Prof. Dr. Reinhold Remmert

Modul 61216

Funktionentheorie

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

DIESE SEITE BLEIBT FREI.

Einleitung

Ecclesiastes XII, 12.

1. Es ist seit altersher üblich, Vorlesungen und Texten, in denen eine mathematische Theorie ausführlich abgehandelt wird, ein Vorwort voranzustellen, das in kurzer, aber nichtsdestoweniger präziser und umfassender Weise neben dem Inhalt auch Lehr– und Lernziele der in Rede stehenden Disziplin, wie sie vom Autor gesehen werden, dem Hörer bzw. Leser nahebringen soll. Die Fragwürdigkeit eines jeden solchen Versuches liegt auf der Hand: Wie kann ein Lehrender einem Lernenden Inhalt, Gesichtspunkte, Motive und Ziele einer Theorie bereits dann auseinandersetzen, wenn der Stoff selbst dem Lernenden noch unbekannt ist? Wie kann man *über* Dinge reden, ohne die Dinge selbst zu kennen? So ist es nicht verwunderlich, dass solche Präambeln in der Regel nur für diejenigen von unmittelbarem Nutzen sein können, die bereits eine gewisse Stoffkenntnis besitzen. Der Leser wird daher immer gut beraten sein, wenn er Einleitungen erneut und wiederholt liest, nachdem er bereits mit dem Stoff von 3 bzw. 6 bzw. 9 bzw. allen Paragraphen (hier: i. Allg. Kurseinheiten) vertraut ist. An einer klassischen Universität behauptete ein Dozent in der ersten Stunde gern, dass die von ihm darzulegende Theorie eines Spezialgebietes der Mathematik von jedem verstanden werden könnte, der nur des Hörens und Lesens fähig sei. Welche Arroganz wird durch eine solche Haltung zum Ausdruck gebracht! Eine Vorlesung und ein Text lassen sich natürlich immer so aufbauen, dass *nichts* aus anderen Gebieten der Mathematik vorausgesetzt und alles pedantisch bewiesen wird. Doch welche Unehrlichkeit liegt in einem derartigen Vorgehen: es wird stillschweigend unterstellt, dass der Studierende bereits irgendwann ein Gefühl für Mathematik an sich (in der Schule oder vorangehenden Studien) entwickelt hat; doch es wird alles getan, dies nicht offen zuzugeben.

Auch die klassische Funktionentheorie, d. h. die Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen *einer* komplexen Variablen, gehört zu den mathematischen Theorien, die man weitgehend unabhängig von allen anderen mathematischen Disziplinen entwickeln kann. Doch werden wir bewusst nicht so vorgehen. Zwar wird dem Leser kein großes Faktenwissen über reelle Analysis und lineare Algebra abverlangt, doch ist eine gewisse Vertrautheit mit Begriffen und vor allem mit Denkweisen der Analysis, mengentheoretischen Topologie und linearen Algebra unabdingbar. Die Funktionentheorie ist im 19. Jahrhundert aus der klassischen reellen Differential– und Integralrechnung und aus der klassischen Algebra hervorgegangen; man sollte dies – bei allem Anspruch auf Selbständigkeit und Eigenleben – nie vergessen oder gar verdrängen wollen.

2. Die komplexe Funktionentheorie hat sofort nach ihrer Begründung durch Cauchy, Riemann und Weierstrass im vergangenen Jahrhundert höchste Beachtung in der mathematischen Welt gefunden. So kann man etwa mutatis mutandis in der zeitgenössischen Literatur lesen: „Die erhabenen Schöpfungen dieser Theorie haben die Bewunderung der Mathematiker dieses Jahrhunderts vor allem deshalb erregt, weil sie in fast beispielloser Weise die Wissenschaft mit einer außerordentlichen Fülle ganz neuer Gedanken befruchtet und vorher gänzlich unbekannte Felder zum ersten Male der Forschung erschlossen haben. Mit der Cauchyschen Integralformel und dem Weierstraßschen Potenzreihenkalkül wird nicht bloß das Fundament zu einem neuen Teile der Mathematik gelegt, sondern es wird zugleich auch das erste und bis jetzt noch immer fruchtbarste Beispiel des innigen Zusammenhanges zwischen Analysis und Algebra geliefert. Aber es ist nicht bloß der wunderbare Reichtum an neuen Ideen und großen Entdeckungen, welche die neue Theorie liefert; vollständig ebenbürtig stehen dem die Kühnheit und Tiefe der Methoden gegenüber, durch welche die größten Schwierigkeiten überwunden und die verborgensten Wahrheiten, die Mysterien der analytischen Funktionen, in das hellste Licht gesetzt werden.“

   Diesen schwärmerischen Sätzen ist auch aus heutiger Sicht wenig hinzuzufügen. Funktionentheorie ist nach wie vor eine mathematische Paradedisziplin; es zeugt von der Gedankentiefe von Cauchy, Riemann und Weierstrass, dass ihre nun schon mehr als 150 Jahre alten klassischen Methoden sich auch heute noch (unmittelbar oder mit geringen Modifikationen) bei der Behandlung von allgemeineren Problemen bewähren.

3. Eine Darstellung der Funktionentheorie hat (wohl oder übel) mit dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen zu beginnen. Gewiss werden dem Leser komplexe

Zahlen bereits in vorangehenden Kursen begegnet sein; wir haben nichtsdestoweniger im § 1 alles für die Funktionentheorie Wesentliche über diese „Rechengrößen“ zusammengestellt. Einen Schwerpunkt bildet die Schreibweise einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten, d. h. in der Form

$$z = re^{i\varphi},$$

wobei r und φ reelle Zahlen mit $0 \leq r$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$ (oder auch $0 \leq \varphi < 2\pi$) sind und e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Die Polarkoordinatendarstellung erlaubt es, viele Rechnungen kurz und elegant auszuführen; dafür muss allerdings die Exponentialfunktion mit komplexem (genauer: imaginärem) Argument in Kauf genommen werden. Hier hat man bereits ein erstes und typisches Beispiel dafür, dass komplexe Zahlen nur dann richtig zu verstehen sind, wenn topologisch-analytische Fakten aus der Theorie der reellen Zahlen bekannt sind.

Es ist heutzutage kaum noch verständlich, welche Schwierigkeiten und Mühen die komplexen Zahlen den Mathematikern und Philosophen in der Vergangenheit gemacht haben. Erst die Autorität von Gauss nahm den komplexen Zahlen den letzten Hauch von Mystizismus und vorgeblicher Unklarheit; seine so einfache und gerade deswegen so geniale Deutung der komplexen, oder wie man zu jenen Zeiten viel lieber sagte, der *imaginären* bzw. *unmöglichen* Zahlen als Punkte der Zahlenebene befreite diese fiktiven Größen von allem Geheimnisvollen und Spekulativen und räumte ihnen neben den reellen Zahlen das „völlig gleiche Bürgerrecht“ in der Mathematik ein. „Gauß hat das Unmögliche möglich gemacht“ steht 1849 in einer Glückwunschadresse des Collegium Carolinum von Braunschweig (der heutigen Technischen Universität) an Gauss anlässlich seines 50–jährigen Doktor–Jubiläums.

4. Wir haben nun den Aufbau und Inhalt dieses Kurses in Kürze zu beschreiben. Wie in der reellen Analysis garantieren auch im Komplexen konvergente Folgen und konvergente Reihen einen schier unerschöpflichen Vorrat an überraschenden und nichttrivialen Sätzen. Wir behandeln diese Dinge im gebotenen Umfange im § 2, insbesondere studieren wir ausführlich die Exponentialfunktion $\exp z$ und die trigonometrischen Funktionen durch ihre Potenzreihen. Neben den aus dem Reellen geläufigen Eigenschaften ergeben sich gänzlich neue, im Reellen *nicht* sichtbare Aussagen über die Struktur dieser sogenannten elementaren transzendenten Funktionen: So erweist sich z. B. die Exponentialfunktion

als periodisch mit der rein imaginären Periode $2\pi i$, weiter erhält man mit der allgemeingültigen Formel

$$\exp iz = \cos z + i \sin z\,, \quad z \in \mathbb{C},$$

einen unerwarteten Zusammenhang zwischen diesen Funktionen.

Das Prinzip, Funktionen durch konvergierende Potenzreihen zu definieren, führte in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch Karl Weierstrass zu einer ungeahnten Ausdehnung des Feldes der speziellen Funktionen. Gauss hat dieses Prinzip bereits 1812 gesehen, er schreibt: „Die transzendenten Funktionen haben ihre wahre Quelle allemal, offenliegend oder versteckt, im Unendlichen. Die Operationen des Integrierens, der Summation unendlicher Reihen oder überhaupt die Annäherung an eine Grenze durch Operationen, die nach bestimmten Gesetzen *ohne Ende* fortgesetzt werden – dies ist der eigentliche Boden, auf welchem die transzendenten Funktionen erzeugt werden ...“ Neben dem Konvergenzbegriff ist der Stetigkeitsbegriff ein Fundamentalbegriff der Funktionentheorie. Wir widmen diesem Begriff den ganzen § **??**. Dabei wenden wir (wie auch schon vorher im § 2) das „Prinzip der Vertiefung durch Verallgemeinerung“ an: Wir diskutieren alle Begriffe und Sätze, so weit dies ohne Substanzverlust und ohne zusätzlichen Aufwand möglich ist, für metrische Räume. Dieser so genannte höhere Standpunkt ist bequem und vermeidet unerwünschte Wiederholungen im weiteren Verlauf des Kurses.

Der gewöhnliche Konvergenzbegriff ist, wie man bereits aus der Infinitesimalrechnung weiß, für viele Probleme der Analysis nicht adäquat. So ist es nicht verwunderlich, dass auch in der Funktionentheorie dem Begriff der gleichmäßigen Konvergenz eine zentrale Bedeutung zukommt. Die Erfahrung hat gezeigt, dass es in der Regel genügt, gleichmäßige Konvergenz im Kleinen zu postulieren. So werden wir im § **??** zum Begriff der kompakten Konvergenz geführt. Für kompakt konvergente Funktionenfolgen gelten „Erhaltungssätze“ für Stetigkeit, Integrierbarkeit und komplexe Differenzierbarkeit, die wir nach und nach kennenlernen werden. Wir arbeiten wieder weitgehend in der Kategorie der metrischen Räume; natürlich ist bei der Behandlung des klassischen Abelschen Grenzwertsatzes im Abschnitt **??** die Beschränkung auf den komplexen Zahlkörper $\mathbb{C}$ unerlässlich.

5. Komplexe Funktionentheorie im klassischen Sinne ist die Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen. Der Begriff der Differenzierbarkeit wird im § **??**

wörtlich so wie im Reellen eingeführt; der Leser wird zunächst nicht erwarten, dass dieser Begriff im Komplexen ganz andere Konsequenzen hat als in der reellen Theorie. Die komplex differenzierbaren Funktionen werden durch die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen charakterisiert, die man in der einen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

elegant ausdrücken kann. Erst nach und nach wird diese Differentialgleichung ihre volle Kraft erweisen.

Unentbehrliches Hilfsmittel beim Studium der komplex differenzierbaren Funktionen sind Kurvenintegrale. Als Integrationskurven lassen wir beliebige stückweise stetig differenzierbare Wege in der Zahlenebene $\mathbb{C}$ zu. Wenngleich dem Leser die Theorie solcher Kurvenintegrale und ihre Problematik aus der zwei- oder mehrdimensionalen reellen Analysis bereits hinlänglich bekannt sein dürfte, studieren wir diese Dinge intensiv und ausführlich im § **??**. Wir legen dabei besonderen Wert darauf, die Theorie in komplexer Schreibweise darzustellen.

Die Frage nach der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen ist das Leitmotiv des § **??**. Wir haben uns mit den Begriffen „integrabel“ und „Stammfunktion“ auseinanderzusetzen.

6. Die §§ 1–**??** werden einem Leser, der mit der zwei–dimensionalen reellen Differential– und Integralrechnung vertraut ist, nichts echt Neues geboten haben. Es könnte sogar beim einen oder anderen der Verdacht entstanden sein, dass lediglich eine neue Terminologie für an sich wohlbekannte Tatsachen eingeführt worden ist. Durch den § **??**, der dem Cauchyschen Integralsatz und der Cauchyschen Integralformel vorbehalten ist, werden alle etwaigen Spekulationen solcher Art entkräftet: Es ist und bleibt für jeden, der ein gesundes mathematisches Empfinden hat, nahezu ein Wunder, dass für komplex differenzierbare Funktionen die Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in \Delta\,,$$

besteht, mit der die Werte der Funktion in allen Punkten z aus dem Inneren eines Kreises Δ durch die Werte dieser Funktion auf dem Kreisrand $\partial\Delta$ allein ausgedrückt werden. Zu dieser Aussage gibt es in der Theorie der reellen differenzierbaren Funktionen keinerlei Analogon; entsprechend wird man auch erst nach und nach die volle Tragweite der obigen Cauchyschen Integralformel würdigen.

Unentbehrliches Hilfsmittel zur Herleitung der Cauchyschen Integralformel ist der Cauchysche Integralsatz, den wir mit einer eleganten Bisektionsmethode gewinnen. Vom Inhalt und von der Bedeutung her bildet der § **??** einen Schwerpunkt dieses Kurses.

Man kann mit guten Gründen den Standpunkt einnehmen, dass alle nichttrivialen und interessanten Sätze der komplexen Funktionentheorie Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel sind. Es würde in dieser Einleitung zu weit führen, nun im Einzelnen nacheinander die wichtigen Aussagen, die sich aus der Integralformel herleiten lassen, zu kommentieren. Andeutungen müssen hier genügen. So erhält man z. B. sofort ein Maximumprinzip für komplex differenzierbare Funktionen, mit dessen Hilfe in wenigen Zeilen der berühmte Fundamentalsatz der Algebra abgeleitet werden kann. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes komplexe Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ von positivem Grad mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt; der erste strenge Beweis für diesen Existenzsatz wurde 1799 von Gauss in seiner Helmstedter Dissertation gegeben.

7. Der systematische Aufbau der Funktionentheorie führt von der Cauchyschen Integralformel geradlinig zum Satz von der lokalen Entwickelbarkeit aller komplex differenzierbaren Funktionen in konvergente Potenzreihen (Taylorreihen). Dieses Thema bildet den Kernpunkt des § **??**. Da konvergente Potenzreihen stets auch komplex differenzierbare Funktionen repräsentieren, so gewinnt man jetzt auf einmal die unerwartete Erkenntnis, dass differenzierbare Funktionen und konvergente Potenzreihen im Komplexen ein– und dasselbe sind; dies führt zum sogenannten Weierstraß'schen Standpunkt, demzufolge die ganze Funktionentheorie allein mittels konvergenter Potenzreihen begründet werden kann. Da wie im Reellen die Ableitungen konvergenter Potenzreihen wieder konvergente Potenzreihen sind, so ergibt sich nun auch überraschend, dass jede einmal komplex differenzierbare Funktion automatisch unendlich oft komplex differenzierbar ist.

Der § **??** trägt die Überschrift „Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen". Wir behandeln hier u. a. den Identitätssatz, den Riemannschen Fortsetzungssatz, den Satz von Morera, die Cauchyschen Ungleichungen für Taylorkoeffizienten und den Satz von Liouville. Der Satz von Liouville führt zu einem zweiten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, der durch besondere Kürze und Eleganz besticht. Die Sätze des § **??** sind sämtlich Preziosen aus der großen Zeit der Funktionentheorie; sie haben auch in der Gegenwart noch nichts von ihrem Glanz und ihrer Faszination verloren.

Auch für Ableitungen komplex differenzierbarer Funktionen, die wir nun auch holomorphe Funktionen nennen, gelten Cauchysche Integralformeln:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}\,, \quad z \in \Delta\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Wir gehen auf diese Formeln im § **??** ausführlich ein und beleuchten sie von verschiedenen Gesichtspunkten, u. a. besprechen wir den allgemeinen Vertauschungssatz von Differentiation und Integration, der letztlich hinter diesen Formeln steht.

Über das Werteverhalten holomorpher Funktionen lassen sich sehr präzise Aussagen machen. So beweisen und diskutieren wir im § **??** den Offenheitssatz (= Satz über die Gebietstreue) und Umkehrsätze, des Weiteren geben wir für jede nichtkonstante holomorphe Funktion lokal eine Normalform an.

Dem Studium der Singularitäten holomorpher Funktionen hat seit jeher das besondere Interesse der Funktionentheoretiker gegolten. Wir untersuchen im § **??** extensiv das Verhalten holomorpher Funktionen in der Umgebung isolierter Singularitäten. Wir charakterisieren Pole und wesentliche Singularitäten durch das Wachstumsverhalten der Funktion. Die Cauchysche Integralformel für Kreisringe führt zum Laurentschen Entwicklungssatz, der die natürliche Verallgemeinerung des Taylorschen Entwicklungssatzes ist.

8. Die Gültigkeit der Cauchyschen Integralformel ist nicht auf Kreisscheiben und Kreisringe beschränkt. Man kann vielmehr für beliebige geschlossene Wege W eines Bereiches $U \subset \mathbb{C}$, deren Inneres $I(W)$ ganz in U liegt, eine Integralformel für alle in U holomorphen Funktionen aufstellen:

$$I(W, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in U \setminus W\,;$$

hierbei ist $I(W, z)$ eine ganze Zahl, die nur von W und z abhängt (Umlaufzahl). Die Einzelheiten hierüber finden sich im § **??**, dabei ist die Diskussion grundlegender Begriffe der algebraischen Topologie wie „nullhomolog“ und „nullhomotop“ unerlässlich. Als natürliche Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel und des Cauchyschen Integralsatzes beweisen wir im § **??** die Residuenformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_W f(\zeta)d\zeta = \sum_{a \in I(W)} I(W, a)\,\mathrm{res}(f, a)\,,$$

die zur Berechnung von Kurvenintegralen in vielen Fällen hervorragend geeignet ist.

9. Die in den vorangehenden Abschnitten 4. – 8. in Kürze dargelegte Inhaltsangabe dieses Textes macht klar, dass dem Leser mit dem Kurs „Funktionentheorie I“ eine Fülle von klassischer Mathematik angeboten wird. Wie soll man (im stillen Kämmerlein) vorgehen, um diesen Stoff zu verarbeiten und zu bewältigen? Es ist immer ein gefährliches Unterfangen, allgemeine Thesen dafür aufstellen zu wollen, wie man „am besten“ eine mathematische Theorie erlernen kann. Es gibt keinen Königsweg. Eine Methode, die für den einen optimal ist, wird für den anderen erfolglos bleiben. Die Leser dieses Skriptums werden gewiss durch die Lektüre von Texten vorangehender Studienjahre bereits eigene Erfahrungen gesammelt und für sich selbst ein Arbeitskonzept entwickelt haben.

Dennoch seien hier zwei Thesen gegenübergestellt:

1. Vorrangig ist das Verständnis der Begriffe und Sätze; nachrangig sind die Beweise der Sätze.
2. Sätze hat man nur dann verstanden, wenn man ihre Beweise voll erfasst hat.

Diese beiden Prinzipien, die immer wieder zu Diskussionen Anlass geben, lassen sich in der Praxis gut miteinander vereinbaren. So ist es sehr wohl möglich (und nichts Negatives), in einem Paragraphen mit einem Satz aus einem früheren Paragraphen zu arbeiten, dessen Beweis man noch nicht verstanden hat; man lernt auch Neues durch Repetition, plötzlich versteht man etwas, das lange Zeit unverständlich schien. Letzten Endes sollte man jedoch nicht eher Ruhe geben, bis man jeden Beweis wirklich verstanden hat (was nicht bedeutet, dass man mit einem Satz auch stets seinen Beweis präsentieren kann).

Zur Vertiefung dieses Studientextes sollen noch einige Lehrbücher empfohlen werden. Wir haben es bewusst unterlassen, Zitate und Verweise auf Literaturstellen in den laufenden Text aufzunehmen. Die Zeitschriftenliteratur zur klassischen Funktionentheorie ist unerschöpflich, selbst die Lehrbuchliteratur ist in den letzten Jahren nahezu unüberschaubar geworden. So geben wir lediglich acht Bücher an.

Ahlfors, Lars V.: *Complex Analysis.* McGraw–Hill, New York, 3. ed. 1979

Behnke, H. u. Sommer, F.: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Springer, Berlin – Heidelberg – New York, Studienausgabe der 3. Auflage 1976

Cartan, H.: *Elementare Theorie der Analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen.* BI-Hochschultaschenbücher 112/112a, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966

Conway, John B.: *Functions of one complex variable I.* Graduate Texts in Mathematics, Bd. 11, Springer, New York – Heidelberg – Berlin, 2. ed. 1978

Heins, M.: *Complex Function Theory.* Academic Press, New York 1969

Hurwitz, A.: *Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen.* Grundlehren der Math. Wiss. Bd. 3, Springer, 5. Auflage 2000

Nevanlinna, R. u. Paatero, V.: *Einführung in die Funktionentheorie.* Birkhäuser, Basel u. Stuttgart 1965

Remmert, R. u. Schumacher, G.: *Funktionentheorie 1.* Springer, 5. Auflage 2002

Die Bücher 2, 3, 4 sind preisgünstige Paperback-Ausgaben; das Buch 6 ist ein klassischer Hit.

DIESE SEITE BLEIBT FREI.

§ 1

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

Den meisten Kursteilnehmern dürfte der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen nebst seinen wesentlichen Eigenschaften bereits bekannt sein. Nichtsdestoweniger werden wir in diesem ersten Paragraphen die komplexen Zahlen ab ovo einführen und eingehend diskutieren. Wir legen besonderen Wert darauf, „komplex zu rechnen“ und werden nur, wenn es unumgänglich ist, zu Real- und Imaginärteil übergehen. Wir besprechen en detail die Lösbarkeit quadratischer Gleichungen im Komplexen; weiter gehen wir ausführlich auf Polarkoordinaten ein. An dieser Stelle sei außerdem noch darauf hingewiesen, dass wir das Wort *Körper* in diesem Kurs nur im kommutativen Fall verwenden.

1.1 Einführung der komplexen Zahlen

Ausgangspunkt ist der aus der linearen Algebra und der Infinitesimalrechnung wohlbekannte zwei–dimensionale reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$ der geordneten reellen Zahlenpaare (x, y), in dem Addition und skalare Multiplikation komponentenweise definiert sind:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \quad r(x, y) = (rx, ry)\,.$$

Eine fundamentale Erkenntnis der Mathematik des 18. Jahrhunderts war, dass man zwischen diesen Zahlenpaaren zusätzlich noch eine Multiplikation so erklären kann, dass ein Körper mit bemerkenswerten Eigenschaften entsteht.

1.1.1 Definition

Für alle Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *sei*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

Wir schreiben abkürzend durchweg $z := (x, y)$, $z_\nu := (x_\nu, y_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Man rechnet unmittelbar nach, dass für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ stets gilt

- Kommutativgesetz: $z_1z_2 = z_2z_1$,
- Assoziativgesetz: $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$,
- Existenz der Eins: $ez = ze = z$ mit $e := (1, 0)$,
- Distributivgesetz: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Damit können wir als ersten Satz formulieren (und zugleich definieren):

1.1.2 Satz

Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ *ist bezüglich der Vektoraddition und der obigen Multiplikation ein kommutativer Ring mit Einselement* e*. Er heißt Ring der komplexen Zahlen und wird mit* $\mathbb{C}$ *bezeichnet.*

Für jeden kommutativen Ring R mit Einselement e interessiert die Frage, welche Elemente *Einheiten* in R sind; dabei heißt $z \in R$ eine Einheit in R, wenn z ein *Inverses* $z^{-1} \in R$ besitzt, d. h. ein Element z^{-1} mit $zz^{-1} = z^{-1} = e$. Für komplexe Zahlen ist dies einfach zu entscheiden: Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ vorgegeben und soll $z' = (x', y')$ invers zu z sein, so muss nach Definition der Multiplikation

$$(1, 0) = (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

gelten, d. h.

$$xx' - yy' = 1\,, \quad yx' + xy' = 0\,.$$

Dies ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem (mit Koeffizienten x, y und Unbekannten x', y'); nach bekannten Sätzen der linearen Algebra gibt es genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn die „Determinante", d. i. im vorliegenden Fall die reelle Zahl $x^2 + y^2$, nicht verschwindet. Alsdann ist

$$x' := \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \quad y' := \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

die Lösung des Gleichungssystems. Da $x^2 + y^2 \neq 0$ genau dann gilt, wenn $z = (x, y) \neq 0$, so sehen wir, dass in $\mathbb{C}$ jedes Element $\neq 0$ eine Einheit ist. Dies bedeutet:

1.1.3 Satz

Der Ring $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein Körper. Für $z = (x, y) \neq 0$ ist

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\,, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

das Inverse zu z.

1.1.4 Bemerkung

Die dem Satz 1.1.3 vorangeschickten Bemerkungen führen zwingend zur expliziten Formel für z^{-1}, zum Beweis des Satzes sind sie aber keineswegs nötig. Hat man erst einmal die explizite Formel für z^{-1} angeschrieben, so verifiziert man einfach durch Nachrechnen die gemachte Behauptung.

Es gibt eine nahe liegende Möglichkeit, jede reelle Zahl als komplexe Zahl aufzufassen. Wir betrachten die Abbildung

$$\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,, \quad r \mapsto (r, 0)\,.$$

Dann verifiziert man unmittelbar:

1.1.5 Satz

Die Abbildung $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein Körpermonomorphismus, d. h. ι ist injektiv und für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt

$$\iota(x - x') = \iota(x) - \iota(x')\,, \quad \iota(x \cdot x') = \iota(x) \cdot \iota(x')\,.$$

Wir identifizieren fortan die reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$. Dadurch wird $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, genauer: ein *Unterkörper* von $\mathbb{C}$. Wir schreiben entsprechend 1 statt $(1, 0)$. Traditionsgemäß benutzen wir weiter die seit Euler übliche Notation

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}\,.$$

Man nennt i häufig *die imaginäre Einheit von* $\mathbb{C}$; es gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1\,.$$

Wir erhalten nun für jede komplexe Zahl $z = (x, y)$ folgende *eindeutige* Zerlegung:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + (0, 1) \cdot y = x + iy\,.$$

Dies ist die klassische und allgemein gebräuchliche Schreibweise für komplexe Zahlen, die auch wir im Folgenden durchweg benutzen werden.

1.1.6 Definition (Realteil, Imaginärteil)
Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, setzt man

$$\operatorname{Re} z := x\,, \quad \operatorname{Im} z := y\,.$$

Man nennt $\operatorname{Re} z$ *den Realteil und* $\operatorname{Im} z$ *den Imaginärteil von z. Man nennt z reell bzw. rein imaginär, wenn $z = \operatorname{Re} z$ bzw. $z = i \operatorname{Im} z$ ist.*

Zwei komplexe Zahlen z, z' sind genau dann gleich, wenn gilt

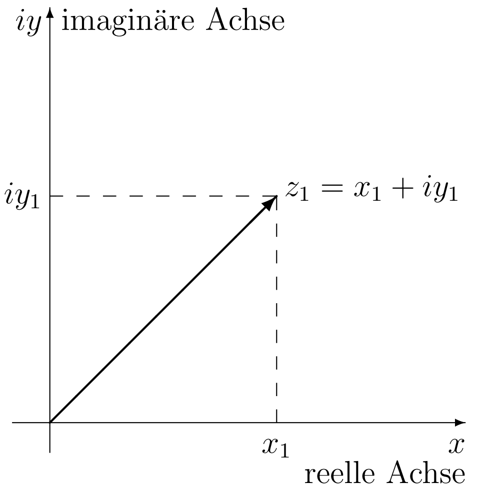
$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z' \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z'\,.$$

Die beiden Abbildungen

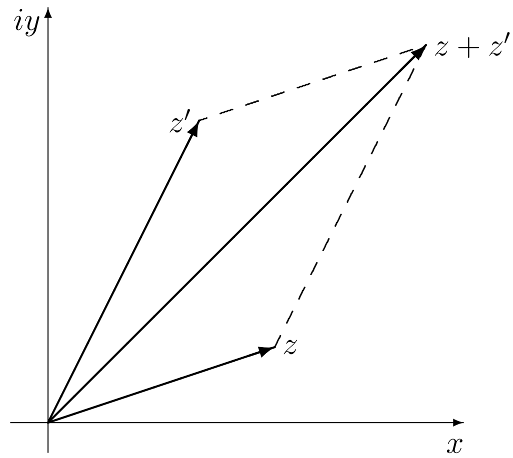
$$\begin{aligned} \operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}\,, &\quad z \mapsto \operatorname{Re} z\,, \\ \operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}\,, &\quad z \mapsto \operatorname{Im} z\,, \end{aligned}$$

sind $\mathbb{R}$–linear (respektieren aber *nicht* die Multiplikation!).

Man veranschaulicht sich die komplexen Zahlen geometrisch am besten in der *Gaußschen Zahlenebene* (Figur 1-1); die Addition zweier komplexer Zahlen wird dann die übliche Vektoraddition (Parallelogrammregel, Figur 1-2). Eine geometrische Interpretation der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden wir im Abschnitt 1.6 angeben (Satz 1.6.3).



Figur 1-1



Figur 1-2

Die Multiplikation komplexer Zahlen wird vollständig beherrscht durch die eine Gleichung $i^2 = -1$. Daraus fließt automatisch, wenn $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ ist:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Für jeden Körper, speziell also für $\mathbb{C}$, gilt die *binomische Formel:*

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}\,, \quad a, b \in \mathbb{C}\,,\ n = 1, 2, \ldots ;$$

dabei bezeichnen $\binom{n}{\nu}$ die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{\nu} := \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} = \frac{n!}{(n-\nu)!\,\nu!} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{0} := 1\,.$$

Für jeden Körper, somit speziell für $\mathbb{C}$, gilt die *Summenformel der endlichen geometrischen Reihe:*

$$\sum_{\nu=0}^{n} z^{\nu} = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\,,\ z \neq 1 \text{ und alle } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Für jeden Körper K ist die Menge $K^* := K \setminus \{0\}$ eine Gruppe bzgl. der Multiplikation. Wir sprechen daher von der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^*$ der komplexen Zahlen.

Im Körper $\mathbb{R}$ gibt es kein Element r mit $r^2 = -1$ (alle reellen Zahlen $\neq 0$ haben positive Quadrate). Wir können *alle* komplexen Zahlen angeben, deren Quadrat -1 ist.

1.1.7 Satz

Es gibt genau zwei komplexe Zahlen z, nämlich $z := i$ und $z := -i$, mit $z^2 = -1$.

Beweis:
Sei $z = x + iy$ so beschaffen, dass gilt $z^2 = -1$. Dann ist also

$$-1 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy\,,$$

d. h.

$$x^2 - y^2 = -1 \quad \text{und} \quad 2xy = 0\,.$$

Die zweite Gleichung erzwingt $y = 0$ oder $x = 0$. Der Fall $y = 0$ ist nicht möglich, da sich dann die erste Gleichung auf $x^2 = -1$ reduziert und nicht reell lösbar ist. Es muss also $x = 0$ gelten. Dann folgt $-y^2 = -1$, d. h. $y^2 = 1$, d. h. $y = \pm 1$. Wir sehen, dass nur $z = \pm i$ die Gleichung $z^2 = -1$ lösen kann. Da in der Tat $(\pm i)^2 = (\pm 1)^2 i^2 = -1$, so ist Satz 1.1.7 bewiesen. $\square$

Wir wollen noch eine zweite Beschreibung des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen angeben. Dazu betrachten wir den *nichtkommutativen Ring* $\mathbb{R}^{(2,2)}$ *der reellen* $(2,2)$*–Matrizen*. Wir definieren wie folgt eine Abbildung:

$$\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{(2,2)}\,, \qquad z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

θ ist injektiv, für alle $z_\nu = x_\nu + iy_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2$, gilt

$$\begin{aligned} \theta(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= \theta(z_1) + \theta(z_2) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \theta(z_1) \cdot \theta(z_2) &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & x_1 y_2 + y_1 x_2 \\ -y_1 x_2 - x_1 y_2 & -y_1 y_2 + x_1 x_2 \end{pmatrix} \\ &= \theta((x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)) = \theta(z_1 z_2). \end{aligned}$$

Schließlich ist noch:

$$\theta(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ist damit gezeigt:

1.1.8 Satz

Die Menge aller reellen $(2,2)$*–Matrizen der Form* $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$*,* $x, y \in \mathbb{R}$*, ist bezüglich der Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation ein Körper, der isomorph zum Körper* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen ist.*

1.1.9 Aufgabe

L Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$\frac{1+i}{1-i}, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4, \quad z_{2n} := (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

1.2 Der Automorphismus $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen besitzt außer der Identität keinen Automorphismus; es gilt also der folgende Satz, dessen Beweis den Lösungshinweisen als Nachtrag angefügt ist:

L *Jede bijektive Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(1) = 1$, die für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ die Rechengesetze*

$$\alpha(x + x') = \alpha(x) + \alpha(x')\,, \quad \alpha(x \cdot x') = \alpha(x) \cdot \alpha(x')$$

erfüllt, ist die Identität.

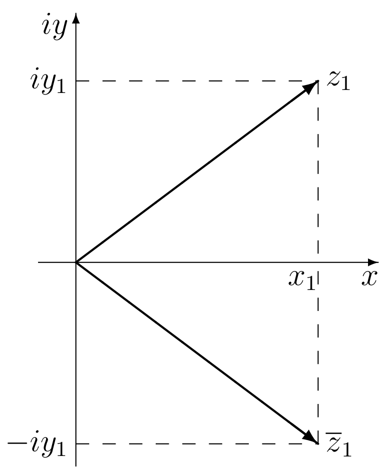
Im Gegensatz hierzu besitzt der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen „viele" Automorphismen $\neq$ id. Unter diesen Abbildungen ist eine besonders wichtig. Um sie zu beschreiben, führen wir zunächst den Begriff der konjugiert komplexen Zahl ein.

1.2.1 Definition (konjugiert komplexe Zahl)
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\overline{z} := x - iy$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl.

In der Gaußschen Zahlenebene gewinnt man $\overline{z}$ aus z durch *Spiegelung* an der reellen Achse (Figur 1-3).



Figur 1-3

Offenbar gilt $z = \overline{z}$ genau dann, wenn z reell ist. Ferner gilt $z = -\overline{z}$ genau dann, wenn z rein imaginär ist. Weiter gewinnt man aus Definition 1.2.1 sofort folgende Gleichungen:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) , \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) .$$

Wir zeigen nun:

1.2.2 Satz

Die Abbildung $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ *ist ein involutorischer Automorphismus des Körpers* $\mathbb{C}$, *d. h.* $^{-}$ *ist bijektiv und für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} , \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} , \quad \overline{\overline{z_1}} = z_1 .$$

Beweis:
Sei $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$, $\nu = 1, 2$. Dann gilt $\overline{z_1} = x_1 - iy_1 = x_2 - iy_2 = \overline{z_2}$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, d. h. wenn $z_1 = z_2$. Es handelt sich folglich um eine injektive Abbildung. Für alle $z_1 \in \mathbb{C}$ gilt ferner

$$\overline{\overline{z_1}} = \overline{x_1 - iy_1} = x_1 + iy_1 = z_1 ;$$

daher ist die Abbildung $^{-}$ involutorisch und insbesondere surjektiv (ein Urbild von z_1 ist $\overline{z_1}$!). Weiter folgt durch Rechnen

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2} , \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} . \end{aligned}$$

□

Da eine komplexe Zahl z genau dann mit ihrer konjugierten Zahl $\overline{z}$ übereinstimmt, wenn sie reell ist, so können wir noch zusätzlich sagen:

Die Fixpunktmenge $\{z \in \mathbb{C} : \overline{z} = z\}$ *der Abbildung* $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist der Körper* $\mathbb{R}$.

Wir nennen die Abbildung $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die *komplexe Konjugation* und beweisen folgenden Eindeutigkeitssatz.

1.2.3 Satz

Es sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ein Körperendomorphismus, der* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *elementweise fest lässt. Dann gilt*

$$\varphi = \mathrm{id} \quad \textit{oder} \quad \varphi = ^- .$$

Beweis:
Für jedes $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, gilt $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$ nach Voraussetzung und folglich

$$\varphi(z) = x + \varphi(i)y .$$

Wegen $i^2 = -1$ ist $-1 = \varphi(-1) = \varphi(i^2) = \varphi(i)^2$. Nach Satz 1.1.7 folgt $\varphi(i) = i$ oder $\varphi(i) = -i$. Im ersten Fall ist $\varphi(z) = z$, d. h. $\varphi = \mathrm{id}$; im zweiten Fall ist $\varphi(z) = \overline{z}$, d. h. $\varphi = ^-$. □

Kein Geringerer als Richard Dedekind, der zur Begründung der reellen Infinitesimalrechnung die berühmten „Dedekindschen Schnitte“ einführte, hat noch zu Beginn des 20. Jahrhundert (1901) geglaubt, dass „die Zahlen des reellen Körpers $\mathbb{R}$ so unlöslich miteinander verbunden zu sein scheinen, dass der Körper $\mathbb{C}$ aller Zahlen nur die beiden Automorphismen id und $^-$ besitzt“. Inzwischen weiß man, dass es unendlich viele verschiedene Automorphismen von $\mathbb{C}$ gibt (die dann notwendig $\mathbb{R}$ nicht in sich abbilden). Man konstruiert solche Automorphismen unter Heranziehung des Auswahlaxioms, explizit gesehen hat noch niemand solche Automorphismen.

1.3 Bewertung des Körpers $\mathbb{C}$

Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ ist

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

eine nicht negative reelle Zahl. Damit ist, da jede reelle Zahl ≥ 0 genau eine reelle Quadratwurzel ≥ 0 hat (vgl. auch 1.4), folgende Definition sinnvoll:

1.3.1 Definition (Betrag)

Für jedes Element $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt

$$|z| := +\sqrt{z\overline{z}} = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

der Betrag von z .

Da $|z|^2 = x^2 + y^2$, so ist der Betrag von z nichts anderes als der Abstand des Punktes z vom Nullpunkt 0 der Gaußschen Zahlenebene bezüglich der gewöhnlichen euklidischen Metrik (Satz von PYTHAGORAS). Für festes $r > 0$ ist die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ die Peripherie des Kreises vom Radius r um 0. Für reelle Zahlen $z \in \mathbb{R}$ stimmt $|z|$ mit dem Betrag für reelle Zahlen überein. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z| = |\overline{z}|.$$

Mittels des Betrages von z und der zu z konjugierten Zahl kann man das Inverse z^{-1} von z in eleganter Weise ausdrücken.

Für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \, ;$$

denn es gilt $|z|^2 = z\overline{z}$.

Wir zeigen weiter

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Beweis:
Es gilt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\,. \end{aligned}$$

Da $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$, $z_2\overline{z_2} = |z_2|^2$ und

$$\operatorname{Re} z_1\overline{z_2} = \frac{1}{2}\,(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) = \frac{1}{2}\,(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2),$$

ist, folgt die Behauptung. □

Aus der Definition des Betrages ergeben sich unmittelbar folgende Ungleichungen:

$$-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z|\,, \quad -|z| \le \operatorname{Im} z \le |z|\,.$$

Wir heben nun drei fundamentale Rechenregeln für die Betragsfunktion durch einen Satz hervor.

1.3.2 Satz

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

B0. $|z| \ge 0$,
$|z| = 0 \iff z = 0$.
B1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ *(Produktregel).*
B2. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis:
zu B0.: Es gilt $z\overline{z} = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ oder $\overline{z} = 0$, d. h. wieder $z = 0$ ist.

zu B1.: Nach Definition des Betrages ist

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2\,.$$

Zieht man die Quadratwurzeln, so erhält man die Behauptung.

zu B2.: Wir haben bereits gesehen:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\,.$$

Da stets $\operatorname{Re} z \le |z|$ ist, so folgt

$$\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \le |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\,|\overline{z_2}| = |z_1|\,|z_2|\,.$$

Damit ergibt sich

$$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2\,.$$

Wurzelziehen ergibt die Behauptung. □

Eine wichtige Folgerung aus der Produktregel B 1. ist die Quotientenregel

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{für alle} \quad z_1 \in \mathbb{C}\,,\; z_2 \in \mathbb{C}^*\,.$$

Beweis:
Aus $z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$ folgt nach B 1.

$$1 = |1| = \left|z_2 \cdot \frac{1}{z_2}\right| = |z_2| \cdot \left|\frac{1}{z_2}\right|\,, \quad \text{also} \quad \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}\,.$$

Hiermit folgt, wieder nach B 1.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,.$$ □

Wegen $|z| = |\overline{z}|$ sehen wir speziell

$$\left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{z}\right| = 1 \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}^*\,.$$

Die Dreiecksungleichung wird häufig auch in folgenden Varianten als eine „Abschätzung nach unten“ benutzt:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\geq \big||z_1| - |z_2|\big| \\ |z_1| &\geq |z_2| - |z_1 - z_2| \end{aligned} \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Der Leser leite (wie im Reellen) diese Ungleichungen aus B 2. her.

Die Situation des Satzes 1.3.2 kommt in der Mathematik so häufig vor, dass man dafür eine besondere Redeweise einführt.

1.3.3 Definition (bewerteter Körper, Bewertung)

Ein Körper K, für dessen Elemente z ein Betrag $|z| \in \mathbb{R}$ definiert ist, sodass die Eigenschaften B 0., B 1., B 2. aus Satz 1.3.2 gelten, heißt ein bewerteter Körper. Die Betragsfunktion $|\quad| : K \to \mathbb{R}$ heißt eine Bewertung auf (von) K.

Die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ der rationalen und der reellen Zahlen sind bewertete Körper. Satz 1.3.2 kann jetzt so reformuliert werden:

1.3.4 Satz

Auf dem Körper $\mathbb{C}$ wird durch

$$|\ \ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z| := +\sqrt{z\overline{z}}$$

eine Bewertung definiert. Diese Bewertung ist eine Fortsetzung der Bewertung von $\mathbb{R}$ durch den Absolutbetrag.

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist auch ein *angeordneter* Körper, d. h. für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:

*A*1. $$r > 0\,, \quad r = 0\,, \quad -r > 0\,;$$

dabei gilt folgende Regel für das Rechnen mit Ungleichungen:

*A*2. $$\textit{Aus } r > 0 \textit{ und } r' > 0 \textit{ folgt } r + r' > 0 \textit{ und } rr' > 0\,.$$

(Kurz: Summe und Produkt positiver Zahlen sind positiv.)

Man beweist dann in der Infinitesimalrechnung lediglich mittels A 1. und A 2.:

Für jede reelle Zahl $r \neq 0$ gilt $r^2 > 0$.

Man wird fragen, ob sich (etwa in Analogie zur Betragsfunktion) diese Anordnung auf $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt, d. h. ob man auch zwischen komplexen Zahlen eine Relation „>“ so erklären kann, dass A 1. und A 2. gelten und dass diese Relation auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mit der üblichen Anordnung übereinstimmt. Die Antwort ist negativ. Es gilt sogar eine viel stärkere Aussage:

1.3.5 Satz

Der Körper $\mathbb{C}$ kann (überhaupt) nicht angeordnet werden.

Beweis:
Angenommen, man hätte eine Anordnungsrelation $>$ auf $\mathbb{C}$. Dann müsste für jedes $z \neq 0$ (wie im Reellen) $z^2 > 0$ gelten. Dann wäre auch $i^2 > 0$, also auch $0 = i^2 + 1^2 > 0$, was absurd ist. □

1.3.6 Aufgabe

L (a) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, für welche gilt

$$z_n := (1+i)^n + (1-i)^n = 0.$$

Berechnen Sie $|z_n|$ für alle n.

(b) Seien $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ vorgegebene Zahlen. Beschreiben Sie die Menge

$$L := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z-b}{a}\right) = 0 \right\}.$$

1.3.7 Aufgabe

L Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z = |z|$.

1.3.8 Aufgabe

L Zeigen Sie, dass für alle $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ gilt (Lagrangesche Identität):

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1 \overline{w}_2 - z_2 \overline{w}_1|^2 .$$

1.4 Lösbarkeit quadratischer Gleichungen in $\mathbb{C}$

In der Infinitesimalrechnung wird bekanntlich gezeigt:

Zu einer reellen Zahl r gibt es genau dann eine reelle Zahl s mit $s^2 = r$, wenn r nicht negativ ist. Falls $r = 0$ ist, so ist $s := 0$ die einzige reelle Zahl mit $s^2 = 0$. Falls $r > 0$ ist, so gibt es genau eine positive reelle Zahl s mit $s^2 = r$; man schreibt $s = \sqrt{r}$. Alsdann ist $-s$ die einzige weitere reelle Zahl, deren Quadrat ebenfalls r ist.

Man drückt dies auch so aus, dass man sagt:

Aus einer negativen reellen Zahl lässt sich keine reelle Quadratwurzel ziehen; eine positive reelle Zahl hat genau zwei verschiedene (sich im Vorzeichen unterscheidende) reelle Quadratwurzeln.

Im Komplexen lassen sich *stets* Quadratwurzeln ziehen, wir zeigen genauer:

1.4.1 Satz

Es sei $0 \neq c := a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene komplexe Zahl. Dann gibt es genau zwei verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1^2 = z_2^2 = c$; z_1 und z_2 heißen die Quadratwurzeln aus c. Es gilt

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(a+|c|)} + i\,\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2}(-a+|c|)}\,, \quad z_2 = -z_1\,, && \textit{falls} \quad b \neq 0\,, \\
z_1 &= \sqrt{|c|}\,, \quad z_2 = -z_1\,, && \textit{falls} \quad b = 0\,,\ a > 0\,, \\
z_1 &= i\sqrt{|c|}\,, \quad z_2 = -z_1\,, && \textit{falls} \quad b = 0\,,\ a < 0\,.
\end{aligned}$$

Beweis:
Es sei $z = x + iy$ eine Wurzel aus c, also $z^2 = c$. Dann gilt

$$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = a + ib\,.$$

Diese eine komplexe Gleichung ist äquivalent zu folgendem System reeller Gleichungen

$$(*) \qquad x^2 - y^2 = a \quad \text{und} \quad 2xy = b\,.$$

Da $|c| = |z|^2 = x^2 + y^2$, so folgt sofort (durch Addition zur bzw. Subtraktion von der ersten vorhergehenden Gleichung)

$$x^2 = \frac{1}{2}(a+|c|) \quad \text{und} \quad y^2 = \frac{1}{2}(-a+|c|)\,.$$

Da $a = \operatorname{Re} c$ ist, so gilt stets $\pm a + |c| \geq 0$, daher existieren die reellen Zahlen

$$s := \sqrt{\frac{1}{2}\,(a + |c|)} \geq 0 \quad \text{und} \quad t := \sqrt{\frac{1}{2}\,(-a + |c|)} \geq 0\,.$$

Die möglichen Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ sind somit unter den vier Kombinationen

$$x = \varepsilon s\,, \quad y = \varepsilon' t\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,, \quad \varepsilon' = \pm 1,$$

zu suchen.

Wir erledigen nun zunächst den Fall $b = 0$, d. h. $c = a$. Ist $a > 0$, so ist $|c| = a$ und also $s = \sqrt{|c|}$, $t = 0$. Dann sind nur die zwei Fälle $x = \pm s$, $y = 0$, d. h. $z = \pm\sqrt{|c|}$ möglich. In der Tat gilt $(\pm\sqrt{|c|})^2 = |c| = a = c$. Ist hingegen $a < 0$, so ist $|c| = -a$ und alsdann $s = 0$, $t = \sqrt{|c|}$. Jetzt haben wir die zwei Fälle $x = 0$, $y = \pm t$, d. h. $z = \pm i\sqrt{|c|}$. Wieder gilt tatsächlich $(\pm i\sqrt{|c|})^2 = i^2|c| = -|c| = a = c$.

Wir kommen nun zum interessanteren Fall $b \neq 0$. Dann gilt $2xy = b \neq 0$, daher muss für jede der obigen vier Möglichkeiten gelten

$$2st\varepsilon\varepsilon' = b\,, \quad \text{also} \quad \varepsilon\varepsilon' = \frac{b}{|b|} \quad \text{wegen} \quad 2st > 0\,.$$

Für $\varepsilon = 1$ ergibt sich die im Satz angegebene Zahl z_1, für $\varepsilon = -1$ entsteht $z_2 = -z_1$. Da Real– und Imaginärteil von z_1 bzw. z_2 in der Tat das reelle Gleichungssystem $(*)$ lösen, so sind z_1 und z_2 auch wirklich Quadratwurzeln von c. □

Da beide Quadratwurzeln aus einer komplexen Zahl i. Allg. echt komplex sind, so ist es (im Gegensatz zur Situation im Reellen) unmöglich, zwischen der positiven und negativen Wurzel zu unterscheiden. Man hat beide Wurzeln als gleichberechtigt zu behandeln, dem Symbol $\sqrt{c}$ kann keine eindeutige Bedeutung mehr zugelegt werden.

Nachdem die Existenz von Quadratwurzeln sichergestellt ist, ist es auch einfach, alle quadratischen Gleichungen $\alpha X^2 + \beta X + \gamma = 0$ mit komplexen Koeffizienten α, β, γ zu lösen. Nur der Fall $\alpha \neq 0$ ist interessant, wir dürfen dann $\alpha = 1$ annehmen (man dividiere durch α). Es gilt nun

1.4.2 Satz

Es seien β und γ vorgegebene komplexe Zahlen. Dann hat die quadratische Gleichung

$$X^2 + \beta X + \gamma = 0$$

in $\mathbb{C}$ genau die Lösungen

$$z_1 := -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}\,, \quad z_2 := -\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}\,,$$

wobei $\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}$ eine (willkürlich zu wählende) Quadratwurzel aus $\beta^2 - 4\gamma$ ist.

Beweis:
Der berühmte Trick der Babylonier von der quadratischen Ergänzung liefert

$$X^2 + \beta X + \gamma = \left(X + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\,(4\gamma - \beta^2)\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung mittels Satz 1.4.1. □

Der Leser bemerkt, dass im Satz 1.4.2 die Lösungen z_1 und z_2 übereinstimmen können, nämlich genau dann, wenn $\beta^2 = 4\gamma$. Dann ist

$$X^2 + \beta X + \gamma = \left(X + \frac{\beta}{2}\right)^2 .$$

Wir werden im Abschnitt 1.6 die Lösungen quadratischer Gleichungen in Polarkoordinaten eleganter anschreiben.

1.4.3 Aufgabe

L Zeigen Sie, dass mit den Notationen des Satzes 1.4.2 das *normierte* Polynom $X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{C}[X]$ in zwei *Linearfaktoren* zerfällt:

$$X^2 + \beta X + \gamma = (X - z_1)(X - z_2)\,.$$

1.5 Metrisierung und Topologisierung des Körpers $\mathbb{C}$

Jede Bewertung $|\ \ |$ auf einem Körper K bestimmt in natürlicher Weise eine Metrik und damit eine Topologie auf K; dadurch wird K zu einem metrischen und insbesondere topologischen Raum. Wir benutzen folgende Redeweise aus der mengentheoretischen Topologie (das Symbol $X \times Y$ bezeichnet das *kartesische Produkt* der Mengen X, Y, also $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$).

1.5.1 Definition (Metrik, metrischer Raum)
Es sei E eine nichtleere Menge und

$$d : E \times E \to \mathbb{R}\,, \quad (p, q) \mapsto d(p, q)$$

eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

M0. $d(p, q) \geq 0$,
$d(p, q) = 0 \iff p = q$,
M1. $d(p, q) = d(q, p)$ *für alle* $p, q \in E$ *(Symmetrie),*
M2. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ *für alle* $p, q, r \in E$ *(Dreiecksungleichung).*

Dann heißt d eine Metrik auf E und E, zusammen mit d, ein metrischer Raum.

Wir zeigen

1.5.2 Satz
Es werde gesetzt:

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Dann ist d eine Metrik auf $\mathbb{C}$.

Beweis:
M0. und M1. folgen sofort aus der Definition von d (unter Heranziehung von B0. und B1. aus Satz 1.3.2). Die Dreiecksungleichung M2. ergibt sich aus der Dreieckunsgleichung B2., wenn man $z_1 - z_3 = (z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)$ beachtet, wie folgt:

$$\begin{aligned} d(z_1, z_3) &= |(z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \\ &= d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)\,. \end{aligned}$$ □

Die Zahl $d(z_1, z_2)$ heißt die *euklidische Entfernung (Distanz) von* z_1 *nach* z_2; die Metrik $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ heißt die *euklidische Metrik auf* $\mathbb{C}$.

Mit Hilfe einer Metrik führt man (in der mengentheoretischen Topologie) offene Mengen ein.

1.5.3 Definition (offene Menge, ε–Kugel)

Es sei E *ein metrischer Raum mit Metrik* d. *Eine Teilmenge* $U \subset E$ *heißt offen (in* E*), wenn es zu jedem Punkt* $q \in U$ *eine reelle Zahl* $\varepsilon > 0$ *gibt, sodass gilt:*

$$B_\varepsilon(q) := \{p \in E : d(p, q) < \varepsilon\} \subset U\,.$$

Die Menge $B_\varepsilon(q)$ *heißt die „Kugel" vom Radius* ε *um* q *(*ε*–Kugel) bzgl.* d.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}$ die Gesamtheit aller offenen Mengen von E. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von E. Aus der Definition 1.5.3 folgt unmittelbar

1.5.4 Satz

Die Menge $\mathcal{T}$ *hat folgende Eigenschaften:*

T0. $\emptyset \in \mathcal{T}\,, \quad E \in \mathcal{T}\,.$

T1. *Für jede Familie* $\{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \in \mathcal{T}$ *gilt* $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

T2. *Für jede endliche Familie* $\{V_j\}_{j\in J}$, $V_j \in \mathcal{T}$ *gilt:* $\bigcap_{j\in J} V_j \in \mathcal{T}\,.$

Die Eigenschaften T1. und T2. besagen, dass die *Vereinigung beliebig vieler* sowie der *Durchschnitt endlich vieler* offener Mengen wieder offen sind.

1.5.5 Definition (Topologie, topologischer Raum, offene Menge)

Es sei X *eine beliebige Menge. Eine Teilmenge* $\mathcal{T}$ *der Potenzmenge von* X *heißt eine Topologie auf* X*, wenn die Eigenschaften T0., T1. und T2. erfüllt sind. Die Menge* X *zusammen mit* $\mathcal{T}$ *heißt ein topologischer Raum, die Elemente von* $\mathcal{T}$ *heißen offen in* X.

Wir haben somit vermöge Satz 1.5.4 auf jedem metrischen Raum E eine Topologie erklärt. Speziell trägt $\mathbb{C}$ wegen Satz 1.5.2 eine Topologie, wir nennen diese Topologie auf $\mathbb{C}$ die *euklidische Topologie auf* $\mathbb{C}$.

Die einfachsten offenen Mengen einer metrischen Topologie sind die ε-Kugeln, in der euklidischen Topologie sind dies die *offenen Kreise*

$$\Delta_r(z_1) := \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_1) = |z - z_1| < r\}$$

mit *Mittelpunkt* z_1 und *Radius* $r > 0$. Diese Mengen $\Delta_r(z_1)$ sind in der Tat offen: Ist nämlich $z_0 \in \Delta_r(z_1)$ beliebig, so gilt $\Delta_\varepsilon(z_0) \subset \Delta_r(z_1)$ mit $\varepsilon := r - |z_1 - z_0| > 0$, denn für alle $z \in \Delta_\varepsilon(z_0)$ ist

$$d(z, z_1) \leq d(z, z_0) + d(z_0, z_1) < \varepsilon + |z_0 - z_1| = r$$

nach der Dreiecksungleichung. □

Ein Fundamentalbegriff der Topologie ist der Umgebungsbegriff.

1.5.6 Definition (Umgebung)

Eine Teilmenge V eines topologischen Raumes E heißt Umgebung von $a \in E$, wenn es eine offene Menge U in E gibt, sodass gilt: $a \in U \subset V$.

Nach dieser Definition sind Umgebungen selbst *nicht notwendig offen*. Die Mengen $\Delta_r(z_1) \subset \mathbb{C}$ sind Umgebungen von z_1, in den meisten Fällen arbeiten wir mit diesen *offenen Kreisumgebungen*.

1.5.7 Satz

Die euklidische Topologie auf $\mathbb{C}$ erfüllt das hausdorffsche Trennungsaxiom: Zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq z_2$ gibt es Umgebungen U_ν von z_ν, $\nu = 1, 2$, die disjunkt sind: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Beweis:
Man setze $U_\nu := \Delta_\varepsilon(z_\nu)$ mit $\varepsilon := \frac{1}{2}|z_1 - z_2| > 0$, $\nu = 1, 2$. Gäbe es einen Punkt $z' \in U_1 \cap U_2$, so wäre $|z' - z_1| < \varepsilon$, $|z' - z_2| < \varepsilon$ und man erhielte aus $z_1 - z_2 = (z_1 - z') + (z' - z_2)$ nach der Dreiecksungleichung

$$2\varepsilon = |z_1 - z_2| \leq |z_1 - z'| + |z' - z_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

was absurd ist. □

Ein topologischer Raum, der dem hausdorffschen Trennungsaxiom genügt, heißt ein *hausdorffscher Raum*; wir haben offenbar soeben gezeigt, dass jeder topologische Raum, dessen Topologie durch eine Metrik induziert wird, hausdorffsch ist.

Statt offener Mengen kann man auch abgeschlossene Mengen zur Definition einer Toppologie verwenden: Dabei heißt bekanntlich eine Teilmenge M eines topologischen Raumes X *abgeschlossen (in X)*, wenn ihr Komplement $X \setminus M$ offen in X ist.

Man kann nun in der bekannten (und häufig frustrierenden) Weise in jedem metrischen (allgemeiner: topologischen) Raum E die weiteren Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie wie z. B. „Häufungspunkt, konvergente Folge, Cauchyfolge, Stetigkeit, kompakt“ usw., usw. einführen. Wir werden alle diese Redeweisen, die ja aus der reellen Analysis im $\mathbb{R}^2$ und allgemeiner im $\mathbb{R}^n$, $1 \leq n < \infty$, hinlänglich bekannt sind, nach und nach an den Stellen kurz besprechen, wo sie benötigt werden.

Wir wollen uns aber schon hier klar machen, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{C}$ übereinstimmt mit der „Produkttopologie“ der $\mathbb{C}$ unterliegenden reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$. Diese Topologie kann wie folgt beschrieben werden:

Für alle $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ setzt man

$$\widehat{d}(z_1, z_2) := \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} .$$

Dann verifiziert man durch direktes Nachrechnen, dass wieder die Eigenschaften M0., M1. und M2. gelten, daher ist auch $\widehat{d} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf $\mathbb{C}$ (*Maximummetrik*). Diese Metrik bestimmt nach den vorangehenden Darlegungen ebenfalls eine Topologie auf $\mathbb{C}$. Wir nennen diese Topologie *die Produkttopologie auf* $\mathbb{C}$; die ε-Kugeln in der Produkttopologie sind die offenen Quadrate von der Seitenlänge 2ε (= kartesische Produkte von Intervallen der Länge 2ε):

$$Q_\varepsilon(z_1) := \{z \in \mathbb{C} : \widehat{d}(z, z_1) < \varepsilon\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : |x - x_1| < \varepsilon, |y - y_1| < \varepsilon\} ,$$

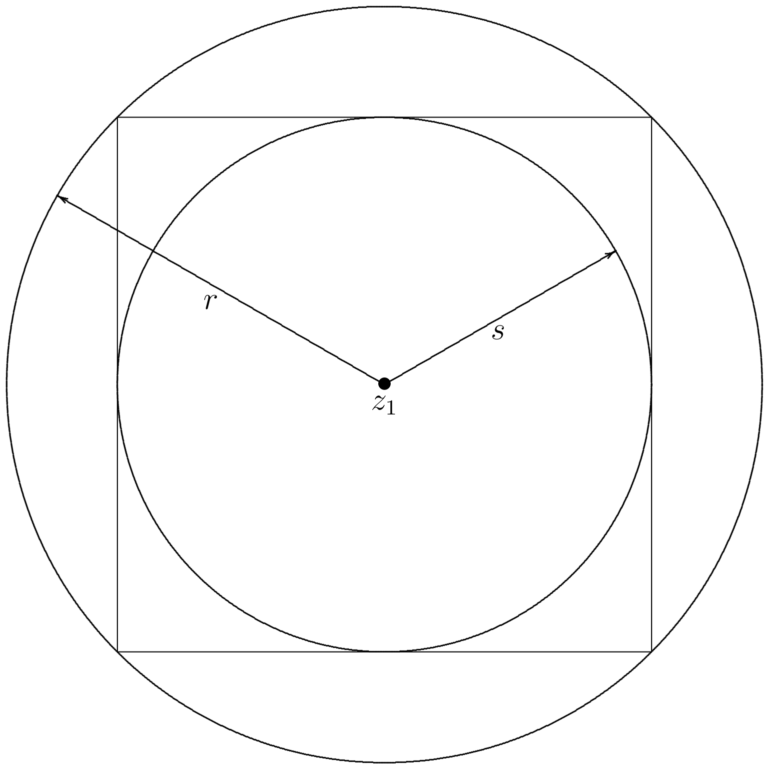
mit Mittelpunkt $z_1 = x_1 + iy_1$.

Wir zeigen nun

1.5.8 Satz

Euklidische Topologie und Produkttopologie auf $\mathbb{C}$ sind gleich. In jedem offenen Kreis liegt ein offenes Quadrat mit gleichem Mittelpunkt und umgekehrt (vgl. Figur 1-4):

$$\Delta_s(z_1) \subset Q_s(z_1) \subset \Delta_r(z_1) \quad \mathit{mit} \quad s := \frac{1}{2}\sqrt{2}\, r .$$



Figur 1-4

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass jede mittels d definierte offene Menge auch offen ist, wenn $\hat{d}$ zu Grunde gelegt wird und umgekehrt. Das trifft sicher dann zu, wenn wir zeigen, dass offene Kreise offene Quadrate mit gleichem Mittelpunkt enthalten und umgekehrt. Die angegebenen Inklusionen sind aber klar, da für alle $z = x + iy \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\max\{|x|, |y|\} \leq |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}\max\{|x|, |y|\}\,. \qquad \square$$

Die euklidische Metrik der Zahlenebene ist eng verknüpft mit dem Skalarprodukt.

1.5.9 Definition (Skalarprodukt)

Sind $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ komplexe Zahlen, so heißt die reelle Zahl

$$\langle z_1, z_2 \rangle := \operatorname{Re} z_1\overline{z_2} = x_1x_2 + y_1y_2$$

ihr Skalarprodukt.

Es folgt unmittelbar

1.5.10 Satz

Das Skalarprodukt ist in jedem Argument $\mathbb{R}$–linear (Bilinearform). Weiter gilt

$$\langle az_1, az_2\rangle = |a|^2\langle z_1, z_2\rangle\,, \quad \langle\overline{z_1}, \overline{z_2}\rangle = \langle z_1, z_2\rangle \quad \textit{für alle} \quad z_1, z_2, a \in \mathbb{C}\,.$$

Die euklidische Länge ist durch das Skalarprodukt darstellbar:

$$|z| = +\sqrt{\langle z, z\rangle} = +\sqrt{z\overline{z}}.$$

Durch Nachrechnen verifiziert man sofort die Identität

$$\langle z_1, z_2\rangle^2 + \langle iz_1, z_2\rangle^2 = |z_1|^2|z_2|^2\,, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,;$$

hierin ist speziell enthalten

1.5.11 Folgerung (Cauchy–Schwarzsche Ungleichung)

$$|\langle z_1, z_2\rangle| \le |z_1|\,|z_2|\,, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Ebenfalls durch direktes Nachrechnen ergibt sich:

1.5.12 Folgerung (Kosinussatz)

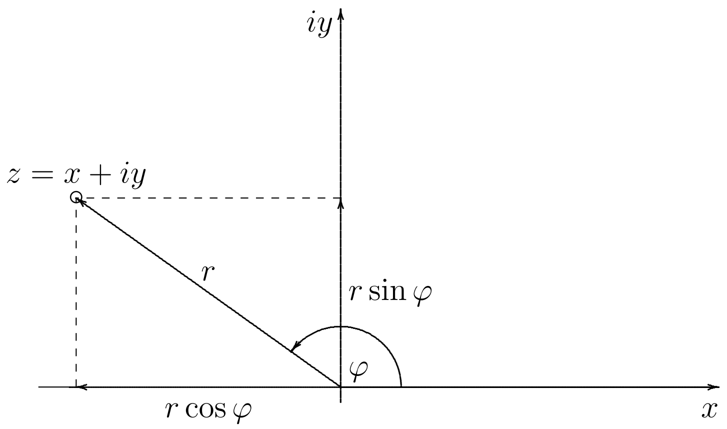
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\langle z_1, z_2\rangle\,, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Hieraus folgt mit 1.5.11 sofort die Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2\,.$$

1.6 Polarkoordinaten

In der reellen (x, y)-Ebene $\mathbb{R}^2$ führt man seit alters her Polarkoordinaten ein, indem man jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in der Gestalt $(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ schreibt (Figur 1-5). Dabei ist $r := \sqrt{x^2+y^2}$ die Entfernung von (x, y) zum Nullpunkt und φ der Winkel (im Bogenmaß) zwischen der positiven reellen x–Achse und dem Ortsvektor von z.



Figur 1-5

Falls $z \neq 0$, so ist der Winkel φ, den man häufig auch das *Argument der komplexen Zahl* z nennt, bis auf ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt, für $z := 0$ ist φ beliebig. Wir wollen diese intuitiv klaren Dinge präzisieren. Dazu benötigen wir aus der reellen Infinitesimalrechnung folgende Informationen über die Kosinus– und Sinusfunktion. Man setzt bekanntlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos x &:= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}\, x^{2\nu} = \cos(-x)\,,\\ \sin x &:= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\, x^{2\nu+1} = -\sin(-x)\,;\end{aligned}$$

diese Definitionen sind sinnvoll, da die angeschriebenen Reihen stets konvergieren (wir werden im § **??** die trigonometrischen Funktionen im Komplexen über die Exponentialfunktion einführen, dabei werden sich u. a. die obigen Reihen als konvergent erweisen, vgl. Satz **??**).

Wir erinnern uns an folgende Fakten:

(a) *Die Funktion* cos *hat im Intervall* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle, sie wird mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnet (Definition von* π*).*

(b) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,,\\
&\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,,\\
&\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) *Die Funktionen* cos *und* sin *sind periodisch mit der Minimalperiode* 2π*:*

$$\begin{aligned}
\cos(x + 2n\pi) &= \cos x,\\
\sin(x + 2n\pi) &= \sin x,
\end{aligned} \qquad \textit{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

(d) *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\cos x = 1 &\quad \textit{genau dann, wenn} \quad x \in 2\pi\mathbb{Z}\,,\\
\cos x = 0 &\quad \textit{genau dann, wenn} \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,\\
\sin x = 0 &\quad \textit{genau dann, wenn} \quad x \in \pi\mathbb{Z}\,,\\
\sin x = 1 &\quad \textit{genau dann, wenn} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

(e) *Die Funktion* cos *ist im Intervall* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend und bildet dieses Intervall auf das Intervall* $[-1, 1]$ *ab.*

Zur Einführung der Zahl π, wie sie durch (a) gegeben wird, sind einige historische Bemerkungen am Platz, die zeigen, dass Mathematik keineswegs frei von Ideologien ist und sich politisch missbrauchen lässt. Die Definition von $\frac{1}{2}\pi$ als kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ ist heute gang und gäbe. Man findet sie bereits im 19. Jahrhundert im ersten Band „Elemente der Mathematik“ von Richard Baltzer (1818 – 1887, seit 1869 o. Prof. in Giessen), vgl. z. B. 5. Aufl. 1875, S. 195.

Die Baltzersche Definition von π ist nicht geometrisch, aber wohl der bequemste Weg, im Reellen schnell zu π zu gelangen. Edmund Landau (1877 – 1938, Schüler von Frobenius; 1909 o. Professor der Mathematik in Göttingen als Nachfolger von Minkowski; 1933 aus rassistischen Gründen amtsenthoben; Nachruf von K. Knopp im Jahresber. DMV 54, 55 – 62 (1951)) hat diesen Zugang in seinen Göttinger Vorlesungen propagiert und 1934 in seiner „Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung“ (Verlag Noordhoff, Groningen) in dem für ihn charakteristischen Telegrammstil dargestellt; auf S. 193 heißt es: *Die Weltkonstante aus Satz 262 werde dauernd mit* π *bezeichnet.*

Es ist heute unverständlich, dass u. a. gerade *diese* Art der Einführung von π in Deutschland 1934 eine Polemik auslöste, die mit dem Wort „beschämend“ nicht annähernd charakterisiert wird. Ein hoch angesehener Kollege aus Berlin griff damals Landau scharf an; es seien hier nur zwei Sätze von ihm zitiert: „Uns Deutsche lässt eine solche Rumpftheorie unbefriedigt“ (Sonderausg. Sitz. Ber. Preuss. Akad. wiss., Phys.-Math. Kl. XX, p. 6); und weitaus deutlicher: „So ist … die mannhafte Ablehnung, die ein großer Mathematiker, EDMUND LANDAU, bei der Göttinger Studentenschaft gefunden hat, letzten Endes darin begründet, dass der undeutsche Stil dieses Mannes in Forschung und Lehre deutschem Empfinden unerträglich ist. Ein Volk, das eingesehen hat, … wie Volksfremde daran arbeiten, ihm fremde Art aufzuzwingen, muss Lehrer von einem ihm fremden Typus ablehnen.“ (Persönlichkeitsstruktur und mathematisches Schaffen, Forsch. u. Fortschr., 10. Jahrg. Nr. 18, S. 236).

Derartige abstruse Ungeheuerlichkeiten hat der britische Mathematiker G. H. HARDY sofort im August 1934 in seiner Note: „The J-type and the S-type among mathematicians“ (Collected Papers 7, 610 – 611) scharf zurückgewiesen, er urteilt: „There are many of us, many Englishmen and many Germans, who said things during the war which we scarcely meant and are sorry to remember now. Anxiety for one's own position, dread of falling behind the rising torrent of folly, determination at all costs not be outdone, may be natural if not particularly heroic excuses. Prof. Bieberbach's reputation excludes such explanations of his utterances; and I find myself driven to the more uncharitable conclusion that he really believes them true.“

Wir schreiben $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ und führen die *Polarkoordinatenabbildung*

$$\kappa : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*, \quad (r, \varphi) \mapsto z := r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

ein; wir bemerken sogleich, dass dies in der Tat eine Abbildung in $\mathbb{C}^*$ ist, da cos und sin wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ keine gemeinsamen Nullstellen haben. Um die Abbildung κ eingehender studieren zu können, stützen wir uns auf folgendes

1.6.1 Lemma

(1) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(\cos\alpha = \cos\beta \ \textit{und} \ \sin\alpha = \sin\beta) \iff \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

(2) $\cos|_{[0,\pi]}$ *besitzt eine Umkehrfunktion*

$$\arccos : [-1, +1] \to [0, \pi], \quad \xi \mapsto \arccos\xi.$$

Beweis:
zu (1): Gilt $\cos\alpha = \cos\beta$ und $\sin\alpha = \sin\beta$, so folgt

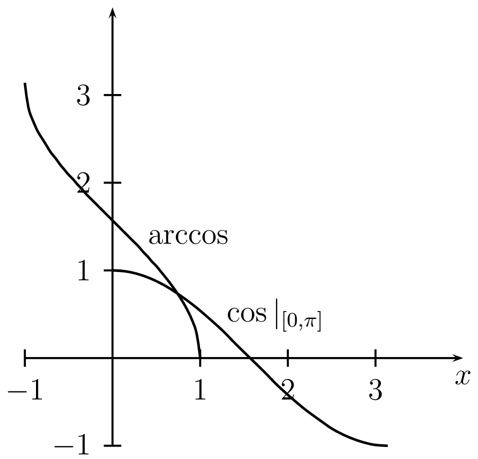
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \quad \text{(Additionstheorem)}$$

$$\begin{aligned} &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &\quad (\text{wegen} \quad \cos(-\beta) = \cos\beta \text{ und } \sin(-\beta) = -\sin\beta) \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\,. \end{aligned}$$

Da nach (d) die Kosinusfunktion genau an den Stellen $2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) den Wert 1 annimmt, folgt $\alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Ist umgekehrt $\alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$, also $\alpha = \beta + 2\pi n$ mit einem $n \in \mathbb{Z}$, so folgt $\cos\alpha = \cos\beta$ und $\sin\alpha = \sin\beta$, da die Funktionen cos und sin beide die Periode 2π haben.

zu (2): Da cos in $[0,\pi]$ nach (e) streng monoton fallend ist, besitzt $\cos|_{[0,\pi]}$ eine (ebenfalls streng monoton fallende) Umkehrfunktion, definiert auf $[-1,1]$ und mit Werten in $[0,\pi]$. □



Figur 1-6

Der eben bewiesene Hilfssatz hat folgende Konsequenzen für die Polarkoordinatenabbildung κ:

(1) *Die Punkte $(r_1,\varphi_1),(r_2,\varphi_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ haben genau dann denselben κ–Bildpunkt in $\mathbb{C}^*$, wenn $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt.*

(2) *Zu jedem Punkt $z \in \mathbb{C}^*$ gibt es ein κ–Urbild in $\mathbb{R}_+ \times\,]-\pi,\pi]$.*

Beweis:
zu (1): Sei $z_\nu := \kappa(r_\nu,\varphi_\nu) = r_\nu(\cos\varphi_\nu + i\sin\varphi_\nu)$ ($\nu = 1,2$). Gilt $z_1 = z_2$, so folgt zunächst

$$r_1 = |z_1| = |z_2| = r_2$$

und dann
$$\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\,,$$
also
$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \quad \text{und} \quad \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2\,.$$
Nach Lemma 1.6.1 (1) heißt das $\varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, also $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Gilt umgekehrt $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, so folgt $z_1 = z_2$ wegen der Periodizität von cos und sin.

zu (2): Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Wir setzen $r := |z| > 0$ und $\zeta := \frac{z}{|z|}$. Für $\xi := \operatorname{Re}\zeta$ und $\eta := \operatorname{Im}\zeta$ gilt dann $\xi^2 + \eta^2 = 1$, also $\xi \in [-1, 1]$, und wir können definieren $\alpha := \arccos\xi$. Dann ist $\alpha \in [0, \pi]$, $\cos\alpha = \xi$ und $\sin\alpha \geq 0$ sowie
$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \xi^2 = \eta^2\,, \quad \text{also} \quad \sin\alpha = \pm\eta\,.$$
Wir setzen nun
$$\varphi := \begin{cases} \alpha\,, & \text{falls } \eta \geq 0, \\ -\alpha\,, & \text{falls } \eta < 0. \end{cases}$$
Dann ist $\varphi \in\,]-\pi, \pi]$ und im Falle $\eta \geq 0$ gilt
$$\kappa(r, \varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|(\xi + i\eta) = z\,.$$
Im Falle $\eta < 0$ erhalten wir ebenfalls
$$\begin{aligned} \kappa(r, \varphi) &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \\ &= |z|(\cos\alpha - i\sin\alpha) = |z|(\xi + i\eta) = z\,. \end{aligned}$$
□

Wir haben insgesamt bewiesen:

1.6.2 Satz

Jede komplexe Zahl z lässt sich schreiben in der Form
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \quad r := |z|\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,,$$
wobei φ für $z \neq 0$ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt ist. φ heißt Argument von z ($\arg z$). Vermöge
$$\kappa : \mathbb{R}_+ \times\,]-\pi, \pi] \to \mathbb{C}^*\,, \quad (r, \varphi) \mapsto z := r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
wird eine bijektive Abbildung definiert, deren Umkehrabbildung durch
$$\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+ \times\,]-\pi, \pi]\,, \quad z \mapsto \begin{cases} \left(|z|\,,\ \arccos\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right)\,, & \textit{falls } \operatorname{Im} z \geq 0\,, \\ \left(|z|\,,\ -\arccos\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right)\,, & \textit{falls } \operatorname{Im} z < 0\,, \end{cases}$$
gegeben wird.

Die Polarkoordinatenabbildung $\kappa : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ ist *stetig* und *lokal topologisch* (d. h. im Kleinen stetig umkehrbar). Beschreibt man κ als reelle Abbildung, also

$$(r, \varphi) \mapsto (x, y) \quad \text{mit} \quad x := r\cos\varphi\,, \quad y := r\sin\varphi\,,$$

so ist κ in jedem Punkt reell differenzierbar und für ihre Funktionaldeterminante gilt

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r \neq 0\,.$$

Die Umkehrung der Polarkoordinatenabbildung $\kappa : \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi] \to \mathbb{C}^*$ (genauer: die Argumentfunktion) ist aber unstetig in allen Punkten der negativen reellen Achse; denn ist $a \in \mathbb{R}_+$, so gilt für die Folge $z_n := a\left(\cos\left(-\pi + \frac{1}{n}\right) + i\sin\left(-\pi + \frac{1}{n}\right)\right)$ nämlich

$$\left.\begin{array}{rcl} z_n & \to & a(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -a \\ \arg z_n & = & -\pi + \dfrac{1}{n} \to -\pi \neq \pi = \arg(-a) \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

Die Darstellung konjugiert komplexer Zahlen in Polarkoordinaten ist einfach: *Falls* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*, so gilt* $\overline{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$. Das ist klar, da $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.

Die Verwendung von Polarkoordinaten erweist sich als besonders vorteilhaft bei der Multiplikation und Division komplexer Zahlen.

1.6.3 Satz

Es seien $z_\nu = |z_\nu|(\cos\varphi_\nu + i\sin\varphi_\nu) \in \mathbb{C}^*$, $\nu = 1, 2$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\,|z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\,. \end{aligned}$$

Beweis:
Mit Hilfe der Additionstheoreme für die Funktionen cos und sin ergibt sich

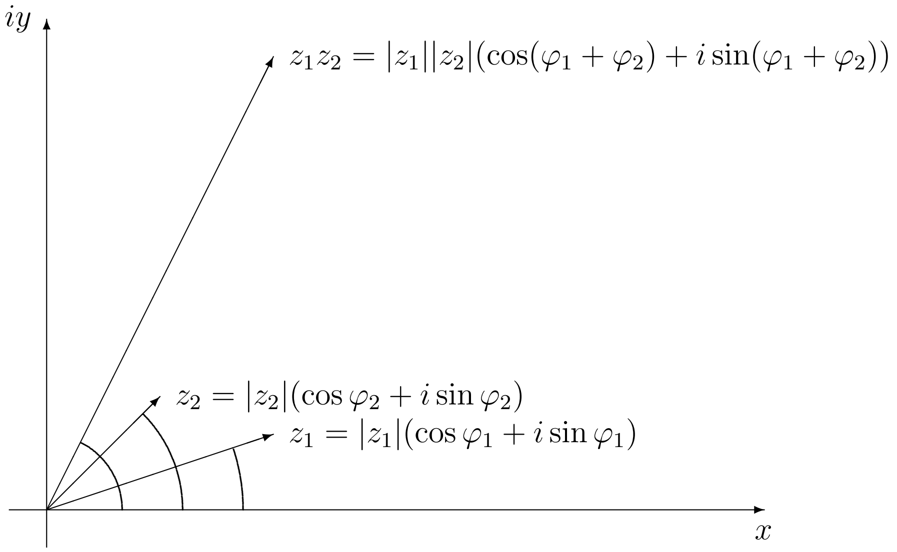
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\,|z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &\quad + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) \\ &= |z_1|\,|z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{|z_2|^2}\overline{z_2} = \frac{|\overline{z_2}|}{|z_2|^2}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) \\ &= \frac{1}{|z_2|}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))\,, \end{aligned}$$

sodass sich mit der schon verifizierten Multiplikationsformel auch die Divisionsformel ergibt. □

Man erhält also das Produkt bzw. den Quotienten zweier komplexer Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert bzw. dividiert und ihre Argumentwinkel addiert bzw. subtrahiert (Figur 1-7).



Figur 1-7

Anstelle des Intervalls $]-\pi, \pi]$ für den Winkel φ, das Argument von z, kann man auch jedes andere halboffene Intervall der Länge 2π verwenden. Während sich zum Beispiel bei der Definition der Logarithmusfunktion in Abschnitt **??** das (in diesem Fall allerdings offene) Intervall $]-\pi, \pi[$ als vorteilhaft erweist, verwenden wir in der folgenden Anwendung von Satz 1.6.3 zur Existenz n–ter Einheitswurzeln das Intervall $[0, 2\pi[$.

1.6.4 Satz

Es sei n eine natürliche Zahl ≥ 1. Dann gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen z mit $z^n = 1$, nämlich

$$z := \zeta_\nu := \cos \frac{2\nu\pi}{n} + i \sin \frac{2\nu\pi}{n}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Beweis:
Es sei ζ irgendeine komplexe Zahl mit $\zeta^n = 1$. Dann gilt $\zeta \neq 0$ und wir können ζ eindeutig darstellen in der Form

$$\zeta = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |\zeta| > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Es folgt $1 = |\zeta^n| = |\zeta|^n = r^n$, also $r = 1$. Weiter ergibt sich nun nach Satz 1.6.3

$$1 = \zeta^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,.$$

Da auch $\cos 0 + i\sin 0 = 1$, so gilt $n\varphi = 2\nu\pi$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ nach Satz 1.6.2, d. h. $\varphi = \frac{2\nu\pi}{n}$. Wegen $0 \le \varphi < 2\pi$ ist $0 \le \nu < n$ und $\zeta = \zeta_\nu$.

Umgekehrt gilt in der Tat

$$\zeta_\nu^n = \left(\cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right)^n = \cos 2\nu\pi + i\sin 2\nu\pi = 1 \quad \text{für alle} \quad \nu\,. \qquad \square$$

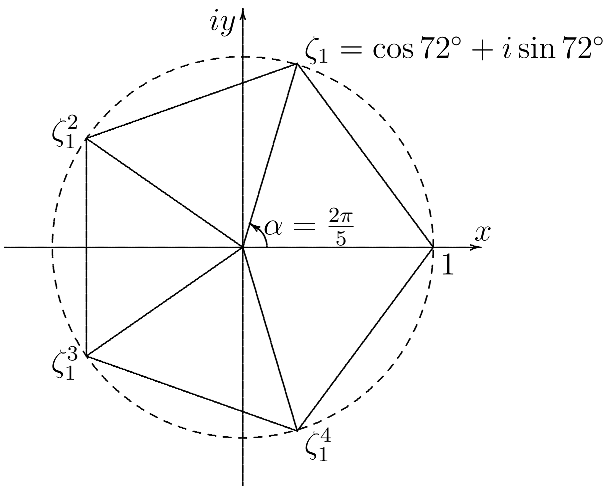
Die Zahlen ζ_ν des Satzes 1.6.4 heißen n–te *Einheitswurzeln*; für

$$\zeta_1 := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

gilt

$$\zeta_1^0 = 1\,,\ \zeta_1^1 = \zeta_1\,,\ \zeta_1^2 = \zeta_2\,, \ldots,\ \zeta_1^\nu = \zeta_\nu\,, \ldots\,,\ \zeta_1^{n-1} = \zeta_{n-1}\,,\ \zeta_1^n = 1\,.$$

Eine n–te Einheitswurzel, deren Potenzen sämtliche übrigen n–ten Einheitswurzeln darstellen, heißt *primitiv*, ζ_1 ist eine primitive n–te Einheitswurzel. Figur 1-8 zeigt die fünften Einheitswurzeln.



Figur 1-8

Jede komplexe Zahl a mit $a^n = c$ heißt (analog zur reellen Situation) eine *n–te Wurzel aus c*. Es ergibt sich nun unmittelbar folgende Verallgemeinerung von Satz 1.4.1

1.6.5 Korollar

Jede komplexe Zahl $c \neq 0$, $c = |c|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, hat genau n verschiedene n–te Wurzeln, nämlich:

$$z_\nu = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi\nu}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi\nu}{n}\right)\right), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Der Beweis kann dem Leser überlassen werden.

Schließlich erhalten wir folgende Aussage über die Lösungen quadratischer Gleichungen (vgl. hiermit Satz 1.4.2):

1.6.6 Satz

Es seien $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, es gelte

$$\frac{1}{4}\,(\beta^2 - 4\gamma) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Dann sind

$$\begin{aligned} z_1 &:= -\frac{\beta}{2} + \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right), \\ z_2 &:= -\frac{\beta}{2} - \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

die Lösungen in $\mathbb{C}$ der quadratischen Gleichung

$$X^2 + \beta X + \gamma = 0.$$

Beweis:
Das folgt unmittelbar aus Satz 1.4.2 und der Gleichung

$$\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\gamma} = \pm\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})\,. \qquad \square$$

1.6.7 Aufgabe

L Es seien $m \geq 1$, $n \geq 1$ natürliche Zahlen, es sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine m–te und $\eta \in \mathbb{C}$ eine n–te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine natürliche Zahl $k \geq 1$, sodass $\xi\eta$ eine k–te Einheitswurzel ist.

(b) Die Menge $G := \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{es gibt } d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ mit } \zeta^d = 1\}$ ist eine unendliche abelsche Gruppe. G ist nicht endlich erzeugbar, d. h. es gibt *nicht* endlich viele Elemente $\zeta_1, \ldots, \zeta_q \in G$, sodass jedes $\zeta \in G$ in der Form $\zeta = \zeta_1^{l_1} \ldots \zeta_q^{l_q}$ mit Exponenten $l_1, \ldots, l_q \in \mathbb{Z}$ darstellbar ist.

(c) Bestimmen Sie $1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{m-1}$.

1.6.8 Aufgabe

L Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über zwei komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}^*$ äquivalent sind:

(i) $|a + b| = |a| + |b|$.

(ii) Es gilt $b = ra$ mit einer *positiven, reellen* Zahl r. Bestimmen Sie als Anwendung alle Einheitswurzeln $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, sodass $\frac{1}{2}(\xi + \eta)$ wieder eine Einheitwurzel ist.

1.7 Einzigkeit von $\mathbb{C}$

Wir wollen abschließend in diesem Paragraphen noch begründen, dass die Wahl des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, der der klassischen Funktionentheorie zu Grunde liegt, weder willkürlich noch zufällig ist. Dabei wollen wir den Standpunkt beziehen, dass man eine Funktionentheorie über einem Erweiterungskörper L des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen entwickeln will, der als $\mathbb{R}$–Vektorraum endlich–dimensional und also zu einem Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ isomorph ist, $1 \leq n < \infty$. Die folgenden drei Sätze zeigen, dass es (bis auf Isomorphie) außer $\mathbb{R}$ selbst nur noch den Körper $\mathbb{C}$ gibt, der diese Eigenschaft hat.

1.7.1 Satz

Es sei K ein zweidimensionaler Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$. Dann ist K zu $\mathbb{C}$ isomorph.

Beweis:
Wegen $\dim K = 2$ gibt es Elemente $v \in K \setminus \mathbb{R}$. Dann sind $1 \in \mathbb{R} \subset K$ und v jeweils linear unabhängig über $\mathbb{R}$, denn ist $a \cdot 1 + bv = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so muss zunächst $b = 0$ gelten, da sonst $v = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$. Mit $b = 0$ gilt auch $a = 0$. Wir konstruieren nun v so, dass $v^2 = -1$.

Sei $w \in K \setminus \mathbb{R}$ beliebig. Es ist $w^2 = a + 2bw$ mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$. Setzt man $u := w - b$, so gilt auch $u \in K \setminus \mathbb{R}$ und es folgt

$$u^2 = c \quad \text{mit} \quad c := a + b^2 \in \mathbb{R}\,.$$

Der Fall $c \geq 0$ ist nicht möglich. Dann würde $\sqrt{c} \in \mathbb{R}$ existieren und es wäre $0 = u^2 - c = (u - \sqrt{c})(u + \sqrt{c})$, woraus, da K als Körper nullteilerfrei ist, der Widerspruch $u = \sqrt{c} \in \mathbb{R}$ oder $u = -\sqrt{c} \in \mathbb{R}$ folgt.

Also gilt $c < 0$. Dann ist $-c^{-1} > 0$, folglich existiert ein $d \in \mathbb{R}$ mit $d^2 = -c^{-1}$. Für $v := du \in K \setminus \mathbb{R}$ gilt nun wie gewünscht

$$v^2 = d^2u^2 = -c^{-1}c = -1\,.$$

Es ist $K = \mathbb{R} + \mathbb{R}v$. Durch

$$\varphi : K \to \mathbb{C}\,, \quad x + yv \to x + iy\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

wird eine bijektive Abbildung definiert, die additionstreu und wegen $v^2 = i^2 = -1$ auch multiplikationstreu ist. Mithin ist φ ein Isomorphismus von K auf $\mathbb{C}$.
□

Unser nächster Satz hat mehr den Charakter eines Hilfssatzes, im Beweis müssen wir eine Variante des Fundamentalsatzes der Algebra heranziehen.

1.7.2 Satz
Es sei L ein n-dimensionaler Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, es gelte $n < \infty$. Dann gilt für jedes Element $v \in L \setminus \mathbb{R}$ eine Gleichung

$$v^2 = a + bv \quad \textit{mit} \quad a, b \in \mathbb{R} \textit{ und } a \neq 0\,.$$

Beweis:
Die $n+1$ Vektoren $1, v, v^2, \ldots, v^n \in L$ sind linear abhängig über $\mathbb{R}$. Es gibt also ein Polynom

$$P(X) = X^m + r_{m-1}X^{m-1} + \ldots + r_0 \in \mathbb{R}[X]\,, \quad 1 \leq m \leq n\,,$$

mit $P(v) = 0$. Nun zerfällt $P(X)$ nach einem nicht trivialen Satz der Analysis über $\mathbb{R}$ in lineare und quadratische Polynome

$$P(X) = \prod_{\kappa=1}^{k}(X - c_\kappa) \prod_{\lambda=1}^{1}(X^2 - b_\lambda X - a_\lambda)\,, \quad c_\kappa, b_\lambda, a_\lambda \in \mathbb{R}\,, \quad a_\lambda \neq 0\,.$$

(Ein eleganter und einfacher Beweis dieses Faktorisierungssatzes wird später mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra gegeben. Für den Fall $n \leq 3$ ist der Faktorisierungssatz klar, da Polynome dritten Grades nach dem Zwischenwertsatz der Infinitesimalrechnung stets wenigstens eine reelle Nullstelle haben).

Aus

$$0 = P(v) = \prod_{\kappa=1}^{k}(v - c_\kappa) \prod_{\lambda=1}^{1}(v^2 - b_\lambda v - a_\lambda)$$

folgt wegen der Nullteilerfreiheit des Körpers L, dass einer der Faktoren verschwindet. Da $v \notin \mathbb{R}$, so gibt es also ein quadratisches Polynom

$$Q(X) = X^2 - bX - a \in \mathbb{R}[X]\,, \quad a \neq 0\,,$$

das von v annulliert wird: $Q(v) = 0$. Dies bedeutet

$$v^2 = a + bv\,, \quad a \neq 0\,. \qquad \square$$

Es folgt nun schnell

1.7.3 Satz

Es sei L ein endlich–dimensionaler Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$. Dann ist L isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Beweis: Sei $n := \dim L < \infty$. Im Falle $n = 1$ gilt $L = \mathbb{R}$. Sei $n \geq 2$. Wir wählen einen Vektor $v \in L \setminus \mathbb{R}$. Nach Satz 1.7.2 gilt eine Gleichung

$$v^2 = a + bv \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,, \quad a \neq 0\,.$$

Wir bezeichnen mit $K := \mathbb{R} + \mathbb{R}v$ den von 1 und v erzeugten zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Für zwei beliebige Elemente $z_\nu = x_\nu + y_\nu v \in K\,, \quad \nu = 1, 2$ gilt

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 v)(x_2 + y_2 v) = (x_1 x_2 + y_1 y_2 a) + (x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 b)v \in K\,,$$

d. h. K ist gegenüber der Multiplikation abgeschlossen. Überdies liegt das Inverse z^{-1} eines jeden Elementes $z \in K \setminus \{0\}$ in K: für Elemente $z \in \mathbb{R}$ ist das trivial, für Elemente $z \in K \setminus \mathbb{R}$ gilt nach Satz 1.7.2 eine Gleichung

$$z^2 + cz + d = 0 \quad \text{mit} \quad c, d \in \mathbb{R}\,, \quad d \neq 0\,,$$

woraus folgt

$$z\left(\frac{z + c}{-d}\right) = 1\,, \quad \text{also} \quad z^{-1} = -d^{-1}(z + c) \in K\,.$$

Der Vektorraum $K \subset L$ ist somit ein Körper. Da $\mathbb{R} \subset K$ und $\dim K = 2$, so ist K nach Satz 1.7.1 isomorph zu $\mathbb{C}$.

Es bleibt zu zeigen: $K = L$. Sei $w \in L$ beliebig. Wir wissen nach Satz 1.7.2, dass w Nullstelle eines normierten quadratischen Polynoms $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ ist. Nach Satz 1.4.2 besitzt $Q(X)$ in $K \cong \mathbb{C}$ zwei Nullstellen z_1, z_2. Es gilt dann (vgl. ÜA 1.4.3):

$$Q(X) = (X - z_1)(X - z_2)\,.$$

Daraus folgt

$$0 = Q(w) = (w - z_1)(w - z_2)$$

und also $w = z_1$ oder $w = z_2$ wegen der Nullteilerfreiheit von L. In jedem Fall gilt $w \in K$. Damit ist $L = K$ gezeigt. $\square$

1.7.4 Bemerkung

Dem Leser ist vielleicht aus der linearen Algebra bekannt, dass das *hyperkomplexe System* $\mathbb{H}$ der *Quaternionen* einen nichtkommutativen Körper bildet, der $\mathbb{R}$ als Unterkörper enthält und ein vierdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Man sieht an diesem Beispiel, dass für die Gültigkeit von Satz 1.7.3 die Kommutativität der Multiplikation wesentlich ist. Ein berühmter Satz von G. Frobenius aus dem Jahre 1877 besagt übrigens, dass jeder endlich–dimensionale Schiefkörper über $\mathbb{R}$ zum Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$ isomorph ist.

Leser, die mehr über komplexe Zahlen und ihre historische Bedeutung erfahren möchten, seien auf das Buch „Zahlen", Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 3. Auflage 1992 hingewiesen. Man findet dort in den Kapiteln 3 bis 5 Vertiefungen und allerlei Ergänzungen zum Inhalt dieses § 1; insbesondere werden Polarkoordinaten sofort mittels der komplexen Exponentialfunktion eingeführt. Im Kapitel 6 jenes Buches kann sich der Leser mit der klassischen Theorie der Quaternionen vertraut machen, im Kapitel 7 findet er einen Beweis des oben zitierten Satzes von Frobenius.

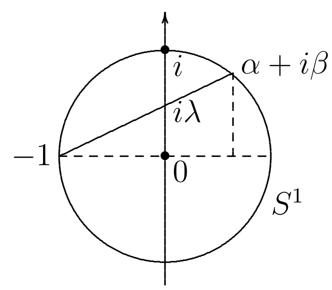
1.8 Komplexe Zahlen in der elementar–zahlentheoretischen Geometrie

Das Rechnen mit komplexen Zahlen ermöglicht häufig elegante Beweise für elementare Sätze, die in ihren Aussagen nichts mit komplexen Zahlen zu tun haben. Der französische Mathematiker JACQUES S. HADAMARD (1865 – 1963) hat einmal gesagt: „Le plus court chemin entre deux énonćes réels passe par le complexe.“ Wir geben hier zwei Beispiele für dieses „Prinzip des kürzesten Weges durchs Komplexe“.

Wir bezeichnen mit $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Peripherie des Einheitskreises. Wegen der Produktregel B1. im Satz 1.3.2 ist klar:

Die Menge S ist bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine Gruppe. Es gilt $\overline{z} = z^{-1} \in S$ für alle $z \in S$.

Man bildet nun $S \setminus \{-1\}$ bijektiv auf die imaginäre Achse ab, indem man dem Punkt $\alpha + i\beta \in S$ den Schnittpunkt $i\lambda$ der Geraden durch -1 und $\alpha + i\beta$ mit der imaginären Achse zuordnet (vgl. Figur 1-9).



Figur 1-9

Eine einfache Rechnung gibt (Strahlensatz):

$$(1) \qquad \alpha = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad \beta = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\beta}{1+\alpha}.$$

Es folgt $\alpha + i\beta = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$. Damit ist klar:

1.8.1 Lemma

Die Abbildung

$$\mathbb{R} \to S \setminus \{-1\}, \quad \lambda \mapsto \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda},$$

ist bijektiv. (Man nennt sie eine rationale Parametrisierung von S.)

Wie üblich bezeichnet $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ den Körper der *reellen rationalen Zahlen.* Die Menge $S_{rat} := \{\zeta \in S : \operatorname{Re}\zeta\,,\ \operatorname{Im}\zeta \in \mathbb{Q}\}$ der *komplex rationalen Punkte von* S ist eine Untergruppe von S, denn sie ist der Durchschnitt von S mit der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{Q}(i) := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ der *komplex rationalen Zahlen* (Gaußsche Zahlen). Elemente von S_{rat} sind zum Beispiel $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\,i$, $\frac{7}{25} + \frac{24}{25}\,i$. Aus den Gleichungen (1) und dem Lemma folgt direkt:

1.8.2 Satz

Die Abbildung $\mathbb{Q} \to S_{rat} \setminus \{-1\}, \lambda \mapsto \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$ *ist bijektiv. Insbesondere hat die Gruppe* S_{rat} *unendlich viele Elemente.*

Aus dieser Darstellung der rationalen Punkte auf der Kreislinie S folgen en passant die sogenannten „indischen Formeln“ für pythagoräische Tripel. Ein Tripel k, l, m natürlicher Zahlen $\neq 0$ heißt *pythagoräisch*, wenn $k^2 + l^2 = m^2$. Dann ist wenigstens eine der Zahlen k, l gerade (Beweis!); wir zeigen:

1.8.3 Satz

Ist (k, l, m) *ein pythagoräisches Tripel und ist* l *gerade, so gibt es natürliche Zahlen* $r, s, t \neq 0$*, sodass gilt:*

$$k = (r^2 - s^2)t\,, \quad l = 2rst\,, \quad m = (r^2 + s^2)t \quad \textit{(indische Formeln).}$$

Beweis: Zu $m^{-1}k + im^{-1}l \in S \setminus \{-1\}$ gibt es ein $\lambda = \frac{s}{r}$, $r, s \in \mathbb{N} \setminus 0$, sodass nach (1) gilt:

$$k = (r^2 - s^2)\,\frac{m}{r^2 + s^2}\,, \quad l = 2rs\,\frac{m}{r^2 + s^2}\,.$$

Wählt man r, s teilerfremd, so sind auch $r^2 + s^2$, rs teilerfremd (Beweis!). Da $\frac{1}{2}\,l = \frac{rsm}{r^2+s^2}$ ist, so folgt $t := \frac{m}{r^2+s^2} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und somit die Behauptung. □

Die indischen Formeln liefern für alle $r, s, t \neq 0$, wenn $r \neq s$ ist, in der Tat pythagoräische Tripel. Für $r = 2\,,\ s = t = 1$ erhält man das Tripel $(3, 4, 5)$ der Maurer und Zimmerleute; zu $r = 3\,,\ s = 2\,,\ t = 1$ gehört das Tripel $(5, 12, 13)$ usw. usw.

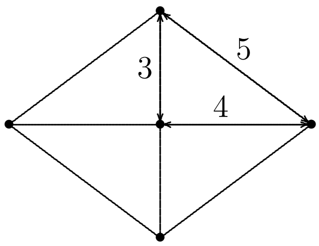
Als zweites Beispiel für das Hadamardsche Prinzip diskutieren wir das

1.8.4 Problem der ganzzahligen Abstände

Sei $n \geq 1$ *irgend eine natürliche Zahl. Gibt es in der euklidischen Ebene* n

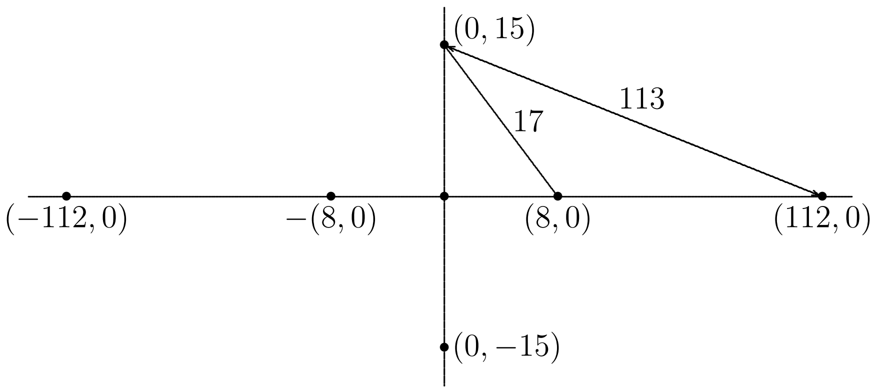
verschiedene Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen, sodass je zwei dieser Punkte stets einen ganzzahligen Abstand haben?

Für $n = 5$ kann man sofort eine Konfiguration angeben:



Figur 1-10

Sieben Punkte sind schon etwas mühsamer zu finden:



Figur 1-11

Für große n führt „Probieren“ allerdings schnell in einen kombinatorischen Dschungel, vgl. hierzu jedoch die Bemerkungen am Ende dieses Abschnitts. Wir zeigen im folgenden mit Hilfe von Satz 1.8.2 und einer kurzen Rechnung im Komplexen:

1.8.5 Satz

Zu jedem $n \geq 1$ gibt es einen Kreis, auf dessen Peripherie n verschiedene Punkte liegen, deren Abstände alle ganzzahlig sind.

Wir identifizieren die euklidische Ebene mit $\mathbb{C}$. Die Menge

$$G := \{u \in S_{rat} : \text{Es gilt } u = \zeta^2 \text{ mit } \zeta \in S_{rat}\}$$

der Quadrate in S_{rat} ist eine Untergruppe von S_{rat}. Da die Abbildung $S_{rat} \to G$, $\zeta \mapsto \zeta^2$, surjektiv ist und jede Zahl aus G nur zwei Urbilder besitzt (Gruppen–Epimorphismus mit $\{\pm 1\}$ als Kern), hat G wegen Satz 1.8.2 unendlich viele Elemente. Weiter gilt folgende Schlüsseleigenschaft.

1.8.6 Hilfssatz

Für je zwei Punkte $u, v \in G$ ist $|u - v|$ eine reell rationale Zahl. Genauer gilt: Wenn $u = \zeta^2$ und $v = \xi^2$, ist $|u - v| = 2|\operatorname{Im}(\zeta\,\xi^{-1})| \in \mathbb{Q}$.

Beweis:
Wegen $|v| = 1$ gilt $|u - v| = |uv^{-1} - 1| = |w^2 - 1|$ mit $w := \zeta\,\xi^{-1} \in S_{rat}$. Da $\overline{w} = w^{-1}$ und $|\overline{w}| = 1$ ist, folgt $|u - v| = |w - \overline{w}| = 2|\operatorname{Im} w| \in \mathbb{Q}$. □

Mit diesem Hilfssatz ergibt sich Satz 1.8.5 unmittelbar: Da G unendlich ist, gibt es n verschiedene Zahlen $u_1, \dots, u_n \in G$. Die endlich vielen Abstände $|u_\nu - u_\mu|$, $1 \le \mu, \nu \le n$, sind nach dem Hilfssatz reell rational und haben also einem (i. Allg. sehr großen) Hauptnenner N. Die n verschiedenen Punkte $Nu_1, \dots, Nu_n$ liegen dann alle auf der Peripherie des Kreises um 0 mit dem Radius N und haben lauter ganzzahlige Abstände. □

Eine einfache zahlentheoretische Überlegung gibt (ohne Benutzung komplexer Zahlen) folgendes Resultat:

Ist $m \in \mathbb{N}$ ungerade und hat m mindestens d verschiedene Teiler > 1 in $\mathbb{N}$, so hat die Gleichung $m^2 = x^2 - y^2$ mindestens d verschiedene Lösungen (x_j, y_j) aus $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, $1 \le j \le d$.

Ersichtlich haben dann alle $d + 1$ Punkte $(m, 0), (0, y_1), \dots, (0, y_d)$ ganzzahlige Abstände. In dieser Konfiguration liegen – wie auch in den eingangs gegebenen Beispielen – alle Punkte bis auf einen auf einer Geraden. Es lässt sich zeigen, dass unendlich viele Punkte nur dann alle ganzzahlige Abstände voneinander haben können, wenn sie sämtlich auf einer Geraden liegen. Es scheint nicht bekannt zu sein, ob es in der Ebene „dichte“ Mengen (vgl. Aufgabe 2.10 und allgemeiner Definition **??** in Kurseinheit 2) gibt, bei denen *alle* Abstände rational sind. Näheres hierzu findet man bei N. H. Anning und P. Erdös: Integral Distances, Bull. Amer. Math. Soc. 51, 598 – 600 (1945). Es sei noch erwähnt, dass sich Hilfssatz 1.8.6 auch mit Hilfe des Satzes von Ptolomäus beweisen lässt.

Für das Hadamardsche Prinzip gibt es viele weitere faszinierende Beispiele. Wenngleich sie nicht für einen Kurs zur Funktionentheorie relevant sind, sollte man so etwas doch einmal gesehen haben. Wir verweisen diesbezüglich auf das Kapitel 3 im Band Zahlen, Springer Verlag 1992, sowie auf I. M. Yaglom: Complex Numbers in Geometry, Academic Press, New York 1968.

§ 2

Konvergente Folgen und Reihen im Komplexen

2.1 Konvergente Folgen komplexer Zahlen

Ist E irgendeine Menge, so versteht man unter einer *Folge in E* eine Abbildung $\mathbb{N} \to E$ von der Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen in E. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist also ein Element $p_n \in E$ zugeordnet. Man schreibt hierfür

$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{bzw.} \quad (p_n)_{n\geq 0} \quad \text{oder} \quad (p_0, p_1, p_2, \ldots)$$

oder auch salopper (p_n) oder einfach $p_0, p_1, \ldots$ Ist $n_0 \in \mathbb{Z}$ irgendeine *ganze* Zahl, so bezeichnet man Abbildungen

$$\{n_0, n_0 + 1, \ldots\} \to E$$

ebenfalls als Folgen, man schreibt $(p_n)_{n\geq n_0}$ oder $p_{n_0}, p_{n_0+1}, \ldots$ Statt n benutzt man auch $i, j, k, \mu, \nu, \ldots$ als *Folgenindex.*

2.1.1 Definition (konvergente Folge, Limes, divergente Folge)
Es sei E ein metrischer Raum mit Metrik d, es sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E. Die Folge heißt konvergent gegen $p \in E$ (kurz: konvergent), in Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \textit{oder kürzer} \quad \lim p_n = p\,,$$

wenn nachstehende Konvergenzbedingung erfüllt ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$d(p_n, p) < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geq n_0\,.$$

Das Element p heißt ein Limes der Folge. Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

Eine äquivalente Fassung der Konvergenzbedingung ist offensichtlich:

In jeder ε–Kugel $B_\varepsilon(p)$, $\varepsilon > 0$, um p liegen fast alle (d. h. alle bis auf endlich viele) Glieder p_n der Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wie in der reellen Infinitesimalrechnung zeigt man (der Leser führe den Beweis durch):

Jede konvergente Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum E hat nur einen Limes: Aus $\lim p_n = p$ und $\lim p_n = p'$ folgt $p = p'$.

Der Leser mache sich klar, dass diese Eindeutigkeit des Limes letztlich eine Konsequenz der Tatsache ist, dass metrische Räume hausdorffsch sind (vgl. Bemerkung im Anschluss an Satz 1.5.7).

Wir betrachten von nun an in diesem Paragraphen nur noch Folgen $(c_n)_{n\geq 0}$ komplexer Zahlen, d. h. $c_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (komplexe Folgen). Konvergenz in $\mathbb{C}$ ist stets bzgl. der euklidischen Metrik von $\mathbb{C}$ gemeint: es gilt also

$$\lim c_n = c \in \mathbb{C}$$

genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt:

$$|c_n - c| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0 \,.$$

Ein wichtiges Beispiel einer Zahlenfolge ist die *Potenzfolge* $(z^n)_{n\geq 0}$, wo $z \in \mathbb{C}$ fest gewählt ist. Da für jede reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ die Folge $(q^n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist (d. h. gegen 0 konvergiert), so sieht der Leser unmittelbar:

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.

Analog wie im Reellen nennt man eine Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{C}$ *beschränkt*, wenn die Menge $\{c_0, c_1, \ldots\} \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist; dabei heißt eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ *beschränkt*, wenn es eine reelle „*Schranke*“ $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$|a| \leq M \quad \text{für alle} \quad a \in A \,.$$

Analog wie im Reellen zeigt man:

Jede konvergente Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ komplexer Zahlen ist beschränkt. Ist $M > 0$ so beschaffen, dass $|c_n| \leq M$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so ist

$$|\lim c_n| \leq M.$$

Wir können den kanonischen Beweis dem Leser überlassen.

Jede Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen bestimmt die beiden Folgen

$$(\operatorname{Re} c_n)_{n\in\mathbb{N}} \,, \quad (\operatorname{Im} c_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

reeller Zahlen (*Realteilfolge* und *Imaginärteilfolge*). Wir zeigen jetzt, dass man grundsätzlich Konvergenzfragen in Komplexen via Realteil– und Imaginärteilfolge auf Konvergenzfragen im Reellen zurückspielen kann.

2.1.2 Satz

Folgende Aussagen über eine Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ komplexer Zahlen sind äquivalent:

(i) $(c_n)_{n\geq 0}$ *ist konvergent.*

(ii) *Die beiden reellen Folgen* $(\operatorname{Re} c_n)_{n\geq 0}$ *und* $(\operatorname{Im} c_n)_{n\geq 0}$ *sind konvergent.*

Im Falle der Konvergenz gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} c_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} c_n \,.$$

Beweis:

Wir schreiben $a_n := \operatorname{Re} c_n$, $b_n := \operatorname{Im} c_n$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $c := \lim c_n$, etwa $c = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0, sodass $|c_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |\operatorname{Re}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_0 \,, \\ |b_n - b| &= |\operatorname{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_0 \,. \end{aligned}$$

Mithin konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n) und es gilt

$$\lim a_n = \operatorname{Re} c \,, \quad \lim b_n = \operatorname{Im} c \,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $a := \lim a_n$, $b := \lim b_n$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existieren dann $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{1}{2}\sqrt{2}\varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_1 \,, \\ |b_n - b| &< \frac{1}{2}\sqrt{2}\varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_2 \,. \end{aligned}$$

Setzt man $c := a + ib$, so folgt für alle $n \geq \max\{n_1, n_2\}$

$$|c_n - c| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2} = \varepsilon \,.$$

Also konvergiert die Folge (c_n) gegen $c = a + ib$. □

2.1.3 Bemerkung

Der Leser verdeutliche sich, dass wir im vorangehenden Beweis geschlossen haben wie im Beweis von Satz 1.5.8. In der Tat kann man unser Resultat auch so deuten: Der Konvergenzbegriff für Folgen komplexer Zahlen basiert auf der euklidischen Metrik von $\mathbb{C}$, der Konvergenzbegriff für Paare von Folgen reeller Zahlen basiert auf der Maximummetrik von $\mathbb{C}$. Da beide Metriken gleiche Topologien erzeugen, hat man gleiche Konvergenzbegriffe.

Wie im Reellen wird der Begriff der Cauchy–Folge definiert.

2.1.4 Definition (Cauchy–Folge)

Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen heißt Cauchy–Folge, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass gilt:*

$$|c_n - c_m| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad m, n \geq n_0 \,.$$

Man beweist nun völlig analog wie Satz 2.1.2 den

2.1.5 Satz

Folgende Aussagen über eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen sind äquivalent:*

(i) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Cauchy–Folge.*

(ii) *Die beiden reellen Folgen* $(\operatorname{Re} c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\operatorname{Im} c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sind Cauchy–Folgen.*

Es erübrigt sich hier die detaillierte Durchführung des Beweises. Aus Satz 2.1.5 folgt unmittelbar das Cauchysche Konvergenzkriterium im Komplexen.

2.1.6 Satz

Folgende Aussagen über eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen sind äquivalent:*

(i) $(c_n)_{n\geq 0}$ *ist konvergent.*

(ii) $(c_n)_{n\geq 0}$ *ist eine Cauchy–Folge.*

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, sei n_0 so gewählt, dass

$$|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0 \,, \quad \text{wobei} \quad c := \lim c_n \,.$$

Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung für alle $n, m \geq n_0$

$$|c_n - c_m| \leq |c_n - c| + |c - c_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Satz 2.1.5 sind $(\operatorname{Re} c_n)_{n\geq 0}$ und $(\operatorname{Im} c_n)_{n\geq 0}$ reelle Cauchy–Folgen. Da der Körper $\mathbb{R}$ *vollständig* ist, konvergieren diese beiden Folgen in $\mathbb{R}$ gegen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$. Nach Satz 2.1.2 konvergiert dann $(c_n)_{n\geq 0}$ gegen $a + ib$. □

Satz 2.1.6 besagt, dass $\mathbb{C}$ wie $\mathbb{R}$ ein *vollständiger*, bewerteter Körper ist.

Auch im Komplexen gilt der Satz von Weierstraß–Bolzano.

2.1.7 Satz

Jede beschränkte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:
Sei $M \in \mathbb{R}$ so beschaffen, dass $|c_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gilt auch

$$|\operatorname{Re} c_n| \leq M \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im} c_n| \leq M \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Nach dem Satz von Weierstraß–Bolzano für reelle Folgen gibt es eine Teilfolge $(c_{m_0}, c_{m_1}, c_{m_2}, \ldots)$ der Folge (c_n), sodass die Folge $(\operatorname{Re} c_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Da mit der Folge $(\operatorname{Im} c_n)$ auch die Teilfolge $(\operatorname{Im} c_{m_k})$ beschränkt ist, gibt es, wieder nach dem reellen Satz von Weierstraß–Bolzano, eine Teilfolge $(c_{n_0}, c_{n_1}, c_{n_2}, \ldots)$ der Folge $(c_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass die Folge $(\operatorname{Im} c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann ist auch $(\operatorname{Re} c_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge der konvergenten Folge $(\operatorname{Re} c_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Nach Satz 2.1.2 konvergiert jetzt die Folge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. □

Wir kommen nun zu den *Limesregeln für konvergente Folgen*, die wörtlich wie im Reellen gelten und bewiesen werden (Übungsaufgabe!).

2.1.8 Satz

Es seien $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen komplexer Zahlen. Dann gilt:

(1) *Die Summenfolge $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, es ist*

$$\lim_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} d_n\,.$$

(2) *Die Produktfolge $(c_n d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, es ist*

$$\lim_{n\to\infty} (c_n d_n) = \lim_{n\to\infty} c_n \cdot \lim_{n\to\infty} d_n\,.$$

(3) *Ist $\lim d_n \neq 0$, so gibt es ein n_0, sodass $d_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, alsdann ist die Quotientenfolge $\left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergent, es ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim c_n}{\lim d_n}.$$

In (1) und (2) ist enthalten:

$$\lim_{n\to\infty} (a \cdot c_n + b \cdot d_n) = a \cdot \lim_{n\to\infty} c_n + b \cdot \lim_{n\to\infty} d_n \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{C}\,.$$

Wir notieren weiter:

2.1.9 Satz

Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge komplexer Zahlen. Dann gilt:*

(1) *Die Folge* $(\overline{c_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *konjugiert komplexer Zahlen ist konvergent, es ist*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{c_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} c_n}\,.$$

(2) *Die Betragsfolge* $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen ist konvergent, es ist*

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = |\lim_{n\to\infty} c_n|\,.$$

Beweis:
Sei $c := \lim_{n\to\infty} c_n$, etwa $c = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Re} c_n)\,, \quad b = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Im} c_n)\,.$$

zu (1): Aus den vorangehenden Regeln folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \overline{c_n} &= \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Re} c_n - i \operatorname{Im} c_n) = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Re} c_n) - i \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Im} c_n)\\ &= a - ib = \overline{c} = \overline{\lim_{n\to\infty} c_n}\,.\end{aligned}$$

zu (2): Es gilt $|c_n|^2 = c_n\overline{c_n}$ und also wegen (1) unter Verwendung von Satz 2.1.8,(2):

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^2 = (\lim_{n\to\infty} c_n)(\lim_{n\to\infty} \overline{c_n}) = c\,\overline{c} = |c|^2\,.$$

Nun weiß man aus der reellen Theorie, dass für jede konvergente Folge $(r_n)_{n\geq 0}$ reeller Zahlen $r_n \geq 0$ auch die Wurzelfolge $(\sqrt{r_n})_{n\geq 0}$ konvergiert und dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{r_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} r_n}$. Dies hat hier zur Folge

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = |c| = |\lim_{n\to\infty} c_n|\,. \qquad \square$$

2.1.10 Aufgabe

L Es bezeichne $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ den Körper der rationalen reellen Zahlen und

$$\mathbb{Q}(i) := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

die Menge aller „rationalen komplexen Zahlen“. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Q}(i)$ ist ein Körper.

(b) $\mathbb{Q}(i)$ ist abzählbar (d. h. es gibt eine Folge $(z_n)_{n\geq 0}$, deren Elemente genau alle Elemente von $\mathbb{Q}(i)$ durchlaufen).

(c) $\mathbb{Q}(i)$ liegt dicht in $\mathbb{C}$, d. h. zu jeder komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(c_n)_{n\geq 0}$, $c_n \in \mathbb{Q}(i)$, die gegen c konvergiert.

2.2 Konvergente Reihen komplexer Zahlen

Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt (wie im Reellen) die Folge

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad s_n := \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \in \mathbb{C},$$

der *Partialsummen* eine *(unendliche) Reihe*; sie wird mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ bezeichnet, die Zahlen c_ν heißen die *Glieder* der Reihe.

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Partialsummenfolge der Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} d_\nu$, wo $d_0 := c_0$, $d_n := c_n - c_{n-1}$ für $n \geq 1$.

2.2.1 Definition ((absolut) konvergente Reihe)

Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ *komplexer Zahlen heißt konvergent, wenn die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *der Partialsummen* $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} c_\nu$ *konvergiert, man schreibt dann suggestiv*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu := \lim_{n\to\infty} s_n .$$

Die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ *heißt absolut konvergent, wenn* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|$ *konvergiert.*

Warnung: Das Symbol $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ bedeutet also zweierlei: zum einen die Folge $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{n} c_\nu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, zum anderen im Falle der Konvergenz den Limes

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu .$$

2.2.2 Beispiel

Das Standardbeispiel einer unendlichen Reihe, die uns immer wieder begegnen wird, ist die *unendliche geometrische Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$, $z \in \mathbb{C}$. Für die Partialsummen $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} z^\nu$ gilt die Summenformel (vgl. § 1.1):

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{für alle} \quad z \neq 1 .$$

Da z^{n+1} für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ eine Nullfolge ist, so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1\,.$$

Der Leser wird erwarten, dass für unendliche Reihen im Komplexen die grundlegenden Sätze, die im Reellen wohlbekannt sind, überleben. Dies trifft zu, wir beginnen mit

2.2.3 Satz (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen)

Eine Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}$ *komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass gilt:*

$$\left| \sum_{\nu=m}^{n} c_{\nu} \right| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geq m \geq n_0\,.$$

Beweis:
Bezeichnet $s_p := \sum\limits_{\nu=0}^{p} c_{\nu}$ die p–te Partialsumme, so ist

$$\sum_{\nu=m}^{n} c_{\nu} = s_n - s_{m-1}\,, \quad m \geq 1\,.$$

Die angegebene Bedingung besagt daher gerade, dass die Folge $(s_p)_{p\geq 1}$ eine Cauchy–Folge ist. Die Behauptung folgt daher aus Satz 2.1.6. □

2.2.4 Korollar

Jede absolut konvergente Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}$ *ist konvergent, es gilt*

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \right| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{\nu}|\,.$$

Beweis:
Da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}$ absolut konvergiert, gibt es nach Satz 2.2.3, angewendet auf $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |c_{\nu}|$, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$\sum_{\nu=m}^{n} |c_{\nu}| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq m \geq n_0\,.$$

Daraus folgt:

$$\left|\sum_{\nu=m}^{n} c_\nu\right| \le \sum_{\nu=m}^{n} |c_\nu| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge m \ge n_0\,.$$

Nach Satz 2.2.3 konvergiert daher $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$. Wegen

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\right| \le \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \le \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu| < \infty$$

gilt

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\right| \le \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|\,. \qquad \square$$

Aus Satz 2.2.3 folgt weiter (der Leser reproduziere den Beweis aus der Infinitesimalrechnung):

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ *ist, dass die Folge* $(c_n)_{n\ge 0}$ *der Reihenglieder eine Nullfolge ist:* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0\,.$

Häufige Anwendung bei Konvergenzuntersuchungen finden das Majorantenkriterium und das Quotientenkriterium.

2.2.5 Satz (Majorantenkriterium)

Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ *eine unendliche Reihe,* $c_\nu \in \mathbb{C}$. *Es gebe eine konvergente Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} t_\nu$ *mit lauter nicht–negativen reellen Gliedern* t_ν *und ein* $n_1 \in \mathbb{N}$, *sodass für alle* $\nu \ge n_1$ *gilt:*

$$|c_\nu| \le t_\nu\,.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ *absolut; für jedes* $m \ge n_1$ *gilt:*

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} |c_\nu| \le \sum_{\nu=m}^{\infty} t_\nu\,.$$

Beweis:

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$\sum_{\nu=m}^{n} |c_\nu| \le \sum_{\nu=m}^{n} t_\nu < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge m \ge \max\{n_0, n_1\}\,.$$

Nach Satz 2.2.3 folgt die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$. Für alle $n \geq m \geq n_1$ gilt

$$\sum_{\nu=m}^{n} |c_\nu| \leq \sum_{\nu=m}^{n} t_\nu \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} t_\nu \,,$$

daher folgt

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} |c_\nu| \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} t_\nu \,. \qquad \square$$

2.2.6 Satz (Quotientenkriterium)

Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ eine Reihe, es gebe ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass $c_\nu \neq 0$ für alle $\nu \geq n_1$. Es gebe weiter eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$, sodass gilt:

$$\left|\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}\right| \leq q \quad \textit{für alle} \quad \nu \geq n_1 \,.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ absolut. Für jedes $m \geq n_1$ gilt die „Restabschätzung“

$$\left|\sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu\right| \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} |c_\nu| \leq \frac{|c_m|}{1-q} \,.$$

Beweis:
Es gilt $|c_{\nu+1}| \leq q|c_\nu|$ für alle $\nu \geq n_1$. Daraus ergibt sich sofort für jedes feste $m \geq n_1$ durch vollständige Induktion

$$|c_{m+j}| \leq |c_m| q^j \quad \text{für alle} \quad j = 1, 2, \ldots$$

Die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |c_{n_1}| q^j$ ist daher eine Majorante von $\sum\limits_{\nu=n_1}^{\infty} c_\nu$. Da die geometrische Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} q^j$ wegen $0 < q < 1$ konvergiert, folgt die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=n_1}^{\infty} c_\nu$ und damit auch die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ aus dem Majorantenkriterium. Für alle $m \geq n_1$ gilt dabei

$$\left|\sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu\right| \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} |c_\nu| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |c_m| q^j = \frac{|c_m|}{1-q} \,. \qquad \square$$

Das Rechnen mit absolut konvergenten Reihen ist bedeutend einfacher als das Rechnen mit konvergenten Reihen, da Reihen mit positiven Gliedern bequemer zu handhaben sind. Wegen

$$\max\{|\operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} a|\}) \leq |a| \leq |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|$$

ist klar, dass eine komplexe Reihe $\sum a_\nu$ genau dann absolut konvergiert, wenn die reellen Reihen $\sum \operatorname{Re} a_\nu$ und $\sum \operatorname{Im} a_\nu$ beide absolut konvergieren. Von besonderer Bedeutung ist

2.2.7 Satz (Umordnungssatz)
Ist $\sum a_\nu$ absolut konvergent, so konvergiert jede „Umordnung" dieser Reihe, genauer gilt

$$\sum_{\nu\geq 0} a_{\tau(\nu)} = \sum_{\nu\geq 0} a_\nu \quad \textit{für jede Bijektion} \quad \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,.$$

Beweis (durch Reduktion auf den reellen Fall):
Mit $\sum a_\nu$ konvergieren auch $\sum \operatorname{Re} a_\nu$ und $\sum \operatorname{Im} a_\nu$ absolut. Es folgt $\sum \operatorname{Re} a_\nu = \sum \operatorname{Re} a_{\tau(\nu)}$ und $\sum \operatorname{Im} a_\nu = \sum \operatorname{Im} a_{\tau(\nu)}$. Da stets $\sum a_\nu = \sum \operatorname{Re} a_\nu + i \sum \operatorname{Im} a_\nu$ gilt, erhält man die Behauptung. □

In der Literatur nennt man den Umordnungssatz auch manchmal das „Kommutativgesetz für unendliche Reihen".

2.2.8 Beispiele
(1) *Exponentialreihe:* Wir definieren für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Exponentialreihe durch

$$\exp z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}\,, \qquad \text{wobei} \quad 0! := 1\,, \quad \nu! := 1 \cdot \ldots \cdot \nu \text{ für } \nu \geq 1\,.$$

Wir zeigen: *Die Exponentialreihe ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.*

Beweis:
Der Fall $z = 0$ ist trivial. Sei $z \in \mathbb{C}^*$ fest vorgegeben. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $m \geq 2|z| - 1$ gilt. Für alle $\nu \geq m$ gilt dann

$$\left| \frac{\frac{z^{\nu+1}}{(\nu+1)!}}{\frac{z^\nu}{\nu!}} \right| = \frac{|z|}{\nu+1} \leq \frac{|z|}{m+1} \leq \frac{1}{2}\,;$$

somit folgt die Konvergenz aus dem Quotientenkriterium mit $q := \frac{1}{2}$. □

Die im Satz 2.2.6 angegebene Abschätzung liefert sogleich eine „Restgliedabschätzung", nämlich:
Es gilt $\exp z = \sum\limits_{\nu=0}^{m-1} \frac{z^\nu}{\nu!} + r_m(z)$, *wobei*

$$|r_m(z)| \leq 2\,\frac{|z|^m}{m!} \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \textit{ mit } |z| \leq \frac{1}{2}\,(m+1)\,.$$

Speziell ist $|\exp z - 1| \leq 2|z|$ *für* $|z| \leq 1$.

Beweis:
Es gilt $r_m(z) = \sum\limits_{\nu=m}^{\infty} c_\nu$ mit $c_\nu := \frac{z^\nu}{\nu!}$. Nach dem eben Gezeigten gilt $\left|\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}\right| \leq q := \frac{1}{2}$ für alle $\nu \geq m$, so lange $|z| \leq \frac{1}{2}(m+1)$. Daher folgt nach Satz 2.2.6

$$|r_m(z)| \leq \frac{|c_m|}{1-q} = 2\frac{|z|^m}{m!} \quad \text{für alle} \quad |z| \leq \frac{1}{2}(m+1). \qquad \square$$

(2) *Binomialreihe:* Für jede *natürliche* Zahl $\sigma \geq 0$ gilt die binomische Formel

$$(1+z)^\sigma = \sum_{\nu=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{\nu} z^\nu \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wir definieren nun allgemein für jede *komplexe* Zahl $\sigma \in \mathbb{C}$ den Binomialkoeffizienten $\binom{\sigma}{\nu}$ durch

$$\binom{\sigma}{0} := 1, \quad \binom{\sigma}{\nu} := \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\nu+1)}{\nu!} \in \mathbb{C}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Die Reihe

$$b_\sigma(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\sigma}{\nu} z^\nu$$

heißt die *Binomialreihe* (zu σ). Für natürlichen Zahlen σ bricht diese Reihe mit dem Term $\binom{\sigma}{\sigma} z^\sigma = z^\sigma$ ab; für alle $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, handelt es sich um eine unendliche Reihe, z. B. ist

$$b_{-1}(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1}{\nu} z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-z)^\nu$$

die *alternierende geometrische Reihe*, die nach 2.2.2 für alle z mit $|z| < 1$ konvergiert, wobei gilt:

$$b_{-1}(z) = (1+z)^{-1}.$$

Wir zeigen nun: *Die Binomialreihe* $b_\sigma(z)$ *zu* $\sigma \in \mathbb{C}$ *konvergiert für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$ *absolut.*

Beweis:
Sei $z \in \mathbb{C}^*$ mit $|z| < 1$ fest vorgegeben. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass für $q := |z|(1+\varepsilon)$ die Ungleichung $0 < q < 1$ gilt. Nun ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\frac{\sigma-\nu}{\nu+1}| = 1$, daher

gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\nu \geq m$ die Abschätzung $|\frac{\sigma-\nu}{\nu+1}| \leq 1+\varepsilon$ gilt. Aus

$$\frac{\binom{\sigma}{\nu+1} z^{\nu+1}}{\binom{\sigma}{\nu} z^{\nu}} = z \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\nu)\nu!}{(\nu+1)!\,\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-\nu+1)} = z\,\frac{\sigma-\nu}{\nu+1}$$

folgt dann für alle $\nu \geq m$

$$\left|\frac{\binom{\sigma}{\nu+1} z^{\nu+1}}{\binom{\sigma}{\nu} z^{\nu}}\right| = |z| \cdot \left|\frac{\sigma-\nu}{\nu+1}\right| \leq |z|(1+\varepsilon) = q < 1\,;$$

daher ist $b_\sigma(z)$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent. □

(3) *Logarithmische Reihe:* Die Reihe

$$\lambda(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}\, z^\nu$$

heißt die *logarithmische Reihe.* Wir zeigen: *Die logarithmische Reihe ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergent.*

Beweis:
Sei $z \in \mathbb{C}^*$ mit $|z| < 1$ fest vorgegeben. Für alle ν gilt dann

$$\left|\frac{\frac{z^{\nu+1}}{\nu+1}}{\frac{z^\nu}{\nu}}\right| = |z|\,\frac{\nu}{\nu+1} \leq |z| =: q < 1\,,$$

daher folgt die Behauptung aus dem Quotientenkriterium.

2.2.9 Aufgabe

L Beweisen Sie folgende Konvergenzaussagen:

(a) Ist $(\zeta_\nu)_{\nu\geq 0}$ eine konvergente Folge und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen, so ist die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \zeta_\nu$ absolut konvergent.

(b) Ist $(c_\nu)_{\nu\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\operatorname{Re} c_\nu > 0$ für alle $\nu \geq 0$, sodass $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2$ konvergieren, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2$ absolut konvergent.

2.2.10 Aufgabe

L Eine unendliche komplexe Matrix $(a_{\mu\nu})_{\mu,\nu\in\mathbb{N}}$ heißt TOEPLITZ–*Matrix*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es gibt eine reelle Zahl $A > 0$, sodass gilt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu}| \leq A$ für alle $\mu \geq 0$ (absolute Zeilenkonvergenz),

(2) $\lim\limits_{\mu\to\infty} a_{\mu\nu} = 0$ für alle $\nu \geq 0$ (Spaltenlimesbedingung),

(3) $\lim\limits_{\mu\to\infty} \left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \right) = 1$ (Zeilensummenlimesgleichung).

Zeigen Sie, dass für jede Toeplitz–Matrix $(a_{\mu\nu})$ folgendes gilt:

(a) Für jede konvergente Folge $(\zeta_\nu)_{\nu\geq 0}, \zeta_\nu \in \mathbb{C}$, existieren alle Limites

$$z_\mu := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\zeta_\nu \in \mathbb{C},\ \mu \geq 0\,.$$

(b) Die Folge $(z_\mu)_{\mu\geq 0}$ konvergiert, es gilt

$$\lim_{\mu\to\infty} z_\mu = \lim_{\nu\to\infty} \zeta_\nu \quad \text{(Permanenzgleichung)} \quad .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass aus (1) bereits (a) und aus (1) und (2) bereits (b) für den Spezialfall $\lim_{\nu\to\infty} \zeta_\nu = 0$ folgt. Zeigen Sie dann unter Benutzung von (3), dass (b) allgemein richtig ist.

2.3 Multiplikationssatz

Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ konvergente bzw. absolut konvergente Reihen, so ist für alle $a, b \in \mathbb{C}$ auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(ac_n + bd_n)$ konvergent bzw. absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ac_n + bd_n) = a\sum_{n=0}^{\infty} c_n + b\sum_{n=0}^{\infty} d_n \,,$$

wie unmittelbar aus den Limesregeln des Abschnittes 2.1 folgt. Es liegt die Frage nahe, ob man auch das Produkt $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n\right)$ als unendliche Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ schreiben kann, deren Glieder p_n in einfacher Weise durch die Glieder c_i, d_j der Ausgangsreihen ausgedrückt werden. Es gibt ein einfaches Verfahren, ein mögliches Bildungsgesetz für die Glieder p_n zu „erraten". Man geht von den Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ zu *formalen Potenzreihen* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n X^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n X^n$ in einer „Unbestimmten" X über und rechnet das unendliche Produkt

$$(c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \ldots) \cdot (d_0 + d_1 X + d_2 X^2 + \ldots)$$

nach den herkömmlichen Klammerregeln aus, wobei man sich überhaupt nicht um Konvergenzprobleme schert. Fasst man wieder nach Potenzen von X zusammen, so erhält man die formale Potenzreihe

$$c_0 d_0 + (c_1 d_0 + c_0 d_1)X + (c_2 d_0 + c_1 d_1 + c_0 d_2)X^2 + \ldots \,,$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n X^n \quad \text{mit} \quad p_n := \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} d_\nu \in \mathbb{C} \,.$$

Wir vergessen jetzt wieder die formalen Potenzreihen, benutzen jedoch die gewonnenen Formeln zur

2.3.1 Definition (Cauchy–Produkt von Reihen)

Es seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ zwei (nicht notwendig konvergente) Reihen komplexer Zahlen. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \quad \textit{mit} \quad p_n := \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} d_\nu \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

das Cauchy–Produkt der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$.

Der folgende nicht triviale Satz zeigt, dass Definition 2.3.1 eine *gute* Definition ist.

2.3.2 Satz (Multiplikationssatz)
Es seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ *absolut konvergente Reihen. Dann ist auch ihr Cauchy–Produkt* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ *absolut konvergent und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} d_n\Big).$$

Beweis:
Wir setzen zur Abkürzung

$$c := \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,, \quad d := \sum_{n=0}^{\infty} d_n\,, \quad s_n := \sum_{k=0}^{n} p_k\,.$$

Wir zeigen als erstes, dass die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ gegen cd konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = cd\,.$$

Wir führen eine Hilfsfolge $(s_n^*)_{n\geq 0}$ ein:

$$s_n^* := \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} d_k\Big).$$

Nach Satz 2.1.8,(2) gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n^* = cd\,;$$

deshalb genügt es zu zeigen, dass $(s_n^* - s_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist, d. h. dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (s_n^* - s_n) = 0\,.$$

Wir schreiben die $(n+1)^2$ Summanden von s_n^* explizit hin:

$$s_n^* = \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} c_i d_j\,.$$

Aus der Definition des Cauchy–Produktes gewinnen wir durch Umordnen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{k} c_{k-j}d_j\Big) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} c_i d_j = \sum_{\substack{i,j\\ 0\leq i+j\leq n}} c_i d_j\,.$$

Alle hier stehenden Summanden (insgesamt $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$) kommen auch als Summanden in der Summe für s_n^* vor, bei Bildung der Differenz $s_n^* - s_n$ bleiben genau diejenigen Produkte $c_i d_j$ stehen, für die $i + j > n$ gilt. Setzt man

$$A_n := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \le n\,,\ j \le n\,,\ i + j > n\}\,,$$

so ist also

$$s_n^* - s_n = \sum_{(i,j) \in A_n} c_i d_j$$

und folglich

$$|s_n^* - s_n| \le \sum_{(i,j) \in A_n} |c_i d_j| \quad \text{für alle} \quad n \ge 0\,.$$

Um die hier rechts stehende Summe abzuschätzen, beachten wir, dass nach Voraussetzung die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k|$ konvergieren, daher ist auch die Folge

$$(\widehat{s}_n)_{n \ge 0} \quad \text{mit} \quad \widehat{s}_n := \Big(\sum_{k=0}^{n} |c_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} |d_k|\Big)$$

konvergent; es gibt also zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|\widehat{s}_n - \widehat{s}_{n_0}| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge n_0\,.$$

Nun ist

$$\widehat{s}_n - \widehat{s}_{n_0} = \sum_{(i,j) \in B_n} |c_i d_j|\,,$$

wobei

$$B_n := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \le n, j \le n\} \setminus \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \le n_0\,,\ j \le n_0\}\,.$$

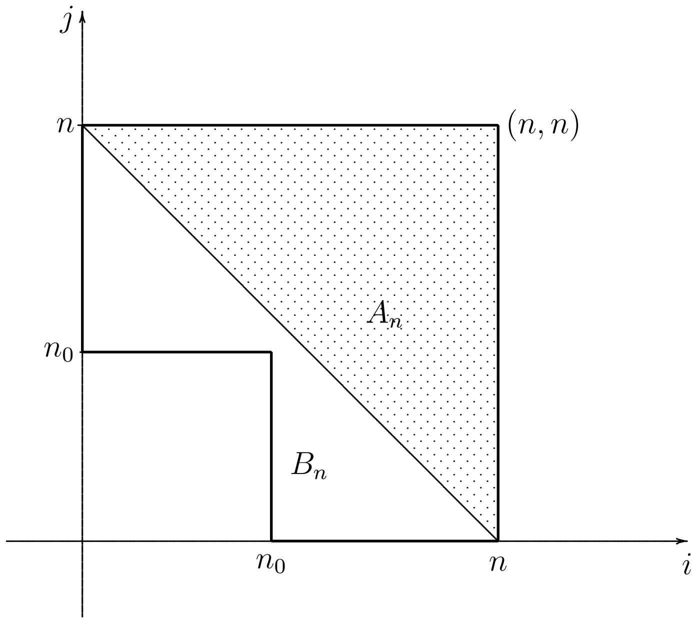
Es gilt (vgl. Figur 2-1)

$$A_n \subset B_n \quad \text{für alle} \quad n > 2n_0\,.$$

Damit folgt für alle $n > 2n_0$:

$$|s_n^* - s_n| \le \sum_{(i,j) \in A_n} |c_i d_j| \le \sum_{(i,j) \in B_n} |c_i d_j| = |\widehat{s}_n - \widehat{s}_{n_0}| < \varepsilon\,,$$

womit wir $\lim\limits_{n \to \infty} (s_n^* - s_n) = 0$ und also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = cd$ bewiesen haben. Es bleibt noch die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k$ zu beweisen. Dazu betrachten wir das



Figur 2-1

Cauchy–Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} p'_n$ der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|$, es ist also $p'_n = \sum_{\nu=0}^{n} |c_{n-\nu}||d_\nu|$, $n \geq 0$. Nach dem bisher Bewiesenen konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p'_n$. Es gilt

$$|p_n| = \Big| \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} d_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |c_{n-\nu} d_\nu| = p'_n \geq 0 \,.$$

Daher konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n|$ nach dem Majorantenkriterium. □

2.3.3 Bemerkung

Die absolute Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ ist wesentlich für die Gültigkeit des Multiplikationssatzes. So konvergiert z. B. die reelle Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \,;$$

das Cauchy–Produkt dieser Reihe mit sich selbst ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-\nu}} \frac{1}{\sqrt{\nu+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) ,$$

die nicht konvergiert (die Glieder bilden nicht einmal eine Nullfolge!).

Die Gleichung $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ lässt sich jedoch auch unter schwächeren Voraussetzungen als den im Satz 2.3.2 gemachten beweisen. So lässt sich z. B. zeigen, dass es genügt, eine der folgenden Voraussetzungen zu machen:

(a) Beide Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ konvergieren, wenigstens eine dieser Reihen konvergiert absolut.

(b) Alle drei Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ sind konvergent.

2.3.4 Beispiele

(1) *Additionstheorem der Exponentialreihe:* Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sind die Reihen

$$\exp z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\,, \quad \exp z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

nach 2.2.8 absolut konvergent. Für ihr Cauchy–Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = (\exp z_1)(\exp z_2)\,.$$

Wir bestimmen p_n. Per definitionem gilt

$$p_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z_1^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \cdot \frac{z_2^{\nu}}{\nu!}\,, \quad n \geq 0\,.$$

Nun ist

$$\frac{1}{(n-\nu)!}\,\frac{1}{\nu!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{\nu}$$

und es folgt nach der binomischen Formel (vgl. 1.1)

$$p_n = \frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu} z_1^{n-\nu} z_2^{\nu} = \frac{1}{n!}\,(z_1+z_2)^n\,,$$

d. h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\,.$$

Damit ist gezeigt: *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z_1+z_2) = (\exp z_1)\cdot(\exp z_2)\,. \quad \text{(Additionstheorem der Exponentialreihe)}$$

Diese Funktionalgleichung wird im Abschnitt **??** noch ausführlich diskutiert und exploitiert. Einen „Reihen-freien“ Beweis des Additionstheorems geben wir in **??**.

(2) *Funktionalgleichung der Binomialreihen:* Sind $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ beliebig, so sind für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die Binomialreihen

$$b_\sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n , \quad b_\tau(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\tau}{n} z^n$$

nach 2.2.7 absolut konvergent. Für ihr Cauchy–Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = b_\sigma(z) \cdot b_\tau(z) .$$

Wir bestimmen p_n. Per definitionem gilt

$$p_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\sigma}{n-\nu} z^{n-\nu} \cdot \binom{\tau}{\nu} z^\nu = z^n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\sigma}{n-\nu}\binom{\tau}{\nu} , \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nun zeigt man wie im Reellen durch Induktion nach n, dass stets

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\sigma}{n-\nu}\binom{\tau}{\nu} = \binom{\sigma+\tau}{n} \quad \text{für alle} \quad \sigma, \tau \in \mathbb{C} , \quad n \geq 0 .$$

Damit folgt

$$p_n = \binom{\sigma+\tau}{n} z^n$$

und also

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma+\tau}{n} z^n = b_{\sigma+\tau}(z) .$$

Insgesamt ist gezeigt: *Für alle $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt*

$$b_{\sigma+\tau}(z) = b_\sigma(z) \cdot b_\tau(z) . \quad \text{(Funktionalgleichung der Binomialreihe)}$$

Da $b_1(z) = 1 + z$, so hat man speziell

$$b_\sigma(z) = (1+z) b_{\sigma-1}(z) .$$

Wir werden später sehen, dass für alle $\sigma \in \mathbb{C}$ gilt:

$$b_\sigma(z) = (1+z)^\sigma , \quad |z| < 1 ,$$

dabei hat man allerdings die Potenzen a^σ, $a \in \mathbb{C}$, „richtig“ zu definieren.

2.3.5 Aufgabe

L Beweisen Sie das (in 2.3.4,(2) beim Beweis der Funktionalgleichung der Binomialreihen benutzte) „Additionstheorem für Binomialkoeffizienten“:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\sigma}{n-\nu}\binom{\tau}{\nu} = \binom{\sigma+\tau}{n} \quad \text{für alle} \quad \sigma\,,\ \tau \in \mathbb{C}\,, \quad n \geq 0\,.$$

Hinweis: Induktion nach n unter Benutzung der „wohlbekannten“ Identität

$$\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n+1}{\nu}\,, \quad \nu, n \in \mathbb{N}\,, \quad \nu \geq 1\,;$$

multiplizieren Sie obige Gleichung mit $\sigma + \tau - n$ und formen Sie „geschickt“ um.

DIESE SEITE BLEIBT FREI.

Lösungshinweise zu Kurseinheit 1

1.1.9 Für $c := \frac{1+i}{1-i}$ gilt

$$c = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i\,, \quad \text{also} \quad \operatorname{Re} c = 0\,, \quad \operatorname{Im} c = 1\,.$$

Sei $d := \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$. Wegen $\sqrt{2}^{\,4} = 4$ und der binomischen Formel

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$$

gilt

$$d = -1\,, \quad \text{also} \quad \operatorname{Re} d = -1, \quad \operatorname{Im} d = 0\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (1+i)^{2n} &= ((1+i)^2)^n = (2i)^n\,,\\ (1-i)^{2n} &= ((1-i)^2)^n = (-2i)^n\,, \end{aligned}$$

also

$$z_{2n} = (2i)^n + (-2i)^n = 2^n(1+(-1)^n)i^n \quad \text{für alle} \quad n \geq 1\,.$$

Wir sehen

$$z_{2n} = \begin{cases} 2 \cdot 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{für gerade } n,\\ 0 & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Speziell $\operatorname{Im} z_{2n} = 0$ für alle n. Letzteres folgt übrigens einfacher wegen

$$\begin{aligned} \overline{z}_{2n} &= \overline{(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}} = \overline{(1+i)^{2n}} + \overline{(1-i)^{2n}}\\ &= (\overline{1+i})^{2n} + (\overline{1-i})^{2n} = (1-i)^{2n} + (1+i)^{2n} = z_{2n}\,. \end{aligned}$$

Mit obigen Trick lässt sich auch $z_{2n+1} = (1+i)^{2n+1} + (1-i)^{2n+1}$ sofort ausrechnen, man schreibt

$$\begin{aligned} z_{2n+1} &= (1+i)(1+i)^{2n} + (1-i)(1-i)^{2n}\\ &= (1+i)\cdot 2^n i^n + (1-i)(-1)^n \cdot 2^n i^n\\ &= 2^n(1+(-1)^n)i^n + 2^n(1+(-1)^{n+1})i^{n+1}\,. \end{aligned}$$

1.3.6 (a) Es gilt

$$z_n = (1-i)^n \left[1 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\right]\,.$$

Da $\frac{1+i}{1-i} = i$ nach 1.1.9 und $|1-i| = \sqrt{2}$, so folgt

$$|z_n| = |1-i|^n |1+i^n| = (\sqrt{2})^n |1+i^n| \quad \text{für alle} \quad n \geq 1\,.$$

Man unterscheidet nun die vier Fälle, wie sich n bei Division durch 4 verhält.

1. Fall: $n = 4m$. Dann ist $\sqrt{2}^n = 4^m$, $i^n = 1$, $|1+i^n| = 2$ und also

$$|z_{4m}| = 2 \cdot 4^m\,, \quad m \geq 1 \quad \text{(Dies ist auch klar nach 1.1.9.)}$$

2. Fall: $n = 4m+1$. Dann ist $\sqrt{2}^n = \sqrt{2} \cdot 4^m$, $i^n = i$, $|1+i^n| = \sqrt{2}$ und also

$$|z_{4m+1}| = 2 \cdot 4^m\,, \quad m \geq 1\,.$$

3. Fall: $n = 4m+2$. Dann ist $i^n = -1$, also $|1+i^n| = 0$ und also

$$|z_{4m+2}| = 0\,, \quad m \geq 1 \quad \text{(auch klar nach 1.1.9).}$$

4. Fall: $n = 4m+3$. Dann ist $\sqrt{2}^n = 2\sqrt{2} \cdot 4^m$, $i^n = -i$, $|1+i^n| = \sqrt{2}$ und also

$$|z_{4m+3}| = 4^{m+1}\,, \quad m \geq 1\,.$$

Wir sehen, dass $z_n = 0$ genau dann gilt, wenn n bei Division durch 4 den Rest 2 gibt.

(b) Es gilt $\mathrm{Im}(\frac{z-b}{a}) = 0$ genau dann, wenn $t := \frac{z-b}{a} \in \mathbb{R}$. Dies gilt für $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $z = at + b$ mit $t \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = at + b\,,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Punkte von L bilden genau die Gerade in $\mathbb{C}$ durch $b \in \mathbb{C}$ in Richtung des Vektors a.

1.3.7 Für $z = x + iy$ gilt $\mathrm{Re}\, z = |z|$ genau dann, wenn $x = \sqrt{x^2+y^2}$. Dies impliziert $x \geq 0$ und $x^2 = x^2 + y^2$, d. h. $y = 0$. Wir folgern: Genau die nicht negativen reellen Zahlen haben die Eigenschaften $|z| = \mathrm{Re}\, z$.

1.3.8 Die rechte Seite der behaupteten Gleichung schreibt sich per definitionem

$$(z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2)(w_1\overline{w}_1 + w_2\overline{w}_2) - (z_1\overline{w}_2 - z_2\overline{w}_1)(\overline{z}_1 w_2 - \overline{z}_2 w_1)\,.$$

Ausrechnen liefert

$$\begin{aligned} &z_1\overline{z}_1 w_1\overline{w}_1 + z_1\overline{z}_1 w_2\overline{w}_2 + z_2\overline{z}_2 w_1\overline{w}_1 + z_2\overline{z}_2 w_2\overline{w}_2 \\ &\qquad - z_1\overline{w}_2\overline{z}_1 w_2 + z_1\overline{w}_2\overline{z}_2 w_1 + z_2\overline{w}_1\overline{z}_1 w_2 - z_2\overline{w}_1\overline{z}_2 w_1\,. \end{aligned}$$

Es bleibt übrig

$$\begin{aligned} &z_1\overline{z}_1 w_1\overline{w}_1 + z_1\overline{w}_2\overline{z}_2 w_1 + z_2\overline{w}_1\overline{z}_1 w_2 + z_2\overline{z}_2 w_2\overline{w}_2 \\ &\qquad = (z_1w_1 + z_2w_2)(\overline{z}_1\overline{w}_1 + \overline{z}_2\overline{w}_2) = |z_1w_1 + z_2w_2|^2 . \end{aligned}$$

1.4.3 Ist $p = X^n + c_1X^{n-1} + \ldots + c_n \in \mathbb{C}[X]$ irgendein Polynom und $z_1 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, d. h. $p(z_1) = 0$, so gilt

$$p = p - p(z_1) = (X^n - z_1^n) + c_1(X^{n-1} - z_1^{n-1}) + \ldots + c_{n-1}(X - z_1) .$$

Wegen der geometrischen Summenformel

$$X^j - z_1^j = (X - z_1)(X^{j-1} + X^{j-2}z_1 + \ldots + z_1^{j-1}) , \quad j = 1, 2, \ldots$$

folgt

$$p = (X - z_1)q \quad \text{mit} \quad q \in \mathbb{C}[X] .$$

In dieser allgemeinen Abspaltungsaussage ist Aufgabe 1.4.3 enthalten:

$$X^2 + \beta X + \gamma = (X - z_1)q$$

mit linearem Polynom q. Es muss notwendig $q = X - z_2$ gelten! Natürlich kann man im quadratischen Fall die Identität

$$X^2 + \beta X + \gamma = (X - z_1)(X - z_2)$$

auch einfach durch stures Ausrechnen der rechten Seite verifizieren: es handelt sich hier im übrigen um nichts anderes als um den aus der Tertia bekannten *Vietaschen Wurzelsatz*

$$z_1 + z_2 = -\beta , \quad z_1z_2 = \gamma .$$

1.6.7 (a) Die Zahl $k := mn$ leistet das Verlangte, da

$$(\xi\eta)^{mn} = (\xi^m)^n(\eta^n)^m = 1^n1^m = 1 .$$

(b) Mit $\zeta', \zeta'' \in G$ gilt $\zeta' \cdot \zeta'' \in G$, was man analog zu (a) beweist. Mit $\zeta' \in G$ gilt auch $\zeta'^{-1} \in G$, denn $\zeta'^s = 1$ mit $s \in \mathbb{Z}$ impliziert $(\zeta'^{-1})^{-s} = 1$. Also ist G Gruppe, wegen $G \subset \mathbb{C}^*$ ist G abelsch. G hat ∞ viele Elemente, da es zu jedem $l \geq 1$ genau l verschiedene Einheitswurzeln gibt. Seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_q \in G$

beliebig. Es gibt positive ganze Zahlen $k_1, \ldots, k_q$ mit $\zeta_i^{k_i} = 1, 1 \leq i \leq q$. Sei $k := k_1 \cdots k_q \geq 1$. Dann gilt

$$\zeta^k = 1 \quad \text{für jedes} \quad \zeta = \zeta_1^{l_1} \ldots \zeta_q^{l_q}\,, \quad l_i \in \mathbb{Z}\,.$$

Da es nur k verschiedene Einheitswurzeln gibt und G unendlich ist, kann also G nicht endlich erzeugbar sein.

(c) Im Falle $\xi = 1$ gilt $1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{m-1} = m$. Andernfalls schließt man aus

$$(1 - \xi)(1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{m-1}) = 1 - \xi^m = 0$$

auf $1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{m-1} = 0$.

1.6.8 (i) $\Rightarrow$ (ii) Nach § 1.3 gilt

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a\bar{b})\,.$$

Andererseits hat $|a + b| = |a| + |b|$ zur Konsequenz

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a\bar{b}|\,.$$

Wir folgern

$$\mathrm{Re}(a\bar{b}) = |a\bar{b}|\,.$$

Nach 1.3.7 resultiert

$$a\bar{b} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a\bar{b} \geq 0\,.$$

Wegen $a, b \in \mathbb{C}^*$ ist $a\bar{b} \neq 0$, also $a\bar{b} > 0$. Es folgt nun

$$b = ra \quad \text{mit} \quad r := \frac{|b|^2}{a\bar{b}} > 0\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es gilt $|1 + r| = 1 + r$ und also

$$|a + b| = |a + ra| = |1 + r|\;|a| = (1 + r)|a| = |a| + r|a| = |a| + |b|\,.$$

Wegen $|\xi| = |\eta| = 1$ gilt $\frac{1}{2}|\xi + \eta| = 1$ genau dann, wenn $|\xi + \eta| = |\xi| + |\eta|$ ist. Nach dem ersten Teil der Aufgabe folgt $\xi = r\eta$ mit $r > 0$. Wegen $1 = |\xi| = |r\eta| = r$ folgt $\xi = \eta$. Alsdann ist $\frac{1}{2}(\xi + \eta) = \eta$ auch in der Tat eine Einheitswurzel.

2.1.10 zu (a): Nachrechnen zeigt, dass Summe, Differenz und Produkt zweier Zahlen $z, w \in \mathbb{Q}(i)$ stets wieder in $\mathbb{Q}(i)$ liegen, da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist. Ferner gilt $1 \in \mathbb{Q}(i)$. Ist $z \in \mathbb{Q}(i)$, $z \neq 0$, so gilt $\bar{z} \in \mathbb{Q}(i)$, $z\bar{z} \in \mathbb{Q}$ und also auch

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \in \mathbb{Q}(i)\,.$$

Mithin ist $\mathbb{Q}(i)$ ein Körper.

zu (b): Aus der Infinitesimalrechnung weiß man, dass die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen reellen Zahlen zu einer Folge $(q_n)_{n\geq 0}$ abgezählt werden kann. Dann lässt sich jedes $z \in \mathbb{Q}(i)$ schreiben in der Form

$$z = q_r + iq_s\,, \quad r, s \in \mathbb{N}\,.$$

Alle $z \in \mathbb{Q}(i)$ kommen also vor in der unendlichen Matrix

$$\begin{array}{ccccccc}
q_0 + iq_0 & & q_0 + iq_1 & \overset{\longrightarrow}{\ldots} & q_0 + iq_l & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \\
q_1 + iq_0 & & q_1 + iq_1 & \ldots & q_1 + iq_l & \ldots \\
\vdots & \swarrow & & & \vdots & \\
q_k + iq_0 & & q_k + iq_1 & \ldots & q_k + iq_l & \ldots \\
\vdots & & & & \vdots &
\end{array}$$

Hieraus macht man eine Folge, indem man z. B. die Elemente nach der bekannten Diagonalmethode (vgl. Pfeile) durchläuft.

zu (c): Sei $c = a + ib \in \mathbb{C}$ beliebig, $a, b \in \mathbb{R}$. Nach bekannten Sätzen der Infinitesimalrechnung gibt es zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ rationaler reeller Zahlen $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad (\mathbb{Q} \text{ liegt dicht in } \mathbb{R}.)$$

Setzt man $c_n := a_n + ib_n$, so gilt $c_n \in \mathbb{Q}(i)$ und

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a + ib = c \quad (\text{nach Satz 2.1.2}),$$

also ist $(c_n)_{n\geq 0}$ eine gesuchte Folge.

2.2.9 zu (a): Als konvergente Folge ist die Folge $(\zeta_\nu)_{\nu\geq 0}$ beschränkt, d. h. es gibt ein $M > 0$, sodass $|\zeta_\nu| \leq M$ für alle $\nu \geq 0$ gilt. Es folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu \zeta_\nu| \leq M \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu| < \infty\,.$$

Mithin ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \zeta_\nu$ absolut konvergent.

zu (b): Sei $c_\nu = a_\nu + ib_\nu$, $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$. Die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ impliziert die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (Satz 2.1.2 für Reihen). Wegen $a_\nu \geq 0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ gilt

$$a_\nu^2 \leq a_\nu \quad \text{für fast alle} \quad \nu\,,$$

daher ist auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2$ konvergent.

Die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2$ impliziert die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\operatorname{Re} c_\nu^2)$. Da

$$(\operatorname{Re} c_\nu^2) = a_\nu^2 - b_\nu^2\,,$$

so ist mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2$ also auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^2$ konvergent. Wegen

$$|c_\nu|^2 = a_\nu^2 + b_\nu^2$$

folgt damit die Konvergenz $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2$.

2.2.10 zu (a): Da $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu\nu}|$ für jedes $\mu \geq 0$ existiert und die Folge $(\zeta_\nu)_{\nu\geq 0}$ konvergiert, ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\zeta_\nu$ konvergent nach 2.2.8 (a) für jedes $\mu \geq 0$; daher ist z_μ für alle $\mu \geq 0$ wohldefiniert.

zu (b): Sei zunächst $\lim\limits_{\nu\to\infty} \zeta_\nu = 0$. Für jeden Index $l \geq 1$ gilt

$$z_\mu = \sum_{\nu=0}^{l} a_{\mu\nu}\zeta_\nu + \sum_{\nu>l} a_{\mu\nu}\zeta_\nu\,.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so sei l so groß gewählt, dass $|\zeta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2A}$ für alle $\nu > l$ gilt. Auf Grund von (1) gilt dann

$$\Big|\sum_{\nu>l}^{\infty} a_{\mu\nu}\zeta_\nu\Big| \leq \sum_{\nu>l}^{\infty} |a_{\mu\nu}|\,|\zeta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2A}\sum_{\nu>l}^{\infty}|a_{\mu\nu}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad \mu \geq 0\,.$$

Wir setzen weiter

$$B := \max\{1, |\zeta_0|, |\zeta_1|, \ldots, |\zeta_l|\} > 0\,.$$

Wegen (2) gibt es dann zu den *endlich vielen* Indices $0, 1, \ldots, l$ eine natürliche Zahl $k > 0$, sodass gilt

$$|a_{\mu\nu}| < \frac{\varepsilon}{2(l+1)B} \quad \text{für alle} \quad \mu \geq k \text{ und alle } nu = 0, 1, \ldots, l\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\nu=0}^{l} a_{\mu\nu}\zeta_\nu\Big| &\le \sum_{\nu=0}^{l} |a_{\mu\nu}|\,|\zeta_\nu| \\ &\le B\cdot\sum_{\nu=0}^{l}|a_{\mu\nu}| < B(l+1)\,\frac{\varepsilon}{2(l+1)B} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad \mu \ge k\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ist gezeigt:

$$|z_\mu| \le \Big|\sum_{\nu=0}^{l} a_{\mu\nu}\zeta_\nu\Big| + \Big|\sum_{\nu>l}^{\infty} a_{\mu\nu}\zeta_\nu\Big| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle} \quad \mu \ge k\,,$$

also $\lim\limits_{\mu\to\infty} z_\mu = 0\,.$

Sei nun $\lim\limits_{\nu\to\infty}\zeta_\nu =: \zeta \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist $(\xi_\nu)_{\nu\ge 0}$ mit $\xi_\nu := \zeta_\nu - \zeta$ eine Nullfolge; nach dem eben Bewiesenen gilt daher

$$\lim_{\mu\to\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\xi_\nu\Big) = 0\,.$$

Nun bestehen für alle $\mu \ge 0$ die Gleichungen

$$z_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\zeta_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\xi_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\zeta\,.$$

Da $\lim\limits_{\mu\to\infty}\Big(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\Big) = 1$ nach (3) gilt, so existiert $\lim\limits_{\mu\to\infty} z_\nu$ nach Limesregeln und zwar gilt

$$\lim_{\mu\to\infty} z_\mu = \lim_{\mu\to\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\xi_\nu\Big) + \lim_{\mu\to\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\zeta\Big) = \zeta$$

wie behauptet.

2.3.5 Wir führen Induktion nach n; die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ sind klar, z. B. ist für $n = 1$

$$\binom{\sigma}{1}\binom{\tau}{0} + \binom{\sigma}{0}\binom{\tau}{1} = \sigma + \tau = \binom{\sigma+\tau}{1}.$$

Sei die Behauptung für $n \ge 1$ bereits verifiziert. Dann gilt also

$$\binom{\sigma}{n}\binom{\tau}{0} + \binom{\sigma}{n-1}\binom{\tau}{1} + \ldots + \binom{\sigma}{n-\nu}\binom{\tau}{\nu} + \ldots + \binom{\sigma}{0}\binom{\tau}{n} = \binom{\sigma+\tau}{n}$$

oder, wenn man mit $n!$ multipliziert und $\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$ beachtet:

$$\begin{aligned}
& \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+1) \\
+ \; & \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+\nu+1)\tau(\tau-1)\ldots(\tau-\nu+1) \\
+ \; & \tau(\tau-1)\ldots(\tau-n+1) = (\sigma+\tau)(\sigma+\tau-1)\ldots(\sigma+\tau-n+1)\,.
\end{aligned}$$

Jetzt kommt der Trick des Induktionsschlusses! Man multipliziert diese Gleichung mit $\sigma+\tau-n$, wobei man aber links beim ν–ten Glied dies so deutet: man multipliziert erst mit $\tau-\nu$, dann mit $\sigma-n+\nu$ und addiert. Setzt man abkürzend $A := (\sigma+\tau)(\sigma+\tau-1)\ldots(\sigma+\tau-n)$, so entsteht

$$\begin{aligned}
A = & \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+\nu+1)\tau(\tau-1)\ldots(\tau-\nu+1)(\tau-\nu) \\
& + \tau(\tau-1)\ldots(\tau-n+1)(\tau-n) + \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+1)(\sigma-n) \\
& + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+\nu+1)(\sigma-n+\nu)\tau(\tau-1)\ldots(\tau-\nu+1)\,.
\end{aligned}$$

Ändert man in der ersten Summe den Summationsindex von ν in $\nu-1$ um, so hat diese Summe die Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu-1} \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+\nu)\tau(\tau-1)\ldots(\tau-\nu+1)\,.$$

Jetzt lassen sich im Ausdruck für A die Summen zusammenfassen; es entsteht

$$\begin{aligned}
A \; = \; & \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n) \\
+ \; & \sum_{\nu=1}^{n} \left[\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} \right] \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+\nu)\tau(\tau-1)\ldots(\tau-\nu+1) \\
+ \; & \tau(\tau-1)\ldots(\tau-n)\,.
\end{aligned}$$

Beachtet man $\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n+1}{\nu}$ sowie $A = (\sigma+\tau)\ldots(\sigma+\tau-(n+1)+1)$, so ergibt sich, wenn man durch $(n+1)!$ dividiert:

$$\begin{aligned}
\binom{\sigma+\tau}{n+1} = & \binom{\sigma}{n+1} \\
& + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu!(n+1-\nu)!} \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+\nu)\tau(\tau-1)\ldots(\tau-\nu+1) \\
& + \binom{\tau}{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{\sigma}{n+1-\nu} \binom{\tau}{\nu}\,,
\end{aligned}$$

also gerade die Behauptung für $n+1$.

1.2 *Nachtrag zur Vorbemerkung von* 1.2: Wegen $\alpha(0) = \alpha(0+0) = 2\alpha(0)$ gilt $\alpha(0) = 0$. Aus $\alpha(1) = 1$ und $\alpha(n+1) = \alpha(n) + \alpha(1) = \alpha(n) + 1$ folgt durch vollständige Induktion $\alpha(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichungen

$$0 = \alpha(0) = \alpha(n + (-n)) = \alpha(n) + \alpha(-n) = n + \alpha(-n)$$

zeigen zusammen mit der obigen Aussage, dass $\alpha(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt. Ist $x = \frac{n}{m}$ eine beliebige rationale Zahl (o. E. $m \geq 1$), so folgt $\alpha(x) = x$ wegen

$$n = \alpha(n) = a(m \cdot x) = \alpha(m) \cdot \alpha(x) = m \cdot \alpha(x)\,.$$

Nun beweisen wir, dass α eine streng monoton steigende Funktion ist; dafür seien $x < x'$ beliebige reelle Zahlen und $y > 0$ mit $y^2 = x' - x$. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(x') - \alpha(x) &= \alpha(x') + (-1)\alpha(x) = \alpha(x') + \alpha(-1)\alpha(x) \\ &= \alpha(x') + \alpha((-x)) = \alpha(x' + (-x)) = \alpha(y^2) = \alpha(y)^2 > 0\,, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung echt ist, da die Injektivität von α besagt

$$y \neq 0 \Longrightarrow \alpha(y) \neq \alpha(0) = 0\,.$$

Seien x und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest; $m \in \mathbb{N}$ sei so groß gewählt, dass $\frac{1}{m} < \varepsilon$ gilt. Für jede Folge von rationalen Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert, gibt es ein $n(m) \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq n(m) \Longrightarrow -\frac{1}{m} < x - x_n < \frac{1}{m}\,.$$

Aus der bereits bewiesenen Monotonie von α erhalten wir für alle $n, n \geq n(m)$ $-\frac{1}{m} = \alpha(-\frac{1}{m}) < \alpha(x) - \alpha(x_n) < \alpha(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}$, d. h. $|\alpha(x) - x_n| < \frac{1}{m} < \varepsilon$. Hiermit folgt $\alpha(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

DIESE SEITE BLEIBT FREI.