Prof. Dr. Christoph Beierle

Modul 64212

Deduktions- und Inferenzsysteme

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Die Frage ist nun natürlich: Wie können wir die Eigenschaften wie Terminierung eines Regelsystems und Existenz eindeutiger Normalformen bzgl. eines Regelsystems sicherstellen? Können wir aus den Gleichungen (G1),...,(G3) das Regelsystem (R1),...,(R10) konstruieren? Auf diese Fragestellungen werden wir i.f. eingehen. Als zentralen Punkt dieser Kurseinheit werden wir das Knuth-Bendix-Vervollständigungsverfahren vorstellen, das es ermöglicht, das Gleichungssystem (G1), (G2), (G3) *automatisch* in das Regelsystem (R1),...,(R10) zu transformieren.

5.2 Allgemeine Ersetzungssysteme

Bevor wir Termersetzungssysteme formal definieren, führen wir allgemeine Ersetzungssysteme ein, von denen Termersetzungssysteme eine spezielle Variante sind. Dieses Vorgehen hat sich in der neueren Literatur zu diesem Thema weitgehend durchgesetzt und ist vorteilhaft, da viele der wichtigsten Eigenschaften (z. B. Normalformen und deren Existenz oder Konfluenz) von allgemeiner Natur sind und daher für allgemeine Ersetzungssysteme untersucht werden können.

5.2.1 Normalformen und Konfluenz

Definition 4 (Ersetzungssystem) Sei M eine Menge und $\to$ eine binäre Relation auf M.

1. Das Paar $\mathcal{R} = (M, \to)$ heißt *Ersetzungssystem*. Mit $a \to b$ bezeichnen wir die (Einschritt-)Ersetzungsrelation, wobei $(a, b) \in \to$.

2. $\to^+$ bezeichnet den *transitiven Abschluß* von $\to$. (D.h., aus $a \to b$ folgt $a \to^+ b$, und aus $a \to^+ b$ und $b \to^+ c$ folgt $a \to^+ c$).

3. $\to^*$ bezeichnet den *transitiven und reflexiven Abschluß* von $\to$. (D.h., $a \to^* b$ gdw. $a \to^+ b$ oder $a = b$.)

4. $\leftrightarrow$ bezeichnet den *symmetrischen Abschluß* von $\to$. (D.h., $a \leftrightarrow b$ gdw. $a \to b$ oder $b \to a$.

5. $\leftrightarrow^*$ bezeichnet den *Äquivalenzabschluß* von $\to$. (D.h. den reflexiven, transitiven und symmetrischen Abschluß von $\to$.) □

Für die folgenden Definitionen nehmen wir an, daß $\mathcal{R} = (M, \to)$ ein Ersetzungssystem ist.

Definition 5 (Noethersch, terminierend) Ein Ersetzungssystem heißt *Noethersch* oder *terminierend*, falls es keine unendliche Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gibt mit $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \ldots$. □

Definition 6 (irreduzibel, Normalform) Ein Element $m \in M$ heißt *irreduzibel* (bzgl. $\mathcal{R}$), falls es kein $m' \in M$ gibt, so daß $m \to m'$. Falls $m \to^* m'$ gilt und m' irreduzibel ist, ist m' eine *Normalform* von m. □

Beachten Sie, daß es nach dieser Definition zu einem Element durchaus verschiedene Normalformen geben kann. Dies ist natürlich nicht wünschenswert. Die *Konfluenz* eines Ersetzungssystems garantiert, daß zwei aus einem Element m abgeleitete Elemente m_1, m_2 auch wieder zu einem Element m' "zusammengeführt" werden können. Bei der *lokalen Konfluenz* gilt diese Eigenschaft zumindest immer dann, wenn m_1 und m_2 in jeweils *einem Schritt* aus m abgeleitet wurden. Anschaulich läßt sich das so darstellen:

Konfluenz:

$$
\begin{tikzcd}
& m \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
m_1 \arrow[dr, "*"'] & & m_2 \arrow[dl, "*"] \\
& m' &
\end{tikzcd}
$$

lokale Konfluenz:

$$
\begin{tikzcd}
& m \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
m_1 \arrow[dr, "*"'] & & m_2 \arrow[dl, "*"] \\
& m' &
\end{tikzcd}
$$

Definition 7 (Konfluenz, lokale Konfluenz)

- $\mathcal{R}$ heißt *konfluent* gdw. für alle $m, m_1, m_2 \in M$ mit $m \to^* m_1$ und $m \to^* m_2$ ein Element $m' \in M$ existiert, so daß $m_1 \to^* m'$ und $m_2 \to^* m'$.
- $\mathcal{R}$ heißt *lokal konfluent* gdw. für alle $m, m_1, m_2 \in M$ mit $m \to m_1$ und $m \to m_2$ ein Element $m' \in M$ existiert, so daß $m_1 \to^* m'$ und $m_2 \to^* m'$.

□

Konfluenz von $\mathcal{R}$ garantiert nun die Eindeutigkeit von Normalformen.

Theorem 8 (Eindeutigkeit von Normalformen) *Ist $\mathcal{R}$ konfluent, so gibt es für jedes $m \in M$ höchstens eine Normalform.*

Beweis: Angenommen, m hätte zwei verschiedene Normalformen m_1 und m_2. Dann müßte es nach der Definition der Konfluenz wegen $m \to^* m_1$ und $m \to^* m_2$ aber ein m' geben, so daß $m_1 \to^* m'$ und $m_2 \to^* m'$. Also können m_1 und m_2 nicht verschiedene Normalformen sein. ■

Leider genügt die Konfluenz allein aber noch nicht, um für jedes Element auch tatsächlich eine Normalform zu haben. $\mathcal{R}$ kann konfluent sein, aber gleichzeitig nicht terminierend, so daß für ein t eine unendliche Reduktionskette existiert, aber eben keine Normalform.

Beispiel 9 (Normalformen) In dem Ersetzungssystem

$$a \longrightarrow b \qquad\qquad c \rightleftarrows d$$

gibt es für a und b Normalformen (in beiden Fällen ist b Normalform), aber weder für c noch für d gibt es eine Normalform. □

Falls wir nun zusätzlich die Terminierung fordern, haben wir die gewünschte Eigenschaft bzgl. Normalformen.

Theorem 10 (Existenz von Normalformen) *Ist $\mathcal{R}$ terminierend, so gibt es für jedes $m \in M$ mindestens eine Normalform.*

Beweis: Folgt unmittelbar aus den Definitionen für terminierend und Normalform, da es keine unendlich lange Ableitungskette geben kann. ■

Aus den beiden letzten Theoremen folgt unmittelbar:

Theorem 11 (Existenz und Eindeutigkeit von Normalformen) *Ist $\mathcal{R}$ konfluent und terminierend, so gibt es für jedes $m \in M$ genau eine Normalform.*

I.a. ist die Überprüfung der lokalen Konfluenz einfacher als die Überprüfung der Konfluenz von $\mathcal{R}$. Offensichtlich ist jedes konfluente $\mathcal{R}$ auch lokal konfluent. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 12 (Konfluenz $\neq$ lokale Konfluenz) Das Ersetzungssystem

$$\begin{array}{lccc}
R_1: & b & \rightarrow & a \\
R_2: & b & \rightarrow & c \\
R_3: & c & \rightarrow & b \\
R_4: & c & \rightarrow & d
\end{array}$$

ist zwar *lokal konfluent*, aber nicht konfluent. Lokale Konfluenz kann man überprüfen, indem man die Bedingung dafür für alle Elemente a, b, c, d überprüft. Die fehlende Konfluenz läßt sich durch ein Beispiel zeigen: aus b kann man a und d ableiten, es gibt aber kein Element t, das man aus a und aus d ableiten kann. Beachten Sie, daß das System nicht Noethersch (d.h. nicht terminierend) ist, da es eine unendlich lange Ersetzungsfolge $b \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow b \ldots$ gibt. Die folgende Abbildung soll die obigen Sachverhalte noch einmal verdeutlichen:

$$a \longleftarrow b \leftrightarrows c \longrightarrow d$$

□

Es gilt aber der wichtige Satz, daß bei terminierendem $\mathcal{R}$ Konfluenz und lokale Konfluenz gleichbedeutend sind.