispiel 3 fort und betrachten weiterhin den Argumentationsgraphen aus Abbildung 3. Der Argumentationsgraph F_{ex} besitzt die folgenden vollständigen Extensionen:

$$\{a_1\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_6\}, \{a_1, a_3, a_6\}, \{a_1, a_4, a_6\}, \{a_1, a_4, a_5, a_7\}$$

Keine weitere Menge von Argumenten ist vollständig in F_{ex}.

Wie das obige Beispiel zeigt, beschreibt das Konzept der Vollständigkeit das Ergebnis der Argumentation nicht eindeutig, ein Argumentationsgraph $F = (A, R)$ kann grundsätzlich mehrere vollständige Extensionen besitzen und diese können auch in einer Teilmengenbeziehung zueinander stehen (siehe beispielsweise die vollständigen Extensionen $\{a_1, a_4\}$ und $\{a_1, a_4, a_6\}$, für die $\{a_1, a_4\} \subseteq \{a_1, a_4, a_6\}$ gilt). Tatsächlich können wir jede zulässige Menge zu einer vollständigen Extension erweitern.

Lemma 6. *Sei $F = (A, R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$ zulässig. Dann gibt es eine vollständige Extension S' mit $S \subseteq S'$.*

Beweis. Sei S zulässig, aber nicht vollständig. Dann gibt es ein $a \in A \setminus S$, das von S verteidigt wird. Nach Lemma 4 ist $S_1 = S \cup \{a\}$ auch zulässig und $S \subseteq S_1$. Ist S_1 nun vollständig, gilt die Aussage für $S' = S_1$. Ansonsten gibt es ein weiteres Argument $a' \in A \setminus S_1$, das von S_1 verteidigt wird. Die Aussage folgt dann induktiv. □

Korollar 1. *Sei $F = (A, R)$ ein Argumentationsgraph. Dann besitzt F wenigstens eine vollständige Extension.*

Beweis. Da $\emptyset$ stets zulässig ist, folgt die Aussage direkt aus Lemma 6. □

Lemma 7. *Sei $F = (A, R)$ ein Argumentationsgraph und $a \in A$ ein Argument, das nicht angegriffen wird ($\{a\}_F^- = \emptyset$). Dann gilt $a \in S$ für jede vollständige Extension S.*

Beweis. Sei S eine vollständige Extension und nehme an, dass $a \notin S$. Offensichtlich wird a aber von S verteidigt, also kann S nicht vollständig sein im Widerspruch zur Annahme. Es folgt $a \in S$. □

2.1.4 Die präferierte Semantik

Beispiel 8 hat gezeigt, dass ein Argumentationsgraph durchaus viele vollständige Extensionen besitzen kann und diese auch in einem Teilmengenverhältnis zueinander stehen können. Gilt jedoch $S \subseteq S'$ für zwei Extensionen S und S', so macht es aus praktischer Sicht wenig Sinn, S als Ausgang der Argumentation zu betrachten, wenn doch S' kompatibel mit S ist, aber zu weitaus mehr Argumenten „Stellung" bezieht. Diese Einsicht bringt uns auf den Begriff der *präferierten Semantik*.

Definition 6. Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S heißt eine *präferierte Extension* von F gdw. S vollständig ist und es gibt kein vollständiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$.

Eine präferierte Extension S ist also eine maximale vollständige Extension.[2] Tatsächlich ist die Forderung der Vollständigkeit in der Definition der präferierten Semantik schon implizit durch die Maximierung erfüllt, sodass die folgende Charakterisierung gilt (die auch üblicherweise als Definition der präferierten Semantik benutzt wird).

Lemma 8. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S ist eine präferierte Extension gdw. S zulässig ist und es kein zulässiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$ gibt.*

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen.

- „$\Rightarrow$": Sei S eine präferierte Extension. Da S vollständig ist, ist S auch zulässig. Angenommen, es gibt ein zulässiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$. Nach Lemma 6 gibt es dann eine vollständige Extension S'' mit $S' \subseteq S''$. Dann wäre S'' eine vollständige Extension mit $S \subsetneq S''$, im Widerspruch dazu, dass S präferiert ist. Also gibt es kein zulässiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$.
- „$\Leftarrow$": Sei S zulässig und es gibt kein zulässiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$. Damit S präferiert ist, müssen wir zeigen, dass S vollständig ist und dass es kein vollständiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$ gibt:
  - S ist vollständig: Angenommen, S ist nicht vollständig, dann gibt es ein $a \in A \setminus S$, das von S verteidigt wird. Nach Lemma 4 ist $S \cup \{a\}$ aber zulässig und es gilt $S \subsetneq S \cup \{a\}$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist S vollständig.
  - Es gibt kein vollständiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$: Angenommen es gäbe ein vollständiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$. Dann ist S' aber auch zulässig mit $S \subsetneq S'$, im Widerspruch zur Annahme. Also gibt es kein vollständiges $S' \subseteq A$ mit $S \subsetneq S'$. □

Beispiel 9. Wir führen Beispiel 8 fort und betrachten weiterhin den Argumentationsgraphen aus Abbildung 3. Zur Erinnerung, der Argumentationsgraph F_{ex} besitzt die folgenden vollständigen Extensionen:

$$\{a_1\}, \{a_1,a_4\}, \{a_1,a_6\}, \{a_1,a_3,a_6\}, \{a_1,a_4,a_6\}, \{a_1,a_4,a_5,a_7\}$$

Von diesen Extensionen sind die folgenden maximal bzgl. Teilmengeninklusion und damit präferierte Extensionen:

$$\{a_1,a_3,a_6\}, \{a_1,a_4,a_6\}, \{a_1,a_4,a_5,a_7\}$$

Das obige Beispiel zeigt, dass ein Argumentationsgraph mehr als eine präferierte Extension besitzen kann (allerdings üblicherweise weniger als vollständige Extensionen). Aus Korollar 1 folgt auch direkt, dass jeder Argumentationsgraph wenigstens eine präferierte Extension besitzen muss.

Korollar 2. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph. Dann besitzt F wenigstens eine präferierte Extension.*

Beweis. Laut Korollar 1 besitzt F wenigstens eine vollständige Extension S_1. Ist S_1 auch präferiert, ist die Aussage gezeigt. Andernfalls muss es eine weitere vollständige Extension S_2 mit $S_1 \subsetneq S_2$ geben. Die Aussage folgt dann induktiv. □

[2] Wenn wir von *Maximalität* von Mengen reden, dann meinen wir in den meisten Fällen, wie in Definition 6, *Maximialität bzgl. Mengeninklusion* und *nicht* bzgl. Kardinalität. Es ist nicht notwendigerweise der Fall, dass maximale Mengen (bzgl. Mengeninklusion) auch maximale Kardinalität haben. Beispiel: Gegeben die Menge von Mengen $\{\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\}\}$ so sind sowohl $\{a,b\}$ als auch $\{a,c,d\}$ maximal bzgl. Mengeninklusion, aber nur $\{a,c,d\}$ ist maximal bzgl. Kardinalität.

2.1.5 Die grundierte Semantik

Präferierte Extensionen realisieren einen „maximalen“ Standpunkt zum Ausgang der Argumentation, die mit einem Argumentationsgraphen dargestellt wird, und stehen damit grundsätzlich in einem Widerspruch zueinander, d. h., man kann die Argumente aus zwei präferierten Extensionen S_1 und S_2 nicht gleichzeitig akzeptieren ohne Zulässigkeit zu gefährden.

Lemma 9. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S_1, S_2 \subseteq A$ präferierte Extensionen mit $S_1 \neq S_2$. Dann ist $S_1 \cup S_2$ nicht zulässig.*

Beweis. Angenommen $S_3 = S_1 \cup S_2$ wäre zulässig. Dann ist S_3 eine zulässige Menge mit $S_1 \subsetneq S_3$ im Widerspruch zur Annahme, dass S_1 präferiert ist, siehe Lemma 8. □

Präferierte Extensionen stellen damit einen sehr liberalen Standpunkt zum Ausgang der Argumentation dar, der nicht mit anderen Standpunkten kompatibel ist. Allerdings sehen wir in der Liste der präferierten Extensionen aus Beispiel 9, dass alle Extensionen das Argument a_1 enthalten. Mit anderen Worten, egal welchen Standpunkt (bzgl. präferierter Semantik) wir annehmen, die Akzeptanz des Arguments a_1 ist in jedem Fall gegeben. Wir schauen uns nun mit der *grundierten Semantik* eine Semantik an, die sich auf die Akzeptanz solcher universell akzeptierten Argumente fokussiert.

Definition 7. Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S heißt eine *grundierte Extension* von F gdw. S vollständig ist und es gibt kein vollständiges $S' \subseteq A$ mit $S' \subsetneq S$.

Beispiel 10. Wir führen Beispiel 8 fort und betrachten weiterhin den Argumentationsgraphen aus Abbildung 3. Zur Erinnerung, der Argumentationsgraph F_{ex} besitzt die folgenden vollständigen Extensionen:

$$\{a_1\}, \{a_1,a_4\}, \{a_1,a_6\}, \{a_1,a_3,a_6\}, \{a_1,a_4,a_6\}, \{a_1,a_4,a_5,a_7\}$$

Von diesen Extensionen ist die folgende minimal bzgl. Teilmengeninklusion und damit eine grundierte Extension:

$$\{a_1\}$$

Im obigen Beispiel gab es nur eine einzige grundierte Extension. Dies ist kein Zufall, tatsächlich ist die grundierte Extension in jedem Argumentationsgraphen eindeutig bestimmt.

Proposition 1. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph. Dann gibt es genau eine grundierte Extension $S_{gr} \subseteq A$.*

Wir verschieben den Beweis der obigen Proposition auf weiter unten, da uns das nötige Handwerkszeug für einen (eleganten) Beweis zu diesem Zeitpunkt noch fehlt. Wir erarbeiten uns dazu zunächst eine Charakterisierung der grundierten (und vollständigen) Semantik durch Fixpunkte der sogenannten *charakteristischen Funktion*.

Definition 8. Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph. Die *charakteristische Funktion* Δ_F von F ist die Funktion $\Delta_F : 2^A \to 2^A$ definiert durch

$$\Delta_F(S) = \{a \in A \mid S \text{ verteidigt } a\}$$

für alle $S \subseteq A$.

Für eine Menge S ist $\Delta_F(S)$ also die Menge aller Argumente, die von S verteidigt werden.

Beispiel 11. Wir führen Beispiel 3 fort und betrachten weiterhin den Argumentationsgraphen aus Abbildung 3. Hier gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}
\Delta_{F_{\text{ex}}}(\emptyset) &= \{a_1\}\\
\Delta_{F_{\text{ex}}}(\{a_1\}) &= \{a_1\}\\
\Delta_{F_{\text{ex}}}(\{a_3,a_7\}) &= \{a_1,a_5,a_6\}\\
\Delta_{F_{\text{ex}}}(\{a_2,a_8\}) &= \{a_1,a_4,a_6\}
\end{aligned}$$

Vollständige Extensionen können als Fixpunkte der Funktion Δ_F charakterisiert werden.

Lemma 10. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S ist zulässig gdw. S konfliktfrei ist und $S \subseteq \Delta_F(S)$.*

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen.

- „$\Rightarrow$“: Sei S zulässig. Die Konfliktfreiheit von S folgt nach Definition. Weiterhin gilt, dass jedes $a \in S$ von S verteidigt wird und damit $S \subseteq \Delta_F(S)$.
- „$\Leftarrow$“: Sei S konfliktfrei und $S \subseteq \Delta_F(S)$. Jedes $a \in S$ wird also von S verteidigt, damit ist S zulässig. □

Proposition 2. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S ist vollständig gdw. S konfliktfrei ist und $S = \Delta_F(S)$.*

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen.

- „$\Rightarrow$“: Sei S vollständig. Die Konfliktfreiheit von S folgt nach Definition. Weiterhin gilt, dass jedes $a \in S$ von S verteidigt wird und es gibt kein $b \in A \setminus S$, das von S verteidigt wird. Es folgt $S = \Delta_F(S)$.
- „$\Leftarrow$“: Sei S konfliktfrei und $S = \Delta_F(S)$. Nach Lemma 10 ist S also zulässig. Angenommen, S ist nicht vollständig. Dann gibt es $a \in A \setminus S$, das von S verteidigt wird, also $a \in \Delta_F(S)$, im Widerspruch zur Annahme. Es folgt, dass S vollständig ist. □

Eine schöne Eigenschaft der charakteristischen Funktion ist ihre Monotonie:

Lemma 11. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S, S' \subseteq A$. Gilt $S_1 \subseteq S_2$, so folgt $\Delta_F(S_1) \subseteq \Delta_F(S_2)$.*

Beweis. Es gelte $S_1 \subseteq S_2$ und $a \in \Delta_F(S_1)$. Für jedes $b \in A$ mit bRa gibt es also ein $c \in S_1$ mit cRb. Wegen $S_1 \subseteq S_2$ gibt es also für jedes $b \in A$ mit bRa ein $c \in S_2$ mit cRb. Es folgt $a \in \Delta_F(S_2)$ und damit $\Delta_F(S_1) \subseteq \Delta_F(S_2)$. □

Eine wiederholte Anwendung der charakteristischen Funktion stellen wir durch Potenzierung dar. Für einen Argumentationsgraphen $F = (A,R)$ und $S \subseteq A$ schreiben wir

$$\begin{aligned}
\Delta_F^0(S) &= S \\
\Delta_F^1(S) &= \Delta_F(S) \\
\Delta_F^i(S) &= \Delta_F(\Delta_F^{i-1}(S))
\end{aligned}$$

für alle $i > 1$. Also ist beispielsweise $\Delta_F^3(S) = \Delta_F(\Delta_F(\Delta_F(S)))$. Eine wiederholte Anwendung der charakteristischen Funktion auf die leere Menge ergibt eine Folge von monoton wachsenden und schließlich konvergierenden Mengen.

Lemma 12. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$\emptyset \subseteq \Delta_F^1(\emptyset) \subseteq \Delta_F^2(\emptyset) \subseteq \ldots \subseteq \Delta_F^{k-1}(\emptyset) \subseteq \Delta_F^k(\emptyset) = \Delta_F^{k+1}(\emptyset) = \ldots$$

wobei alle Teilmengenbeziehungen $\Delta_F^i(\emptyset) \subseteq \Delta_F^{i+1}(\emptyset)$ für $i < k$ echt sind.

Beweis. Es gilt zunächst $\Delta_F^i(\emptyset) \subseteq \Delta_F^{i+1}(\emptyset)$ für alle $i \geq 0$ via Induktion nach i:

- Induktionsanfang $i = 0$:
  $\Delta_F^0(\emptyset) = \emptyset \subseteq \Delta_F^1(\emptyset)$ gilt, da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.
- Induktionsschritt $i \to i+1$:
  Es gelte $\Delta_F^{i-1}(\emptyset) \subseteq \Delta_F^i(\emptyset)$. Nach Lemma 11 gilt dann auch

  $$\Delta_F(\Delta_F^{i-1}(\emptyset)) \subseteq \Delta_F(\Delta_F^i(\emptyset))$$

  und dies ist äquivalent zu $\Delta_F^i(\emptyset) \subseteq \Delta_F^{i+1}(\emptyset)$.

Wegen $\Delta_F^i(\emptyset) \subseteq \Delta_F^{i+1}(\emptyset)$ für alle $i \geq 0$ folgt, dass es ein (kleinstes) k geben muss mit $\Delta_F^k(\emptyset) = \Delta_F^{k+1}(\emptyset)$ (da es nur endlich viele Argumente gibt). Dann gilt auch $\Delta_F^k(\emptyset) = \Delta_F^{k'}(\emptyset)$ für alle $k' > k$ und somit die Aussage. □

Die obige Beobachtung gibt uns eine Berechnungsvorschrift für eine grundierte Extension.

Proposition 3. *Sei $F = (A, R)$ ein Argumentationsgraph. Dann ist*

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_F^i(\emptyset)$$

eine grundierte Extension.

Beweis. Sei k wie in Lemma 12. Dann gilt

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_F^i(\emptyset) = \Delta_F^k(\emptyset)$$

Wegen $\Delta_F^k(\emptyset) = \Delta_F^{k+1}(\emptyset)$ folgt, dass S vollständig ist. Noch zu zeigen ist, dass S eine minimale vollständige Extension (bzgl. der Teilmengenbeziehung) ist. Angenommen es gibt eine vollständige Extension S' mit $S' \subsetneq S$. Sei l so, dass

$$\Delta_F^{l-1}(\emptyset) \subseteq S' \qquad \text{und} \qquad \Delta_F^l(\emptyset) \not\subseteq S'$$

Die Zahl l muss eindeutig bestimmt sein, da $\emptyset = \Delta_F^0(\emptyset) \subseteq S'$ und $S = \Delta_F^k(\emptyset) \not\subseteq S'$ (irgendwann bei der Konstruktion von S müssen wir von S' abweichen). Sei $a \in \Delta_F^l(\emptyset) \setminus S'$. Dann wird a von $\Delta_F^{l-1}(\emptyset)$ verteidigt. Wegen $\Delta_F^{l-1}(\emptyset) \subseteq S'$ wird a aber auch von S' verteidigt. Dies ist im Widerspruch zur Vollständigkeit von S'. Es folgt, dass S grundiert ist. □

Wir sind nun in der Lage, Proposition 1 zu beweisen.

Beweis von Proposition 1. Nach Proposition 3 ist

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_F^i(\emptyset)$$

eine grundierte Extension. Angenommen, es gibt noch eine weitere grundierte Extension $S' \neq S$. Ähnlich wie im Beweis zu Proposition 3 sei l so, dass

$$\Delta_F^{l-1}(\emptyset) \subseteq S' \qquad \text{und} \qquad \Delta_F^l(\emptyset) \not\subseteq S'$$

Sei $a \in \Delta_F^l(\emptyset) \setminus S'$. Dann wird a von $\Delta_F^{l-1}(\emptyset)$ verteidigt. Wegen $\Delta_F^{l-1}(\emptyset) \subseteq S'$ wird a aber auch von S' verteidigt. Dies ist im Widerspruch zur Vollständigkeit (und damit Grundiertheit) von S'. Es folgt, dass S die *einzige* grundierte Extension ist. □

Beispiel 12. Wir betrachten den Argumentationsgraphen $F_{\text{ex2}} = (A_{\text{ex2}}, R_{\text{ex2}})$ gegeben durch

$$A_{\text{ex2}} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$
$$R_{\text{ex2}} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_5)\}$$

Der Argumentationsgraph F_{ex2} ist in Abbildung 4 dargestellt. Eine iterative Anwendung von $\Delta_{F_{\text{ex2}}}$ auf die leere Menge ergibt

$$\emptyset =: S_0$$
$$\Delta_{F_{\text{ex2}}}(S_0) = \{a_1\} =: S_1$$
$$\Delta_{F_{\text{ex2}}}(S_1) = \Delta_{F_{\text{ex2}}}^2(S_0) = \{a_1, a_3\} =: S_2$$
$$\Delta_{F_{\text{ex2}}}(S_2) = \Delta_{F_{\text{ex2}}}^3(S_0) = \{a_1, a_3, a_5\} =: S_3$$
$$\Delta_{F_{\text{ex2}}}(S_3) = \Delta_{F_{\text{ex2}}}^4(S_0) = \{a_1, a_3, a_5\} = S_3$$

und damit ist $S_1 \cup S_2 \cup \ldots = S_3 = \{a_1, a_3, a_5\}$ die grundierte Extension von F_{ex2}.

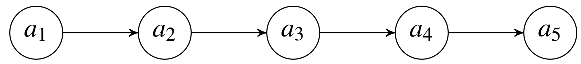

Abbildung 4: Der Argumentationsgraph F_{ex2} aus Beispiel 12.

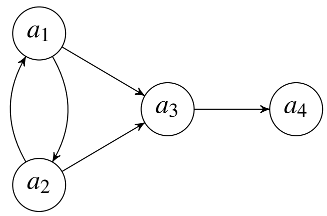

Abbildung 5: Der Argumentationsgraph F_{ex3} aus Beispiel 13.

Ähnlich wie Proposition 1 und Proposition 3 lässt sich auch die folgende Aussage beweisen (Übungsaufgabe).

Proposition 4. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und S_{gr} die grundierte Extension von F. Für jede vollständige Extension $S \subseteq A$ gilt $S_{gr} \subseteq S$.*

Aus obiger Aussage und der Tatsache, dass die grundierte Extension selbst vollständig ist, folgt auch die folgende Charakterisierung der grundierten Extension.

Korollar 3. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S_1,\ldots,S_n$ die vollständigen Extensionen von F. Dann ist $S_1 \cap \ldots \cap S_n$ die grundierte Extension von F.*

Da jede präferierte Extension vollständig ist, folgt auch, dass die grundierte Extension Teilmenge jeder präferierten Extension ist. Eine Gleichheit der grundierten Extension mit dem Schnitt aller präferierten Extensionen (wie im obigen Korollar für die vollständigen Extensionen gezeigt wurde), gilt allerdings nicht.

Beispiel 13. Wir betrachten den Argumentationsgraphen $F_{\text{ex3}} = (A_{\text{ex3}}, R_{\text{ex3}})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} A_{\text{ex3}} &= \{a_1,a_2,a_3,a_4\} \\ R_{\text{ex3}} &= \{(a_1,a_2),(a_2,a_1),(a_1,a_3),(a_2,a_3),(a_3,a_4)\} \end{aligned}$$

Der Argumentationsgraph F_{ex3} ist in Abbildung 5 dargestellt. Hier gibt es zwei präferierte Extensionen $S_1 = \{a_1,a_4\}$ und $S_2 = \{a_2,a_4\}$ mit $S_1 \cap S_2 = \{a_4\}$. Die grundierte Extension S_{gr} von F_{ex3} ist $S_{\text{gr}} = \emptyset$.

Die stärkste allgemeine Aussage, die wir zum Verhältnis der grundierten Extension mit dem Schnitt aller präferierten Extensionen geben können, ist die folgende.

Korollar 4. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph, $S_1,\ldots,S_n$ die präferierten Extensionen von F und S_{gr} die grundierte Extension. Dann gilt $S_{gr} \subseteq S_1 \cap \ldots \cap S_n$.*

2.1.6 Die stabile Semantik

Wir betrachten nun noch die letzte der vier klassischen Semantiken, nämlich die *stabile Semantik*.

Definition 9. Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S heißt *stabile Extension* von F gdw. S vollständig ist und es für jedes $a \in A \setminus S$ ein $b \in S$ mit bRa gibt.

Die stabile Semantik stellt eine sehr „aggressive“ Semantik dar, da jedes Argument entweder akzeptiert werden oder angegriffen werden muss.

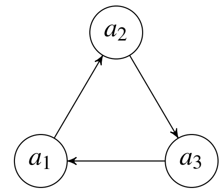

Abbildung 6: Der Argumentationsgraph F_{ex4} aus Beispiel 15.

Beispiel 14. Wir führen Beispiel 8 fort und betrachten weiterhin den Argumentationsgraphen aus Abbildung 3. Zur Erinnerung, der Argumentationsgraph F_{ex} besitzt die folgenden vollständigen Extensionen:

$$\{a_1\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_6\}, \{a_1, a_3, a_6\}, \{a_1, a_4, a_6\}, \{a_1, a_4, a_5, a_7\}$$

Von diesen Extensionen sind die folgenden Mengen stabil:

$$\{a_1, a_4, a_6\}, \{a_1, a_4, a_5, a_7\}$$

Beachten Sie insbesondere, dass die präferierte Extension $\{a_1, a_3, a_6\}$ nicht stabil ist, da das Argument a_8 nicht von dieser Menge angegriffen wird.

Ähnlich wie bei der präferierten Semantik ist die Forderung nach Vollständigkeit schon implizit in der zweiten Bedingung enthalten. Tatsächlich lassen sich stabile Extensionen wie folgt charakterisieren.

Lemma 13. *Sei $F = (A, R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S ist eine stabile Extension gdw. S konfliktfrei ist und für jedes $a \in A \setminus S$ gibt es ein $b \in S$ mit bRa.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass wenn S konfliktfrei ist und es für jedes $a \in A \setminus S$ ein $b \in S$ gibt mit bRa, die Menge S stabil ist (die anderen Richtung folgt nach Definition). Wir zeigen also noch, dass S zulässig und vollständig ist.

- *Zulässigkeit*: Da S konfliktfrei ist und jedes Argument außerhalb von S angreift, wird jedes Argument in S automatisch verteidigt. Damit ist S zulässig.
- *Vollständigkeit*: Da jedes Argument entweder in S ist oder von einem $a \in S$ angegriffen wird, kann kein Argument außerhalb von S verteidigt werden (ansonsten wäre S nicht konfliktfrei). □

Weiterhin können stabile Extensionen wie folgt beschrieben werden.

Lemma 14. *Sei $F = (A, R)$ ein Argumentationsgraph und $S \subseteq A$. Die Menge S ist eine stabile Extension gdw. $S \cap S_F^+ = \emptyset$ und $S \cup S_F^+ = A$.*

Beweis. Die Bedingung $S \cap S_F^+ = \emptyset$ ist äquivalent zur Konfliktfreiheit von S (siehe Lemma 2) und die Bedingung $S \cup S_F^+ = A$ ist äquivalent dazu, dass jedes Argument in A in S ist oder von S angegriffen wird. □

Die stabile Semantik ist im Unterschied zu den bisher betrachteten Semantiken nicht immer wohldefiniert. Mit anderen Worten, es gibt Argumentationsgraphen, die über keine stabilen Extensionen verfügen.

Beispiel 15. Wir betrachten den Argumentationsgraphen $F_{\text{ex4}} = (A_{\text{ex4}}, R_{\text{ex4}})$ gegeben durch

$$A_{\text{ex4}} = \{a_1, a_2, a_3\}$$
$$R_{\text{ex4}} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$$

Der Argumentationsgraph F_{ex4} ist in Abbildung 6 dargestellt. Hier gibt es nur eine zulässige Menge $\emptyset$, die sogleich grundierte Extension und die einzige vollständige und präferierte Extension ist. Allerdings ist $\emptyset$ offensichtlich nicht stabil.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{gr} \arrow[dr] & & & \\
\mathsf{st} \arrow[r] & \mathsf{pr} \arrow[r] & \mathsf{co} \arrow[r] & \mathsf{ad} \arrow[r] & \mathsf{cf}
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 7: Zusammenhänge zwischen semantischen Begriffen. Eine Kante $\sigma_1 \to \sigma_2$ heißt, dass für alle Argumentationsgraphen F, die Beziehung $\sigma_1(F) \supseteq \sigma_2(F)$ gilt.

Existieren jedoch stabile Extensionen, so sind sie automatisch auch präferiert.

Proposition 5. *Ist S eine stabile Extension, dann ist S auch eine präferierte Extension.*

Beweis. Sei S eine stabile Extension. Wir müssen zeigen, dass S zulässig ist und es keine größere zulässige Menge gibt.

- *Zulässigkeit*: S ist vollständig und damit zulässig nach Definition.
- *Maximalität*: Da S alle Argumente außerhalb von S angreift, würde die Hinzunahme eines weiteren Arguments zu einer nicht-konfliktfreien (und damit nicht zulässigen) Menge führen. □

Wir schließen den Grundlagenteil zur abstrakten Argumentation mit einigen zusammenfassenden Bemerkungen zu den Zusammenhängen zwischen den einzelnen semantischen Begriffen ab. Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph. Wir vereinbaren die folgenden Abkürzungen[3]:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{cf}(F) &= \{S \subseteq A \mid S \text{ ist konfliktfrei in } F\}\\
\mathsf{ad}(F) &= \{S \subseteq A \mid S \text{ ist zulässig in } F\}\\
\mathsf{co}(F) &= \{S \subseteq A \mid S \text{ ist eine vollständige Extension von } F\}\\
\mathsf{pr}(F) &= \{S \subseteq A \mid S \text{ ist eine präferierte Extension von } F\}\\
\mathsf{gr}(F) &= \{S \subseteq A \mid S \text{ ist eine grundierte Extension von } F\}\\
\mathsf{st}(F) &= \{S \subseteq A \mid S \text{ ist eine stabile Extension von } F\}
\end{aligned}
$$

Es gelten die folgenden Zusammenhänge, die direkt aus den Definitionen der jeweiligen Begriffe ableitbar sind.

Korollar 5. *Sei $F = (A,R)$ ein Argumentationsgraph. Dann gilt*

1. $\mathsf{ad}(F) \subseteq \mathsf{cf}(F)$
2. $\mathsf{co}(F) \subseteq \mathsf{ad}(F)$
3. $\mathsf{pr}(F) \subseteq \mathsf{co}(F)$
4. $\mathsf{gr}(F) \subseteq \mathsf{co}(F)$
5. $\mathsf{st}(F) \subseteq \mathsf{pr}(F)$

Abbildung 7 visualisiert die obigen Zusammenhänge zwischen den einzelnen semantischen Begriffen.

[3]Die Abkürzungen leiten sich aus den entsprechenden englischen Fachbegriffen ab: *conflict-freeness* (Konfliktfreiheit), *admissibility* (Zulässigkeit), *completeness* (Vollständigkeit), *preferredness* (Präferiertheit), *groundedness* (Grundiertheit) und *stability* (Stabilität)