Prof. Dr. Hansjörg Linden, Dr. Gerhard Garske

Modul 61312

Lineare Operatoren im Hilbertraum

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

Studierhinweise zu Kurseinheit 7

Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren sagt aus, dass sich jeder selbstadjungierte Operator A in der Form $A = \widehat{E}(\mathsf{u}_1)$ darstellen lässt, wobei $\mathsf{u}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die identische Funktion, $\mathsf{u}_1(\lambda) := \lambda$, ist. D.h. zu jedem selbstadjungierten Operator existiert eine Spektralschar E mit dieser Eigenschaft. Weil diese außerdem eindeutig bestimmt ist, spricht man von der Spektralschar des Operators. Der Beweis ist sehr umfangreich, und niemand wird von Ihnen verlangen, dass Sie ihn in allen Einzelheiten reproduzieren können. Sie müssen aber seine Struktur kennen und sollten den eigentlichen Beweisgang, der sich auf verschiedene Hilfsmittel stützt, gründlich durchgearbeitet haben. Dazu gehört auch, dass Sie sich Klarheit über die Hilfsaussagen verschaffen. Zumindest die Tatsachen müssen Ihnen hier vertraut sein. Deren Beweise, die mit unterschiedlichem Aufwand geführt werden, verlaufen zum großen Teil mit typischen Hilbertraummethoden, sind also nützliche Übungsobjekte; jedoch ist das genaue Durcharbeiten anderer Teile dieser Kursheinheit wichtiger. Grob besehen verläuft der Beweis des Spektralsatzes so wie man es auch auf den ersten Blick vermuten würde: Es wird eine Spektralschar angegeben und dann dafür gezeigt, dass das die Spektralschar für den Operator ist. Dabei ist die Angabe von E gar nicht einmal kompliziert. Man muß sich nur die Definition der Mengen $\mathcal{M}([-\lambda, \lambda]; A)$ klarmachen und dann noch ein Verschiebungsargument verwenden. Der Beweis dafür, dass E tatsächlich die Spektralschareigenschaften hat und dass $A = \widehat{E}(\mathsf{u}_1)$ gilt, erfordert allerdings einen erheblichen technischen Aufwand.

Für konkrete Fragen ist die explizite Angabe der Spektralschar in diesem Beweis von sehr begrenztem Nutzen, da die abstrakt definierten Mengen $\mathcal{M}([-\lambda, \lambda]; A)$ oft nur schwer darstellbar sind. Es ist eher die Ausnahme, dass man die Spektralschar in einer Form angeben kann, die in befriedigend direktem Zusammenhang mit dem Operator steht. Jedoch ist die abstrakte Tatsache ihrer Existenz von großer Bedeutung. Die Beispiele 3.4.9, 3.4.11 und 3.4.15 haben also auch eher theoretischen Wert. Dennoch lassen sich daran einige typische Aspekte der Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren studieren. Das gilt auch für den wichtigen Satz 3.4.12, der besagt, dass sich jeder selbstadjungierte Operator als Multiplikationsoperator mit der Funktion u_1 darstellen lässt, wenn man nur den zugrundeliegenden Funktionenraum geeignet wählt. Das Wichtigste an dem Beweis ist die Konstruktion dieses Funktionenraumes.

Das wenigstens sollten Sie neben der Aussage des Satzes behalten. Der restliche Teil des Abschnittes 3.4 enthält einen ganz kleinen Ausschnitt von Anwendungen des Spektralsatzes. Ein sehr wichtiger Aspekt dabei ist, dass man nun recht allgemeine Funktionen eines selbstadjungierten Operators untersuchen kann, was wir für spezielle Funktionen, nämlich Polynome, in 3.1 ja schon ansatzweise getan haben. Erste Resultate in dieser Richtung sind die Definition des Betrages und die polare Zerlegung eines abgeschlossenen linearen Operators. Hier sind die Definitionen und Resultate wichtig. Beim Durcharbeiten der Beweise zu den Punkten 13 und 16 - 19 fördern Sie wieder Ihre Vertrautheit mit diesen Begriffen. Hier können sie den Aufwand je nach Ihren Möglichkeiten dosieren.

Der Abschnitt 3.5 über das Spektrum selbstadjungierter Operatoren lässt sich in drei Teile gliedern: In 1 - 3 erhalten wir Charakterisierungen des Spektrums und seiner bisher schon behandelten Unterteilungen über Eigenschaften der Spektralschar. In 4 - 6 wird eine weitere Unterteilung des Spektrums in diskretes und wesentliches Spektrum vorgenommen und ebenfalls über die Spektralschar charakterisiert. Auch hier gilt: Die Definitionen und Aussagen der Sätze sind wichtig, das Durcharbeiten der Beweise ist sehr empfehlenwert, weil Sie hier den Umgang mit Spektralscharen üben können. Im dritten Teil werden aus dem Bisherigen Folgerungen gezogen, die für praktische und insbesondere numerische Fragen von großer Bedeutung sind. Sie sollten vor allem beim Rayleighschen Prinzip 7 und beim Satz von Fischer-Polya die Aussagen in groben Zügen rekonstruieren können. Die Beweise sind gar nicht so schwierig. Wir empfehlen Ihnen hier wieder das Studium wenigstens der Beweisideen. Entscheidend bei diesem letzten Teil von 3.5 ist, dass Sie von diesen Möglichkeiten wissen, wenn Sie mit konkreten Fragen konfrontiert sind. Die angemessene Würdigung der Ergebnisse ist ohne umfangreiche praktische Untersuchungen sicher nicht möglich.

3.4 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Wir hatten im letzten Abschnitt gesehen, dass für eine beliebige Spektralschar E in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine reellwertige E-messbare Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der in 3.3.10 definierte lineare Operator $\widehat{E}(u)$ selbstadjungiert ist (vgl. 3.3.16e)). Der Hauptsatz der Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum (der auf Hilbert und von Neumann zurückgeht) besagt nun, dass umgekehrt zu jedem selbstadjungierten Operator A genau eine Spektralschar E existiert derart, dass $A = \int \lambda\, dE(\lambda)$ (d.h. also $A = \widehat{E}(u)$ mit $u(\lambda) = \lambda$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt. Für diesen Satz gibt es sehr viele Beweise (die alle umfangreich sind); eine Aufstellung davon mit Literaturhinweisen können Sie Dunford-Schwartz [6], S. 927, entnehmen. Wir haben uns entschlossen, einen neueren geometrischen Beweis des Spektralsatzes nach H. Leinfelder (A geometric proof of the spectral theorem for unbounded self-adjoint operators, Mathematische Annalen 242 (1979),85 - 96) darzustellen, der verhältnismäßig direkt mit den Wertebereichen der orthogonalen Projektionen des Spektralmaßes arbeitet. Nun zur genauen Formulierung des Spektralsatzes.

3.4.1 Satz

Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren, Spektralschar eines selbstadjungierten Operators

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau eine Spektralschar E in $\mathcal{H}$, so dass

$$A = \int \lambda\, dE(\lambda)\,.$$

E heißt die Spektralschar von A.

Die Grobstruktur des Beweises ist leicht zu überblicken: Es wird die Spektralschar E angegeben und anschließend gezeigt, dass dafür $A = \int \lambda\, dE(\lambda)$ gilt. Gemessen am Gesamtaufwand des Beweises ist die Angabe von E überraschend einfach, und dennoch ist das die Hauptidee des Beweises. Wir werden so vorgehen, dass wir zunächst in einer Reihe von Vorüberlegungen notwendige Bedingungen für die Spektralschar angeben. Daraus können wir ablesen, wie E zu definieren ist, und erhalten außerdem das wesentliche Hilfsmittel für den Existenzbeweis. Wenn wir nämlich bereits wissen, dass A eine Spektralschar E besitzt, lassen sich die Wertebereiche der Projektionen $E([-\lambda, \lambda])$ für jedes $\lambda \geq 0$ einfach darstellen durch Mengen, die wir mit $\mathcal{M}([-\lambda, \lambda]; A)$ bezeichnen. Damit ist aber, wie ein einfaches Translationsargument zeigt, die gesamte Spektralschar bereits festgelegt. Weit größere Mühe beim Beweis des Spektralsatzes machen dann die Beweise der Aussagen, dass einerseits die über die Mengen $\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)$ definierte Schar von Projektionen tatsächlich eine Spektralschar ist und dass andererseits dies auch die Spektralschar von A ist. Wir müssen dazu eine Reihe von Eigenschaften der Mengen $\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)$ nachweisen, die einigermaßen leicht einzusehen wären, wenn wir wüßten, dass es sich dabei um die Wertebereiche von Projektionen handelt, die von einer Spektralschar stammen; aber das können wir ja gerade nicht voraussetzen. Dennoch ist es nützlich, diesen Aspekt nicht aus dem Auge zu verlieren. Das hilft jedenfalls bei der Einordnung der Einzelaussagen und zur Orientierung im Gesamtbeweis. Für das Durcharbeiten des Beweises empfehlen wir Ihnen, sich zunächst mit der Definition der Mengen $\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)$ und allgemeiner der Mengen $\mathcal{M}(J;A)$ zu beschäftigen, sich anschließend die Aussagen über deren Eigenschaften klarzumachen ohne direkt in die entsprechenden Beweise einzusteigen und dann sofort an den eigentlichen Beweis des Spektralsatzes zu gehen. Der wird in zwei Phasen geführt: einmal für den Fall beschränkter selbstadjungierter Operatoren und dann durch einen entsprechenden Grenzprozeß für i.a. unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren. Der wichtigste Teil beim Nachweis der Gleichung $A = \int \lambda \, dE(\lambda)$ ist die Abschätzung der Differenz $\int \lambda \, dE(\lambda) - \int \mathsf{u}_1^{(l)}(\lambda) dE(\lambda)$, wobei $\mathsf{u}_1^{(l)}$ eine Treppenfunktion ist, deren Bild diesmal tatsächlich wie eine Treppe mit konstanter Stufenbreite (unmittelbar oberhalb der Winkelhalbierenden) aussieht. Das entscheidende Hilfsmittel für diese Abschätzung wird in 3.4.6b) bereitgestellt. In einem zweiten Durchgang sollten Sie sich dann mit den Einzelheiten der Beweise beschäftigen. Da dabei eine ganze Reihe verschiedener Aspekte des bisher behandelten Stoffes zum Tragen kommt, eignet sich das auch gut als Ansatz für eine allgemeine Wiederholung.

Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir zur Entwicklung notwendiger Bedingungen für die Spektralschar. Es sei also E eine Spektralschar in dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $A := \widehat{E}(\mathsf{u}_1)$ mit $\mathsf{u}_1(\lambda) := \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Feststellung, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 0$ und jedes $f \in \mathcal{R}(E([-\lambda,\lambda]))$ gilt $f \in \mathcal{D}(A)$ und

$$\|Af\| \leq \lambda \|f\| .$$

Das ist eine einfache Folgerung aus den Eigenschaften des E-Integrals: Wegen 3.3.16c) und 3.3.15c) ist $\mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\widehat{E}(\chi_{[-\lambda,\lambda]})\right) = \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1\chi_{[-\lambda,\lambda]})\right) = \mathcal{H}$, weil

$\chi_{[-\lambda,\lambda]}$ und $\mathsf{u}_1\chi_{[-\lambda,\lambda]}$ beschränkt sind. Es folgt $\widehat{E}\left(\chi_{[-\lambda,\lambda]}\right)f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right)$ für jedes $f \in \mathcal{H}$. Ist insbesondere $f \in \mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right)$, so gilt (wegen 3.3.5) $f = E([-\lambda,\lambda])f = \int \chi_{[-\lambda,\lambda]}(\mu)dE(\mu)f = \widehat{E}\left(\chi_{[-\lambda,\lambda]}\right)f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right)$; wir haben also $\mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right) \subset \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right)$. Wieder mit 3.3.16c) erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned} Af &= \widehat{E}(\mathsf{u}_1)f = \widehat{E}(\mathsf{u}_1)\widehat{E}\left(\chi_{[-\lambda,\lambda]}\right)f = \widehat{E}\left(\mathsf{u}_1\chi_{[-\lambda,\lambda]}\right)f \\ &= \int \mu\chi_{[-\lambda,\lambda]}(\mu)dE(\mu)f\,, \end{aligned}$$

und mit 3.3.8 können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \|Af\|^2 &= \int |\mu|^2\chi_{[-\lambda,\lambda]}(\mu)d\left(E(\mu)f,f\right) \\ &\le \lambda^2\int d\left(E(\mu)f,f\right) = \lambda^2\|f\|^2\,. \end{aligned}$$

Mit geringem Mehraufwand lässt sich einsehen, dass für diese f gilt $\|A^kf\| \le \lambda^k\|f\|$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Interessant und von entscheidender Bedeutung für den Spektralsatz ist nun die Tatsache, dass umgekehrt nur Elemente mit dieser Eigenschaft in $\mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right)$ liegen, d.h. die Mengen $\mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right)$ sind durch die Eigenschaft $\|A^kf\| \le \lambda^k\|f\|$, die ja formal mit der Spektralschar E nichts zu tun hat, charakterisiert. Das liefert die Möglichkeit, die Spektralschar über - jedenfalls prinzipiell - bekannte Eigenschaften von A anzugeben. Dieses Ergebnis wollen wir in dem folgenden Satz festhalten.

3.4.2 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, E eine Spektralschar in $\mathcal{H}$ und $A := \int \lambda\, dE(\lambda)$. Dann gilt:

a) $$A^k = \widehat{E}(\mathsf{u}_k) := \int \lambda^k dE(\lambda)\,,$$

wobei also die Funktionen $\mathsf{u}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ definiert werden durch $\mathsf{u}_k(\lambda) := \lambda^k$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$.

b) *$\mathcal{R}\left(E(J)\right) \subset \mathcal{D}^\infty(A) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^k)$ für jedes beschränkte Intervall $J \subset \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right) &= \mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A) \\ &:= \left\{f \in \mathcal{D}^\infty(A) : \|A^kf\| \le \lambda^k\|f\| \quad \textit{für jedes} \quad k \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \ge 0$.

Beweis.
a) Wir schließen durch vollständige Induktion nach k. Für $k = 0$ und $k = 1$ trifft die Behauptung zu wegen 3.3.15b) bzw. aufgrund der Voraussetzung. Wir nehmen an, dass sie auch richtig ist für $l = 0, 1, ..., k-1$, also $A^l = \widehat{E}(\mathsf{u}_l)$. Wegen $\mathsf{u}_k = \mathsf{u}_{k-1}\mathsf{u}_1$ folgt mit 3.3.16c)

$$\widehat{E}(\mathsf{u}_k) = \widehat{E}(\mathsf{u}_{k-1}\mathsf{u}_1) \supset \widehat{E}(\mathsf{u}_{k-1})\widehat{E}(\mathsf{u}_1) = A^{k-1}A = A^k$$

und

$$\mathcal{D}(A^k) = \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_{k-1})\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right) = \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_k)\right) \cap \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right).$$

Für den Beweis von $A^k = \widehat{E}(\mathsf{u}_k)$ brauchen wir daher nur noch $\mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_k)\right) \subset \mathcal{D}(A^k)$ zu zeigen, und dazu genügt es aufgrund der letzten Gleichungen, die Inklusion $\mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_k)\right) \subset \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right)$ nachzuweisen. Sei also $f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_k)\right)$. Wegen

$$|\lambda|^2 \leq \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad |\lambda| \leq 1\,, \\ |\lambda|^{2k} & \text{falls} \quad |\lambda| > 1 \end{cases}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ können wir abschätzen

$$\int |\mathsf{u}_1|^2 d\varphi_f \leq \int \chi_{[-1,1]} d\varphi_f + \int |\lambda|^{2k} d\varphi_f(\lambda) < \infty\,;$$

daraus folgt $f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right)$, d.h. $\mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_k)\right) \subset \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right)$.

b) Zum Nachweis von $\mathcal{R}(E(J)) \subset \mathcal{D}^\infty(A)$ wissen wir $E(J) = \widehat{E}(\chi_J)$ aufgrund von 3.3.5. Mit 3.3.16c) und 3.3.15c) folgt für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_k)\widehat{E}(\chi_J)\right) = \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_k\chi_J)\right) = \mathcal{H}\,,$$

da χ_J und $\mathsf{u}_k\chi_J$ beschränkt sind. Deshalb und aufgrund von a) gilt $\widehat{E}(\chi_J)f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_k)\right) = \mathcal{D}(A^k)$ für $f \in \mathcal{H}$. Da sich jedes $f \in \mathcal{R}(E(J))$ in der Form $\widehat{E}(\chi_J)f$ schreiben lässt, ist $\mathcal{R}(E(J)) \subset \mathcal{D}^\infty(A)$ nachgewiesen.
Sei nun $f \in \mathcal{R}(E([-\lambda,\lambda]))$. Dann können wir wegen $f = \widehat{E}\left(\chi_{[-\lambda,\lambda]}\right) f \in \mathcal{D}(A^k)$ mit 3.3.16c) umformen

$$\begin{aligned} A^k f &= \widehat{E}(\mathsf{u}_k)\widehat{E}\left(\chi_{[-\lambda,\lambda]}\right) f = \widehat{E}\left(\mathsf{u}_k\chi_{[-\lambda,\lambda]}\right) f \\ &= \int \mu^k \chi_{[-\lambda,\lambda]}(\mu) dE(\mu) f\,. \end{aligned}$$

Über 3.3.8 erhalten wir daher die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|A^k f\|^2 &= \int |\mu|^{2k}\chi_{[-\lambda,\lambda]}(\mu)d\varphi_f(\mu)\\ &\leq |\lambda|^{2k}\int d\varphi_f = |\lambda|^{2k}\|f\|^2\end{aligned}$$

und folglich $f \in \mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)$. Damit ist $\mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right) \subset \mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)$ nachgewiesen.
Für die umgekehrte Inklusion gehen wir von einem $f \in \mathcal{D}^\infty(A)$ aus, für das $f \notin \mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right)$ gilt, und zeigen $f \notin \mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)$. Zunächst ist dafür $\varphi_f(\mathbb{R}\setminus[-\lambda,\lambda]) \neq 0$, denn aus $0 = \varphi_f(\mathbb{R}\setminus[-\lambda,\lambda]) = \|E(\mathbb{R}\setminus[-\lambda,\lambda])f\|^2$ folgt $E(\mathbb{R}\setminus[-\lambda,\lambda])f = 0$. Wegen $f = E([-\lambda,\lambda])f + E(\mathbb{R}\setminus[-\lambda,\lambda])f$ (vgl. 3.3.17) impliziert das $f \in \mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right)$. Nach 0.1.23e) existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass auch $\varphi_f(\mathbb{R}\setminus[-\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]) \neq 0$ gilt. Damit können wir abschätzen

$$\begin{aligned}\|A^k f\|^2 &= \int |\mu|^{2k}d\varphi_f(\mu) \geq \int |\mu|^{2k}\chi_{\mathbb{R}\setminus[-\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(\mu)d\varphi_f(\mu)\\ &\geq (\lambda+\varepsilon)^{2k}\int \chi_{\mathbb{R}\setminus[-\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}d\varphi_f\\ &= (\lambda+\varepsilon)^{2k}\|E(\mathbb{R}\setminus[-\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon])f\|^2\\ &\geq 2k\lambda^{2k-1}\varepsilon\|E(\mathbb{R}\setminus[-\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon])f\|^2 .\end{aligned}$$

Wählt man nun k so groß, dass $2k\varepsilon\|E(\mathbb{R}\setminus[-\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon])f\|^2 > \lambda\|f\|^2$ gilt, so folgt

$$\|A^k f\|^2 > \lambda^{2k}\|f\|^2 .$$

Also ist $f \notin \mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)$. Das impliziert die Inklusion $\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A) \subset \mathcal{R}\left(E([-\lambda,\lambda])\right)$. □

Dieses Ergebnis sagt uns also, wie $E(J)$ aussehen muß, wenn J ein abgeschlossenes Intervall ist, das symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Wenn man vom Operator A mit Spektralschar E zum Operator $A+\alpha I$ übergeht, so hat auch der eine Spektralschar, wie der nächste Satz zeigt, und zwar entsteht diese aus E durch „Verschiebung" um α. Damit wird es möglich, $E(J)$ für beliebige abgeschlossene Intervalle zu charakterisieren, und mit 3.3.17h) folgt daraus die Gestalt von $E(\lambda)$ für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.4.3 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, E eine Spektralschar in $\mathcal{H}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Durch

$$E_{\mathsf{U}_1+\alpha}(\lambda) := E(\lambda - \alpha) \quad \textit{für} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

wird eine weitere Spektralschar in $\mathcal{H}$ definiert. Ist dann $A := \int \lambda\, dE(\lambda)$, so gilt

$$A + \alpha I = \int \lambda\, dE_{\mathsf{U}_1+\alpha}(\lambda)\,,$$

d.h. ist E eine (die) Spektralschar von A, so ist $E_{\mathsf{U}_1+\alpha}$ eine (die) Spektralschar von $A + \alpha I$.

Beweis.
Daß mit E auch $E_{\mathsf{U}_1+\alpha}$ eine Spektralschar in $\mathcal{H}$ ist, folgt unmittelbar aus den Definitionen.
Zum Beweis von $A + \alpha I = \int \lambda dE_{\mathsf{U}_1+\alpha}(\lambda)$: Wir setzen $M - \alpha := \{x - \alpha : x \in M\}$ für $M \subset \mathbb{R}$. Ist $u = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{J_k}$ eine Treppenfunktion aus $\mathcal{T}(\mathbb{R})$, so gilt

$$\begin{aligned}
\int u(\lambda) dE_{\mathsf{U}_1+\alpha}(\lambda) &= \sum_{k=1}^m \alpha_k E_{\mathsf{U}_1+\alpha}(J_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_k E(J_k - \alpha) \\
&= \int \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{J_k - \alpha}(\lambda) dE(\lambda) \\
&= \int \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{J_k}(\lambda + \alpha) dE(\lambda) = \int u(\lambda + \alpha) dE(\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Für $f \in \mathcal{H}$ bezeichnen wir mit φ_f wie in 3.3.2 das auf $(E(.)f, f)$ zurückgehende Maß und mit $\widetilde{\varphi}_f$ das auf $(E_{\mathsf{U}_1+\alpha}(.)f, f)$ zurückgehende Maß. Wegen $E_{\mathsf{U}_1+\alpha}(\lambda) = E(\lambda - \alpha)$ haben wir dann $\widetilde{\varphi}_f(J) = \varphi_f(J - \alpha)$ für jedes Intervall und deshalb auch $\int u(\lambda) d\widetilde{\varphi}_f(\lambda) = \int u(\lambda + \alpha) d\widetilde{\varphi}_f(\lambda + \alpha) = \int u(\lambda + \alpha) d\varphi_f(\lambda)$ zunächst für jede Treppenfunktion und aufgrund eines Grenzübergangs auch für jede $\widetilde{\varphi}_f$-integrierbare Funktion. Insbesondere ist die Funktion $u(. + \alpha)$ φ_f-integrierbar, falls u $\widetilde{\varphi}_f$-integrierbar ist. Sei nun $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ $E_{\mathsf{U}_1+\alpha}$-messbar. Dann folgt - wie man sich leicht klarmacht - aus der Definition der Meßbarkeit 0.1.19 und aufgrund der vorstehenden Überlegungen, dass $u(. + \alpha)$ E-messbar ist. Ist $f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}_{\mathsf{U}_1+\alpha}(u)\right)$, so gilt $u \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \widetilde{\varphi}_f)$, und es existiert eine Folge $\left(u^{(l)}\right)$ von Treppenfunktionen aus $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ mit $\widehat{E}_{\mathsf{U}_1+\alpha}\left(u^{(l)}\right) f \to \widehat{E}_{\mathsf{U}_1+\alpha}(u) f$ (in $(\mathcal{H}, \|.\|)$) und $u^{(l)} \to u$ in $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \widetilde{\varphi}_f)$. Nach unserer Vorbetrachtung über

Treppenfunktionen ist $\widehat{E}_{\mathsf{u}_1+\alpha}\left(u^{(l)}\right) = \widehat{E}\left(u^{(l)}(.+\alpha)\right)$, insbesondere ist also $\widehat{E}\left(u^{(l)}(.+\alpha)\right) f$ konvergent in $\mathcal{H}$. Andererseits folgt aus $\int u(\lambda) d\widetilde{\varphi}_f(\lambda) = \int u(\lambda+\alpha) d\varphi_f(\lambda)$, angewendet auf $\left|u^{(l)} - u\right|^2$, dass $u^{(l)}(.+\alpha)$ gegen $u(.+\alpha)$ konvergiert in $\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$. Und das bedeutet $f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(u(.+\alpha))\right)$ und $\widehat{E}\left(u(.+\alpha)\right) f = \lim \widehat{E}\left(u^{(l)}(.+\alpha)\right) f = \lim \widehat{E}_{\mathsf{u}_1+\alpha}\left(u^{(l)}\right) f = \widehat{E}_{\mathsf{u}_1+\alpha}(u) f$. Damit haben wir $\widehat{E}_{\mathsf{u}_1+\alpha}(u) \subset \widehat{E}\left(u(.+\alpha)\right)$. Die umgekehrte Inklusion folgt ebenso: Es gilt ja $E(\lambda) = E_{\mathsf{u}_1+\alpha}(\lambda+\alpha)$; d.h. wenn wir in der bisherigen Argumentation $E_{\mathsf{u}_1+\alpha}$ durch E, E durch $E_{\mathsf{u}_1+\alpha}$ und α durch $-\alpha$ ersetzen, erhalten wir $\widehat{E}\left(u(.+\alpha)\right) \subset \widehat{E}_{\mathsf{u}_1+\alpha}(u)$; also stimmen beide Operatoren überein.
Setzen wir insbesondere $u = \mathsf{u}_1$, so ist $u(.+\alpha) = \mathsf{u}_1 + \alpha\mathsf{u}_0$, und wir erhalten $\widehat{E}_{\mathsf{u}_1+\alpha}(u) = \widehat{E}(\mathsf{u}_1+\alpha)$. Mit 3.3.16b) ergibt sich daraus $\widehat{E}_{\mathsf{u}_1+\alpha}(u) = \widehat{E}(\mathsf{u}_1)+\alpha I$ wegen $\widehat{E}(\mathsf{u}_0) = I$. Das ist die Behauptung. □

Zusammen mit dem vorhergehenden Ergebnis erhalten wir nun die notwendige Bedingung für die Gestalt der Projektionen $E(\lambda)$.

3.4.4 **Satz**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, E eine Spektralschar in $\mathcal{H}$ und $A := \int \lambda\, dE(\lambda)$. Dann gilt für $\lambda,\alpha \in \mathbb{R}$:

a) $\mathcal{R}\left(E([-\lambda-\alpha\,,\,\lambda-\alpha])\right) = \mathcal{M}([-\lambda,\lambda]; A+\alpha I)$.

b) $\mathcal{R}\left(E(\lambda)\right) = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}\left(\left[-\frac{k+\lambda}{2}\,,\,\frac{k+\lambda}{2}\right]; A - \frac{\lambda-k}{2} I\right)}$.

Beweis.
a) Über die Spektralschar $E_{\mathsf{u}_1+\alpha}$ aus 3.4.3 lässt sich $E([-\lambda-\alpha,\lambda-\alpha])$ als Spektralmaß eines zum Nullpunkt symmetrischen Intervalls darstellen, und 3.4.2b) liefert die Darstellung durch $\mathcal{M}([-\lambda,\lambda]; A+\alpha I)$:

$$\mathcal{R}\left(E([-\lambda-\alpha,\lambda-\alpha])\right) = \mathcal{R}\left(E_{\mathsf{u}_1+\alpha}([-\lambda,\lambda])\right) = \mathcal{M}([-\lambda,\lambda]; A+\alpha I).$$

b) Nach a) gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{R}\left(E([-k,\lambda])\right) = \mathcal{M}\left(\left[-\frac{k+\lambda}{2}\,,\,\frac{k+\lambda}{2}\right]; A - \frac{\lambda-k}{2} I\right).$$

Mit 3.3.17h) ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\,(E(\lambda)) &= \mathcal{R}\,(E((-\infty,\lambda])) = \mathcal{R}\left(E\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[-k,\lambda]\right)\right)\\ &= \overline{\mathcal{L}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{R}\,(E([-k,\lambda]))\right)} = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{R}\,(E([-k,\lambda]))}\\ &= \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{M}\left(\left[-\frac{k+\lambda}{2},\frac{k+\lambda}{2}\right];A-\frac{\lambda-k}{2}I\right)}\,;\end{aligned}$$

dabei folgt die vorletzte Gleichung aus der auf 3.3.17d) zurückgehenden Tatsache, dass die Teilräume $\mathcal{R}\,(E([-k,\lambda]))$ eine aufsteigende Kette bilden. □

An dieser Stelle liegt der Eindeutigkeitsbeweis für den Spektralsatz auf der Hand: Sind E und F zwei Spektralscharen von A, so gilt nach 3.4.4b) sowohl

$$\mathcal{R}\,(E(\lambda)) = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{M}\left(\left[-\frac{k+\lambda}{2},\frac{k+\lambda}{2}\right];A-\frac{\lambda-k}{2}I\right)}$$

als auch

$$\mathcal{R}\,(F(\lambda)) = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{M}\left(\left[-\frac{k+\lambda}{2},\frac{k+\lambda}{2}\right];A-\frac{\lambda-k}{2}I\right)}$$

für $\lambda\in\mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{R}\,(E(\lambda)) = \mathcal{R}\,(F(\lambda))$. Da orthogonale Projektionen durch ihre Wertebereiche eindeutig bestimmt sind, folgt $E(\lambda) = F(\lambda)$ und damit $E = F$.

Aus 3.4.4b) ist zu entnehmen, wie die Spektralschar von A aussieht, *wenn* A eine Spektralschar besitzt. Was wir nun zu untersuchen haben, ist, ob durch die Gleichung 3.4.4b) für einen beliebigen selbstadjungierten Operator A tatsächlich eine Spektralschar definiert wird und ob das dann auch die Spektralschar von A ist. Dafür wollen wir uns zunächst die Mengen $\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A+\alpha I)$ genauer ansehen. Zur Vereinfachung der Schreibweise und um die Blickrichtung zu verdeutlichen, bezeichnen wir die Mengen

$$\mathcal{M}\left(\left[-\frac{\beta-\alpha}{2},\frac{\beta-\alpha}{2}\right];A-\frac{\alpha+\beta}{2}I\right)$$

mit $\mathcal{M}([\alpha,\beta];A)$. Damit ist gemeint, dass sich die Menge $\mathcal{M}([\alpha,\beta];A)$ als Wertebereich der orthogonalen Projektion $E([\alpha,\beta])$ herausstellen wird. Gelegentlich werden wir auch $\mathcal{M}([\alpha,\beta])$ schreiben anstelle von $\mathcal{M}([\alpha,\beta];A)$, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind. Im ersten Satz stellen wir eine ganze Reihe verhältnismäßig einfach zu beweisender Eigenschaften der $\mathcal{M}([\alpha,\beta];A)$ zusammen.

3.4.5 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$; seien M eine Indexmenge und J, J_1, J_2 sowie J_μ für jedes $\mu \in M$ reelle, endliche, nichtleere, abgeschlossene Intervalle; seien $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 0$. Dann wird gesetzt:

$$\mathcal{D}^\infty(A) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^k)\,,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A) &:= \left\{f \in \mathcal{D}^\infty(A) : \|A^k f\| \leq \lambda^k \|f\| \quad \text{für jedes} \quad k \in \mathbb{N}\right\}\,,\\
\mathcal{M}(J;A) &:= \mathcal{M}\left(\left[-\frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right]; A - \frac{\alpha+\beta}{2} I\right)\,, \text{ falls } J = [\alpha,\beta]\,,\\
\mathcal{M}(\emptyset;A) &:= \{0\}\,.
\end{aligned}$$

Dafür gilt:

a) $\mathcal{M}([\alpha,\alpha];A) = \mathcal{N}(\alpha I - A)$. *Es ist* $\mathcal{M}([-\|A\|,\|A\|];A) = \mathcal{H}$ *für* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

b) $\mathcal{M}([\alpha,\beta];A) = \mathcal{M}\left([\omega(\alpha-\tau),\omega(\beta-\tau)];\omega(A-\tau I)\right)$ *für* $\omega, \tau \in \mathbb{R}$ *mit* $\omega > 0$ *und insbesondere*

$$\mathcal{M}([\alpha,\beta];A) = \mathcal{M}\left([-1,1]; \frac{2}{\beta-\alpha}\left(A - \frac{\alpha+\beta}{2} I\right)\right)$$

für $\alpha < \beta$.

c) *Aus* $J_1 \subset J_2$ *folgt* $\mathcal{M}(J_1;A) \subset \mathcal{M}(J_2;A)$.

d) $\mathcal{M}([-1,1];A) = \{f \in \mathcal{D}^\infty(A) : (A^k f)_{k=1}^\infty$ *ist beschränkt*$\}$.

e) $\mathcal{M}(J;A)$ *ist ein abgeschlossener, für* A *reduzierender Teilraum von* $\mathcal{H}$, *und es gilt* $A \mid \mathcal{M}(J;A) \in \mathcal{B}(\mathcal{M}(J;A))$.

f) $\sigma(A \mid \mathcal{M}(J;A)) \subset J$.

g) *Ist* $\mathcal{M}$ *ein abgeschlossener, für* A *reduzierender Teilraum von* $\mathcal{H}$ *mit* $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(A)$ *und* $\sigma(A \mid \mathcal{M}) \subset J$, *so folgt* $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(J;A)$. *Das gilt auch für* $J = \emptyset$.

h) $\bigcap_{\mu\in M}(J_\mu;A) = \mathcal{M}\left(\bigcap_{\mu\in M}(J_\mu;A)\right)$.

i) *Ist* $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *mit* $BA\subset AB$, *so ist* $\mathcal{M}(J;A)$ *invariant unter* B, *und* $\mathcal{M}(J;A)^\perp$ *ist invariant unter* B^*.

j) *Aus* $J_1\cap J_2=\emptyset$ *folgt* $\mathcal{M}(J_1;A)\perp\mathcal{M}(J_2;A)$.

Beweis.

L a),b) Übungsaufgabe.

c) Unter Verwendung von b) macht man sich leicht klar (Übungsaufgabe!), dass wir o.B.d.A. davon ausgehen können, dass die Intervalle die Gestalt $J_1=[\kappa-\lambda,\kappa+\lambda]$, $J_2=[-1,1]$ mit $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\geq 0$ und $-1\leq\kappa-\lambda\leq\kappa+\lambda\leq 1$ haben. Sei also $f\in\mathcal{M}([\kappa-\lambda,\kappa+\lambda];A):=\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A-\kappa I)$, d.h. $f\in\mathcal{D}^\infty(A)$ und $\|(A-\kappa I)^k f\|\leq\lambda^k\|f\|$ für jedes $k\in\mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|A^k f\| &= \|(A-\kappa I+\kappa I)^k f\|\\ &\leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}\|(A-\kappa I)^j\kappa^{k-j}I^{k-j}f\|\\ &\leq \sum_{j=0}^k kj\lambda^j|\kappa|^{k-j}\|f\| = (\lambda+|\kappa|)^k\|f\|\leq\|f\|.\end{aligned}$$

Also ist $f\in\mathcal{M}([-1,1];A)$, d.h. $\mathcal{M}(J_1;A)\subset\mathcal{M}(J_2;A)$.

d) Klar ist aufgrund der Definition, dass für jedes $f\in\mathcal{M}([-1,1];A)$ die Folge $(A^k f)_{k=1}^\infty$ beschränkt ist. Hat andererseits $f\in\mathcal{D}^\infty(A)$ diese Eigenschaft, so zeigen wir, dass $\|f\|$ eine Schranke für $(A^k f)_{k=1}^\infty$ ist. Das impliziert dann $f\in\mathcal{M}([-1,1];A)$.
Wir setzen zunächst $\|f\|=1$ voraus und schließen indirekt: Existiert ein $m\in\mathbb{N}$, so dass $\|A^m f\|>1$, so können wir für jedes $l\in\mathbb{N}$ abschätzen

$$\left\|A^{m2^l}f\right\|\geq\left(A^{m2^l}f,f\right)=\left(A^{m2^{l-1}}f,A^{m2^{l-1}}f\right)=\left\|A^{m2^{l-1}}f\right\|^2,$$

weil A selbstadjungiert, also symmetrisch ist. Mittels vollständiger Induktion folgt

$$\left\|A^{m2^l}f\right\|\geq\|A^m f\|^{2^l}.$$

Wegen $\|A^m f\|>1$ ist daher die Folge $(A^k f)$ unbeschränkt im Widerspruch zur Voraussetzung; also ist $(A^k f)$ beschränkt durch 1.

Für beliebiges $f \in \mathcal{D}^\infty(A)$ folgt aus der Beschränktheit der Folge $(A^k f)$ die Beschränktheit der Folge $\left(A^k \frac{f}{\|f\|}\right)$ (den Fall $f = 0$ können wir ausschließen). Wie soeben gesehen, ist diese Folge beschränkt durch 1, also ist $(A^k f)$ beschränkt durch $\|f\|$. Somit folgt auch hier $f \in \mathcal{M}([-1,1];A)$. Damit ist die Gleichheit der beiden Mengen nachgewiesen.

e) Besteht J nur aus einem Punkt α, so ist $\mathcal{M}(J;A)$ gemäß a) der Eigenraum von A zum Eigenwert α, und das ist ein abgeschlossener, für A reduzierender Teilraum. Hat J mehr als einen Punkt, so können wir gemäß b) $J = [-1,1]$ voraussetzen, denn ein für $\omega(A - \tau I)$ reduzierender Teilraum ist auch für A reduzierend, falls $\omega \neq 0$ gilt. Mit d) folgt, dass $\mathcal{M}([-1,1];A)$ ein Teilraum von $\mathcal{H}$ ist.
Zum Nachweis der Abgeschlossenheit betrachten wir eine Folge $(f_k)_{k=1}^\infty$ aus $\mathcal{M}([-1,1])$, die gegen ein $f \in \mathcal{H}$ konvergiert. Dann gilt auch $f_k - f_m \in \mathcal{M}([-1,1];A)$, weil $\mathcal{M}([-1,1])$ ein Teilraum ist, und wir können abschätzen

$$\|A^l f_k - A^l f_m\| = \|A^l(f_k - f_m)\| \leq \|f_k - f_m\|$$

für jedes $l \in \mathbb{N}$. Somit ist $\big(A^l f_k\big)_{k=1}^\infty$ eine Cauchyfolge, d.h. für jedes $l \in \mathbb{N}$ existiert ein $g_l \in \mathcal{H}$ mit $A^l f_k \to g_l$ für $k \to \infty$. Da A abgeschlossen ist, ergibt sich (durch einen Induktionsschluß) $f \in \mathcal{D}(A^l)$ und $A^l f = g_l$; folglich ist $f \in \mathcal{D}^\infty(A)$. Wenden wir auf $\|A^l f_k\| \leq \|f_k\|$ den Grenzübergang $k \to \infty$ an, so erhalten wir die Ungleichung $\|A^l f\| \leq \|f\|$ für jedes $l \in \mathbb{N}$, d.h. $f \in \mathcal{M}([-1,1])$. Also ist $\mathcal{M}([-1,1])$ abgeschlossen. Zum Nachweis dafür, dass $\mathcal{M}([-1,1])$ für A reduzierend ist, genügt es (nach 3.1.6c) wegen $\mathcal{M}([-1,1]) \subset \mathcal{D}(A)$) zu zeigen, dass $\mathcal{M}([-1,1])$ invariant ist unter A. Sei also $f \in \mathcal{M}([-1,1])$. Dann ist die Folge $(A^k f)$ und damit auch die Folge $\big(A^k(Af)\big)$ beschränkt. Mit d) folgt daher $Af \in \mathcal{M}([-1,1])$. Somit ist $\mathcal{M}([-1,1])$ invariant unter A.
Die Aussage $A \mid \mathcal{M}(J) \in \mathcal{B}(\mathcal{M}(J))$ folgt unmittelbar aus $\mathcal{M}(J) \subset \mathcal{D}(A)$ und - am schnellsten - über die Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}(J)$ aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

f) Nach e) und 3.1.6e) ist $A \mid \mathcal{M}(J)$ ein selbstadjungierter Operator, der nach e) in $\mathcal{B}(\mathcal{M}(J))$ liegt. Wir behandeln zunächst den Fall $J = [-1,1]$. Es gilt $\|Af\| \leq \|f\|$ für jedes $f \in \mathcal{M}([-1,1])$, d.h. $\|A \mid \mathcal{M}([-1,1])\| \leq 1$. Nach 3.1.29b) ist daher $r_\sigma(A \mid \mathcal{M}([-1,1])) \leq 1$, d.h. (wegen $\sigma(A \mid \mathcal{M}([-1,1])) \subset \mathbb{R}$) $\sigma(A \mid \mathcal{M}([-1,1])) \subset [-1,1]$.
Ist allgemein $J = [\alpha,\beta]$, so seien $\omega, \tau \in \mathbb{R}$ mit $\omega > 0$ so gewählt, dass

$\omega(\alpha-\tau) = -1$, $\omega(\beta-\tau) = 1$. (Den Fall $\alpha = \beta$ können wir aufgrund von a) als erledigt ansehen, weil $\sigma\,(A \mid \mathcal{N}(\alpha I - A)) = \{\alpha\}$.) Mit dem soeben bewiesenen Ergebnis folgt $\sigma\,(\omega(A-\tau I) \mid \mathcal{M}([-1,1]; \omega(A-\tau I))) \subset [-1,1] = [\omega(\alpha-\tau), \omega(\beta-\tau)]$. Deshalb liefert der spektrale Abbildungssatz 3.1.16b) $\sigma\,(A \mid \mathcal{M}\,([-1,1]; \omega(A-\tau I))) \subset [-\frac{1}{\omega}+\tau, \frac{1}{\omega}+\tau] = [\alpha+\beta] = J$. Mit b) erhalten wir schließlich $\sigma\,(A \mid \mathcal{M}(J; A)) \subset J$.

g) Aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Graphen gilt $A \mid \mathcal{M} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$.
Sei zunächst wieder $J = [-1,1]$. Nach 3.1.6e) ist $A \mid \mathcal{M}$ selbstadjungiert. Mit 3.1.29b) und der Voraussetzung $\sigma(A \mid \mathcal{M}) \subset [-1,1]$ folgt $\|A \mid \mathcal{M}\| \leq 1$. Das impliziert $\|A^l \mid \mathcal{M}\| = \|(A \mid \mathcal{M})^l\| \leq \|A \mid \mathcal{M}\|^l \leq 1$ für $l \in \mathbb{N}$, so dass wir für $f \in \mathcal{M}$ erhalten $\|A^l f\| \leq \|f\|$, d.h. $f \in \mathcal{M}([-1,1]; A)$. Damit ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}([-1,1]; A)$ bewiesen.
Aus $J = \emptyset$ folgt $\mathcal{M} = \{0\}$ wegen 3.1.29b). Damit gilt auch hier $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(J; A)$.
Ist J ein einpunktiges Intervall, $J = [\alpha, \alpha]$, so ist für $\mathcal{M} = \{0\}$ alles klar; für $\mathcal{M} \neq \{0\}$ ist wegen 3.1.29b) $\sigma(A \mid \mathcal{M}) \neq \emptyset$, d.h. es gilt $\sigma(A \mid \mathcal{M}) = \{\alpha\}$. Nach 3.1.16b) gilt dann $\sigma\,((A-\alpha I) \mid \mathcal{M}) = \{0\}$ und nach 3.1.29b) $(A-\alpha I) \mid \mathcal{M} = 0$, d.h. $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}(\alpha I - A) = \mathcal{M}([\alpha,\alpha]; A)$.
Der allgemeine Fall $J = [\alpha, \beta]$ mit $\alpha < \beta$ lässt sich wieder mit b) und 3.1.16b)
L auf den Fall $J = [-1,1]$ zurückführen. - Übungsaufgabe!

h) Nach e) ist $\mathcal{M}(J_\mu)$ ein abgeschlossener, für A reduzierender Teilraum für jedes $\mu \in M$. Daher ist $\bigcap_{\mu \in M} \mathcal{M}(J_\mu)$ ein abgeschlossener, unter A invarianter Teilraum von $\mathcal{H}$, der in $\mathcal{D}(A)$ liegt und - weil A selbstadjungiert ist - für A reduzierend ist. Wegen f) ist $\sigma\,(A \mid \mathcal{M}(J_\mu)) \subset J_\mu$, und nach 3.1.23b) (vii) gilt

$$\sigma\left(A \mid \bigcap_{\mu \in M} \mathcal{M}(J_\mu)\right) \subset \bigcap_{\mu \in M} J_\mu .$$

g) impliziert daher

$$\bigcap_{\mu \in M} \mathcal{M}(J_\mu) \subset \mathcal{M}\left(\bigcap_{\mu \in M} J_\mu\right) .$$

Die umgekehrte Inklusion folgt unmittelbar aus c).

i) Sei zunächst wieder $J = [-1,1]$. Für $f \in \mathcal{M}([-1,1])$ gilt $f \in \mathcal{D}(A^k)$, also auch $f \in \mathcal{D}(BA^k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Aus $BA \subset AB$ folgt insbesondere $Bf \in \mathcal{D}(A)$ und $BAf = ABf$. Allgemeiner lässt sich durch vollständige
L Induktion zeigen (Übungsaufgabe!), dass $Bf \in \mathcal{D}(A^k)$ und $BA^k f = A^k Bf$

gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$. Deshalb ist $Bf \in \mathcal{D}^\infty(A)$, und außerdem folgt

$$\|A^k Bf\| = \|BA^k f\| \le \|B\| \, \|A^k f\| \le \|B\| \, \|f\| ;$$

damit ist die Folge $(A^k Bf)$ beschränkt, nach d) liegt also Bf in $\mathcal{M}([-1,1])$, d.h. $\mathcal{M}([-1,1])$ ist invariant unter B.
Ist J ein einpunktiges Intervall, $J = [\alpha, \alpha]$, so ergibt sich die Behauptung aufgrund von a), $\mathcal{M}([\alpha,\alpha]; A) = \mathcal{N}(\alpha I - A)$, sofort aus der Gleichung $\alpha Bf = BAf = ABf$ für $f \in \mathcal{N}(\alpha I - A)$. Der allgemeine Fall $J = [\alpha, \beta]$ mit $\alpha < \beta$ folgt direkt aus dem Fall $J = [-1,1]$ unter Verwendung von b), da mit $BA \subset AB$ auch $B\omega(A - \tau I) \subset \omega(A - \tau I)B$ gilt.
Die Tatsache, dass $\mathcal{M}(J, A)^\perp$ invariant unter B^* ist, folgt aus 3.1.3f).

j) Seien P_1 und P_2 die orthogonalen Projektionen von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{M}(J_1)$ bzw. $\mathcal{M}(J_2)$. Da $\mathcal{M}(J_1)$ ein für A reduzierender Teilraum ist, der in $\mathcal{D}(A)$ liegt, folgt mit 3.1.5a) $P_1 A \subset AP_1$. Nach i) sind daher $\mathcal{M}(J_2)$ und $\mathcal{M}(J_2)^\perp$ unter $P_1 = P_1^*$ invariante Teilräume, d.h. $\mathcal{M}(J_2)$ ist ein für P_1 reduzierender Teilraum. Wieder mit 3.1.5a) folgt $P_2P_1 \subset P_1P_2$, d.h. $P_2P_1 = P_1P_2$ wegen $\mathcal{D}(P_1) = \mathcal{D}(P_2) = \mathcal{H}$. Nach 2.6.5b) ist daher P_2P_1 die orthogonale Projektion auf $\mathcal{M}(J_1) \cap \mathcal{M}(J_2)$. Da aufgrund von h) gilt $\mathcal{M}(J_1) \cap \mathcal{M}(J_2) = \mathcal{M}(\emptyset) = \{0\}$, impliziert 2.6.5a) die Behauptung $\mathcal{M}(J_1) \perp \mathcal{M}(J_2)$. □

Damit haben wir die für den Beweis des Spektralsatzes wichtigsten Eigenschaften der Mengen $\mathcal{M}(J; A)$ beisammen. Als nächstes müssen wir uns noch mit deren orthogonalen Komplementen beschäftigen. Das beweistechnisch aufwendigste Ergebnis innerhalb des gesamten Beweises ist 3.4.6a), eine Aussage, die in wenigen Zeilen zu beweisen ist, wenn man bereits weiß, dass A eine Spektralschar E besitzt und somit $\mathcal{M}([-1,1]; A) = \mathcal{R}(E([-1,1]))$ gilt (3.4.4a)).
L Als Übungsaufgabe sollten Sie das einmal ausführen. Aus 3.4.6a) folgt verhältnismäßig einfach die für die Abschätzungen im eigentlichen Beweis des Spektralsatzes wichtigste Aussage 3.4.6b).

3.4.6 **Satz**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$.

a) *Ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $f \in \mathcal{M}([-1,1]; A)^\perp$, so gilt $\|Af\| \ge \|f\|$.*

b) *Sind J_1 und J_2 abgeschlossene endliche Intervalle mit $J_1 \subset J_2$, so gilt $\sigma\left(A \mid \left(\mathcal{M}(J_2; A) \cap \mathcal{M}(J_1; A)^\perp\right)\right) \subset J_2 \setminus \mathring{J}_1$.*

c) *Jeder isolierte Punkt im Spektrum eines beschränkten, selbstadjungierten Operators ist ein Eigenwert.*

d) *Es gilt* $\sigma\left(A \mid \left(\mathcal{M}([\mu,\beta];A) \cap \mathcal{M}([\mu,\alpha];A)^{\perp}\right)\right) \subset [\alpha,\beta]$ *für* $\mu,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *mit* $\mu \le \alpha \le \beta$.

Beweis.
a) Ist $\mathcal{H}$ endlichdimensional, so folgt diese Aussage aus der Darstellung $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\lambda_1 I - A) \oplus ... \oplus \mathcal{N}(\lambda_j I - A)$ (wobei $\{\lambda_1, ..., \lambda_j\}$ die Menge der paarweise verschiedenen Eigenwerte von A ist), welche ihrerseits eine Folge des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte Operatoren ist. Die Einzelheiten dieser
L Argumentation sollen Sie als Übungsaufgabe selbst ausführen.

Der allgemeine Fall ergibt sich durch einen Approximationsprozeß aus diesem endlichdimensionalen Fall:
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die endlichdimensionalen Teilräume

$$\mathcal{H}_k := \mathcal{L}\{f, Af, ..., A^k f\}$$

von $\mathcal{H}$, die wegen 3.4.5e) in $\mathcal{M}([-1,1])^{\perp}$ enthalten sind. Die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_k$ bezeichnen wir mit P_k , und A_k sei der durch

$$A_k := P_k A \mid \mathcal{H}_k$$

definierte Operator aus $\mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$. Weiter sei

$$\mathcal{H}_\infty := \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k}\,,$$

und P sei die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_\infty$. Nach 2.6.6a) ist also $P = \mathrm{s}-\lim P_k$. Durch mehrfache Anwendung von 2.1.20 schließen wir daraus $(P_k A P_k)^m \underset{\mathrm{s}}{\longrightarrow} (PAP)^m$ für $k \to \infty$ und jedes $m \in \mathbb{N}$. Wegen $A\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_{k+1}$ haben wir

$$A\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k\right) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k\,,$$

und die Stetigkeit von A impliziert deshalb $A\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty$. Es folgt $(P_k A P_k)^m h \to A^m h$ für $h \in \mathcal{H}_\infty$, jedes $m \in \mathbb{N}$ und $k \to \infty$. Wir sind fast am Ziel, wenn wir für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ je ein $f_k \in \mathcal{H}_k$ gefunden haben mit $\|A_k f_k\| \ge \|f_k\|$, so dass die Folge dieser f_k gegen f und die Folge der zugehörigen $A_k f_k$ gegen Af konvergiert. Das überlegen wir uns jetzt:
Da für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $f \in \mathcal{H}_k$, existieren $g_k \in \mathcal{M}([-1,1];A_k)$ und $f_k \in$

$\mathcal{M}([-1,1];A_k)^{\perp}$, so dass $f = f_k + g_k$. Weil $\mathcal{H}_k$ endlichdimensional ist, gilt, wie eingangs bemerkt, $\|A_k f_k\| \geq \|f_k\|$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wegen $f_k \perp g_k$ folgt mit dem Satz des Pythagoras $\|f_k\| \leq \|f\|$ und $\|g_k\| \leq \|f\|$. (g_k) ist daher eine beschränkte Folge in dem Hilbertraum $\mathcal{H}_\infty$. Nach 2.3.7 existiert also eine Teilfolge $(g_{k_l})_{l=1}^{\infty}$, die in $\mathcal{H}_\infty$ schwach konvergiert gegen ein $g \in \mathcal{H}_\infty$. Für den Nachweis, dass (f_{k_l}) die gewünschten Eigenschaften hat, zeigen wir zunächst $g = 0$. Dazu genügt es, $g \in \mathcal{M}([-1,1];A)$ nachzuweisen, denn wegen $H_k \subset \mathcal{M}([-1,1];A)^{\perp}$ ist $\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{M}([-1,1];A)^{\perp}$, also $g \in \mathcal{M}([-1,1];A)^{\perp}$. Nach unseren Vorüberlegungen gilt $(P_{k_l} A P_{k_l})^{2m} g \to A^{2m} g$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Deshalb können wir mit 2.3.6d) wegen $g_{k_l} \in \mathcal{M}([-1,1];A_{k_l})$ schließen

$$
\begin{aligned}
\|A^m g\|^2 &= (A^m g, A^m g) = (A^{2m} g, g) \\
&= \lim_{l\to\infty} \left((P_{k_l} A P_{k_l})^{2m} g, g_{k_l} \right) \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(g, (P_{k_l} A P_{k_l})^{2m} g_{k_l} \right) \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(g, A_{k_l}^{2m} g_{k_l} \right) \\
&\leq \lim_{l\to\infty} \sup \|g\| \, \|g_{k_l}\| \leq \|g\| \, \|f\| \,.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir für die vorletzte Abschätzung $g_{k_l} \in \mathcal{M}([-1,1];A_{k_l})$ verwendet. Die Folge $(A^m g)$ ist also beschränkt, so dass g aufgrund von 3.4.5d) in $\mathcal{M}([-1,1];A)$ liegt, was $g = 0$ impliziert. Damit können wir nun wegen $f_k \perp g_k$ schließen

$$\|g_{k_l}\|^2 = (f - f_{k_l}, g_{k_l}) = (f, g_{k_l}) \to 0 \,,$$

d.h. $(g_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ konvergiert auch stark gegen 0. Folglich konvergiert $(f_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ gegen f. Für die Aussage $A_{k_l} f_{k_l} \to Af$ schließlich schätzen wir ab

$$
\begin{aligned}
\|A_{k_l} f_{k_l} - Af\| &= \|P_{k_l} A f_{k_l} - P_{k_l} A f\| = \|P_{k_l} A (f_{k_l} - f)\| \\
&\leq \|P_{k_l}\| \, \|A\| \, \|f_{k_l} - f\| \leq \|A\| \, \|f_{k_l} - f\| \to 0
\end{aligned}
$$

für $l \to \infty$ wegen $Af \in \mathcal{H}_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.
Damit erhalten wir jetzt die Behauptung: Aus $\|A_{k_l} f_{k_l}\| \geq \|f_{k_l}\|$, $\|A_{k_l} f_{k_l}\| \to \|Af\|$ und $\|f_{k_l}\| \to \|f\|$ folgt $\|Af\| \geq \|f\|$ durch Grenzübergang $l \to \infty$.

b) Wir betrachten zunächst den Fall $[-1,1] \subset J_1$ und zeigen dafür $0 \notin \sigma\left(A \mid \left(\mathcal{M}(J_2) \cap \mathcal{M}(J_1)^{\perp}\right)\right)$: Klar ist

$$A \mid \left(\mathcal{M}(J_2) \cap \mathcal{M}(J_1)^{\perp}\right) \in \mathcal{B}\left(\mathcal{M}(J_2) \cap \mathcal{M}(J_1)^{\perp}\right)$$

aufgrund von 3.4.5e). Da sowohl $\mathcal{M}(J_2)$ als auch $\mathcal{M}(J_1)^\perp$ ein für A reduzierender Teilraum ist, ist $A \mid \big(\mathcal{M}(J_2) \cap \mathcal{M}(J_1)^\perp\big)$ selbstadjungiert nach 3.1.6e). Jeder Punkt im Spektrum davon ist also ein verallgemeinerter Eigenwert (3.1.27c)). Aus $0 \in \sigma\left(A \mid \big(\mathcal{M}(J_2) \cap \mathcal{M}(J_1)^\perp\big)\right)$ folgt deshalb, dass ein $f \in \mathcal{M}(J_2) \cap \mathcal{M}(J_1)^\perp \subset \mathcal{M}([-1,1])^\perp$ existiert mit $\|f\| = 1$ und $\|Af\| \leq \dfrac{1}{2}$. Das widerspricht a). Folglich ist $0 \notin \sigma\left(A \mid \big(\mathcal{M}(J_1) \cap \mathcal{M}(J_2)^\perp\big)\right)$.
Der Fall allgemeiner Intervalle und eines beliebigen inneren Punktes von J_1 lässt sich wieder mit 3.4.5b) und 3.1.16b) auf diesen Fall zurückführen. Das sollen Sie als Übungsaufgabe selbst ausführen.

L

c) Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und sei λ ein isolierter Punkt von $\sigma(A)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon] \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$. Aus 3.4.5f) folgt $\sigma\left(A \mid \mathcal{M}([\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon])\right) \subset \{\lambda\}$, und das impliziert $\mathcal{M}([\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]) = \mathcal{M}([\lambda, \lambda]) = \mathcal{N}(\lambda I - A)$ aufgrund von 3.4.5g),c) und a). Wegen $\mathcal{M}([-\|A\|, \|A\|]) = \mathcal{H}$ folgt aus b) dann

$$\begin{aligned}
&\sigma\left(A \mid \mathcal{M}([\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon])^\perp\right)\\
&= \sigma\left(A \mid \big(\mathcal{M}([-\|A\|, \|A\|]) \cap \mathcal{M}([\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon])^\perp\big)\right)\\
&\subset \sigma(A) \setminus [\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]\\
&\neq \sigma(A)\,.
\end{aligned}$$

Daher ist $\mathcal{M}([\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon])^\perp \neq \mathcal{H}$ und somit $\mathcal{N}(\lambda I - A) \neq \{0\}$. Folglich ist λ ein Eigenwert von A.

d) Nach b) gilt $\sigma\left(A \mid \big(\mathcal{M}([\mu, \beta]) \cap \mathcal{M}([\mu, \alpha])^\perp\big)\right) \subset \{\mu\} \cup [\alpha, \beta]$. Zu zeigen bleibt, dass μ für $\mu < \alpha$ nicht in $\sigma\left(A \mid \big(\mathcal{M}([\mu, \beta]) \cap \mathcal{M}([\mu, \alpha])^\perp\big)\right)$ liegt: Andernfalls ist nämlich μ ein isolierter Punkt darin und aufgrund von c) deshalb ein Eigenwert von $A \mid \big(\mathcal{M}([\mu, \beta]) \cap \mathcal{M}([\mu, \alpha])^\perp\big)$, also auch ein Eigenwert von A. Nach 3.4.5a) und c) liegt aber $\mathcal{N}(\mu I - A)$ in $\mathcal{M}([\mu, \alpha])$, d.h. $\mathcal{N}(\mu I - A) \cap \mathcal{M}([\mu, \alpha])^\perp = \{0\}$. Also kann μ kein Eigenwert von $A \mid \big(\mathcal{M}([\mu, \beta]) \cap \mathcal{M}([\mu, \alpha])^\perp\big)$ sein. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung. □

Beim Beweis des Spektralsatzes werden wir sowohl bei den Spektraleigenschaften als auch bei der Gleichung $A = \widehat{E}(\mathsf{u}_1)$ zunächst den Fall des beschränkten Operators behandeln nämlich $\mathcal{M}([-k, k]; A) = \mathcal{H}$ für ein $k \in \mathbb{N}$) und daraus den allgemeinen Fall ableiten. Für diesen Übergang zum beschränkten Operator brauchen wir die beiden folgenden Ergebnisse.

3.4.7 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann gilt $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}([-k,k];A)} = \mathcal{H}$.

Beweis.

Der Beweis basiert darauf, dass wir mit einem injektiven, beschränkten selbstadjungierten Operator B arbeiten, der eng mit A zusammenhängt. Dazu brauchen wir einen Punkt in der Resolventenmenge von A, und dessen Existenz ist nur für *komplexe* Hilberträume gesichert. Deshalb setzen wir zunächst $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ voraus und argumentieren für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ mit Komplexifizierung.

Sei also $\lambda \in \rho(A)$ und $B := R(\lambda,A)R(\overline{\lambda},A)$. (Wegen $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$ liegt ja mit λ auch $\overline{\lambda}$ in $\rho(A)$.) Dafür zeigen wir zunächst, dass zu jedem $\varepsilon>0$ ein $k\in\mathbb{N}$ existiert mit

$$(*) \qquad \mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp} \subset \mathcal{M}([-k,k];A)\,.$$

Nach 2.5.15 ist B ein selbstadjungierter Operator aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Damit ist $B_\varepsilon := B \mid \mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$ ein selbstadjungierter Operator aus $\mathcal{B}\left(\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}\right)$. Wegen $\mathcal{H} = \mathcal{M}([-\|B\|,\|B\|];B)$ erhalten wir mit 3.4.6b) $0\in\rho(B_\varepsilon)$. Speziell ist daher $\mathcal{R}(B_\varepsilon) = \mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$, und das impliziert $\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp} \subset \mathcal{R}(B)\subset\mathcal{D}(A)$.

Als nächstes überlegen wir uns, dass $\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$ invariant ist unter A: Für $f\in\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$ gilt $(\lambda I - A)f = (\lambda I - A)BB_\varepsilon^{-1}f = R(\overline{\lambda},A)B_\varepsilon^{-1}f$, d.h.

$$(**) \qquad Af = \lambda f - R(\overline{\lambda},A)B_\varepsilon^{-1}f\,.$$

Wegen 3.1.15a) ist $BR(\lambda,A) = R(\lambda,A)B$, so dass wir aufgrund von 3.4.5i) schließen können, dass $\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$ invariant ist unter $R(\lambda,A)^* = R(\overline{\lambda},A)$ (2.4.4d)). Mit $B_\varepsilon^{-1}f$ liegt also auch $R(\overline{\lambda},A)B_\varepsilon^{-1}f$ in $\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$, und das gilt wegen $(**)$ auch für Af. Damit ist $\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$ invariant unter A.

Die Einschränkung A_ε von A auf $\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$ ist also ein linearer Operator in $\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$, der aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Graphen beschränkt ist, weil sein Definitionsbereich ganz $\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp}$ ist. Wählen wir also $k\geq\|A_\varepsilon\|$, so gilt

$$\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)^{\perp} = \mathcal{M}([-\|A_\varepsilon\|,\|A_\varepsilon\|];A_\varepsilon) \subset \mathcal{M}([-k,k];A)\,.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen.

Wir überlegen uns nun noch, dass $\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)=\{0\}$ gilt; denn aus $f\in\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)$ folgt $\|Bf\|\leq\varepsilon\|f\|$ für jedes $\varepsilon>0$, also $Bf=0$; da B injektiv ist, impliziert das $f=0$.

Damit erhalten wir unter Verwendung von $(*)$ die Behauptung:

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{M}([-k,k];A)\right)^{\perp}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{M}\left([-k,k];A)\right)^{\perp}\subset\bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon];B)=\{0\}\,,$$

also $\overline{\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{M}([-k,k];A)}=\mathcal{H}$.

Wie aus diesem Ergebnis für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ die Aussage für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ durch Kom-
L plexifizierung abzuleiten ist, sollen Sie sich als Übungsaufgabe selbst überlegen. Entscheidend dabei ist die Beziehung $\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A_{\mathbb{C}})\subset\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)\times\mathcal{M}([-\lambda,\lambda];A)$, wenn $A_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von A ist. □

3.4.8 **Satz**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$; sei $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge orthogonaler Projektionen in $\mathcal{H}$ mit $P_k\leq P_{k+1}$, $\mathcal{R}(P_k)\subset\mathcal{D}(A)$ und $AP_k=P_kAP_k$ für jedes $k\in\mathbb{N}$; ferner gelte $P_k\underset{s}{\longrightarrow}I$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A)&=\{f\in\mathcal{H}:(AP_kf)_{k=1}^{\infty}\ \ \textit{konvergiert}\}\\&=\{f\in\mathcal{H}:(\|AP_kf\|)_{k=1}^{\infty}\ \ \textit{konvergiert}\}\,,\\Af&=\lim_{k\to\infty}AP_kf\quad\textit{für}\quad f\in\mathcal{D}(A)\,.\end{aligned}$$

Beweis.

Es gilt für $f\in\mathcal{H}$ und alle $m,k\in\mathbb{N}$ mit $m\geq k$

$$\begin{aligned}(AP_kf,AP_mf-AP_kf)&=(AP_kf,AP_mf)-(AP_kf,AP_kf)\\&=(P_kAP_kf,P_mAP_mf)-(AP_kf,AP_kf)\\&=(P_mAP_mP_kAP_kf,f)-(AP_kf,AP_kf)\\&=(P_mAP_kAP_kf,f)-(AP_kf,AP_kf)\\&=(P_mP_kAP_kAP_kf,f)-(AP_kf,AP_kf)\\&=(P_kAP_kAP_kf,f)-(AP_kf,AP_kf)\\&=(P_kAP_kf,AP_kf)-(AP_kf,AP_kf)=0\,,\end{aligned}$$

sowie für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(AP_k f, Af - AP_k f) &= (AP_k f, Af) - (AP_k f, AP_k f) \\ &= (P_k AP_k f, Af) - (AP_k f, AP_k f) \\ &= (AP_k AP_k f, f) - (AP_k f, AP_k f) \\ &= (P_k AP_k AP_k f, f) - (AP_k f, AP_k f) = 0\,.\end{aligned}$$

Folglich ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras für $m \geq k$ und $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\|AP_m f\|^2 &= \|AP_k f + AP_m f - AP_k f\|^2 \\ &= \|AP_k f\|^2 + \|AP_m f - AP_k f\|^2\,,\end{aligned}$$

d.h. wir haben

$$(*) \qquad \|AP_m f - AP_k f\|^2 = \|AP_m f\|^2 - \|AP_k f\|^2\,,$$

und somit für beliebiges $m, k \in \mathbb{N}$

$$(**) \qquad \begin{aligned}\|AP_m f - AP_k f\|^2 &= \big|\|AP_m f\|^2 - \|AP_k f\|^2\big| \\ &= |\|AP_m f\| - \|AP_k f\|| \, (\|AP_m f\| + \|AP_k f\|)\,.\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für $k \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{D}(A)$

$$(***) \qquad \|Af - AP_k f\|^2 = \|Af\|^2 - \|AP_k f\|^2\,.$$

Aus $(**)$ (zusammen mit 1.1.14b)) lesen wir ab, dass $(AP_k f)$ genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn $(\|AP_k f\|)$ eine Cauchyfolge ist, d.h. die Mengen $\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{H} : (AP_k f) \text{ konvergiert}\}$ und $\widehat{\mathcal{D}} := \{f \in \mathcal{H} : (\|AP_k f\|) \text{ konvergiert}\}$ stimmen überein. Sei nun $f \in \mathcal{D}(A)$. Aus $(***)$ ergibt sich $\|AP_k f\| \leq \|Af\|$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $(\|AP_k f\|)$ ist beschränkt, und wegen $(*)$ ist sie monoton wachsend; somit konvergiert sie, d.h. $f \in \widehat{\mathcal{D}}$, also $\mathcal{D}(A) \subset \widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$. Ist andererseits $f \in \mathcal{D}$, so konvergiert $(AP_k f)$ und aufgrund unserer Voraussetzung gilt $P_k f \to f$. Da A abgeschlossen ist, folgt $f \in \mathcal{D}(A)$ und $AP_k f \to Af$. Damit ist auch $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(A)$, und die angegebene Darstellung für Af ist gezeigt. □

Nun sind wir für den Beweis des Spektralsatzes gerüstet:

Beweis von 3.4.1.
Die *Eindeutigkeit* der Spektralschar haben wir bereits im Anschluß an 3.4.4 bewiesen.

Wir geben nun eine Schar von orthogonalen Projektionen an und beweisen dafür die *Spektraleigenschaften.* Dabei werden wir wieder durch 3.4.4b) zu dem geeigneten Ansatz geführt:
Wir bezeichnen mit $\widetilde{E}_k(\lambda)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{M}([-k,\lambda];A)$ und setzen

$$E(\lambda) := \mathrm{s} - \lim_{k\to\infty} \widetilde{E}_k(\lambda)\,.$$

Dieser starke Grenzwert existiert wegen 2.6.6a), denn $\mathcal{M}([-k,\lambda]) \subset \mathcal{M}([-k+1,\lambda])$ gemäß 3.4.5c), also $\widetilde{E}_k(\lambda) \le \widetilde{E}_{k+1}(\lambda)$. Daß E eine Spektralschar ist, beweisen wir, indem wir zunächst die Einschränkung auf $\mathcal{H}_k := \mathcal{M}([-k,k];A)$ betrachten. Genauer definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die Schar E_k orthogonaler Projektionen in $\mathcal{H}_k$ durch

$$\mathcal{R}\left(E_k(\lambda)\right) := \begin{cases} \{0\} & \text{für} \quad \lambda < -k\,, \\ \mathcal{M}([-k,\lambda]) & \text{für} \quad -k \le \lambda \le k\,, \\ \mathcal{H}_k = \mathcal{M}([-k,k]) & \text{für} \quad \lambda > k\,. \end{cases}$$

Jedes E_k ist eine Spektralschar: 3.3.1(i) ist trivialerweise erfüllt. 3.3.1(ii) folgt aus 3.4.5c) zusammen mit 2.6.5e). 3.3.1(iii) ist für $\lambda < -k$ und $\lambda \ge k$ klar; für $-k \le \lambda < k$ genügt es aufgrund von 2.6.6b) zu zeigen

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{M}([-k,\lambda+\varepsilon]) = \mathcal{M}([-k,\lambda]);$$

das folgt aber aus 3.4.5h). 3.3.1(iv) ist direkt aus der Definition von E_k abzulesen.
Für den Beweis der Spektraleigenschaften von E ist 3.3.1(i) bereits aufgrund von 2.6.6a) gesichert. 3.3.1(ii) folgt aus $\mathcal{M}([-k,\lambda_1]) \subset \mathcal{M}([-k,\lambda_2])$ für $\lambda_1 \le \lambda_2$ (3.4.5c)) und - mittels 2.6.5e) - über $\|\widetilde{E}_k(\lambda_1)f\| \le \|\widetilde{E}_k(\lambda_2)f\|$ durch den Grenzübergang $k \to \infty$. Die Projektionen $E_k(\lambda)$ unterscheiden sich von den Projektionen $\widetilde{E}_k(\lambda)$ (jedenfalls für $-k \le \lambda \le k$) dadurch, dass von $\mathcal{H}_k$ und nicht von ganz $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{M}([-k,\lambda])$ projiziert wird, d.h. $E_k(\lambda) = \widetilde{E}_k(\lambda)|\mathcal{H}_k$.
Für den Nachweis der Eigenschaften 3.3.1(iii) und (iv) von E brauchen wir noch zwei weitergehende derartige Aussagen, deren Beweis wir gleich anschließend ausführen werden:

Ist P_k die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_k$, so gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $-k \leq \lambda \leq k$

$$(*) \qquad \widetilde{E}_k(\lambda) = E_k(\lambda)P_k\,,$$

$$(**) \qquad \widetilde{E}_k(\lambda) = E(\lambda)P_k\,.$$

Damit zeigen wir die rechtsseitige Stetigkeit von E : Es seien $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{H}$ beliebig gewählt. Dann können wir für $-k \leq \lambda < \lambda+\varepsilon \leq k$ abschätzen

$$\begin{aligned}
\|E(\lambda+\varepsilon)f - E(\lambda)f\| \quad &\leq \quad \|E(\lambda+\varepsilon)f - \widetilde{E}_k(\lambda+\varepsilon)f\| \\
&\quad +\|\widetilde{E}_k(\lambda+\varepsilon)f - \widetilde{E}_k(\lambda)f\| + \|\widetilde{E}_k(\lambda)f - E(\lambda)f\| \\
&\leq \|E(\lambda+\varepsilon)f\|\,\|(I-P_k)f\| \\
&\quad +\|E_k(\lambda+\varepsilon)P_kf - E_k(\lambda)P_k)f\| + \|E(\lambda)\|\,\|(P_k-I)f\| \\
&\leq 2\|(I-P_k)f\| + \|\left(E_k(\lambda+\varepsilon) - E_k(\lambda)\right)P_kf\|\,.
\end{aligned}$$

Aus 3.4.7 folgt $P_k \underset{s}{\longrightarrow} I$ wegen 2.6.6a). Deshalb ergibt sich aus der rechtsseitigen Stetigkeit der E_k die rechtsseitige Stetigkeit von E.

Ganz ähnlich erhält man die Eigenschaft 3.3.1(iv). Das überlassen wir Ihnen

L als Übungsaufgabe. Es bleibt also noch $(*)$ und $(**)$ zu beweisen. Dazu zeigen wir zunächst als Zwischenergebnis, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes abgeschlossene Intervall $J \subset [-k,k]$ gilt

$$(***) \qquad \mathcal{R}\left(E_k(J)\right) = \mathcal{M}(J)\,.$$

Ist nämlich $J = [\alpha,\beta]$ mit $-k \leq \alpha \leq \beta \leq k$, so dürfen wir die Tatsache verwenden, dass E_k eine Spektralschar ist, und können daher mit 2.6.5d), 1.3.14, 2.6.6a) und 1.3.6e) umformen

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(E_k(J)\right) &= \mathcal{R}\left(E_k(\beta)\right) \ominus \mathcal{R}\left(E_k(\alpha-)\right) \\
&= \mathcal{R}\left(E_k(\beta)\right) \cap \left(\bigcup_{\mu<\alpha} \mathcal{R}\left(E_k(\mu)\right)\right)^{\perp} \\
&= \mathcal{M}([-k,\beta]) \cap \left(\bigcap_{\mu<\alpha} \mathcal{M}([-k,\mu])^{\perp}\right) \\
&= \bigcap_{\mu<\alpha} \left(\mathcal{M}([-k,\beta]) \cap \mathcal{M}([-k,\mu])^{\perp}\right)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt einerseits $\mathcal{M}(J) \subset \mathcal{R}(E_k(J))$ wegen $J \subset [-k,\beta]$ (3.4.5c)) und $\mathcal{M}(J) \subset \mathcal{M}([-k,\mu])^\perp$ (vermöge 3.4.5j) aufgrund von $J \cap [-k,\mu] = \emptyset$ für $\mu < \alpha$). Andererseits können wir mit 3.4.6d) daraus schließen

$$\sigma(A \mid \mathcal{R}(E_k(J))) \subset \bigcap_{\mu<\alpha} [\mu,\beta] = [\alpha,\beta]\,,$$

und mit 3.4.5g) erhalten wir $\mathcal{R}(E_k(J)) \subset \mathcal{M}(J)$. Insgesamt gilt also $(***)$.
Zum Beweis von $(*)$ und $(**)$ seien nun $k,m \in \mathbb{N}$ mit $k \le m$ und $f \in \mathcal{H}$. Hat f die Zerlegung $f = f' + f''$ mit $f' \in \mathcal{M}([-m,m])$ und $f'' \in \mathcal{M}([-m,m])^\perp$, so gilt $P_k f'' = 0$ und $\widetilde{E}_k(\lambda)f'' = 0$ da $\mathcal{R}(P_k) \subset \mathcal{M}([-m,m])$ bzw. $\mathcal{R}\left(\widetilde{E}_k(\lambda)\right) = \mathcal{M}([-k,\lambda]) \subset \mathcal{M}([-m,m])$. Setzen wir hier speziell $m = k$, so können wir daraus bereits $(*)$ ablesen:

$$\widetilde{E}_k(\lambda)f = \widetilde{E}_k(\lambda)f' = E_k(\lambda)f' = E_k(\lambda)P_k f' = E_k(\lambda)P_k f\,.$$

Weiter folgt aus $(***)$ $E_m([-k,k]) = P_k \mid \mathcal{H}_m$ und $E_m([-k,\lambda]) = \widetilde{E}_k(\lambda) \mid \mathcal{H}_m$, also $E_m([-k,k])f' = P_k f'$ und $E_m([-k,\lambda])f' = \widetilde{E}_k(\lambda)f'$. Damit und mit 3.3.6, angewendet auf die Spektralschar E_m, können wir umformen

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_k(\lambda)f = \widetilde{E}_k(\lambda)f' &= E_m([-k,\lambda])f' = E_m(\lambda)E_m([-k,k])f' \\ &= \widetilde{E}_m(\lambda)P_k f' = \widetilde{E}_m(\lambda)P_k f\,.\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert

$$\widetilde{E}_k(\lambda)f = E(\lambda)P_k f\,,$$

und folglich gilt $(**)$. Damit sind die Spektralschareigenschaften von E bewiesen.

Als letzten Teil des Beweises zeigen wir nun, dass *E die Spektralschar von A* ist, d.h. die Gleichung $A = \int \lambda dE(\lambda)$.
Dazu betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ den selbstadjungierten Operator $A_k := A \mid \mathcal{H}_k = A \mid \mathcal{M}([-k,k];A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ (3.4.5e)), und weisen nach, dass E_k die Spektralschar dazu ist, also $A_k = \int \lambda dE_k(\lambda) = \widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)$. Zunächst gilt für die Definitionsbereiche $\mathcal{D}(A_k) = \mathcal{H}_k$, und für $\widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)$ haben wir $\widehat{E}_k(\mathsf{u}_1) = \widehat{E}_k\left(\mathsf{u}_1\chi_{[-k,k]}\right)$ wegen $E_k((-\infty,-k)) = E_k((k,\infty)) = 0$; da aber $\mathsf{u}_1\chi_{[-k,k]}$ beschränkt ist, liegt auch $\widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$, d.h. $\mathcal{D}\left(\widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)\right) = \mathcal{D}(A_k)$.
Zur Auswertung des Integrals $\widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)$ approximieren wir $\mathsf{u}_1\chi_{[-k,k]}$ durch eine

Folge von Treppenfunktionen: Für $l \in \mathbb{N}$ setzen wir $\varepsilon := \dfrac{k}{l}$ und

$$\mathsf{u}_1^{(l)} := \sum_{j=0}^{2l} (-k + j\varepsilon)\chi_{(-k-\varepsilon+j\varepsilon,-k+j\varepsilon]} .$$

Dann gilt

$$\left|\mathsf{u}_1^{(l)}(\lambda) - \mathsf{u}_1(\lambda)\chi_{[-k,k]}(\lambda)\right| \leq \varepsilon$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. aufgrund von 3.3.16b) und 3.3.15c) ist

$$\left\|\widehat{E}_k\left(\mathsf{u}_1^{(l)}\right) - \widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)\right\| = \left\|\widehat{E}_k\left(\mathsf{u}_1^{(l)}\right) - \widehat{E}_k\left(\mathsf{u}_1\chi_{[-k,k]}\right)\right\| \leq \varepsilon ;$$

das impliziert $\widehat{E}_k\left(\mathsf{u}_1^{(l)}\right) \to \widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)$ für $l \to \infty$; damit gilt auch

$$\left(\widehat{E}_k\left(\mathsf{u}_1^{(l)}\right) f, f\right) \to \left(\widehat{E}_k(\mathsf{u}_1) f, f\right)$$

für jedes $f \in \mathcal{H}_k$. Gemäß 2.3.2b) ist zum Beweis von $A_k = \widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)$ hinreichend, dass $(A_k f, f) = \left(\widehat{E}_k(\mathsf{u}_1) f, f\right)$ für jedes $f \in \mathcal{H}_k$ gilt, denn beide Operatoren sind selbstadjungiert. Deshalb brauchen wir nur für jedes $f \in \mathcal{H}_k$ zu zeigen

$$(* * * *) \qquad \left(\widehat{E}_k\left(\mathsf{u}_1^{(l)}\right) f, f\right) \to (A_k f, f) \text{ für } l \to \infty .$$

Wir setzen

$$f_j := \widehat{E}_k\left(\chi_{(-k-\varepsilon+j\varepsilon,-k+j\varepsilon]}\right) f \quad \text{für} \quad j = 0, ..., 2l .$$

Dafür gilt

$$f_j \in \mathcal{M}([-k, -k + j\varepsilon]) \cap \mathcal{M}([-k, -k - \varepsilon + j\varepsilon])^{\perp} ,$$

denn E_k ist eine Spektralschar, und

$$\sum_{j=0}^{2l} f_j = f$$

wegen $\sum_{j=0}^{2l} \widehat{E}_k\left(\chi_{(-k-\varepsilon+j\varepsilon,-k+j\varepsilon]}\right) = \widehat{E}_k\left(\chi_{(-k-\varepsilon,k]}\right) = I$. Daraus folgt $f_j \perp f_m$ für $j \neq m$ sowie $A f_j \perp f_m$, weil die $\mathcal{M}(J)$ und die $\mathcal{M}(J)^{\perp}$ unter A invariante Teilräume sind.

Nach 3.4.6d) ist

$$\sigma\left(A \mid \left(\mathcal{M}([-k, -k + j\varepsilon]) \cap \mathcal{M}([-k, -k - \varepsilon + j\varepsilon])^{\perp}\right)\right) \subset [-k-\varepsilon+j\varepsilon, -k+j\varepsilon] ,$$

und mit 3.1.29b) folgt

$$(A_k f_j, f_j) \in [-k-\varepsilon+j\varepsilon, -k+j\varepsilon]$$

falls $\|f_j\| = 1$. Folglich gilt allgemein

$$(-k-\varepsilon+j\varepsilon)\|f_j\|^2 \leq (A_k f_j, f_j) \leq (-k+j\varepsilon)\|f_j\|^2$$

oder

$$-\varepsilon\|f_j\|^2 \leq (A_k f_j, f_j) - (-k+j\varepsilon)\|f_j\|^2 \leq 0\,.$$

Damit können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
& \left|(A_k f, f) - \left(\widehat{E}_k\left(\mathsf{u}_1^{(l)}\right) f, f\right)\right| \\
= & \left|\left(\sum_{j=0}^{2l} A_k f_j\,, \sum_{j=0}^{2l} f_j\right) - \left(\sum_{j=0}^{2l}(-k+j\varepsilon)f_j\,, \sum_{j=0}^{2l} f_j\right)\right| \\
\leq & \sum_{j=0}^{2l} |(A_k f_j, f_j) - (-k+j\varepsilon)\|f\|^2| \\
\leq & \ \varepsilon\sum_{j=0}^{2l}\|f_j\|^2 = \varepsilon\|f\|^2\,.
\end{aligned}$$

Das impliziert $(****)$, d.h. $A_k = \widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)$ ist bewiesen. Für beschränkte Operatoren wären wir jetzt fertig, denn dafür gibt es ja ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A_k = A$: Jedes $k \geq \|A\|$ hat diese Eigenschaft.

Den Nachweis von $A = \widehat{E}(\mathsf{u}_1)$ im allgemeinen Fall führen wir wieder getrennt für die Definitionsbereiche und die Werte der Operatoren. Wir haben bereits festgestellt, dass aufgrund von 3.4.7 gilt $P_k \underset{s}{\longrightarrow} I$; weiter haben wir $P_k \leq P_{k+1}$ und $\mathcal{R}(P_k) = \mathcal{M}([-k,k]) \subset \mathcal{D}(A)$ sowie $AP_k = P_k A P_k$, weil $\mathcal{M}([-k,k])$ invariant ist unter A für jedes $k \in \mathbb{N}$. Deshalb erfüllen die P_k die Voraussetzungen von 3.4.8, so dass wir haben $\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{H} : (\|AP_k f\|)_{k=1}^\infty$ konvergiert$\}$. Für $f \in \mathcal{H}$ formen wir um:

$$\|AP_k f\|^2 = (AP_k f, AP_k f) = \left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)P_k f, \widehat{E}_k(\mathsf{u}_1)P_k f\right)$$

(denn E_k ist die Spektralschar von $A \mid \mathcal{M}([-k,k])$)

$$= \int \lambda^2 d\,(E_k(\lambda)P_k f, P_k f)$$

(wegen 3.3.15a))

$$= \int \lambda^2 d\left(E(\lambda)P_k f, P_k f\right)$$

(denn aus $(*)$ und $(**)$ folgt $E_k(\lambda)P_k = E(\lambda)P_k$)

$$= \int \lambda^2 d\left(E(\lambda)E([-k,k])f, E([-k,k])f\right)$$

(denn aus $(***)$ folgt $\mathcal{R}\left(E(J)\right) = \mathcal{M}(J)$ durch Grenzübergang $m \to \infty$, und das impliziert $E([-k,k]) = P_k$)

$$= \left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1^2)\widehat{E}\left(\chi_{[-k,k]}\right) f,\ \widehat{E}\left(\chi_{[-k,k]}\right) f\right)$$

(wegen 3.3.15a)

$$= \int \lambda^2 \chi_{[-k,k]}(\lambda) d\left(E(\lambda)f, f\right)$$

(wegen 3.3.16c) und 3.3.15a).

Es ist also $(\|AP_k f\|)$ eine monoton steigende Folge, die nach dem Satz von Beppo Levi genau dann beschränkt ist, wenn $\mathsf{u}_1 \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_f)$, d.h. wenn $f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right)$ gilt. Da für monoton steigende Folgen Beschränktheit und Konvergenz äquivalent sind, ist $f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right)$ äquivalent zu $f \in \mathcal{D}(A)$, d.h. $\mathcal{D}\left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\right) = \mathcal{D}(A)$.

Mit 3.4.8 und ansonsten denselben Argumenten können wir nun für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$ umformen

$$\begin{aligned}
(Af, f) &= \lim_{k\to\infty} (AP_k f, f) = \lim_{k\to\infty} (A_k P_k f, f) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)P_k f, f\right) = \lim_{k\to\infty} \int \lambda\, d\left(E_k(\lambda)P_k f, f\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int \lambda\, d\left(E(\lambda)P_k f, f\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int \lambda\, d\left(E(\lambda)E([-k,k])f, f\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)\widehat{E}\left(\chi_{[-k,k]}\right) f, f\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int \lambda \chi_{[-k,k]}(\lambda) d\left(E(\lambda)f, f\right) \\
&= \left(\widehat{E}(\mathsf{u}_1)f, f\right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir für den Grenzübergang am Schluß noch einmal 3.3.15a) verwendet. Mit 2.3.2b) folgt also $A = \int \lambda \, dE(\lambda)$, d.h. der Spektralsatz ist bewiesen. □

Wir wollen nun einfache Beispiele behandeln und die Spektralscharen einer orthogonalen Projektion, insbesondere des Identitätsoperators und des Nulloperators, bestimmen.

3.4.9 Beispiel

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und P eine orthogonale Projektion in $\mathcal{H}$; ferner seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Analog der im Anschluß an 3.3.1 angegebenen Spektralschar definieren wir nun eine Spektralschar E in $\mathcal{H}$ durch

$$E(\lambda) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda < \lambda_1 \,, \\ I - P & \text{für} \quad \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2 \,, \\ I & \text{für} \quad \lambda_2 \leq \lambda \,. \end{cases}$$

Dann gilt $E\left((-\infty, \lambda_1)\right) = E\left((\lambda_1, \lambda_2)\right) = E\left((\lambda_2, \infty)\right) = 0 \,, E([\lambda_1, \lambda_1]) = I - P \,,\ E([\lambda_2, \lambda_2]) = P$. Damit erhält man

$$\int \lambda \, dE(\lambda) = \lambda_1 (I - P) + \lambda_2 P \,.$$

E ist also die Spektralschar des rechts stehenden Operators. Insbesondere ist E im Fall $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ die Spektralschar von P und in den Fällen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ bzw. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ die Spektralschar des Nulloperators bzw. des Identitätsoperators.

Auch die Spektralschar eines kompakten selbstadjungierten Operators können wir mit unseren bisherigen Ergebnissen leicht angeben.

3.4.10 Beispiel

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ ein kompakter selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine Anordnung der paarweise verschiedenen, von Null verschiedenen Eigenwerte von A und $P_1, P_2, \ldots$ die Folge der orthogonalen Projektionen auf die zugehörigen Eigenräume. Ferner sei P die *orthogonale Projektion auf den Nullraum* $\mathcal{N}(A)$. *Damit sind* (wegen 3.1.10f) und (∗∗) im Beweis von 3.2.18) *die Voraussetzungen von* 3.3.20 *erfüllt, und die Abbildung* $E : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, *definiert durch*

$$E(\lambda)f := \begin{cases} \sum\limits_{\{k:\lambda_k \leq \lambda\}} P_k f & \text{für} \quad \lambda < 0\,, \\ \sum\limits_{\{k:\lambda_k \leq \lambda\}} P_k f + Pf & \text{für} \quad \lambda \geq 0\,, \end{cases}$$

$f \in \mathcal{H}$, *ist eine Spektralschar in* $\mathcal{H}$. Aus (∗) in 3.2.18 folgt

$$\sum |\lambda_k|^2 \|P_k f\|^2 < \infty$$

für jedes $f \in \mathcal{H}$, so dass nach 3.3.20 gilt $\mathcal{D}\left(\int \lambda\, dE(\lambda)\right) = \mathcal{H} = \mathcal{D}(A)$. Weiter haben wir nach 3.3.20

$$\int \lambda\, dE(\lambda) f = \sum \lambda_k P_k f$$

für jedes $f \in \mathcal{H}$, und das stimmt nach (∗) in 3.2.18 mit Af überein. Also gilt $\int \lambda\, dE(\lambda) = A$, d.h. E *ist die Spektralschar von* A.

Die Spektralscharen von maximalen Operatoren der Multiplikation mit einer reellwertigen Funktion können wir ebenfalls expliziter als das im Beweis des Spektralsatzes geschieht, aufgrund von 3.3.18 und 3.3.19, bestimmen.

3.4.11 Beispiel und Aufgabe

a) *Es sei* A *der maximale Operator der Multiplikation in* $\bigoplus_{\alpha \in M} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_\alpha)$ *(vgl.* 3.3.18) *mit einer Funktion* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *die bezüglich der in* 3.3.18 *behandelten Spektralschar messbar ist. Dann ist die Spektralschar* E *von* A *gegeben durch*

$$E(\lambda)(f_\alpha) = \chi_{\{\mu \in \mathbb{R}: u(\mu) \leq \lambda\}}(f_\alpha)\,,\ (f_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha \in M} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_\alpha), \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

L Der Beweis sei Ihnen als Übungsaufgabe überlassen.

b) *Es sei* A *der maximale Operator der Multiplikation mit der reellwertigen Funktion* u *in* $\mathcal{L}_2(D)$ *(vgl.* 2.5.18 *). Dann ist die Spektralschar* E *von* A *gegeben durch*

$$E(\lambda)f = \chi_{\{\mu \in D: u(\mu) \leq \lambda\}} f\,, \quad f \in \mathcal{L}_2(D)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Dies folgt unmittelbar aus 3.3.19.

Nach der Darstellung eines selbstadjungierten Operators als Integral in 3.4.1 werden wir im folgenden Satz eine weitere kennenlernen, die man grob so charakterisieren kann: Ein selbstadjungierter Operator ist im wesentlichen ein maximaler Operator der Multiplikation mit der Funktion u_1 in einem geeigneten Raum $\bigoplus\limits_{\alpha \in M} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_\alpha)$. Diese Darstellung ist allerdings nicht eindeutig.

3.4.12 **Satz**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann gibt es eine Familie $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in M}$ von Maßen $\varphi_\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, wo jedes φ_α von einer rechtsseitig stetigen, monoton wachsenden Funktion erzeugt wird, und einen unitären Operator $U : \mathcal{H} \to \bigoplus\limits_{\alpha \in M} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_\alpha)$ derart, dass mit dem maximalen Operator der Multiplikation $\widetilde{A}$ mit der Funktion u_1 ($\mathsf{u}_1(\lambda) := \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$) im Raum $\bigoplus\limits_{\alpha \in M} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_\alpha)$ gilt $A = U^* \widetilde{A} U$. Ist E die Spektralschar von A, so gilt $E(\lambda)h = U^* \left(\chi_{(-\infty,\lambda]} U h\right)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedes $h \in \mathcal{H}$.

Beweis.
Für $f \in \mathcal{H}$ mit $f \neq 0$ setzen wir $\mathcal{H}_f := \overline{\mathcal{L}(\{E(\lambda)f : \lambda \in \mathbb{R}\})}$. Dann ist $f \in \mathcal{H}_f$, also $\mathcal{H}_f \neq \{0\}$. Wir zeigen, dass es eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ gibt derart, dass $\mathcal{H} = \bigoplus_{f \in \mathcal{M}} \mathcal{H}_f$. Hierzu benötigen wir das Lemma von Zorn: Es sei $\widehat{\mathcal{M}} := \{\mathcal{M} \subset \mathcal{H} : \mathcal{H}_f \perp \mathcal{H}_g \text{ für alle } f, g \in \mathcal{M}\}$. $(\widehat{\mathcal{M}}, \subset)$ ist als Teilmenge der Potenzmenge von $\mathcal{H}$ eine geordnete Menge. Ist $\widehat{\mathcal{N}}$ eine lineare geordnete Teilmenge von $\widehat{\mathcal{M}}$, so ist $\bigcup_{\mathcal{M} \in \widehat{\mathcal{N}}} \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $\widehat{\mathcal{N}}$, die offenbar in $\widehat{\mathcal{M}}$ liegt. Wir können also mit dem Zornschen Lemma schließen, dass $\widehat{\mathcal{M}}$ ein maximales Element $\mathcal{M}_{\max}$ besitzt, und beweisen indirekt, dass das die gesuchte Menge ist, dass also $\mathcal{H} = \bigoplus\limits_{f \in \mathcal{M}_{\max}} \mathcal{H}_f$ gilt: Aus $\mathcal{H} \neq \bigoplus\limits_{f \in \mathcal{M}_{\max}} \mathcal{H}_f$ folgt, dass ein $f_0 \in \mathcal{H}$ mit $f_0 \neq 0$ existiert, so dass $f_0 \perp \mathcal{H}_f$ für jedes $f \in \mathcal{M}_{\max}$ gilt. Sind $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, so folgt daraus $(E(\mu)f_0, E(\lambda)f) = (f_0, E(\mu)E(\lambda)f) = (f_0, E(\min\{\mu,\lambda\})f) = 0$ für jedes $f \in \mathcal{M}_{\max}$, d.h. $E(\mu)f_0 \perp \mathcal{H}_f$ und $\mathcal{H}_{f_0} \perp \mathcal{H}_f$ für jedes $f \in \mathcal{M}_{\max}$. Daher liegt $\{f_0\} \cup \mathcal{M}_{\max}$ in $\widehat{\mathcal{M}}$ und ist echt größer als $\mathcal{M}_{\max}$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{M}_{\max}$. Damit ist $\mathcal{H} = \bigoplus\limits_{f \in \mathcal{M}_{\max}} \mathcal{H}_f$ nachgewiesen.
Diese Menge $\mathcal{M}_{\max}$ wird unsere Indexmenge M. Wir zeigen nun, dass es zu jedem $f \in \mathcal{M}_{\max}$ einen unitären Operator $U_f : \mathcal{H}_f \to \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, (E(.)f, f)) := \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_f)$ gibt. Dazu definieren wir den Operator $V_f : \mathcal{L}(\{E(\lambda)f : \lambda \in \mathbb{R}\}) \to$

$\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$ durch

$$V_f\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k E(\lambda_k)f\right) := \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\chi_{(-\infty,\lambda_k]}$$

für $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k E(\lambda_k)f \in \mathcal{L}\left(\{E(\lambda)f : \lambda\in\mathbb{R}\}\right)$. Dann folgt unter Benutzung von 3.3.8

$$\begin{aligned}
\left\|V_f\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k E(\lambda_k)f\right)\right\|^2 &= \left\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\chi_{(-\infty,\lambda_k]}\right\|^2 \\
&= \int\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\chi_{(-\infty,\lambda_k]}(\lambda)\right|^2 d\left(E(\lambda)f,f\right) \\
&= \left\|\int\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\chi_{(-\infty,\lambda_k]}(\lambda)dE(\lambda)f\right\|^2 \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k E\left((-\infty,\lambda_k]\right)f\right\|^2 \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k E(\lambda_k)f\right\|^2 .
\end{aligned}$$

Daher ist V_f ein isometrischer Operator. Nach 2.1.14 existiert eine Fortsetzung von V_f auf $\mathcal{H}_f$, die wir mit U_f bezeichnen. Da V_f isometrisch ist, ist - wie aus dem Beweis von 2.1.14 folgt - auch U_f isometrisch. Wir müssen noch $\mathcal{R}(U_f) = \mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$ zeigen. Dazu bezeichne $\mathcal{T}_{oa}(\mathbb{R})$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}$, für die die zugehörigen Intervalle alle links offen und rechts abgeschlossen sind. Dann ist nach Definition von V_f offenbar $\mathcal{T}_{oa}(\mathbb{R})\subset\mathcal{R}(V_f)$ und $\mathcal{T}(\mathbb{R})\subset\overline{\mathcal{T}_{oa}(\mathbb{R})}\subset\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$. Wegen $\overline{\mathcal{T}(\mathbb{R})}=\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$ gilt folglich $\overline{\mathcal{T}_{oa}(\mathbb{R})} = \overline{\mathcal{R}(V_f)} = \mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$ (die abgeschlossenen Hüllen sind dabei in der Norm von $\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$ zu bilden). Nach 2.2.11a), b) ergibt sich also $\mathcal{R}(U_f)=\overline{\mathcal{R}(V_f)}=\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$, und U_f ist ein unitärer Operator von $\mathcal{H}_f$ auf $\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$ mit $U_f=\overline{V}_f$.

Mit Hilfe dieser unitären Operatoren U_f und der orthogonalen Projektionen P_f von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_f$ für $f\in\mathcal{M}_{\max}$ definieren wir nun eine Abbildung $U:\mathcal{H}\to\bigoplus_{f\in\mathcal{M}_{\max}}\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\varphi_f)$ durch

$$Uh := (U_f P_f h)_{f\in\mathcal{M}_{\max}} \quad \text{für} \quad h\in\mathcal{H} .$$

Wegen

$$\|Uh\|^2 = \|(U_f P_f h)\|^2 = \sum \|U_f P_f h\|^2 = \sum \|P_f h\|^2 = \|h\|^2$$

ist U isometrisch. Die Surjektivität der U_f impliziert ferner die Surjektivität von U. Also ist U ein unitärer Operator von $\mathcal{H}$ auf $\bigoplus\limits_{f\in\mathcal{M}_{\max}} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_f)$.

Wir wollen nun zeigen, dass dieser so konstruierte Operator die in der Aussage des Satzes angegebenen Eigenschaften hat. Nach 3.3.21a) ist ja $UE(.)U^*$ eine Spektralschar in $\bigoplus\limits_{f\in\mathcal{M}_{\max}} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \varphi_f)$. Wir zeigen, dass $UE(\lambda)h = \chi_{(-\infty,\lambda]}Uh$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedes $h \in \mathcal{H}$ gilt; daraus folgt $E(\lambda)h = U^*\left(\chi_{(-\infty,\lambda]}Uh\right)$ und mit 3.3.21 und 3.4.11a) auch $A = U^*\widetilde{A}U$. Wir verwenden dazu die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} U_f E(\lambda)h &= \chi_{(-\infty,\lambda]}U_f h\,, \\ P_f E(\lambda)h &= E(\lambda)P_f \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{M}_{\max}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,,\ h \in \mathcal{H}_f\,, \end{aligned}$$

L deren Beweis wir Ihnen als Übungsaufgabe überlassen. Damit erhalten wir für jedes $h \in \mathcal{H}$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} UE(\lambda)h &= (U_f P_f E(\lambda)h) = (U_f E(\lambda)P_f h) \\ &= \left(\chi_{(-\infty,\lambda]}U_f P_f h\right) = \chi_{(-\infty,\lambda]}(U_f P_f h) \\ &= \chi_{(-\infty,\lambda]}Uh\,. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

Diese Darstellung von A ist deshalb nicht eindeutig, weil $\mathcal{M}_{\max}$ nicht eindeutig bestimmt ist.

Die Halbbeschränktheit und Beschränktheit selbstadjungierter Operatoren erkennt man an ihren Spektralscharen:

3.4.13 **Satz**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ mit Spektralschar E. Dann gilt

a) *A ist genau dann nach unten (bzw. oben) halbbeschränkt mit unterer (bzw. oberer) Schranke α, wenn $E(\lambda) = 0$ (bzw. $E(\lambda) = I$) gilt für jedes $\lambda < \alpha$ (bzw. $\lambda \geq \alpha$).*

b) *A ist genau dann beschränkt, wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit*

$$E(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda < \alpha\,, \\ I & \text{für} \quad \lambda \geq \beta\,. \end{cases}$$

Beweis.
Die Aussagen sind Folgerungen aus 3.4.1, und die Beweise sollen Ihnen als
L Übungsaufgabe überlassen bleiben. □

Wir führen nun für die in 3.3 eingeführten Operatoren $\widehat{E}(u)$ eine Bezeichnung ein, die nahegelegt wird durch den Spektralsatz 3.4.1, durch 3.4.2a) und durch ähnliche Beziehungen, die wir anschließend noch beweisen.

3.4.14 Definition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$, E bezeichne die Spektralschar von A. Ist dann $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ eine E-messbare Funktion, so bezeichnen wir den Operator $\widehat{E}(u)$ (vgl. 3.3.10) *mit $u(A)$.*

Zunächst lässt sich die Spektralschar von $u(A)$ über die Spektralschar von A angeben. Das sollen Sie in der folgenden Aufgabe ausrechnen.

3.4.15 Aufgabe

L *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ mit Spektralschar E. Ist dann $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige E-messbare Funktion, so gilt für die Spektralschar E_u von $u(A) = \widehat{E}(u)$ die Beziehung*

$$E_u(\lambda) = \widehat{E}\left(\chi_{\{\mu \in \mathbb{R} : u(\mu) \leq \lambda\}}\right) \quad \textit{für} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Im nächsten Satz sehen wir, dass die Bezeichnung $u(A)$ mit einigen algebraischen Begriffsbildungen verträglich ist.

3.4.16 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ mit Spektralschar E. Dann gilt

a) *Für* $u(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lambda^k$ *mit* $\alpha_k \in \mathbb{K}$ *für* $k = 0, ..., m$, $\alpha_m \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, *ist (in Übereinstimmung mit der Vereinbarung vor* 3.1.17)

$$u(A) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k A^k .$$

b) *Ist* A *positiv, so gibt es genau einen selbstadjungierten positiven Operator* B *mit* $B^2 = A$. *Es ist*

$$B \quad =: \quad A^{\frac{1}{2}} = \int q(\lambda) dE(\lambda) \quad \textit{mit}$$

$$q(\lambda) \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda < 0 \,, \\ \sqrt{\lambda} & \text{für} \quad \lambda \geq 0 \,, \end{cases}$$

wobei unter $\sqrt{\lambda}$ *die positive Quadratwurzel aus* λ *zu verstehen ist.*

c) *Es sei* $\mathcal{H}$ *zusätzlich komplex und* $\alpha \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$. *Dann gilt für* $u(\lambda) = (\alpha - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha I - A)^{-1} = u(A) = \int \frac{1}{\alpha - \lambda} dE(\lambda) .$$

Beweis.

a) Hier beruht der Beweis auf 3.4.2a) und 3.3.16b). Das überlassen wir Ihnen

L als Übungsaufgabe.

b) Wegen 3.4.13a) haben wir $E(\lambda) = 0$ für jedes $\lambda < 0$. Hieraus folgt mit 3.3.16c)

$$\left(\widehat{E}(q)\right)^2 \subset \widehat{E}(q^2) = \int q^2(\lambda)\, dE(\lambda) = \int \lambda\, dE(\lambda) = A .$$

Wegen $\mathcal{D}\left(\left(\widehat{E}(q)\right)^2\right) = \mathcal{D}\left(\widehat{E}(q^2)\right) \cap \mathcal{D}\left(\widehat{E}(q)\right)$ (ebenfalls aus 3.3.16c)) brauchen wir für die Gleichung $\left(\widehat{E}(q)\right)^2 = A$ nur noch $\mathcal{D}\left(\widehat{E}(q^2)\right) \subset \mathcal{D}\left(\widehat{E}(q)\right)$ zu zeigen. Das folgt aus

$$\begin{aligned} \int q^2 d\varphi_f \quad &= \quad \int q^2 \chi_{[0,1]} d\varphi_f + \int q^2 \chi_{(1,\infty)} d\varphi_f \\ &\leq \quad \int \chi_{[0,1]} d\varphi_f + \int q^4 \chi_{(1,\infty)} d\varphi_f \\ &\leq \quad \int d\varphi_f + \int q^4 d\varphi_f < \infty \end{aligned}$$

für $f \in \mathcal{D}\left(\widehat{E}(q^2)\right)$ wegen $q^2(\lambda) \le q^4(\lambda)$ für $\lambda \ge 1$. Zu zeigen bleibt noch die Eindeutigkeit. Nach 3.4.15 gilt für die Spektralschar E_0 von $\int q(\lambda)dE(\lambda)$

$$E_0(\lambda) = \begin{cases} \widehat{E}\left(\chi_{\{\mu\in\mathbb{R}:q(\mu)\le\lambda\}}\right) = E(\lambda^2) \quad \text{für} \quad \lambda \ge 0\,, \\ 0 \quad \text{für} \quad \lambda < 0\,. \end{cases}$$

Ist nun B irgendein selbstadjungierter positiver Operator mit $B^2 = A$ und ist E_1 die Spektralschar von B, so gilt wiederum nach 3.4.15 für die Spektralschar von $B^2 = A$ (wegen der Eindeutigkeit der Spektralschar für A)

$$E(\lambda) = \begin{cases} \widehat{E}_1\left(\chi_{\{\mu\in\mathbb{R}:\mu^2\le\lambda\}}\right) = E_1\left(\sqrt{\lambda}\right) \quad \text{für} \quad \lambda \ge 0\,, \\ 0 \quad \text{für} \quad \lambda < 0\,. \end{cases}$$

Zusammen mit dem Obigen folgt hieraus $E_0 = E_1$. Also ist $B = \displaystyle\int \sqrt{\lambda}dE(\lambda)$.

c) Es existiert $(\alpha I - A)^{-1}$ (2.5.4), und es gilt nach a)

$$\alpha I - A = \int (\alpha - \lambda)dE(\lambda)\,.$$

Wegen $\alpha \notin \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\lambda \mapsto \dfrac{1}{\alpha - \lambda}$ in $\mathbb{R}$ stetig, also auch E-messbar, und beschränkt. Daher ist

$$\int \frac{1}{\alpha - \lambda}dE(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,.$$

Mit 3.3.16c) erhalten wir für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$

$$\int \frac{1}{\alpha - \lambda}dE(\lambda)(\alpha I - A)f$$
$$\int \frac{1}{\alpha - \lambda}dE(\lambda)\int (\alpha - \lambda)dE(\lambda)f = \int dE(\lambda)f = f\,.$$

Also gilt

$$(\alpha I - A)^{-1} \subset \int \frac{1}{\alpha - \lambda}dE(\lambda)\,.$$

Die Gleichheit folgt aus $\mathcal{R}(\alpha I - A) = \mathcal{H}$ (2.5.12). □

Aufgrund von 3.4.16b) können wir nun, wie im Fall eines kompakten Operators (vgl. 3.2.25), auch den Betrag eines abgeschlossenen Operators (mit dicht liegendem Definitionsbereich) einführen. Denn ist A ein derartiger Operator, so ist A^*A nach 2.5.15 ein positiver selbstadjungierter Operator, für den $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ definiert ist.

3.4.17 **Definition**

Betrag eines abgeschlossenen Operators

Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume und sei A ein abgeschlossener linearer Operator von $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}_1$. Dann heißt $|A| := (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ der Betrag von A.

Wie 2.5.23a) lässt sich die folgende Aussage beweisen.
Für den Betrag von A gilt

3.4.18 $$\mathcal{D}(|A|) = \mathcal{D}(A) \quad \textit{und} \quad \| \, |A|f\| = \|Af\| \quad \textit{für jedes} \quad f \in \mathcal{D}(A) \ :$$

Für $f \in \mathcal{D}(A^*A) = \mathcal{D}(|A|^2)$ gilt

$$\begin{aligned} \|Af\|^2 &= (Af, Af) = (A^*Af, f) = (|A|^2 f, f) \\ &= (|A|f, |A|f) = \| \, |A|f\|^2 \, . \end{aligned}$$

Nach 2.5.15 ist $\mathcal{D}(A^*A) = \mathcal{D}(|A|^2)$ ein determinierender Bereich sowohl für A als auch für $|A|$. Zu $f \in \mathcal{D}(A)$ existiert also eine Folge (f_k) in $\mathcal{D}(A^*A)$ mit $f_k \to f$, für die (Af_k) konvergiert. Dafür ist nach der obigen Gleichung auch $(|A|f_k)$ eine Cauchyfolge, d.h. es folgt $f \in \mathcal{D}\left(\overline{|A| \, | \, \mathcal{D}(A^*A)}\right) = \mathcal{D}(|A|)$. Außerdem gilt $\| \, |A|f\| = \| \lim |A|f_k\| = \lim \|Af_k\| = \|Af\|$. Somit gilt $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(|A|)$ und $\| \, |A|f\| = \|Af\|$ für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$. Ebenso wird die umgekehrte Inklusion bewiesen.

Ganz analog wie bei einem kompakten Operator (vgl. dazu 3.2.26) haben wir auch für einen abgeschlossenen Operator eine polare Zerlegung. Der Beweis dieser Darstellung verläuft wörtlich wie der Beweis von 3.2.26. (Nur der Hinweis auf 3.2.22 muß durch den Hinweis auf 3.4.16b), $(*)$ muß durch 3.4.18 ersetzt werden, und der Hilbertraum $\mathcal{H}_1$ ist dort, wo er als Definitionsbereich von A auftritt, durch $\mathcal{D}(A)$ zu ersetzen. Die Frage der Definitionsbereiche ist wegen $\mathcal{D}(|A|) = \mathcal{D}(A)$ geklärt). Lesen Sie sich diesen daraufhin noch einmal durch.

3.4.19 **Satz**

polare Zerlegung eines abgeschlossenen Operators

Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ *Hilberträume und sei* A *ein abgeschlossener linearer Operator von* $\mathcal{H}_1$ *in* $\mathcal{H}_2$ *mit* $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}_1$. *Dann lässt sich* A *darstellen in der Form* $A = UB$ *mit einem selbstadjungierten positiven Operator* B *in* $\mathcal{H}_1$ *und einem partiell isometrischen Operator* U *mit Anfangsbereich* $\overline{\mathcal{R}(B)}$. *Die Darstellung von* A *mit diesen Eigenschaften ist eindeutig, und es gilt:* $B = |A|$, $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A)$, *und* U *hat den Endbereich* $\overline{\mathcal{R}(A)}$. *Sie heißt die polare Zerlegung von* A.