

Prof. Dr. Jochen Brüning, Prof. Dr. Klaus Werner Wiegmann

Modul 61215

Differentialgeometrie

LESEPROBE

Fakultät für
**Mathematik und
Informatik**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Der Kurvenbegriff	2
1.1	Studierhinweise	2
1.2	Einleitung	4
1.3	Definition der parametrisierten Kurve und erste Beispiele	14
1.4	Parameterwechsel	22
1.5	Bogenlänge	25
1.6	Der Tangentialvektor	32
1.7	Lösungshinweise	37
	Stichwortverzeichnis	60

Kurseinheit 1

Der Kurvenbegriff

1.1 Studierhinweise

Ziel dieser Kurseinheit ist es, den Begriff einer Kurve in der Ebene oder allgemeiner im \mathbb{R}^n zu entwickeln. Wir folgen dabei, in sehr geraffter Form, der historischen Entwicklung in der Absicht, die Motivation für dieses grundlegende geometrische Objekt zu vertiefen.

Abschnitt 1.1 beginnt mit den Kurven der Antike, die in den Begriffen der Euklidischen Geometrie als Ortslinien definiert waren. Die einfachsten Beispiele sind die Kegelschnitte Kreis, Gerade, Ellipse, Hyperbel und Parabel, die wir zunächst diskutieren. Ein etwas komplizierteres Beispiel liefert die Kissoide. Im Zusammenhang des klassischen Delischen Problems wird hervorgehoben, dass die Kissoide nur punktwise konstruiert werden kann, während die Lösung des Delischen Problems die kontinuierliche Konstruktion aller Punkte erfordern würde, die erst von Newton geleistet wurde. Dies nehmen wir zum Ausgangspunkt einer dynamischen Auffassung von Kurven als Bahnen von Massenpunkten. Besonders sinnfällig wird diese Auffassung bei der Betrachtung von Planetenbahnen; wir besprechen kurz das antike Epizykel-Modell. Der Abschnitt, der begonnen hat mit der Definition der Ellipse als Ortslinie, schließt mit der Herleitung einer Parametrisierung.

Im nächsten Abschnitt 1.2 wird die gewonnene dynamische Anschauung einer Kurve umgesetzt in eine exakte mathematische Definition. Dabei unterscheiden wir Kurven – als Abbildungen von Intervallen in den \mathbb{R}^n – nach dem Differenzierbarkeitsgrad. Von besonderer Bedeutung ist nun, dass man sorgfältig unterscheiden lernt zwischen Kurven – also Abbildungen – und ihren Bildmengen, den Objekten des ursprünglichen geometrischen Interesses. Wir zeigen, dass Höhenlinien von

Funktionen im \mathbb{R}^2 mit nicht verschwindendem Gradienten Bildmengen von C^∞ -Kurven sind, aber auch die Neilsche Parabel und der Rand eines Quadrates. Von der Peanokurve wissen wir, dass ihr Bild ein ganzes Dreieck im \mathbb{R}^2 ausfüllt; wir zeigen, dass dies für eine C^r -Kurve mit $r \geq 1$ nicht passieren kann.

Im Abschnitt 1.3 vertiefen wir die eben behandelte Fragestellung und fragen uns, welche Kurven wir bei gleicher Bildmenge als äquivalent ansehen sollten. Die Intuition eines bewegten Massenpunktes führt uns nacheinander auf die lineare, die C^r - und die orientierbare Äquivalenz. Anders ausgedrückt erklären wir, was ein zulässiger Parameterwechsel für eine fest gegebene Kurve sein soll.

Der folgende Abschnitt 1.4 fragt nach der Möglichkeit einer ausgezeichneten Parametrisierung auf einer gegebenen Kurve. Die Intuition einer gleichförmigen Bewegung führt uns auf den zentralen Begriff der Bogenlänge. Um ihn zu entwickeln, definieren wir zunächst die Länge einer Kurve; am Beispiel der Ellipse erläutern wir interessante nichtelementare Funktionen und ein berühmtes klassisches Problem. Nicht jede Kurve ist mit Bogenlänge parametrisierbar, sondern nur eine reguläre. Dies ist ein weiterer zentraler Begriff: solche Kurven können weder Ecken noch Spitzen haben und entsprechen ganz unserer Intuition einer „glatten“ Bewegung.

Im letzten Abschnitt dieser Kurseinheit, 1.5, führen wir die Tangente als beste lineare Approximation ein. Damit wird die Theorie der regulären C^1 -Kurven zu einem Teilgebiet der Differential- und Integralrechnung. Wir erläutern am Beispiel der berühmten Traktrix, wie Kurven durch Bedingungen an die Tangente, d.h. durch Differentialgleichungen, beschrieben werden können.

1.2 Einleitung

Es ist anschaulich klar, was eine ebene Kurve ist: eine Linie in der Ebene, die wir uns mittels eines Fadens realisiert oder konstruiert denken können.

Die Untersuchung von Kurven hat die Menschen seit jeher beschäftigt, sowohl aus praktischen als auch aus ästhetischen Gründen. Die einfachsten Kurven sind die **Geraden** und die **Kreise**. Eine Gerade g lässt sich dadurch charakterisieren, dass für je drei Punkte $A, B, C \in g$ mit B zwischen A und C gilt:

$$(1.1) \quad |\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|.$$

Dabei bezeichnen wir mit \overline{AB} die Verbindungsstrecke der Punkte A und B und mit $|\overline{AB}|$ ihre Länge. Mit Hilfe eines Fadens können wir ein Geradenstück zwischen den Punkten A und B dadurch realisieren, dass wir den Faden zwischen A und B straff spannen. Ein Kreis besteht aus allen Punkten, die von einem gegebenen Punkt A einen festen Abstand r haben. Hier kann man eine Fadenkonstruktion so durchführen, dass man einen in A befestigten Faden von der Länge r so in der Ebene bewegt, dass der Faden stets straff gespannt bleibt. Leichte Variationen dieser sogenannten **Ortsliniendefinition** des Kreises führen zu folgenden Kurven:

1. Die **Ellipse** ist die Menge aller Punkte P mit der Eigenschaft, dass die Summe der Abstände von zwei festen Punkten A und B konstant bleibt, d.h. $|\overline{AP}| + |\overline{BP}| = \text{const.}$

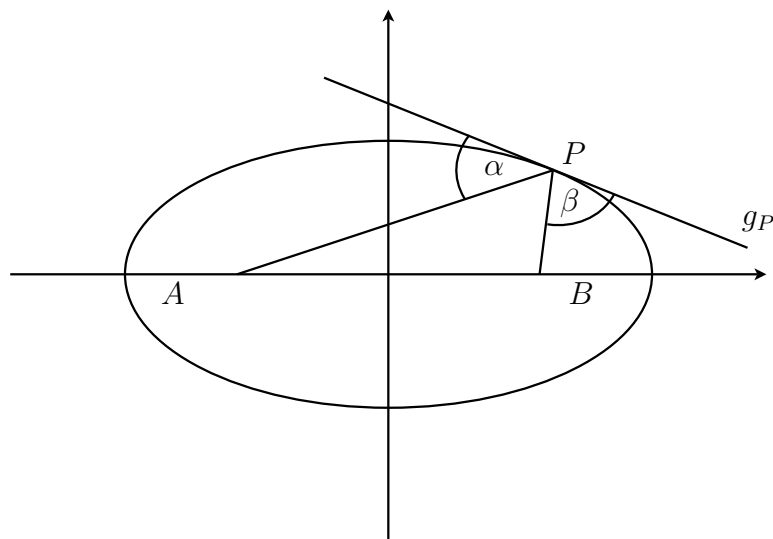


Abb. 1.1

Diese Punkte heißen die **Brennpunkte** der Ellipse, die Strecken von A nach P bzw. von B nach P die **Brennstrahlen** des Ellipsenpunktes P . Diese Bezeichnung wird verständlich, wenn man bemerkt, dass die Winkel α und β zwischen den Brennstrahlen von P und der die Ellipse in P berührenden Geraden g_p (der **Tangenten** an die Ellipse in P) gleich sind: wäre die Ellipse innen spiegelnd, so würde das Licht einer in A angebrachten punktförmigen Lichtquelle in den Punkt B gespiegelt.

Ü 1.1: Zeigen Sie, dass $\alpha = \beta$.

Hinweis: Verbinden Sie den Spiegelpunkt B' von B an der Geraden g_p mit P und verwenden Sie (1.1).

Offenbar ergibt sich der Kreis als Grenzfall von Ellipsen, wenn man die Brennpunkte ineinanderrücken lässt.

2. Ein anderer Grenzfall der Ellipse entsteht, wenn man einen Brennpunkt, etwa B , nach Unendlich wandern lässt, während der Brennpunkt A festbleibt und die Ellipse immer den Punkt S enthält.

Konstruieren wir rechts von A eine beliebige Gerade g senkrecht zur Geraden durch S und A , so gilt für die Grenzfigur, dass die Summe der Abstände eines Kurvenpunktes von A und von der Geraden g konstant ist. Die so konstruierte Kurve heißt eine **Parabel**.

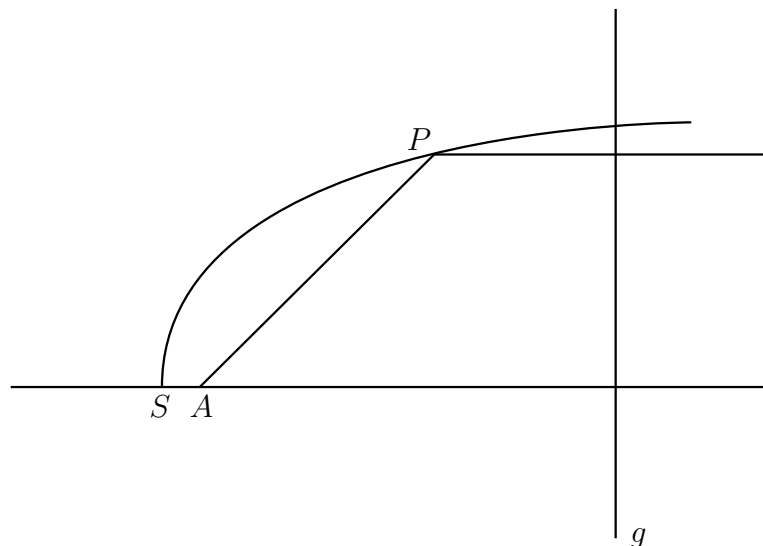


Abb. 1.2

Ü 1.2: Geben Sie eine auf der Geraden durch S und A senkrecht stehende Gerade ℓ so an, dass für jeden Parabelpunkt P der Abstand zu A gleich dem Abstand zu ℓ ist; ℓ heißt die **Leitlinie** der Parabel.

Nach der Konstruktion hat eine spiegelnde Parabel die Eigenschaft, parallel zu der Geraden durch A und S einfallendes Licht in den Brennpunkt zu spiegeln; diese Eigenschaft wird bekanntlich technisch genutzt.

3. Schließlich lässt sich die Definition der Ellipse noch so variieren, dass man die Menge aller Punkte P betrachtet mit konstanter Abstandsdifferenz zu zwei festen Punkten A und B , d.h.

$$|\overline{AP}| - |\overline{BP}| = \text{const.}$$

Die so entstehende Kurve besteht aus zwei Teilen, genannt **Äste**, und heißt eine **Hyperbel**. Auch für die Hyperbel gilt, dass die Tangente g_P in P den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbiert. Die Fadenkonstruktion der Ellipse lässt sich ebenfalls modifizieren zu einer Fadenkonstruktion der Hyperbel (wie ?).

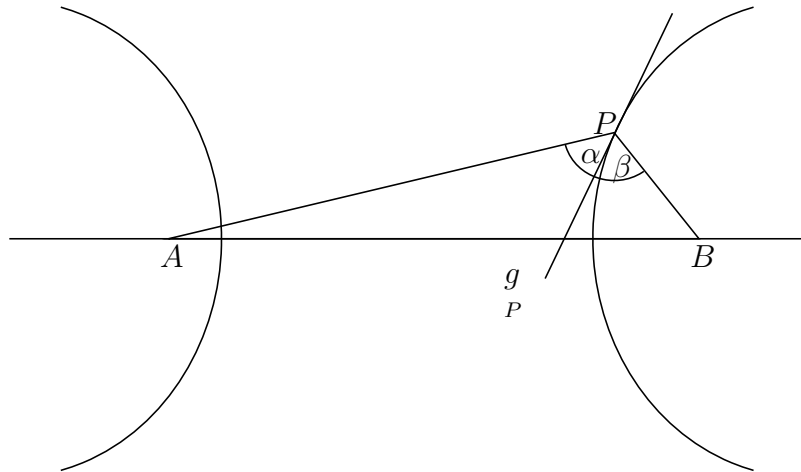


Abb. 1.3

Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, dass alle bis jetzt behandelten Kurven sich auf eine einheitliche Weise erzeugen lassen, nämlich als Schnitte eines Kreiskegels im Raum mit einer Ebene, und nur Geraden, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln entstehen auf diese Art. Man nennt diese Kurven deswegen zusammenfassend **Kegelschnitte**. Sie waren bereits den griechischen Mathematikern bekannt und wurden von ihnen ausführlich untersucht.

Die Definition der einzelnen Kegelschnitte als **Punktmenge** im \mathbb{R}^2 ist möglich in einfachen elementargeometrischen Begriffen. Die Griechen kannten aber auch schon kompliziertere Kurven, für die punktweise eine Konstruktion angegeben wurde. Als ein Beispiel führen wir die **Kissoide** an, die um 180 v. Chr. von dem Mathematiker Diokles entdeckt wurde.

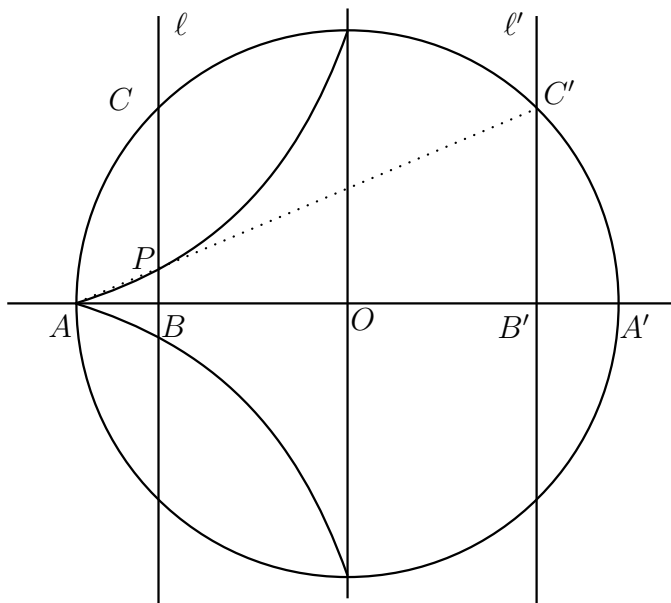


Abb. 1.4

In einem Kreis um O vom Radius $|\overline{AO}|$ zeichnen wir den Durchmesser $\overline{AA'}$. Zu jedem Punkt B von AO bestimmen wir den Spiegelpunkt B' bzgl. O auf $\overline{AA'}$ und bezeichnen mit ℓ bzw. ℓ' die zu $\overline{AA'}$ senkrechten Geraden durch B bzw. B' . Ist C' ein Schnittpunkt des Kreises mit ℓ' , so liegt der Schnittpunkt P von ℓ mit $\overline{AC'}$ auf der Kissoide. Die von dem rechten Halbkreis und den beiden Ästen der Kurve begrenzte Figur ähnelt einem Efeublatt, griechisch Kissos – daher der Name.

Die Konstruktion der Kissoide geschah nicht nur aus ästhetischem Antrieb heraus, sondern sie diente einem bestimmten mathematischen Zweck. Es sei die Kissoide gezeichnet, und es sei M der Mittelpunkt von $\overline{OA'}$, P der Schnittpunkt von $\overline{A'M}$ mit der Kissoide.

Wir setzen $x := |\overline{A'B}|$, $y := |\overline{BC}|$, $z := |\overline{AB}|$.

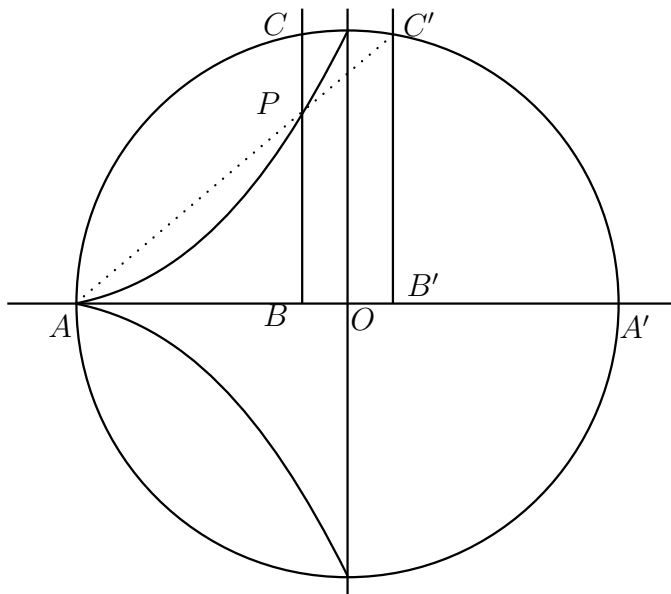


Abb. 1.5

Dann wird nach dem Strahlensatz

$$(1.2) \quad 2 = \frac{|A'O|}{|MO|} = \frac{|A'B|}{|PB|}.$$

Aus dem Höhensatz und der Spiegelsymmetrie erhalten wir

$$(1.3) \quad \frac{|A'B|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|A'B'|} = \frac{|AB'|}{|B'C'|},$$

und nach dem Strahlensatz und der Konstruktion der Kissoide

$$(1.4) \quad \frac{|A'B|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C'|} = \frac{|AB|}{|PB|}.$$

Also folgt aus (1.2) und (1.3)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{\frac{x}{2}} \quad \text{oder} \quad x^2 = 2yz,$$

aus der ersten Gleichheit in (1.3) folgt außerdem

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} \quad \text{oder} \quad z = \frac{y^2}{x},$$

also insgesamt

$$(1.5) \quad x^3 = 2y^3.$$

Die Lösung dieser Gleichung nach x bei festem y war eines der berühmten Probleme der griechischen Mathematik, das sog. **Delische Problem**. Der Überlieferung zufolge soll den Bewohnern der Insel Delos vom Orakel geweissagt worden sein, dass die Pest die Insel verlassen würde, wenn sie

ihren würfelförmigen Altar durch einen neuen vom doppelten Volumen ersetzen würden, was ja auf die Lösung der Gleichung (1.5) hinausläuft. Sie sollen dann Platon um Hilfe gebeten haben, und tatsächlich gibt es „Lösungen“ aus platonischer Zeit von den Mathematikern Archytas, Eudoxos und Menaichmos; vermutlich ist das Problem aber sehr viel älter.

Charakteristisch für die griechische Mathematik ist die geometrische Auffassung und Formulierung des Problems: aus der (rationalen) Größe y soll die Größe x nur mittels **Zirkel** und **Lineal** konstruiert werden, d.h. indem man Kreise und Geraden konstruiert und miteinander zum Schnitt bringt. Nach diesem Maßstab hat die Lösung des Diokles natürlich erhebliche Mängel, denn y ist nicht leicht zu variieren, und, was schwerer wiegt, die **ganze Kissoide muss bereits gezeichnet sein**, ehe man y und x bestimmen kann. Übrigens haben alle „Lösungen“ der Antike ähnliche Schwächen – weil das Problem unlösbar ist!

Keine Lösung im strengen Sinn, aber eine praktische Hilfe, wäre eine **organische Erzeugungsweise** für die Kissoide, d.h. ein Konstruktionsverfahren, das es erlaubt, alle Punkte der Kurve kontinuierlich zu durchlaufen, wie es in den vorher behandelten Fällen durch die Fadenkonstruktion möglich ist.

Ein solches Konstruktionsverfahren hat erst Newton angegeben: ein rechter Winkel mit dem Schenkel \overline{BC} von der Länge \overline{AO} möge sich so in der Ebene bewegen, dass C stets auf g liegt und der andere Schenkel durch A geht. Dann beschreibt P von \overline{BC} die Kissoide.

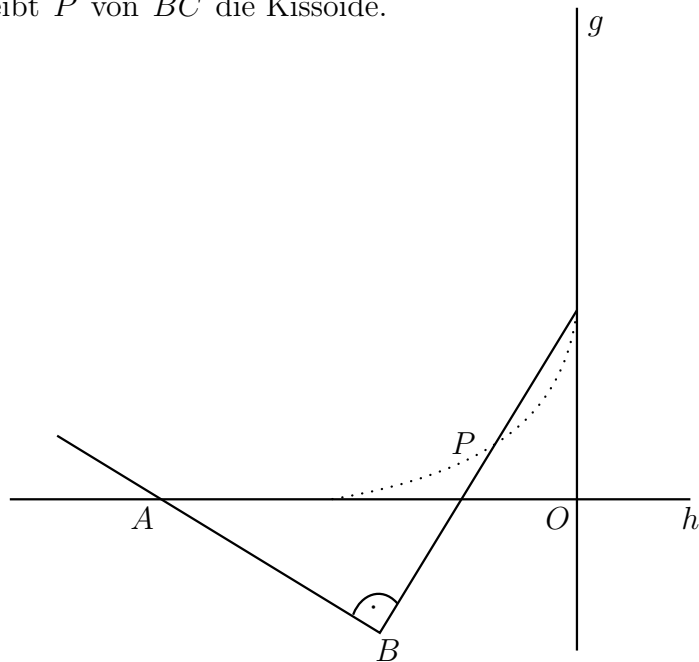


Abb. 1.6

Wir sehen also, dass Kurven definiert werden als Punktmengen, dass wir diese aber in vielen Fällen kontinuierlich durchlaufen und damit „erzeugen“ bzw. zeichnen können.

Ein anderes, seit vielen Jahren studiertes Phänomen, macht die Vorstellung des kontinuierlichen Durchlaufens einer Kurve noch sinnfälliger, nämlich die beobachteten Bahnen der Planeten am Himmel. Die Planeten beschreiben dabei charakteristische Schleifen, und die Griechen stellten sich das Problem, ein geometrisches Modell für diese Bahnen zu entwerfen. Ausgehend von der Erde im Mittelpunkt des Weltalls (dieser Standort war aber auch in der Antike nicht unbestritten!) und von der philosophischen Überzeugung, dass die vollkommene Bewegung der Himmelskörper nur von der vollkommenen Kreisbewegung herrühren kann, kamen sie zu der folgenden genialen Erklärung der Planetenbewegung:

Ein Planet bewegt sich auf einem Kreis, dem sog. **Epizykel**, dessen Mittelpunkt sich auf einem großen Kreis, dem sog. **Deferent**, um die Erde dreht. Damit bekam man bei entsprechender Wahl der Kreise eine sehr gute Übereinstimmung mit den beobachteten Bahnen, mindestens im Rahmen der damals möglichen Messgenauigkeit. Erst Kopernikus bemerkte in seinem 1543 erschienenen Hauptwerk „De revolutionibus orbium coelestium“, dass man dieselben scheinbaren Bahnen erhält, wenn man für die Planetenbahnen um die Sonne Kreise annimmt, dafür aber die Erde als Planet unter anderen behandelt und für sie ebenfalls eine Kreisbahn um die Sonne annimmt.

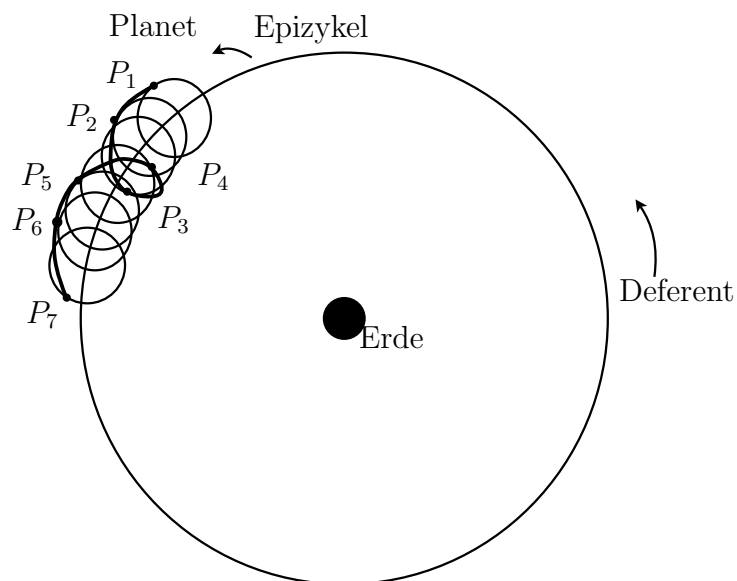


Abb. 1.7

Ü 1.3: Geben Sie eine graphische Veranschaulichung des eben beschriebenen Sachverhaltes (etwa für den Planeten Mars).

Genauere Beobachtungen in der 2. Hälfte des 16. Jahrhunderts zeigten aber, dass die Hypothese der Kreisbahn die Planetenbewegung nicht zutreffend beschrieb. Es ergaben sich Abweichungen bis zu 8 Bogenminuten. Das führte Kepler dazu, für die Planeten elliptische Bahnen zu postulieren; genauer lautet das **1. Keplersche Gesetz**: die Planetenbahnen sind (ebene) Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Um diese Hypothese durch Messungen überprüfen zu können, muss man nun eine **Bahngleichung** für den Planeten angeben, d.h. eine Zuordnung von Zeitpunkten zu Raumpunkten, oder anders: eine organische Erzeugung der Ellipse durch Formeln. Zu ihrer Herleitung führen wir in der gemeinsamen Bahnebene der Planeten, der sog. **Ekliptik**, kartesische Koordinaten x, y so ein, dass \overline{AB} in der x -Achse enthalten ist und der Mittelpunkt 0 von \overline{AB} der Nullpunkt des Koordinatensystems wird. Dann ist die Abstandssumme von A und B für alle Ellipsenpunkte $= 2a$, also nach Pythagoras $b^2 + \varepsilon^2 = a^2$ oder $\varepsilon^2 = a^2 - b^2$.

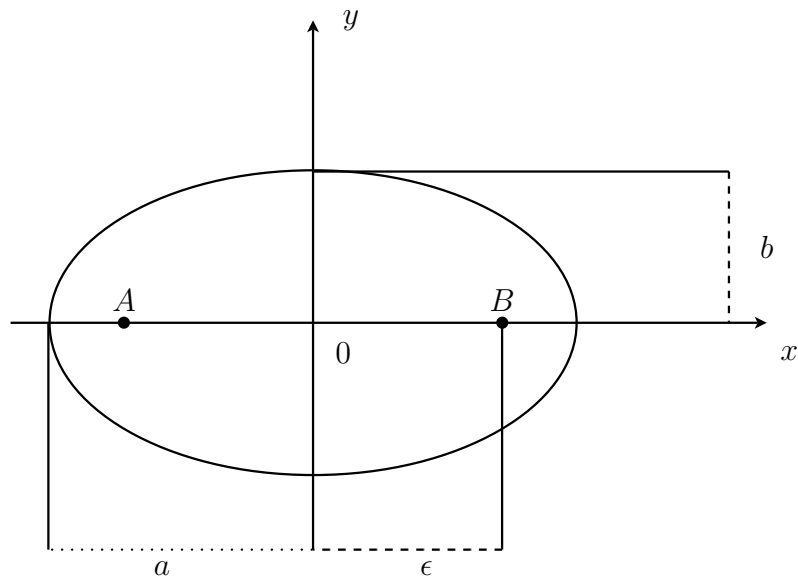


Abb. 1.8

Für einen Ellipsenpunkt mit den Koordinaten (x, y) gilt dann

$$2a = ((x + \varepsilon)^2 + y^2)^{1/2} + ((x - \varepsilon)^2 + y^2)^{1/2},$$

also auch

$$\begin{aligned} & ((x + \varepsilon)^2 + y^2)^{1/2} - ((x - \varepsilon)^2 + y^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2a}(x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 + y^2 - (x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2 + y^2)) \\ &= \frac{2\varepsilon x}{a} \end{aligned}$$

und damit

$$((x + \varepsilon)^2 + y^2)^{1/2} = a + \frac{\varepsilon}{a}x,$$

$$x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 + y^2 = a^2 + 2\varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{a^2}x^2,$$

$$\frac{a^2 - \varepsilon^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - \varepsilon^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Eine mögliche Zuordnung von Zeitpunkten zu Raumpunkten wird deshalb

$$c : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2.$$

Eine solche Darstellung nennen wir eine **Parametrisierung** der Ellipse. Diese Darstellung ist aber der Planetenbewegung noch nicht angemessen, denn es gilt außerdem das **2. Keplersche Gesetz**: der Planet bewegt sich so auf seiner Bahn, dass der Brennstuhl zur Sonne in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Bezeichnen wir also mit $F(t)$ die vom Brennstrahl $\overline{Ac(t)}$ und der positiven x -Achse begrenzte Fläche der Ellipse, und mit F^{-1} die Umkehrfunktion von F , definiert etwa in $[0, F_0]$, so ist die beiden Keplerschen Gesetzen genügende Zuordnung von Zeitpunkten zu Raumpunkten (bei passender Wahl von Einheiten) gegeben durch

$$\tilde{c} : [0, F_0] \ni t \mapsto c \circ F^{-1}(t) \in \mathbb{R}^2.$$

Ü 1.4: Geben Sie eine Formel für $F(t)$ an.

Hinweis: Integralrechnung.

Neben die **statische** Auffassung der Antike von Kurven als „gekrümmte Linien“ in der Ebene oder im Raum tritt damit die **dynamische** Auffassung von Kurven als Bahnen von Massenpunkten. Diese zweite Auffassung wird es uns ermöglichen, eine präzise Definition der Kurven zu geben als „über Intervallen parametrisierbaren Teilmengen des Raumes.“

Wie schon am Beispiel der Ellipse ersichtlich, entsteht dadurch eine Vielfalt möglicher Parametrisierungen. Wir werden deshalb die von Parametrisierungen unabhängigen, eigentlich geometrischen Eigenschaften von Kurven herausarbeiten müssen. Im vorliegenden Paragraphen wollen wir damit beginnen. Das wesentliche Hilfsmittel dazu wird die Differential- und Integralrechnung sein, was die Bezeichnung „Differentialgeometrie“ bereits verständlich macht.

1.3 Definition der parametrisierten Kurve und erste Beispiele

Wenn wir den dynamischen Standpunkt mathematisch präzisieren, so ist eine Kurve eine Zuordnung von Zeitpunkten zu Raumpunkten, d.h. eine Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. I sei dabei ein Intervall, für das wir die folgenden Möglichkeiten zulassen:

$I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, **offenes Intervall**,

$I = (a, b]$ mit $-\infty \leq a < b < \infty$, **nach links offenes Intervall**,

$I = [a, b)$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$, **nach rechts offenes Intervall**,

$I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$, **kompaktes Intervall**.

Wir nennen a und b die **Randpunkte** des Intervalls; I heißt **beschränkt**, wenn $-\infty < a < b < \infty$. Um die Möglichkeiten der Differentialrechnung ausnutzen zu können, werden wir nicht beliebige Abbildungen $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ zulassen wollen, sondern gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften verlangen. Wir nennen c eine Abbildung der Klasse C^r in I , in Zeichen: $c \in C^r(I, \mathbb{R}^3)$, wenn c in (a, b) r -mal stetig differenzierbar ist, wobei $r = 0$ und $r = \infty$ zugelassen ist; gehört einer der Randpunkte zu I , so verlangen wir zusätzlich, dass c sich zu einer r -mal stetig differenzierbaren Abbildung in einer kleinen offenen Umgebung des Randpunktes fortsetzen lässt. Wenn wir uns nun noch von der Einschränkung des dreidimensionalen Raumes befreien, so erhalten wir die folgende grundlegende

1.3.1 Definition

Eine **parametrisierte Kurve der Klasse C^r** im \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Klasse C^r . Ist $I = [a, b]$ kompakt, so heißen $c(a)$ und $c(b)$ der **Anfangs-** bzw. **Endpunkt** von c . c heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$. Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und geschlossen und ist $c|_{[a, b]}$ injektiv, so heißt c eine **Jordankurve**. Eine geschlossene C^r -Kurve ist eine C^r -Abbildung $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche zusätzlich $c^{(k)}(a) = c^{(k)}(b)$ für $1 \leq k \leq r$ erfüllt, d.h. die periodische Fortsetzung von c ist eine C^r -Kurve.

1.3.2 Bemerkungen

1. Ein besonders einfacher Fall ist eine **konstante Kurve** c , die jedem t aus dem Intervall I ein festgewähltes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zuordnet; c ist von der Klasse C^∞ .

1.3. DEFINITION DER PARAMETRISIERTEN KURVE UND ERSTE BEISPIELE

2. Die Gerade im \mathbb{R}^n durch die Punkte x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) kann parametrisiert werden durch

$$c : \mathbb{R} \ni t \mapsto x_1 + t(x_2 - x_1) \in \mathbb{R}^n,$$

aber auch durch

$$\tilde{c} : \mathbb{R} \ni t \mapsto x_1 - t^3(x_2 - x_1) \in \mathbb{R}^n$$

und außerdem auf viele andere Arten. Die Willkür bei der Wahl der Parametrisierung entspricht der anschaulichen Tatsache, dass ein mechanisches Teilchen dieselbe Bahn mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen kann, was jedesmal zu anderen Zuordnungen von Zeitpunkt zu Raumpunkt, d.h. zu anderen Parametrisierungen, führt.

Schränken wir weiter die Abbildung c auf $[0, 1]$ ein, so erhalten wir eine Parametrisierung **des Strahles durch x_1 in Richtung** von $x_2 - x_1$. Schränken wir ein auf $[0, 1]$, so erhalten wir eine Parametrisierung der **Strecke von x_1 nach x_2** . Dies ist eine Kurve mit Anfangspunkt x_1 und Endpunkt x_2 , sie also ist nicht geschlossen.

3. Wir betrachten für $\sigma, \rho \in \mathbb{R}$ die parametrisierte C^∞ -Kurve

$$c_{\rho, \sigma} : \mathbb{R} \ni t \mapsto (\rho \cos t, \rho \sin t, \sigma t) \in \mathbb{R}^3.$$

Ist $\sigma = 0$, so ist das Bild von c ein Kreis um 0 vom Radius $|\rho|$ in der Ebene $z = 0$. Ist $\rho\sigma \neq 0$, so ergibt sich als Bild eine **Helix** oder **Schraubenlinie**, die auf dem Zylinder $x^2 + y^2 = \rho^2$ verläuft. Die Kurven $c_{\rho, \sigma}$ und $c_{-\rho, \sigma}$ zusammen bilden eine **Doppelhelix**; diese Konfiguration hat in der Molekularbiologie Berühmtheit erlangt, weil man sich vorstellt, dass die Erbinformation der Lebewesen im Zellkern in zwei Molekülketten dieser geometrischen Form aufbewahrt wird.

Ü 1.5: Skizzieren Sie den Verlauf von $c_{\rho, \sigma} | [0, 2\pi]$ für alle möglichen Vorzeichen von ρ und σ .

Ü 1.6: Skizzieren Sie die Doppelhelix und erklären Sie, warum $2\pi\sigma$ die **Ganghöhe der Helix** heißt.

Ü 1.7: Parametrisieren Sie Parabel und Hyperbel analog zum Vorgehen in 1.1 bei der Ellipse.

4. Ist I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ eine Abbildung der Klasse C^r , so wird durch

$$c : I \ni t \mapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^n$$

1.3. DEFINITION DER PARAMETRISIERTEN KURVE UND ERSTE BEISPIELE

eine parametrisierte Kurve der Klasse C^r definiert, deren Bild der **Graph von f** ist. Solche Parametrisierungen spielen wegen ihrer speziellen Gestalt eine besondere Rolle; es ist aber nicht möglich, jede Kurve in dieser Form zu parametrisieren. Nehmen wir z.B. an, das Bild von $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ sei der Einheitskreis im \mathbb{R}^2 . Dann gilt

$$t^2 + f(t)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad f(t) = \pm\sqrt{1-t^2} \quad \text{für} \quad t \in [a, b],$$

und weil f reellwertig ist, muss $[a, b] \subset [-1, 1]$ sein. Wegen der Stetigkeit von f muss ferner das Vorzeichen der Wurzel konstant sein; dann ist aber das Bild von c in einem Halbkreis enthalten.

5. Wir haben im vorigen Abschnitt eine systematische Erzeugungsweise von Kurven im \mathbb{R}^n aus Abbildungen $I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ besprochen. Eine andere Erzeugungsweise liefern die (aus Atlanten bekannten) **Höhenlinien von Funktionen** $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (sie werden in der Geographie **Isohypsen**, griechisch: Kurven gleicher Höhe, genannt). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt dann die Punktmenge

$$f^{-1}(\alpha) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = \alpha\}$$

die Höhenlinie von f der Höhe α . Diese Punktmenge ist im allgemeinen **nicht** das Bild einer parametrisierten Kurve, wohl aber unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$f \in C^r(\mathbb{R}^2) \quad \text{für ein} \quad r \geq 1$$

und

$$\nabla f(x, y) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \neq (0, 0) \quad \text{für} \quad (x, y) \in f^{-1}(\alpha).$$

Fixieren wir nämlich einen Punkt $(x_0, y_0) \in f^{-1}(\alpha)$ und ist etwa $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so gibt es nach Analysis II 4.2.3 (Satz über implizite Funktionen) $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ und eine Abbildung $g :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\rightarrow]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ der Klasse C^r , sodass

$$(x, y) \in f^{-1}(\alpha) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \iff y = g(x),$$

d.h. $f^{-1}(\alpha)$ ist **lokal** der Graph von g , kann also wie in 4) parametrisiert werden. Die Einschränkung der Lokalität ist wesentlich, wie man sofort am Beispiel der Funktion $f(x, y) := x^2 + y^2$ einsieht. Dann ist nämlich $f^{-1}(1)$ der Einheitskreis im \mathbb{R}^2 und

$$\nabla f(x, y) = 2(x, y) \neq (0, 0) \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

1.3. DEFINITION DER PARAMETRISIERTEN KURVE UND ERSTE BEISPIELE

Wir hatten aber gesehen, dass der Einheitskreis global kein Graph sein kann. Es bleibt natürlich die Möglichkeit, dass $f^{-1}(\alpha)$ unter den gemachten Voraussetzungen auch global das Bild einer parametrisierten C^r -Kurve in allgemeiner Form ist (wie der Einheitskreis), wir werden das aber erst später beweisen können.

Ü 1.8: Übertragen Sie die eben gemachten Überlegungen auf den Fall einer C^r -Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $r \geq 1$.

Ü 1.9: Zeigen Sie, dass $f(x, y) := y^3 \sin \frac{1}{y}$ eine C^1 -Funktion ist und untersuchen Sie die lokale Parametrisierbarkeit von $f^{-1}(0)$.

6. Unser Interesse gilt Kurven als geometrischen Objekten, wobei sich die Intuition an einfachen Kurven wie Kreis und Gerade bildet. Parametrisierte Kurven der Klasse C^0 können sich von dieser Intuition jedoch sehr weit entfernen. Das schockierendste Beispiel dafür sind die **Peanokurven**, d.h. **surjektive** stetige Abbildungen $c: [0, 1] \rightarrow \Delta$, wobei Δ ein abgeschlossenes Dreieck im \mathbb{R}^2 ist. Obwohl diese Kurven wichtige Beispiele (und Gegenbeispiele) in der Topologie liefern, werden wir sie im weiteren ausschließen, d.h. **nur parametrisierte Kurven der Klasse C^r für $r \geq 1$ betrachten**. Damit ist die Entartung der Peanokurven nicht mehr möglich in folgendem Sinne:

1.3.3 Lemma

Ist $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve mit $r \geq 1$ und $n \geq 2$, so enthält $c(I)$ keinen inneren Punkt.

Beweis:

Es genügt zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren abzählbar viele n -dimensionale Würfel

$$Q_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leq \nu \leq n} |x_\nu - a_\nu^{(k)}| \leq \frac{1}{2} \delta_k\}$$

mit Mittelpunkten $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ und Seitenlängen $\delta_k > 0$, sodass gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}(Q_k) < \varepsilon,$$

wobei $\text{Vol}(Q_k) = \delta_k^n$ das n -dimensionale Volumen von Q_k bezeichnet und

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \supset c(I).$$

1.3. DEFINITION DER PARAMETRISIERTEN KURVE UND ERSTE BEISPIELE

Ist nämlich $b = (b_1, \dots, b_n) \in c(I) \subset \mathbb{R}^n$ ein innerer Punkt, so existiert ein Würfel

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leq \nu \leq n} |x_\nu - b_\nu| \leq \frac{1}{2}\delta\}, \delta > 0,$$

mit

$$b \in Q \subset c(I) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

d.h.

$$\delta^n = \text{Vol}(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}(Q_k) < \varepsilon.$$

Das ist ein Widerspruch, weil ε beliebig klein gewählt werden darf. Das Definitionsintervall $I \subset \mathbb{R}$ unserer Kurve kann dargestellt werden als abzählbare Vereinigung kompakter Intervalle,

$$I = \bigcup_{r=1}^{\infty} I_r, I_r = [a_r, b_r] \subset \mathbb{R}.$$

Es genügt, die Behauptung für jedes $c \mid I_r$ zu beweisen; denn sind für $k \geq 1$ $Q_{kr} \subset \mathbb{R}^n$ Würfel mit

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{kr} \supset c(I_r),$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}(Q_{kr}) < \varepsilon \cdot 2^{-r},$$

so gilt

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}(Q_{kr}) < \varepsilon \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} = \varepsilon.$$

Es sei also o.B.d.A. $\emptyset \neq I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt. Da $c = (c_1, \dots, c_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, gilt mit

$$M := \sup_{t \in I} |c'(t)|$$

nach dem Mittelwertsatz

$$|c(t_1) - c(t_2)| \leq M \cdot |t_1 - t_2|$$

für alle $t_1, t_2 \in I$. O.B.d.A. ist $M > 0$, sonst wäre c konstant. Wir wählen ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{M^n}{K^{n-1}} < \varepsilon$ (hier ist $n \geq 2$ notwendig!) und setzen

$$\begin{aligned} I_k &:= \left[a + \frac{k-1}{K}(b-a), a + \frac{k}{K}(b-a) \right] \\ &:= \left[a_k - \frac{1}{2K}, a_k + \frac{1}{2K} \right] \end{aligned}$$

1.3. DEFINITION DER PARAMETRISIERTEN KURVE UND ERSTE BEISPIELE

für $1 \leq k \leq K$, d.h. $I = \bigcup_{k=1}^K I_k$ und

$$c(I_k) \subset Q_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leq \nu \leq n} |x_\nu - c_\nu(a_k)| \leq \frac{M}{2K}\}.$$

Nun folgt

$$c(I) = \bigcup_{k=1}^K c(I_k) \subset \bigcup_{k=1}^K Q_k \subset \mathbb{R}^n$$

und

$$\text{Vol}(Q_k) = \frac{M^n}{K^n}, \quad \sum_{k=1}^K \text{Vol}(Q_k) \leq \frac{M^n}{K^{n-1}} < \varepsilon$$

□

7. Auch wenn es die Definition suggeriert, braucht das Bild einer C^r -Kurve nicht glatt zu sein in demselben anschaulichen Sinne wie Kreis oder Ellipse. Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen C^∞ -Kurve hat z.B. in $(0,0)$ eine „Spitze“;

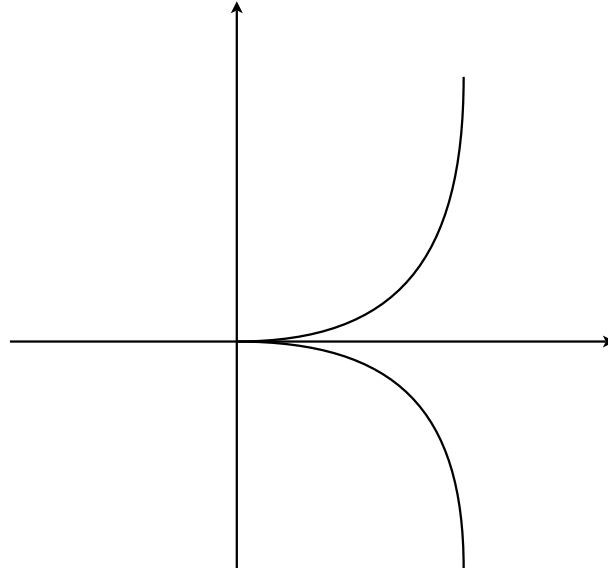


Abb. 1.9

diese Kurve ist bekannt unter dem Namen **Neil'sche Parabel** (nach dem engl. Mathematiker William Neil, 1637-1670).

1.3. DEFINITION DER PARAMETRISIERTEN KURVE UND ERSTE BEISPIELE

8. Noch überraschender ist es, dass der Rand des Quadrates

$$Q := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

das Bild einer parametrisierten C^∞ -Kurve ist. Dazu wählen wir eine C^∞ -Funktion $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) h ist monoton fallend
- (b) $h(0) = 1, h(1) = 0,$
- (c) $h^{(k)}(1) = 0$ für $k \in \mathbb{N}.$
- (d) $h^{(k)}(0) = 0$ für $k \in \mathbb{N}.$

Wir wissen aus der Analysis, dass solche Funktionen existieren, z.B. sei

$$\tilde{h}(t) := \begin{cases} e^{1/t(t-1)}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t = 0, 1, \end{cases}$$

und setze

$$h(t) := 1 - \frac{\int_0^t \tilde{h}(x) dx}{\int_0^1 \tilde{h}(x) dx}.$$

Dann definieren wir $c : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$c(t) := \begin{cases} (1 - h(t), 0), & 0 \leq t \leq 1, \\ (1, 1 - h(t - 1)), & 1 \leq t \leq 2, \\ (h(t - 2), 1), & 2 \leq t \leq 3, \\ (0, h(t - 3)), & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Eckpunkte von Q im vorigen Beispiel mit $x_0, x_1, x_2, x_3,$ so können wir die Strecke von x_i nach x_{i+1} parametrisieren durch

$$c_i : [0, 1] \ni t \mapsto x_i + t(x_{i+1} - x_i) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq i \leq 3.$$

Wollen wir außerdem, dass die i -te Strecke über $[i, i + 1]$ parametrisiert wird, so setzen wir einfach

$$\tilde{c}_i : [i, i + 1] \ni t \mapsto x_i + (t - i)(x_{i+1} - x_i) \in \mathbb{R}^2.$$

Eine neue parametrisierte Kurve \tilde{c} entsteht dann, wenn wir diese Strecken nacheinander durchlaufen. Wir präzisieren:

1.3.4 Definition

Es seien $c_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, parametrisierte C^r -Kurven mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$. Dann sei $c_1 * c_2 : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$c_1 * c_2(t) = \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ c_2(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Wir nennen $c_1 * c_2$ die **Zusammensetzung von c_1 und c_2** .

Mit dieser Terminologie wäre also im obigen Beispiel $\tilde{c} = ((c_1 * c_2) * c_3) * c_4$. Da die Zusammensetzung assoziativ ist (s. Ü 1.10), dürfen wir die Klammern weglassen ohne Missverständnisse befürchten zu müssen. Das so gewonnene \tilde{c} erscheint natürlicher als die in 8) angegebene Parametrisierung des Randes von Q . Wir haben uns aber ein Problem eingehandelt: \tilde{c} ist zwar stetig in $[0, 4]$, aber nicht differenzierbar. Da wir stetige Kurven allgemein nicht zulassen wollen, sind wir zu der folgenden Erweiterung des Kurvenbegriffs gezwungen:

1.3.5 Definition

Eine Abbildung $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **parametrisierte Kurve stückweise von der Klasse C^r** , falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$ so gibt, dass $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ eine parametrisierte C^r -Kurve ist für $0 \leq i \leq n - 1$.

Von nun an wird sowohl für parametrisierte Kurve von der Klasse C^r als auch für parametrisierte Kurve stückweise von der Klasse C^r immer $1 \leq r \leq \infty$ und gelegentlich sogar mehr! verlangt.

Ü 1.10: Sind $c_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisierte C^∞ -Kurven für $1 \leq j \leq 3$ und ist $c_j(b_j) = c_{j+1}(a_{j+1})$ für $1 \leq j \leq 2$, so gilt $(c_1 * c_2) * c_3 = c_1 * (c_2 * c_3)$.

Ü 1.11: Die oben beschriebene parametrisierte Kurve \tilde{c} ist stückweise von der Klasse C^∞ , aber nicht von der Klasse C^∞ .

1.4 Parameterwechsel

Wir haben gesehen, dass die dynamische Auffassung einer Punktmenge als Bahn eines Massenpunktes zur C^r -**Parametrisierbarkeit** als dem wesentlichen Merkmal einer Kurve führt. Viele geometrisch sinnfällige Eigenschaften der Bildmenge (z.B. die „Länge der Kurve“, s.u.) erweisen sich aber als unabhängig von der Parametrisierung – in einem geeigneten Sinne. Um dies zu präzisieren, müssen wir festlegen, welche Parametrisierungen derselben Bildmenge vernünftigerweise als äquivalent anzusehen sind. Sind also zwei parametrisierte C^r -Kurven

$$c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad c_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $c_1(I_1) = c_2(I_2)$ vorgelegt und interpretieren wir sie als Bewegungen von Massenpunkten, so können wir sie sicher dann als nicht wesentlich verschieden ansehen, wenn sie durch eine lineare Transformation der Zeitintervalle auseinander hervorgehen, d.h. wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ so gibt, dass

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto at + b \in \mathbb{R}$$

durch Einschränkung zu einer bijektiven Abbildung von I_1 auf I_2 führt, und wenn außerdem

$$c_1 = c_2 \circ (\varphi | I_1).$$

Mit anderen Worten: Nach Verschiebung der Zeitskala und Änderung der Einheit und gegebenenfalls der Zeitrichtung (wenn $a < 0$) geht c_1 in c_2 über. Wir bemerken nun, dass jedes solche φ die folgenden Eigenschaften hat:

1. φ ist von der Klasse C^r für jedes $r \in \mathbb{N}$,
2. $\varphi'(t) \neq 0$ für jedes $t \in I_1$.

Ferner existiert die inverse Abbildung

$$\varphi^{-1} : I_2 \ni t \mapsto \frac{1}{a}t - \frac{b}{a} \in I_1,$$

und sind $\varphi_j(t) := a_j t + b_j$ gegeben, $\varphi_j : I_j \rightarrow I_{j+1}$ für $j = 1, 2$, so ist

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 : I_1 \ni t \mapsto a_2 a_1 t + a_2 b_1 + b_2 \in I_3$$

ebenfalls linear und bijektiv. Damit erhalten wir also eine **Äquivalenzrelation** auf der Menge der parametrisierten C^r -Kurven, wenn wir sagen c_1 heißt **linear**

äquivalent zu c_2 genau dann, wenn es ein bijektives $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ von der Form $t \mapsto at + b$ gibt, so dass

$$c_1 = c_2 \circ \varphi.$$

Nun sind aber lineare Abbildungen sehr speziell; wir wollen daher eine größere Klasse von Transformationen zulassen, die nach den eben gemachten Überlegungen nur abgeschlossen zu sein hat unter **Zusammensetzung** und **Inversenbildung**. Nach der Kettenregel und dem Satz über inverse Funktionen ist das der Fall für die Klasse der Abbildungen, die die vorgenannten Eigenschaften 1) und 2) haben.

1.4.1 Definition

Es seien $c_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisierte C^r -Kurven, $j = 1, 2$. Wir nennen c_1 und c_2 **äquivalent**, wenn es eine bijektive C^r -Abbildung $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ gibt mit $\varphi'(t) \neq 0$ für jedes $t \in I_1$ und $c_2 \circ \varphi = c_1$. Die Äquivalenzklasse von c_1 nach dieser Relation heißt eine **C^r -Kurve**.

Gilt sogar $\varphi'(t) > 0$ für $t \in I_1$, so heißen c_1 und c_2 **orientierbar äquivalent**. Die Äquivalenzklasse von c_1 nach dieser (feineren) Relation heißt eine **orientierte C^r -Kurve**. Die Abbildungen φ heißen **zulässige Parametertransformationen**. (Sie haben immer positive Ableitungen!)

Ü 1.12: Zeigen Sie, dass die so definierten Begriffe „lineare Äquivalenz“, „Äquivalenz“ und „orientierbare Äquivalenz“ tatsächlich Äquivalenzrelationen sind.

Ü 1.13: Geben Sie parametrisierte C^r -Kurven $c_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ an, $j = 1, 2$, so dass $c_1(I_1) = c_2(I_2)$, aber

1. c_1 nicht äquivalent c_2 ist,
2. c_1 äquivalent c_2 , aber weder linear noch orientierbar äquivalent c_2 ist.

1.4.2 Bemerkungen

1. Jede der genannten Äquivalenzen zwischen zwei Kurven hat zur Folge, dass sie dasselbe Bild haben. Sind zwei Kurven äquivalent, aber nicht orientierbar äquivalent, so heißt das in der Interpretation als Bewegung eines Massenpunktes, dass das Bild jeweils in verschiedenen Richtungen durchlaufen wird.
2. Das Definitionsintervall einer parametrisierten Kurve enthält keinen, einen oder beide Randpunkte. Ist $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ eine surjektive C^r -Abbildung mit $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in I_1$, so enthalten I_1 und I_2 dieselbe Anzahl von Randpunkten. Es braucht aber nicht der Fall zu sein, dass I_2 beschränkt ist, wenn I_1 es ist.

Ü 1.14: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es gibt eine C^∞ -Abbildung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in I$ und außerdem

- (1) $\varphi(I) = \mathbb{R}$, falls I keinen Randpunkt enthält,
- (2) $\varphi(I) = \mathbb{R}_+$, falls I einen Randpunkt enthält,
- (3) $\varphi(I) = [0, 1]$, falls I beide Randpunkte enthält.

3. Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve, so hat jede zu c orientierbar äquivalente parametrisierte C^r -Kurve denselben Anfangs- bzw. Endpunkt. Ist c geschlossen, so auch jede zu c äquivalente parametrisierte C^r -Kurve.

Ü 1.15: Sind parametrisierte C^r -Kurven dann äquivalent, wenn ihr gemeinsames Bild eine Gerade ist?

1.5 Bogenlänge

Es stellt sich jetzt die natürliche Frage, ob es unter den vielen Parametrisierungen einer parametrisierten C^r -Kurve eine ausgezeichnete gibt. Hier hilft wieder die physikalische Interpretation: eine ausgezeichnete Bewegung längs eines gegebenen Weges ist die **gleichförmige Bewegung**, d.h. der Massenpunkt legt in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurück. Um zu einer allgemeinen Definition zu kommen, müssen wir sagen, was die Länge einer parametrisierten C^r -Kurve sein soll. Da die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen je zweien ihrer Punkt ist, sollte für die Strecke

$$c_{x_1, x_2} : [0, 1] \ni t \mapsto x_1 + t(x_2 - x_1) \in \mathbb{R}^n$$

von x_1 nach x_2 gelten, dass

$$(1.6) \quad L(c_{x_1, x_2}) := \text{Länge von } c_{x_1, x_2} = |x_2 - x_1|.$$

Einer beliebigen parametrisierten C^r -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ können wir Streckenzüge einbeschreiben. Dazu wählen wir eine Zerlegung von $[a, b]$,

$$Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b,$$

setzen $x_i := c(t_i)$, $0 \leq i \leq m$, und

$$c_Z := c_{x_0, x_1} * c_{x_1, x_2} * \dots * c_{x_{m-1}, x_m}.$$

Als Länge des Streckenzuges c_Z erhalten wir wegen (1.6)

$$L(c_Z) = \sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| = \sum_{i=1}^m |c(t_i) - c(t_{i-1})|.$$

Wegen $r \geq 1$ ist der Vektor

$$c'(t) := \left(\frac{dc_1}{dt}(t), \dots, \frac{dc_n}{dt}(t) \right) \in \mathbb{R}^n$$

wohldefiniert, und die Abbildung $t \mapsto c'(t)$ ist stetig in $[a, b]$. Also folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$(1.7) \quad \begin{aligned} L(c_Z) &= \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t) dt \right| \leq \max_{t \in [a, b]} |c'(t)| \sum_{i=1}^m |t_i - t_{i-1}| \\ &= (b - a) \max_{t \in [a, b]} |c'(t)|. \end{aligned}$$

Die Länge $L(c)$ von c muss aus geometrischen Gründen $\geq L(c_Z)$ sein für jedes Z ; es ist also vernünftig, das Supremum aller $L(c_Z)$ – das nach (1.6) existiert – als die Länge von c anzusprechen.

1.5.1 Definition

Es sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine parametrisierte C^r -Kurve. Wir definieren die **Länge** $L(c)$ **der Kurve** c durch $L(c) := \sup\{L(c_Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$.

Für die Länge können wir einen bequemen Ausdruck angeben.

1.5.2 Lemma

Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve, so gilt

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

Beweis:

Ist $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so nennen wir

$$\delta(Z) := \sup_{1 \leq i \leq m} |t_i - t_{i-1}|$$

die **Feinheit von** Z . Es gibt dann eine Folge $(Z_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen so, dass $Z_\ell : a = t_0^\ell < t_1^\ell < \dots < t_{m_\ell}^\ell = b$, $\lim_{\ell \rightarrow \infty} L(c_{Z_\ell}) = L(c)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(Z_t) = 0$.

Wir parametrisieren $c_{x_{i-1}^\ell, x_i^\ell}$ durch

$$[t_{i-1}^\ell, t_i^\ell] \ni t \mapsto x_{i-1}^\ell + \frac{t - t_{i-1}^\ell}{t_i^\ell - t_{i-1}^\ell} (x_i^\ell - x_{i-1}^\ell) \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $x_i^\ell = c(t_i^\ell)$, $0 \leq i \leq m_\ell$. Dadurch ändert sich die Länge von $c_{x_{i-1}^\ell, x_i^\ell}$ nicht; außerdem gilt

$$L(c_{Z_\ell}) = \sum_{i=1}^{m_\ell} \int_{t_{i-1}^\ell}^{t_i^\ell} |c'_{x_{i-1}^\ell, x_i^\ell}(t)| dt,$$

weil ja

$$c'_{x_{i-1}^\ell, x_i^\ell}(t) = \frac{c(t_i^\ell) - c(t_{i-1}^\ell)}{t_i^\ell - t_{i-1}^\ell}, \quad t \in [t_{i-1}^\ell, t_i^\ell].$$

Nun ist aber für $t \in [t_{i-1}^\ell, t_i^\ell]$

$$c'_{x_{i-1}^\ell, x_i^\ell}(t) - c'(t) = \frac{1}{t_i^\ell - t_{i-1}^\ell} \int_{t_{i-1}^\ell}^{t_i^\ell} (c'(x) - c'(t)) dx.$$

Setzen wir also

$$f_\ell(t) := c'_{x_{i-1}^\ell, x_i^\ell}(t), \quad \text{wenn } t \in [t_{i-1}^\ell, t_i^\ell], \quad 1 \leq i \leq m_\ell,$$

so folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $c'(t)$ in $[a, b]$

$$||f_\ell(t)| - |c'(t)|| \leq |f_\ell(t) - c'(t)| \leq \varepsilon,$$

wenn $\delta(Z_\ell) \leq \delta(\varepsilon)$. Da bei gleichmäßiger Konvergenz Integral und Grenzwert vertauscht werden dürfen, finden wir

$$L(c) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} L(c_{Z_\ell}) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_a^b |f_\ell(t)| dt = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

□

1.5.3 Bemerkungen und Beispiele

1. Es sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve. Ist $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ eine zulässige Parametertransformation und setzen wir $\tilde{c} := c \circ \varphi$, so wird

$$L(\tilde{c}) := \int_{a'}^{b'} \left| \frac{d}{dt} c \circ \varphi(t) \right| dt = \int_{a'}^{b'} |c'(\varphi(t))| |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |c'(t)| dt = L(c)$$

nach der Substitutionsregel. Die Länge ist also eine Eigenschaft der betrachteten C^r -Kurve, sowie es die geometrische Intuition verlangt.

2. Wir können den Längenbegriff sofort ausdehnen auf parametrisierte stückweise C^r -Kurven $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Denn dann gibt es eine Zerlegung $Z : a = t_0 < \dots < t_m = b$ von $[a, b]$, sodass $c_i := c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ eine parametrisierte C^r -Kurve ist, $1 \leq i \leq m$; wir setzen

$$L(c) := \sum_{i=1}^m L(c_i).$$

3. Der Kreis um 0 im \mathbb{R}^2 vom Radius r lässt sich parametrisieren durch

$$c : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann ist $|c'(t)|^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$ und damit gilt (wie erwartet):

$$L(c) = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r$$

4. Für die Ellipse mit den Halbachsen $a > b > 0$, parametrisiert durch

$$c : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (b \cos t, a \sin t) \in \mathbb{R}^2,$$

finden wir

$$|c'(t)| = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

und damit

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left(a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} + b \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t} \right) dt. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Integrale sind nicht mit elementaren Mitteln zu berechnen; dies in Strenge zu zeigen war ein Problem, um das sich im späten 18. Jahrhundert die berühmtesten Mathematiker bemühten, bis N.H. Abel um 1820 der Beweis gelang. Man nennt für $k \in \mathbb{C}$ und $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ nach Legendre

$$E(k, x) := \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

das **unvollständige elliptische Integral zweiter Art zum Modulus** k ;

$$E(k) := E(k, \frac{\pi}{2})$$

heißt das **vollständige elliptische Integral zweiter Art zum Modulus** k . Die erwähnte „Nichtelementarität“ ist dann so zu formulieren: $E(k, x)$ lässt sich nicht darstellen durch rationale und Exponentialfunktionen, wenn man die Grundrechenoperationen, die Umkehrung, das Ineinander-Einsetzen sowie Differentiation endlich oft anwendet. Für die Länge finden wir also

$$L(c) = 2a E\left(\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^{1/2}\right) + 2b E\left(i \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2}\right)^{1/2}\right).$$

5. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve mit nichtkompaktem I , so können wir c eine endliche Länge zusprechen, wenn das uneigentliche Integral

$$L(c) := \int_I |c'(t)| dt$$

konvergiert; anderenfalls sagen wir, dass c unendliche Länge hat. Als ein Beispiel betrachten wir die Kurve

$$c : \mathbb{R} \ni t \mapsto (\rho e^{-\sigma t} \cos t, \rho e^{-\sigma t} \sin t) \in \mathbb{R}^2$$

mit $\rho, \sigma > 0$. Setzen wir $\tilde{c} := c | \mathbb{R}_+$, so finden wir wegen

$$\begin{aligned} |c'(t)|^2 &= \rho^2 e^{-2\sigma t} ((-\sigma \cos t - \sin t)^2 + (-\sigma \sin t + \cos t)^2) \\ &= \rho^2 (1 + \sigma^2) e^{-2\sigma t} \end{aligned}$$

für die Länge von \tilde{c}

$$L(\tilde{c}) = \int_0^{\infty} \rho \sqrt{1 + \sigma^2} e^{-\sigma t} dt = \frac{\rho}{\sigma} \sqrt{1 + \sigma^2}.$$

Die durch c definierte C^∞ -Kurve heisst eine **logarithmische Spirale**. Diese Kurve besitzt viele merkwürdige Eigenschaften, die die Mathematiker – und nicht nur sie – seit der Antike faszinieren. Johann Bernoulli (1667-1748) nannte sie „*spira mirabilis*“ (wunderbare Spirale) und ließ sie auf seinem Grabstein im Basler Münster abbilden zusammen mit den Worten „*eadem mutata resurgo*“ (ich kehre als dieselbe wieder, obwohl ich mich verändert habe). Die logarithmische Spirale kommt in der Natur vor, z.B. im Gehäuse der Meeresschnecke *Nautilus* und in der Anordnung der Staubgefäße der Sonnenblume. Sie beschreibt auch die Bahn eines Lichtstrahls in einem inhomogenen, aber rotationssymmetrischen Medium; dies findet eine technische Anwendung bei der Lichtübertragung durch Glasfaserkabel. Wir werden auf andere Eigenschaften noch zu sprechen kommen.

6. Ist eine parametrisierte C^r -Kurve als Graph gegeben durch

$$c : [a, b] \ni t \mapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^n$$

mit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ von der Klasse C^r , so wird

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Ü 1.16: Es seien $c_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisierte stückweise C^r -Kurven, $i = 1, 2$, mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$. Definieren Sie $c_1 * c_2$ als parametrisierte stückweise C^r -Kurve und zeigen Sie, dass $L(c_1 * c_2) = L(c_1) + L(c_2)$.

Ü 1.17: Berechnen Sie die Länge von $c_{\rho,\sigma} \mid [a, b]$ mit $c_{\rho,\sigma}$ aus 1.2.2 für $-\infty < a < b < \infty$, insbesondere für $a = 0$, $b = 2\pi$.

Ü 1.18: Zeigen Sie: Für jede parametrisierte C^r -Kurve c im \mathbb{R}^n mit Anfangspunkt x_1 und Endpunkt x_2 gilt $L(c) \geq |x_2 - x_1|$; gilt das Gleichheitszeichen, so liegt das Bild von c auf einer Geraden. (Die Geraden sind die kürzesten parametrisierten Kurven im \mathbb{R}^n).

Ü 1.19: Zeigen Sie, dass die parametrisierten C^∞ -Kurven $c_\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto \rho e^{-\sigma t}(\cos(t+\alpha), \sin(t+\alpha)) \in \mathbb{R}^2$ für $\rho, \sigma > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ logarithmische Spiralen sind.

Ü 1.20: Untersuchen Sie, wieviele logarithmische Spiralen durch einen gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gehen.

Wir kehren jetzt zu dem am Anfang des Paragraphen gestellten Problem zurück: die Suche nach einer ausgezeichneten Parametrisierung. Die Intuition einer gleichförmigen Bewegung können wir jetzt so präzisieren: ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve und $t_0 \in I$, so ist die Kurve **gleichförmig parametrisiert für $t \geq t_0$** , wenn die Länge von $c \mid [t_0, t]$ **proportional** ist zu $t - t_0$, d.h. es gibt $\alpha > 0$, sodass

$$(1.8) \quad \int_{t_0}^t |c'(x)| dx = \alpha(t - t_0).$$

Es ist insbesondere sinnvoll, t_0 als den Anfangspunkt von c zu wählen.

1.5.4 Definition

Es sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve. Die Funktion

$$s_c(t) := \int_a^t |c'(x)| dx, \quad t \in [a, b],$$

heißt die **Bogenlänge von c** . C heißt **proportional zur Bogenlänge parametrisiert**, wenn (1.8) gilt mit $t_0 = a$.

Die Funktion s_c ist sicher C^1 wegen unserer allgemeinen Voraussetzung $r \geq 1$; ist aber $c'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$, so ist sie von derselben Klasse wie c . Es fragt sich natürlich, wann die Parametrisierung von c proportional zur Bogenlänge möglich ist. Die Antwort erweist sich als einfach.

1.5.5 Satz

Es sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve. c ist genau dann proportional zur Bogenlänge parametrisierbar, wenn $c'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$.

Beweis:

Wenn wir die Gleichung (1.8) differenzieren, folgt sofort die Notwendigkeit der Bedingung. Sei nun $c'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$. Dann definiert s_c eine zulässige Parametertransformation, und wir finden für $\tilde{c} := c \circ s_c^{-1}$

$$\left| \frac{d}{dx} \tilde{c}(x) \right| = |c'(s_c^{-1}(x))| \frac{1}{|c'(s_c^{-1}(x))|} = 1.$$

□

1.5.6 Definition

Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve. c heißt **regulär**, wenn $c'(t) \neq 0$ für $t \in I$. (Manche Autoren sagen **glatt** statt regulär).

1.5.7 Bemerkungen und Beispiele

1. Satz 1.4.5 können wir also so formulieren: Jede reguläre C^r -Kurve lässt sich proportional zur Bogenlänge parametrisieren. Denn Regularität ist eine von der Parametrisierung unabhängige Eigenschaft! Meistens werden wir die Konstante α in (1.7) gleich 1 wählen und sagen, dass c **mit** Bogenlänge parametrisiert sei. Es folgt übrigens aus (1.7), dass dies genau dann der Fall ist, wenn $|c'(t)| = 1$ für $t \in [a, b]$. Das Definitionsintervall dieser Parametrisierung ist $[0, L(c)]$.
2. Für den Kreis vom Radius r ist die Parametrisierung $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto r(\cos t, \sin t)$ immer proportional zur Bogenlänge; die Parametrisierung mit Bogenlänge wird $[0, 2\pi r] \ni t \mapsto r(\cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r}) \in \mathbb{R}^2$.
3. Die Parametrisierung der Ellipse aus 1.1 ist regulär wegen $|c'(t)|^2 \geq b^2$. Für die Bogenlänge finden wir

$$s_c(x) = 2a E \left(\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^{1/2}, x \right) + 2b E \left(i \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^{1/2}, x \right).$$

Ü 1.21: Übertragen Sie die Begriffe „Bogenlänge“ und „Regularität“ auf parametrisierte stückweise C^r -Kurven.

Ü 1.22: Untersuchen Sie die Helix aus 1.2.2 3) auf Regularität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Parametrisierung mit Bogenlänge.

1.6 Der Tangentialvektor

Wir haben gesehen, dass die regulären Kurven besonders angenehm sind, weil sie eine ausgezeichnete Parametrisierung besitzen. Wir wollen jetzt die Bedingung der Regularität geometrisch betrachten. Die Definition des totalen Differentials besagt in unserem Fall das Folgende:

Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte C^r -Kurve, so gilt für jedes $t \in I$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} |c(t+h) - c(t) - hc'(t)| = 0,$$

und durch diese Bedingung ist $c'(t)$ eindeutig bestimmt. Die wegen $c'(t) \neq 0$ **eindeutig bestimmte Gerade**

$$\mathbb{R} \ni h \mapsto c(t) + hc'(t) \in \mathbb{R}^n$$

ist also, zumindest für kleines h , die c in einer Umgebung von $c(t)$ am besten approximierende Gerade.

Wir können also sagen: Zu einer regulären Kurve existieren in jedem Punkt Geraden der besten Approximation. In der mechanischen Interpretation würde man diese Geraden beobachten können, wenn man zu einem gegebenen Zeitpunkt den Massenpunkt von allen einwirkenden Kräften befreit, während die Geschwindigkeit $\neq 0$ ist; im Falle eines Autos in einer Kurve würde dies Verzicht auf die durch Bremsung und Lenkung vermittelte Haftreibung bedeuten – mit unangenehmen Folgen für die Insassen. Tatsächlich schließt die Regularität Phänomene im Bild der Kurve aus, die unserer Intuition von einer glatten Kurve so heftig widersprechen wie Ecken (beim Quadrat) oder Spitzen (bei der Neil-Parabel).

1.6.1 Definition

Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte C^r -Kurve. Die durch

$$\mathbb{R} \ni h \mapsto c(t) + hc'(t) \in \mathbb{R}^n$$

gegebene Gerade im \mathbb{R}^n heißt **die Tangente an c im Punkt $c(t)$** . Der Vektor $c'(t)$ heißt der **Tangentialvektor an c im Punkt $c(t)$** .

1.6.2 Bemerkungen und Beispiele

1. Die Tangente in einem Punkt einer regulären C^r -Kurve ist nach der Kettenregel wohldefiniert; wir haben also wieder einen Begriff vor uns, der unabhängig von der speziellen Wahl der Parametrisierung ist.

2. Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^r -Kurve, so ist c bestimmt durch den Anfangspunkt und die Angabe aller Tangentenrichtungen, denn

$$c(t) = \int_a^t c'(x) dx + c(a).$$

Es kommt häufig vor, dass Kurven charakterisiert werden durch Eigenschaften ihrer Tangenten. Verlangen wir z.B. von einer parametrisierten C^r -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dass $c'(t) \perp c(t)$, so folgt (mit $\langle e, f \rangle$ das Skalarprodukt von $e, f \in \mathbb{R}^n$)

$$0 = 2\langle c'(t), c(t) \rangle = \frac{d}{dt}|c(t)|^2,$$

d.h. die Bildpunkte von c liegen auf einem festen Kreis um 0. Verlangen wir, dass c' stets parallel ist zu $c(t) - c(a)$, so liegen die Punkte $c(t)$, $t \in [a, b]$, auf einer Geraden durch $c(a)$. Sonst gibt es nämlich Parameterwerte $a < t_1 < t_2$ so, dass $c(a) \neq c(t_2)$ und $c(t_1)$ nicht auf der Geraden g durch $c(a)$ und $c(t_2)$ liegt. Wir können annehmen, dass $c(a)$ der Nullpunkt und g die x -Achse eines kartesischen Koordinatensystems ist (warum?). Setzen wir $e := (0, 1)$ und $f(t) := \langle e, c(t) \rangle$, $t \in [a, t_2]$, so gilt also

$$f(a) = f(t_2) = 0, \quad f(t_1) \neq 0.$$

Also hat f in $[a, t_2]$ ein positives Maximum oder ein negatives Minimum; in jedem Fall gibt es t^* mit $a < t^* < t_2$ und

$$\begin{aligned} \langle e, c(t^*) \rangle &= \langle e, c(t^*) - c(a) \rangle \neq 0, \\ \langle e, c'(t^*) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

d.h. $c'(t^*)$ liegt auf g , aber nicht $c(t^*) - c(a)$, was ein Widerspruch zur Annahme ist, $c'(t)$ sei parallel zu $c(t) - c(a)$.

3. Auf der x -Achse im \mathbb{R}^2 liege ein Faden der Länge 1, zunächst mit dem Anfangspunkt a in $(0, 0)$, mit dem Endpunkt b in $(1, 0)$. Wir ziehen jetzt den Punkt a längs der positiven y -Achse und interessieren uns für die Kurve, die der Punkt b dabei beschreibt, wenn Folgendes geschieht: Zu jedem Zeitpunkt der Bewegung hat der Faden die Form einer geraden Strecke der Länge 1, und seine Richtung ist gegeben durch die Tangente an die Kurve in diesem Kurvenpunkt. Insbesondere muss also diese Kurve, die **Traktrix** (Zielkurve) heißt, regulär sein. Wir beschreiben nun die Bewegung des Endpunktes durch

$$b(t) = (1 - t, \beta(t)), \quad t \in [0, 1],$$

1.6. DER TANGENTIALVEKTOR

wobei β eine geeignete Funktion ist. Die Bewegung des Anfangspunktes sei durch

$$a(t) = (0, \alpha(t))$$

beschrieben, wobei $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ geeignet gewählt wird.

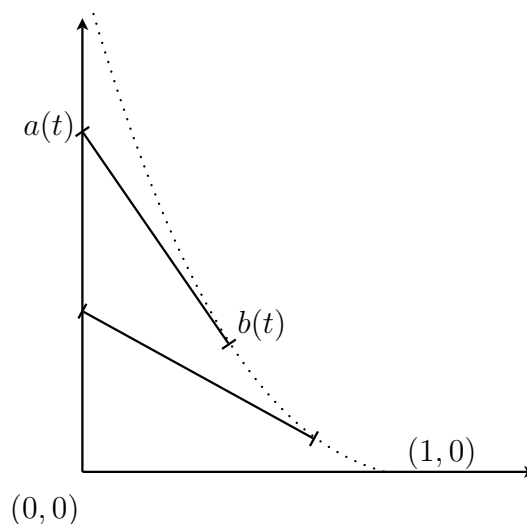


Abb. 1.10

Die Tangentenbedingung ergibt

$$(1.9) \quad a(t) - b(t) = \frac{1}{|b'(t)|} b'(t),$$

d.h. für die erste Koordinate

$$1 - t = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta'(t)^2}}$$

oder

$$\begin{aligned} \beta'(t)^2 &= \frac{1}{(1-t)^2} - 1 = \frac{2t - t^2}{(1-t)^2}, \\ \beta'(t) &= \frac{\sqrt{2t - t^2}}{1-t}. \end{aligned}$$

Das positive Vorzeichen ist zu wählen, weil nach (1.9) $\alpha(t) - \beta(t) = \beta'(t)(1 + \beta(t)^2)^{-1/2}$ und $\alpha(t) > \beta(t)$ gelten muss. Zusammen mit der Anfangsbedingung $\beta(0) = 0$ folgt für $0 \leq t < 1$

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \int_0^t \frac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x} dx = \int_{1-t}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx \\
&= \int_{1-t}^1 \left(\frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= \int_1^{\frac{1}{1-t}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{2} \int_{(1-t)^2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\
&= \operatorname{Ar} \cosh \frac{1}{1-t} - \sqrt{2t-t^2}.
\end{aligned}$$

Ü 1.23: Zeigen Sie für eine reguläre parametrisierte C^2 -Kurve $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dass das Bild $c(I)$ genau dann in einer Geraden des \mathbb{R}^n enthalten ist, wenn für alle $t \in I$ die Vektoren $c'(t)$ und $c''(t) \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig sind.

Ü 1.24: Berechnen Sie die Tangenten an die Ellipse $c: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$, und beweisen Sie das Reflexionsgesetz (Ü 1.1) analytisch.

Ü 1.25: Es sei $c_{\rho, \sigma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine logarithmische Spirale ($\rho, \sigma > 0$). Zeigen Sie, dass für den Winkel $\gamma(t)$ zwischen dem Ortsvektor $c_{\rho, \sigma}(t)$ und dem Tangentenvektor $c'_{\rho, \sigma}(t)$ stets gilt $\cot \gamma(t) = -\sigma$.

Wir werden später sehen, dass logarithmische Spiralen durch diese Eigenschaft ihrer Tangenten charakterisiert sind, d.h. jede reguläre parametrisierte C^1 -Kurve im \mathbb{R}^2 mit konstantem Winkel $\gamma(t) \in (-\pi, \pi) \setminus \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$ zwischen Orts- und Tangentenvektor ist eine logarithmische Spirale. Aus der Biologie ist ein empirischer Beweis dieser Tatsache bekannt: Insekten nähern sich einer brennenden Kerze entlang einer logarithmischen Spirale, weil sie versuchen, das Licht unter einem konstanten Winkel mit ihrer Flugrichtung zu sehen, so wie sie es gewohnt sind, wenn sie im Sonnenschein auf einer Geraden fliegen.

Ü 1.26: Begründen Sie, warum bei der vorstehenden Bemerkung die Winkel $\gamma = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ ausgeschlossen werden. Welche regulären parametrisierten C^2 -Kurven $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ haben die Eigenschaft, dass dieser Winkel γ konstant und gleich $-\frac{\pi}{2}, 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ ist?

Ü 1.27: Legen Sie einen (undehnbaren und biegsamen) Faden der Länge 2π im Uhrzeigersinn um den Kreis $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, so dass der Anfangspunkt A und der Endpunkt B beide in $(1, 0)$ liegen:

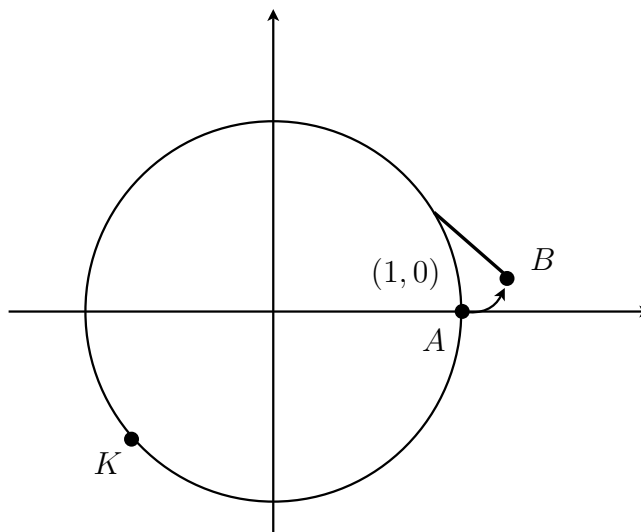


Abb. 1.11

- (i) Beschreiben Sie die Bahn von B als C^∞ -Kurve $\tilde{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, wenn der Faden (bei fest gehaltenem A) vom Kreis K „straff“ abgewickelt wird.
- (ii) Beweisen Sie, dass das Bild von \tilde{c} die Tangenten an den Kreis K jeweils senkrecht schneidet.
- (iii) Skizzieren Sie $\tilde{c}([0, 2\pi])$.
- (iv) Lösen Sie (i),(ii) und (iii) auch für den Fall, dass der Faden gegen den Uhrzeigersinn um den Kreis gewickelt ist.

1.7 Lösungshinweise

Ü 1.1 Zu beweisen ist das sogenannte Reflexionsgesetz für Ellipsen:

Ist P ein Punkt auf der Ellipse mit den Brennpunkten A und B , so treffen die Verbindungsstrecken von A nach P bzw. von B nach P die Tangente g_P an die Ellipse in P unter gleichen Winkeln.

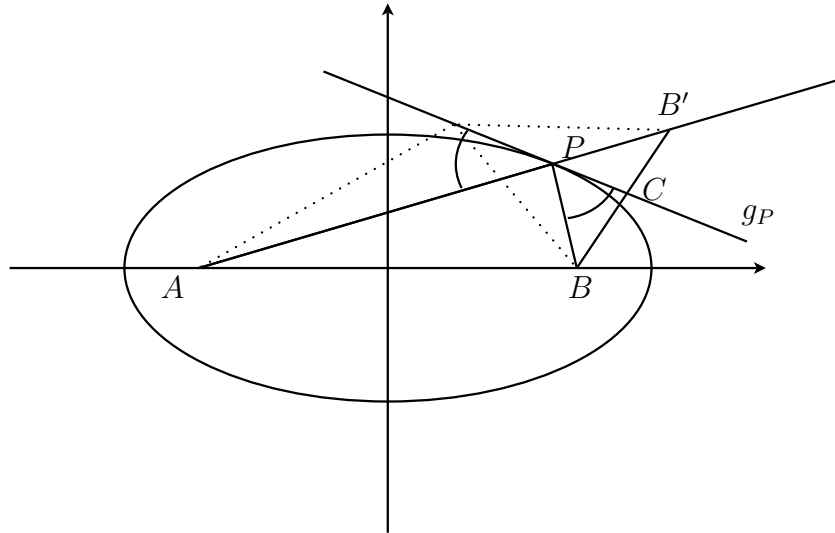


Abb. 1.12

Für den Spiegelpunkt B' von B an der Geraden g_P gilt $|\overline{PB'}| = |\overline{PB}|$. Nach (1.1) genügt es zu zeigen: $|\overline{AB'}| = |\overline{AP}| + |\overline{PB'}|$, weil die Dreiecke PCB und PCB' kongruent sind. Wegen der Dreiecksungleichung ist $|\overline{AB'}| \leq |\overline{AP}| + |\overline{PB'}|$. Angenommen es gilt

$$(1.10) \quad |\overline{AB'}| < |\overline{AP}| + |\overline{PB'}|.$$

Dann schneidet die Gerade durch A und B' die Tangente g_P in einem Punkt P' außerhalb der Ellipse, d.h. die Summe der Abstände des Punktes P' von A und B ist größer als die entsprechende Abstandssumme des Ellipsenpunktes P :

$$|\overline{AP'}| + |\overline{BP'}| > |\overline{AP}| + |\overline{BP}|.$$

Andererseits gilt $|\overline{BP'}| = |\overline{B'P'}|$ und deshalb

$$|\overline{AB'}| = |\overline{AP'}| + |\overline{P'B'}| > |\overline{AP}| + |\overline{BP}|.$$

Das ist ein Widerspruch zu (1.10).

Ü 1.2 Gegeben ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt S und dem Brennpunkt A . Gesucht ist eine auf der Geraden h durch S und A senkrecht stehende Gerade ℓ , die sogenannte Leitlinie, sodass für jeden Parabelpunkt P der Abstand zu A gleich dem Abstand zu ℓ ist.

Der Schnittpunkt C der gesuchten Leitlinie ℓ mit der Geraden h durch S und A kann nicht rechts von S liegen, weil dann (mindestens) ein Schnittpunkt P' mit der Parabel existieren würde, der Abstand $|\overline{AP'}|$ jedoch stets von 0 verschieden ist. C liegt also links von S auf h , und es gilt $|\overline{CS}| = |\overline{SA}|$. Dadurch sind C und ℓ eindeutig bestimmt; denn nach dem Text gilt für jeden Parabelpunkt P : $|\overline{AP}| = |\overline{PP_\ell}| + \text{const.}$

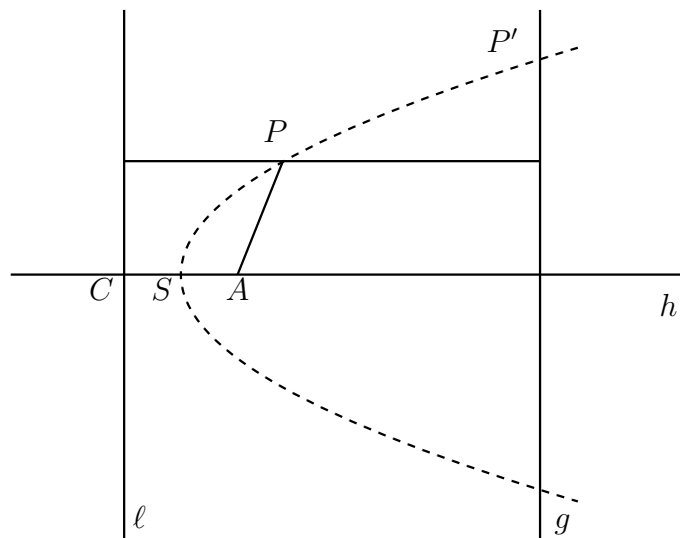


Abb. 1.13

Ü 1.3 Gesucht ist eine graphische Veranschaulichung der Vorstellung des Kopernikus über die Bahn des Planeten Mars.

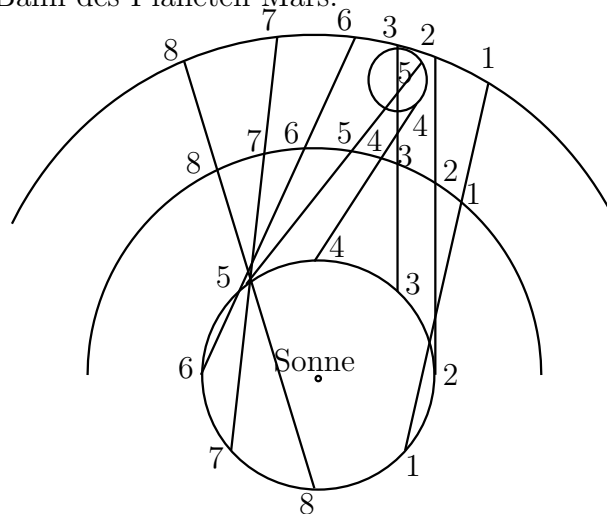


Abb. 1.14

Die Sonne steht im Mittelpunkt des Weltalls und Erde und Mars bewegen sich auf zwei Kreisbahnen um die Sonne, wobei der Radius der Marsbahn (bekanntlich) größer ist als der Radius der Erdbahn. Im obigen Bild sind gleiche Zeitpunkte für die Stellung von Erde und Mars mit gleichen Ziffern bezeichnet. Die Verbindungsgerade zwischen entsprechenden Bahnpunkten ergibt also die Richtung des Mars für einen Beobachter auf der Erde: die äußere Kurve veranschaulicht das Bild der Marsbahn am Himmel für Erdbewohner.

Ü 1.4 Jeder Planet bewegt sich auf einer Ellipse, so dass die Sonne in einem Brennpunkt steht. Nach dem **2. Keplerschen Gesetz** überstreicht die Verbindungsstrecke (Brennstrahl) vom Planeten P zur Sonne S in gleichen Zeiten gleich große Flächen. Gesucht ist eine Formel für den Flächeninhalt $F(t)$ zwischen den Brennstrahlen zur Zeit t und zur Zeit 0 , wobei

$$t \mapsto c(t) := (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2$$

für $t \in [0, 2\pi]$ eine Parametrisierung der Ellipse ist.

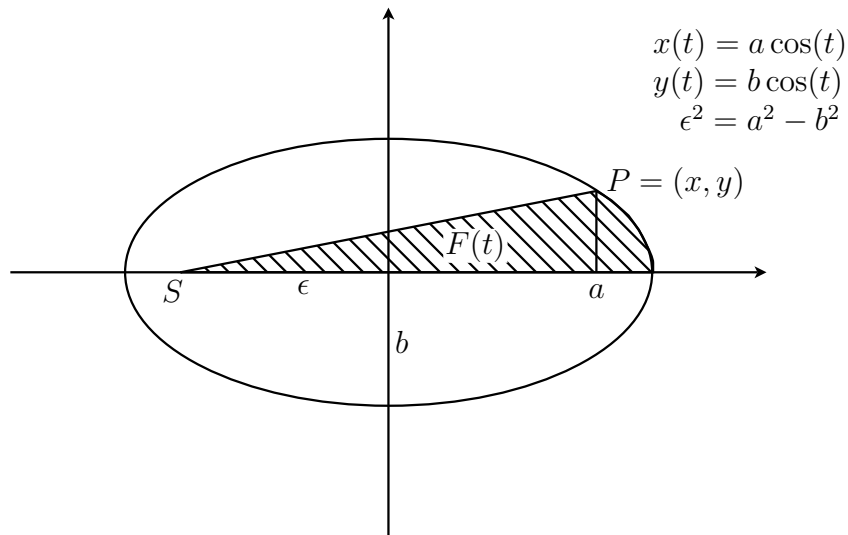


Abb. 1.15

Wir betrachten zunächst den Fall $y \geq 0$, d.h. $y(x) = b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$, und erhalten

$$\tilde{F}(x) = b \int_x^a (1 - u^2/a^2)^{1/2} du + \frac{1}{2}(\epsilon + x)y.$$

(Bitte machen Sie sich diese Formel an dem Fall $-\epsilon \leq x \leq a$ als auch an dem Fall $-a \leq x \leq -\epsilon$ klar!).

$$F(t) = \tilde{F}(x(t)) =: b \int_{a \cos t}^a (1 - u^2/a^2)^{1/2} du + \frac{1}{2}(\epsilon + a \cos t)b \sin t.$$

Mit der Substitution $u = a \cos s$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F(t) &= ab \int_0^t \sin^2 s \, ds + \frac{1}{2}(\varepsilon + a \cos t)b \sin t \\ &= \frac{ab}{4}(2t - \sin 2t) + \frac{1}{2}(\varepsilon + a \cos t)b \sin t \\ &= \frac{ab}{2}t + \frac{1}{2}\varepsilon b \sin t. \end{aligned}$$

Dies gilt zunächst für $0 \leq t \leq \pi$; insbesondere ist $F(\pi) = \frac{1}{2}ab\pi$ der Flächeninhalt der (oberen) Ellipsenhälfte!

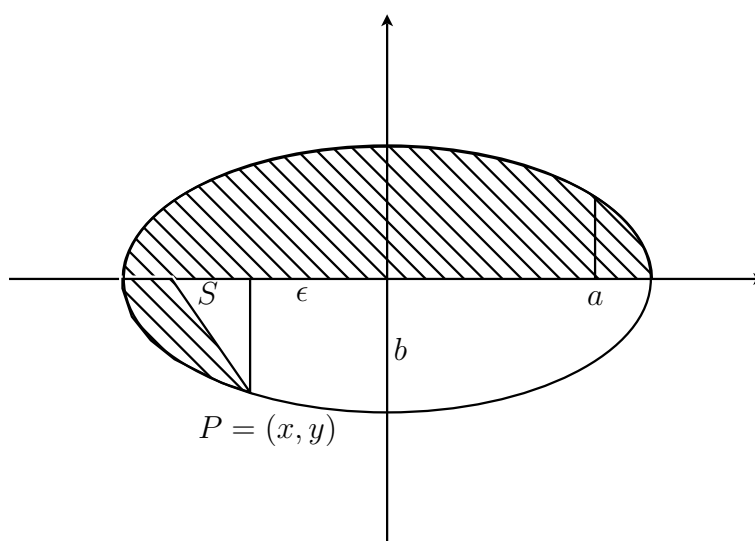


Abb. 1.16

Ist aber $y(t) < 0$, so ist $t > \pi$, und aus der Zeichnung ist unmittelbar ersichtlich, dass dann

$$\begin{aligned} F(t) &= F(2\pi) - F(2\pi - t) \\ &= ab\pi - \left(\frac{1}{2}ab(2\pi - t) + \frac{1}{2}\varepsilon b \sin(2\pi - t)\right) \\ &= \frac{1}{2}abt + \frac{1}{2}\varepsilon b \sin t. \end{aligned}$$

Unsere Formel gilt also für alle $t \in [0, 2\pi]$.

Ü 1.5 Es ist der Verlauf der Helix

$$c_{\rho, \sigma}(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t, \sigma t) \in \mathbb{R}^3$$

für $t \in [0, 2\pi]$ zu skizzieren:

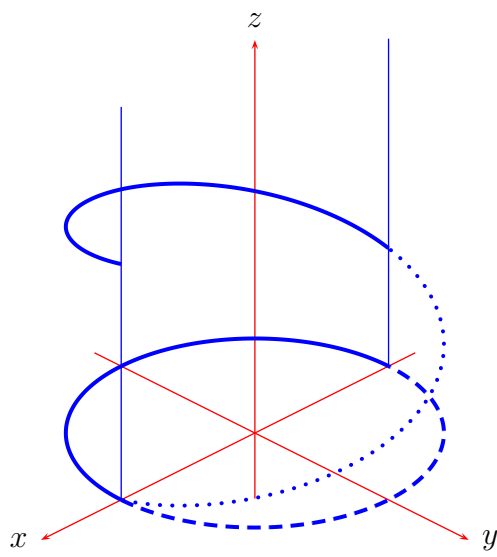


Abb. 17a $\rho > 0, \sigma > 0$

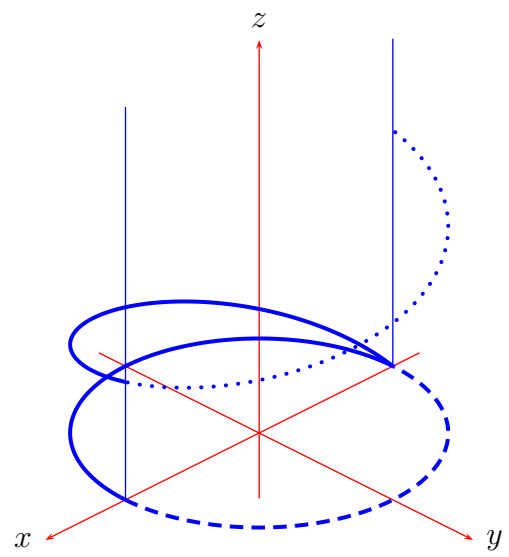


Abb. 17b $\rho < 0, \sigma > 0$

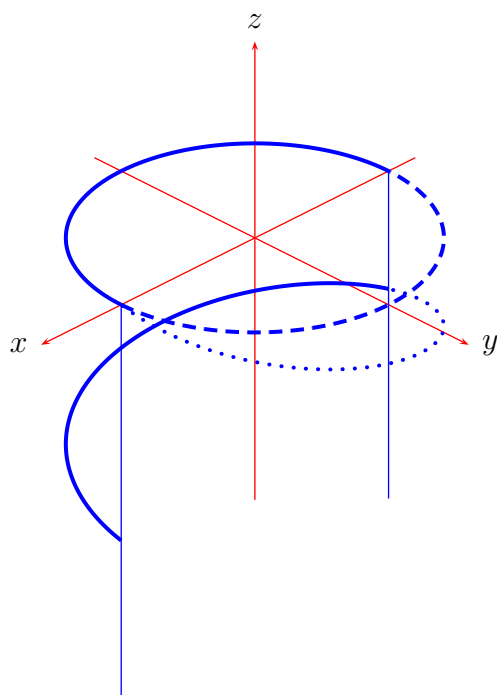


Abb. 17c $\rho > 0, \sigma < 0$

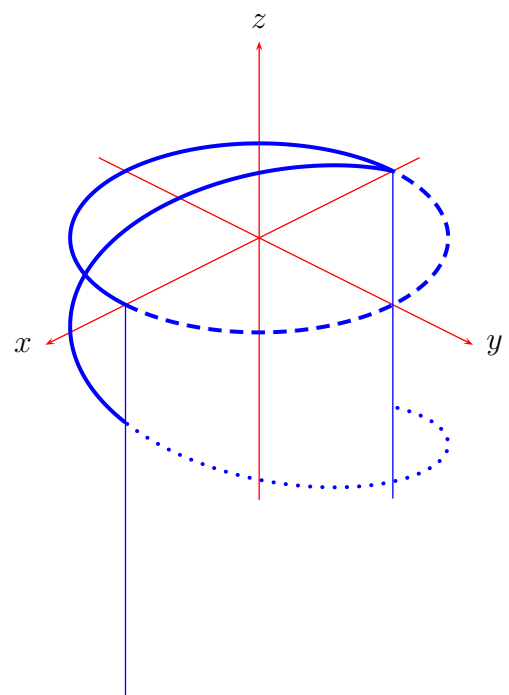


Abb. 17d $\rho < 0, \sigma < 0$

Ü 1.6 Zu zeichnen ist die Doppelhelix. Das ist die Vereinigung der Bilder der parametrisierten Kurven $c_{\rho,\sigma}$ und $c_{-\rho,\sigma}$. Nach Ü 1.5 genügt es, denn Fall $\rho > 0, \sigma > 0$ zu betrachten:

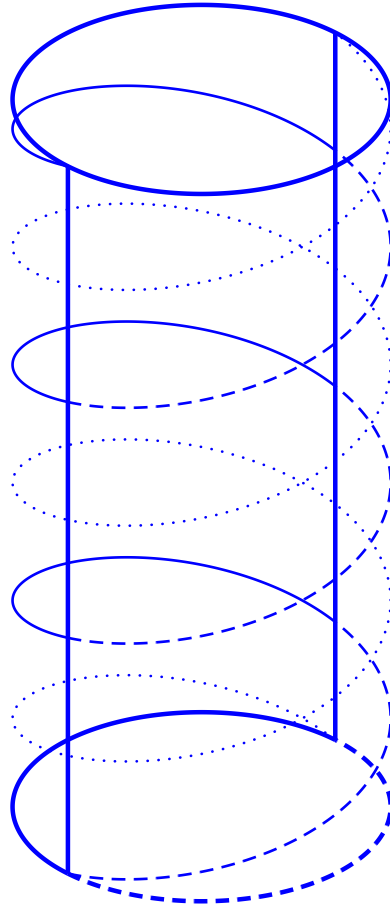


Abb. 1.18

Stellen wir uns die Helix als Weg einer mechanischen Schraube vor, die sich in einem Gewinde in z -Richtung vorwärts bewegt, so ergibt sich nach jeder Drehung die Ganghöhe; das ist $2\pi\sigma$.

Ü 1.7 Gesucht sind Parametrisierungen der in 1.1 beschriebenen Parabel und Hyperbel.

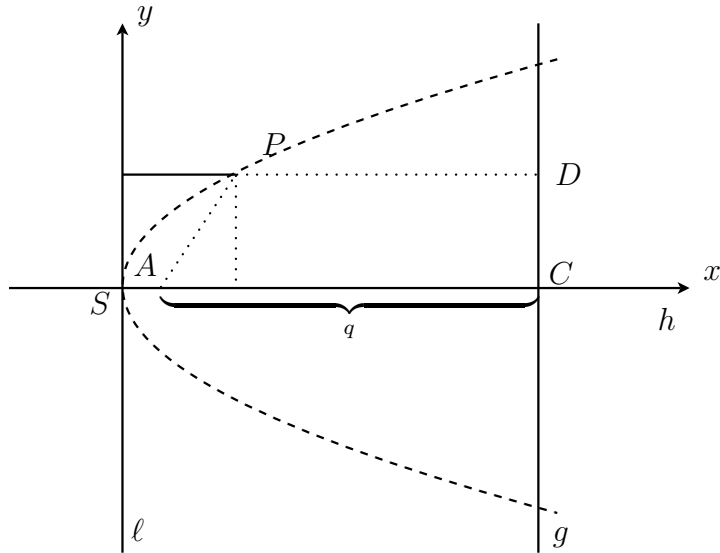


Abb. 1.19

Gegeben sei zunächst eine Parabel mit dem Scheitel S und dem Brennpunkt A . Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem (x, y) mit S als Nullpunkt und der Geraden durch S und A als x -Achse; der doppelte Abstand des Scheitels S von A sei (wie üblich) mit p bezeichnet, d.h. A habe die Koordinaten $(\frac{p}{2}, 0)$. Außerdem wählen wir eine beliebige auf der x -Achse senkrecht stehende und rechts von A liegende Gerade g . Es sei C der Schnittpunkt von g mit der x -Achse, $|\overline{CA}| =: q$, d.h. $C = (\frac{p}{2} + q, 0)$. Der Abstand eines beliebigen Parabelpunktes P von der Geraden g ist $|\overline{PD}|$, wenn D der Fußpunkt des Lotes von P auf g ist. Hat P die Koordinaten (x, y) , so gilt nach dem Satz von Pythagoras:

$$|\overline{PA}|^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2.$$

Offensichtlich gilt auch:

$$|\overline{PD}| = q + \frac{p}{2} - x.$$

Da P und S auf der Parabel liegen, folgt nach der Ortsliniendefinition

$$|\overline{PD}| + |\overline{PA}| = |\overline{SC}| + |\overline{SA}| = p + q,$$

und deshalb $|\overline{PA}| = x + \frac{p}{2}$, d.h. $(x + \frac{p}{2})^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2$, somit schließlich $y^2 = 2px$. Eine Parametrisierung ist deshalb $c(t) = (\frac{1}{2p}t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Wenden wir uns nun der Hyperbel zu! Analog zum Vorgehen in 1.1 für die Ellipse erhält man für die Koordinaten (x, y) eines Hyperbelpunktes die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto c(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$, ist eine Parametrisierung des rechten **Astes** dieser Hyperbel. Dabei sind der sogenannte **hyperbolische Cosinus** und der **hyperbolische Sinus** nach Analysis 7.4.1 folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \cosh t &:= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \\ \sinh t &:= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \end{aligned}$$

Wie kann der linke „Ast“ parametrisiert werden?

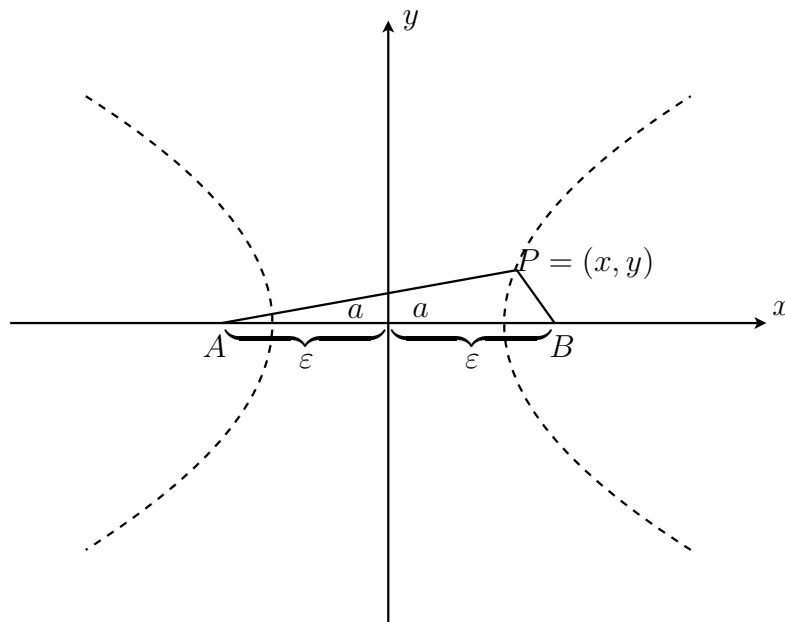


Abb. 1.20

Ü 1.8 Gegeben sei eine C^r -Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Es soll geklärt werden, auf welche Weise und unter welchen Bedingungen eine Höhenlinie

$$f^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n, \quad a \in \mathbb{R}^{n-1},$$

das Bild einer Kurve ist und lokal parametrisiert werden kann. Die Komponenten von f seien die C^r -Funktionen $f_1, \dots, f_{n-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir setzen jetzt in Analogie zum Fall $n = 2$ voraus, dass in jedem Punkt aus $f^{-1}(a)$ die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n}}$$

von f maximalen Rang hat, also jeweils eine $(n - 1) \times (n - 1)$ Unterdeterminante nicht verschwindet. Wählen wir einen festen Punkt $(x_0, y_0) \in f^{-1}(a)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ und setzen wir außerdem (o.B.d.A., warum?) voraus, dass gilt

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0, y_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n}} \neq 0,$$

so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen ein $\varepsilon > 0$, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von y_0 und eine C^r -Abbildung $g : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow U$, so dass für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt:

$$(x, y) \in f^{-1}(a) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times U \iff y = g(x),$$

d.h. $f^{-1}(a)$ ist lokal gleich dem Graphen von g und kann deshalb lokal als Kurve parametrisiert werden.

Ü 1.9 Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist definiert

$$f(x, y) := \begin{cases} y^3 \sin \frac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Es wird behauptet, dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion ist. f ist beliebig oft partiell differenzierbar nach x . Es genügt also, die stetige partielle Differenzierbarkeit nach y zu beweisen. Dabei sind nur die Punkte (x, y) mit $y = 0$ problematisch. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{y}(f(x, y) - f(x, 0)) = y^2 \sin \frac{1}{y}, \quad y \neq 0,$$

und bilden den Grenzwert:

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^2 \sin \frac{1}{y} = 0,$$

(vgl. Analysis I, 4.1.6(v)). Wir haben also

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 3y^2 \sin \frac{1}{y} - y \cos \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

und diese Funktion ist stetig in \mathbb{R}^2 . Weiter gilt:

$$f^{-1}(0) = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0, \sin \frac{1}{y} = 0\}.$$

Für $y \neq 0$ ist $\sin \frac{1}{y} = 0$ genau für $y = \pm \frac{1}{\pi k}$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$

Diese Menge $f^{-1}(0)$ im \mathbb{R}^2 ist in keiner Umgebung U von $(0, 0)$ das Bild einer parametrisierten Kurve, weil $U \cap f^{-1}(0)$ nicht zusammenhängend ist.

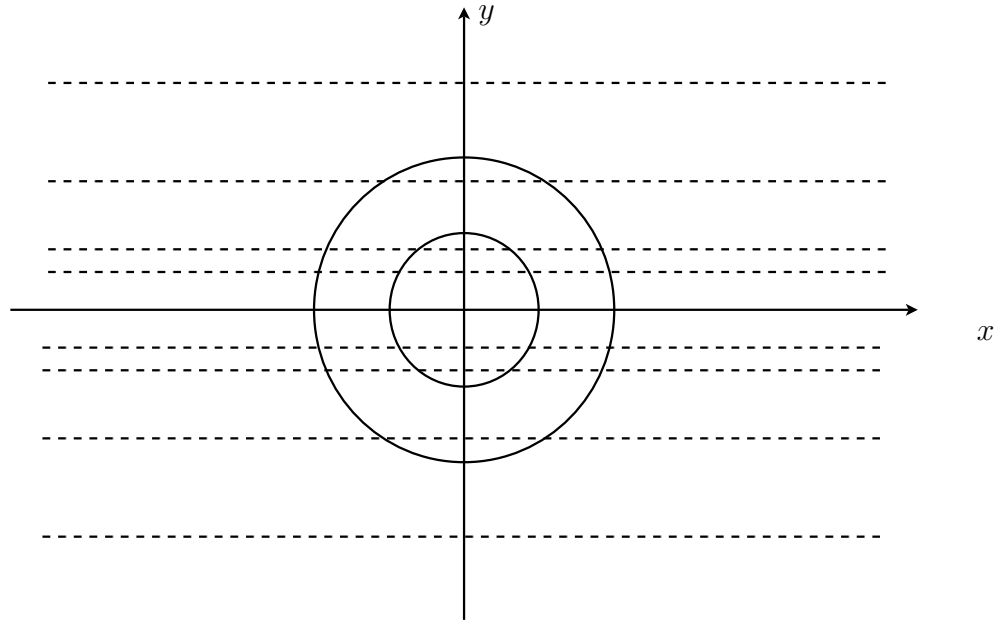


Abb. 1.21

Ü 1.10 Gegeben sind parametrisierte C^∞ -Kurven $c_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq 3$, mit $c_j(b_j) = c_{j+1}(a_{j+1})$, $1 \leq j \leq 2$. Zu zeigen ist, dass $c := (c_1 * c_2) * c_3$ und $\tilde{c} := c_1 * (c_2 * c_3)$ übereinstimmen. Es gilt nach Definition 1.2.4:

$$c_1 * c_2(t) = \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ c_1(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} c(t) &= \begin{cases} c_1 * c_2(t), & t \in [a_1, b_1 + b_2 - a_2], \\ c_3(t - b_1 - b_2 + a_2 + a_3), & t \in [b_1 + b_2 - a_2, b_1 + b_2 - a_2 + b_3 - a_3], \end{cases} \\ &= \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ c_2(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2], \\ c_3(t - b_1 - b_2 + a_2 + a_3), & t \in [b_1 + b_2 - a_2, b_1 + b_2 - a_2 + b_3 - a_3]. \end{cases} \end{aligned}$$

Die analoge Rechnung führen wir für \tilde{c} durch:

$$c_2 * c_3(t) = \begin{cases} c_2(t), & t \in [a_2, b_2], \\ c_3(t - b_2 + a_3), & t \in [b_2, b_2 + b_3 - a_3], \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}(t) &= \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ c_2 * c_3(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2 + b_3 - a_3], \end{cases} \\ &= \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ c_2(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2], \\ c_3(t - b_1 + a_2 - b_2 + a_3), & t \in [b_1 + b_2 - a_2, b_1 + b_2 - a_2 + b_3 - a_3]. \end{cases}\end{aligned}$$

Ü 1.11 Zu prüfen ist, dass die Abbildung $\tilde{c} : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus Bemerkung 8) in 1.2.2 mit dem Rand des Quadrates $Q := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ als Bild stückweise C^∞ , aber nicht C^∞ ist. Nach Definition hat \tilde{c} lineare Beschränkungen $\tilde{c} \mid [i, i+1]$ für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$; also ist \tilde{c} eine parametrisierte Kurve stückweise von der Klasse C^∞ . Es gilt z.B.

$$\begin{aligned}\tilde{c}(t) &= x_0 + t(x_1 - x_0), \quad t \in [0, 1], \\ \tilde{c}(t) &= x_1 + (t - 1)(x_2 - x_1), \quad t \in [1, 2],\end{aligned}$$

mit den Eckpunkten $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (1, 1)$ von Q , d.h.

$$\begin{aligned}\tilde{c}'(t) &= x_1 - x_0, \quad t \in [0, 1], \\ \tilde{c}'(t) &= x_2 - x_1, \quad t \in [1, 2].\end{aligned}$$

Wegen $x_1 - x_0 = (0, 1) \neq (1, 0) = x_2 - x_1$ ist \tilde{c} im Punkt $t = 1$ nicht differenzierbar.

Ü 1.12 Nach Mengenlehre §3 ist eine Äquivalenzrelation \sim reflexiv ($c \sim c$), symmetrisch ($c_1 \sim c_2 \Rightarrow c_2 \sim c_1$) und transitiv ($c_1 \sim c_2, c_2 \sim c_3 \Rightarrow c_1 \sim c_3$). Die angegebenen drei Relationen für parametrisierte C^r -Kurven sind jeweils reflexiv, weil die identische Abbildung des Parameter-Intervalls selbstverständlich eine lineare bzw. (orientierte) C^r -Transformation ist. Die Relationen sind symmetrisch und transitiv, weil für lineare bzw. (orientierte) C^r -Transformationen φ und ψ stets auch φ^{-1} und $\varphi \circ \psi$ die entsprechenden Eigenschaften haben; dies folgt aus dem Satz von der inversen Funktion, Analysis II und aus der Kettenregel, Analysis II.

Ü 1.13

1. Gesucht sind nicht äquivalente parametrisierte C^r -Kurven $C_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, mit übereinstimmenden Bildern, d.h. $c_1(I_1) = c_2(I_2) \subset \mathbb{R}^n$. Wir wählen $n = 1$ und definieren

$$\begin{aligned}c_1 &: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2, \\ c_2 &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto t.\end{aligned}$$

Wäre c_1 äquivalent zu c_2 , so gäbe es eine C^r -Transformation $\varphi : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $c_1 = c_2 \circ \varphi$. Also müsste gelten $t^2 = \varphi(t)$ für alle $t \in [-1, 1]$; das ist aber ein Widerspruch zu $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t .

2. Gesucht sind äquivalente parametrisierte C^r -Kurven $c_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, die weder linear noch orientierbar äquivalent sind. Wir wählen erneut $n = 1$ und definieren

$$c_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t,$$

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1], t \mapsto \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(t+1)^2.$$

Dann ist c_1 nicht orientierbar äquivalent zu $c_2 := c_1 \circ \varphi$; denn für jede C^r -Transformation $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $c_1 \circ \psi = c_2$ gilt $\psi(t) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(t+1)^2$, $\psi'(t) = -\frac{2}{3}(t+1) < 0$ für $t \in [0, 1]$. c_1 ist auch nicht linear äquivalent zu c_2 , denn sonst existierte eine lineare Transformation $\psi(t) = at + b$ ($a \neq 0$) mit $c_1 \circ \psi = c_2$. Also gilt für alle $t \in [0, 1]$: $at + b = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(t+1)^2$, d.h. $\frac{1}{3}(t+1)^2 + at + b - \frac{4}{3} = 0$; das ist aber nicht möglich.

Ü 1.14

1. Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ohne Randpunkte. Gesucht ist eine bijektive C^∞ -Transformation $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in I$.

Ist I ein beschränktes Intervall, so nehmen wir o.B.d.A. $I = (0, 1)$ an; denn für beliebige reelle Zahlen $a < b$ ist $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto a + t(b-a)$, bijektiv und linear mit $\lambda((0, 1)) = (a, b)$. Die Abbildung

$$\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \log \frac{t}{1-t},$$

hat aber alle gewünschten Eigenschaften, denn φ ist von der Klasse C^∞ , $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in (0, 1)$ und $\varphi((0, 1)) = \mathbb{R}$. Ist I halbbeschränkt, $I = (a, \infty)$ oder $I = (-\infty, b)$, so wählen wir o.B.d.A. $I = (0, \infty)$; denn $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t - a$ bzw. $t \mapsto b - t$, bildet (a, ∞) bzw. $(-\infty, b)$ bijektiv und linear auf $(0, \infty)$ ab. Damit erfüllt

$$\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \log t,$$

die geforderten Bedingungen.

2. Für ein beliebiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit einem Randpunkt suchen wir eine bijektive C^∞ -Transformation $\varphi : I \rightarrow [0, \infty)$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für $t \in I$. Ist I

beschränkt, $I = [a, b)$ oder $(a, b]$, so ist o.B.d.A. $I = [0, 1)$ oder $I = (0, 1]$, und die Abbildungen

$$\begin{aligned} [0, 1) &\rightarrow [0, \infty), \quad t \mapsto \frac{t}{1-t}, \\ (0, 1] &\rightarrow [0, \infty), \quad t \mapsto \frac{1-t}{t}, \end{aligned}$$

sind bijektiv und von der Klasse C^∞ mit nirgends verschwindender Ableitung.

3. Für unbeschränktes $I, I = [a, \infty)$ oder $I = (-\infty, b]$, kann die gesuchte Abbildung $I \rightarrow [0, \infty)$ linear gewählt werden: $t \mapsto t - a$ oder $t \mapsto b - t$. Schließlich suchen wir eine derartige C^∞ -Transformation $\varphi : I \rightarrow [0, 1]$ für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit zwei Randpunkten. Dann gilt $I = [a, b]$ mit $a < b$, und wir können setzen

$$\varphi : [a, b] \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \frac{t-a}{b-a}.$$

Ü 1.15 Gefragt ist, ob zwei parametrisierte C^r -Kurven, die als gemeinsames Bild eine Gerade im \mathbb{R}^n besitzen, äquivalent sind. Die Antwort ist „Nein“:

Wir wählen für $x \in \mathbb{R}$

$$c_1(x) := (x, 0) \in \mathbb{R}^2, \quad c_2(x) := (x^3, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Das Bild dieser C^∞ -Kurven ist jedenfalls eine Gerade, nämlich die x -Achse im \mathbb{R}^2 . Ist nun eine C^r -Transformation $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $c_1 \circ \varphi = c_2$ gegeben, so muss gelten $\varphi(x) = x^3$, d.h. $\varphi'(0) = 0$. c_1 und c_2 können also nicht äquivalent sein.

Ü 1.16 Es soll $c_1 * c_2$ definiert werden für parametrisierte stückweise C^r -Kurven $c_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, und es soll nachgewiesen werden, dass $c_1 * c_2$ auch stückweise von der Klasse C^r ist. Selbstverständlich wird wie in Definition 1.2.4 vorausgesetzt, dass $c_1(b_1) = c_2(a_2)$ gilt. Dann wird eine stetige Abbildung

$$c_1 * c_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch

$$c_1 * c_2(t) = \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ c_2(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2], \end{cases}$$

definiert, die stückweise von der Klasse C^r ist: für $i = 1, 2$ definieren die gegebenen Zerlegungen Z_i von $[a_i, b_i]$ eine Zerlegung von $[a_1, b_1 + b_2 - a_2]$; sind dabei die

Beschränkungen von c_i auf die durch Z_i gegebenen Teilintervalle parametrisierte C^r -Kurven $c_i | [t_{i,j-1}, t_{ij}] =: c_{ij}, j = 1, \dots, m_i$, so gilt

$$L(c_i) = \sum_{j=1}^{m_i} L(c_{ij}), \quad i = 1, 2.$$

Verwenden wir jetzt noch 1.4.3,1), so folgt

$$L(c_1 * c_2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{m_i} L(c_{ij}) = L(c_1) + L(c_2).$$

Ü 1.17 Zu berechnen ist die Länge der Helix $c_{\rho,\sigma} | [a, b]$, wobei für $t \in \mathbb{R}$

$$c_{\rho,\sigma}(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t, \sigma t) \in \mathbb{R}^3.$$

Für den Tangentialvektor finden wir

$$c'_{\rho,\sigma}(t) = (-\rho \sin t, \rho \cos t, \sigma)$$

und damit

$$|c'_{\rho,\sigma}(t)| = (\rho^2 + \sigma^2)^{1/2},$$

unabhängig von t . $(\rho^2 + \sigma^2)^{1/2}(b - a)$ ist also die Länge von $c_{\rho,\sigma} | [a, b]$. Die Länge der Helix bis zur Ganghöhe $2\pi\sigma$, d.h. etwa für $a = 0$ und $b = 2\pi$, beträgt $(\rho^2 + \sigma^2)^{1/2}2\pi$.

Ü 1.18 Zu zeigen ist, dass die Geraden die kürzesten parametrisierten Kurven im \mathbb{R}^n sind, die zwei gegebene Punkte x_1 und x_2 verbinden. Die Länge von $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist nach 1.3.1 gleich dem Supremum aller möglichen Summen

$$\sum_{i=1}^m |c(t_i) - c(t_{i-1})|$$

mit Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$. Für die triviale Zerlegung ($m = 1$) gilt also:

$$L(c) \geq |c(b) - c(a)| = |x_2 - x_1|,$$

da $c(b) = x_2$ und $c(a) = x_1$. Angenommen $c([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ enthält einen Punkt $\tilde{x} = c(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in (a, b)$, der nicht auf der Geraden durch x_1 und x_2 liegt; dann ist

$$Z : a = t_0 < \tilde{t} < t_2 = b$$

eine Zerlegung mit

$$L(c) \geq L_Z(c) = |x_1 - \tilde{x}| + |\tilde{x} - x_2| > |x_1 - x_2|.$$

Unter Benutzung von 1.4.2 können wir auch so argumentieren. Es sei $c := (x_2 - x_1)/|x_2 - x_1|$ der Einheitsvektor in Richtung der Geraden von x_1 nach x_2 . Mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt dann:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b |c'(t)| |e| dt \\ &\geq \int_a^b |\langle c'(t), e \rangle| dt \geq \left| \int_a^b \langle c'(t), e \rangle dt \right| \\ &= |\langle c(b) - c(a), e \rangle| = |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Gilt nun $L(c) = |x_2 - x_1|$, so muss an jeder Stelle dieser Ungleichungskette das Gleichheitszeichen stehen, d.h. es gilt insbesondere

$$|\langle c'(t), e \rangle| = |c'(t)| |e|.$$

Nach den Ergebnissen der Linearen Algebra kann das nur gelten, wenn $c'(t)$ und e linear abhängig sind, d.h. es muss gelten

$$c'(t) = \alpha(t)e, \quad \alpha(t) = \langle c'(t), e \rangle.$$

Wegen $r \geq 1$ ist $\alpha \in C^{r-1}[a, b]$, und es folgt

$$c(t) = x_1 + \int_a^t c'(s) ds = x_1 + \int_a^t \alpha(s) ds e,$$

d.h. das Bild von c liegt auf der Geraden durch x_1 und x_2 . Diese wichtige Beweisidee wird uns in der Flächengeometrie später wiederbegegnen.

Ü 1.19 Logarithmische Spiralen haben Parametrisierungen der Gestalt

$$c_{\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}}(t) = \tilde{\rho} e^{-\tilde{\sigma} t} (\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit Konstanten $\tilde{\rho} > 0$ und $\tilde{\sigma} > 0$. Die scheinbar allgemeinere parametrisierte Kurve

$$c_\alpha(t) = \rho e^{-\sigma t} (\cos(\alpha + t), \sin(\alpha + t))$$

ist linear äquivalent vermöge $\varphi : t \mapsto t - \alpha$ zur logarithmischen Spirale $c_{\tilde{\rho}, \sigma}$ mit $\tilde{\rho} := \rho e^{\sigma \alpha}$, denn es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$c_\alpha \circ \varphi(t) = \rho e^{\sigma \alpha} e^{-\sigma t} (\cos t, \sin t).$$

Ü 1.20 Es ist zu untersuchen, wieviele logarithmische Spiralen durch die von 0 verschiedenen Punkte der Ebene \mathbb{R}^2 gehen. Zu $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existiert genau ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $x = |x|(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Alle logarithmischen Spiralen

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto |x|e^{-\sigma t}(\cos(t + \alpha), \sin(t + \alpha)),$$

mit $\sigma > 0$ gehen durch x , denn $c(0) = x$.

Ist umgekehrt $c_{\rho, \sigma}$ eine beliebige logarithmische Spirale durch $x \in \mathbb{R}^2$, etwa $x = c_{\rho, \sigma}(\beta) = \rho e^{-\sigma \beta}(\cos \beta, \sin \beta)$ für $\beta \in \mathbb{R}$, so gilt $\rho e^{-\sigma \beta} = |x|$, und es gibt genau ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $\cos \alpha = \cos \beta$ und $\sin \alpha = \sin \beta$, d.h. $c_{\rho, \sigma}$ ist linear äquivalent zu (vgl. Ü 1.19)

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto |x|e^{-\sigma t}(\cos(t + \alpha), \sin(t + \alpha)).$$

Ü 1.21 Die Begriffe **Bogenlänge** und **Regularität** sind auf parametrisierte Kurven zu übertragen, die stückweise von der Klasse C^r sind. Es sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine solche parametrisierte Kurve und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ eine Zerlegung des Parameterintervalls, so dass alle Einschränkungen $c|_{[t_{\mu-1}, t_\mu]}$ parametrisierte C^r -Kurven sind, $1 \leq \mu \leq m$. Dann ist $|c'| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, und die wohldefinierte Funktion

$$s_c(t) := \int_a^t |c'(\tau)| d\tau, t \in [a, b],$$

heißt die **Bogenlänge von c** . Ist jede Parametrisierung $c|_{[t_{\mu-1}, t_\mu]}$ regulär, $1 \leq \mu \leq m$, so heißt c eine **reguläre** parametrisierte stückweise C^r -Kurve.

Ü 1.22 Gesucht ist für die Helix aus 1.2.2 die Parametrisierung mit Bogenlänge, falls das möglich ist. Diese Helix ist definiert durch

$$c_{\rho, \sigma} : \mathbb{R} \ni t \mapsto (\rho \cos t, \rho \sin t, \sigma t) \in \mathbb{R}^3$$

mit $\rho\sigma \neq 0$. Wegen

$$c'_{\rho, \sigma}(t) = (-\rho \sin t, \rho \cos t, \sigma) \neq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $c_{\rho, \sigma}$ regulär. Wir betrachten die Bogenlänge s von $c_{\rho, \sigma}$:

$$s(t) = \int_0^t |c'_{\rho, \sigma}(\tau)| d\tau = (\rho^2 + \sigma^2)^{1/2} t,$$

d.h. $c_{\rho, \sigma}$ ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Mit $r = (\rho^2 + \sigma^2)^{1/2}$ ist deshalb

$$\tilde{c}_{\rho, \sigma} : \mathbb{R} \ni s \mapsto \left(\rho \cos \frac{s}{r}, \rho \sin \frac{s}{r}, \sigma \frac{s}{r}\right) \in \mathbb{R}^3$$

mit der Bogenlänge parametrisiert und orientierbar äquivalent zu $c_{\rho,\sigma}$.

Ü 1.23 Zu zeigen ist, dass das Bild einer regulären parametrisierten C^2 -Kurve $c : I \mapsto \mathbb{R}^n$ genau dann in einer Geraden enthalten ist, wenn $c'(t)$ und $c''(t)$ für alle $t \in I$ linear abhängig sind.

1. Es mögen alle Punkte $c(t)$ für $t \in I$ auf der Geraden durch x_0 und x_1 im \mathbb{R}^n liegen. Bezeichnet V den zu $x_1 - x_0$ orthogonalen Unterraum des \mathbb{R}^n ,

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x_1 - x_0 \rangle = 0\},$$

so folgt

$$\langle y, c(t) - x_0 \rangle = 0 \quad \text{für } y \in V, t \in I.$$

Dann folgt aber durch Differentiation

$$\langle y, c'(t) \rangle = \langle y, c''(t) \rangle = 0,$$

d.h. für jedes $t \in I$ ist $c'(t) \in V^\perp$, $c''(t) \in V^\perp$. Weil $\dim V^\perp = 1$, folgt die Behauptung.

2. Sind nun $c'(t), c''(t) \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig für alle $t \in I$, so wählen wir eine C^2 -Parametertransformation $\varphi : I_1 \rightarrow I$, so dass $c_1 := c \circ \varphi$ mit Bogenlänge parametrisiert ist: $|c_1'(s)| = 1$ für alle $s \in I_1$. Es folgt also für beliebige $s \in I_1$: $c_1'(s) = \varphi'(s)c'(\varphi(s))$, $c_1''(s) = \varphi'(s)^2 c''(\varphi(s)) + \varphi''(s) \cdot c'(\varphi(s))$. Also sind $c_1'(s), c_1''(s) \in \mathbb{R}^n$ ebenfalls linear abhängig für alle $s \in I_1$. Aus der Gleichung

$$1 = |c_1'(s)|^2 = \langle c_1'(s), c_1'(s) \rangle$$

folgt durch Differentiation

$$0 = 2\langle c_1''(s), c_1'(s) \rangle,$$

und wir erhalten $c_1''(s) = 0$ für $s \in I_1$. Integration ergibt, dass $c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Beschränkung einer linearen Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist, d.h. $c_1(I_1) = c(I)$ liegt auf einer Geraden im \mathbb{R}^n .

Ü 1.24 Zu beweisen ist (auf analytischem Wege) das Reflexionsgesetz für die Ellipse $t \mapsto c(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 < b < a$.

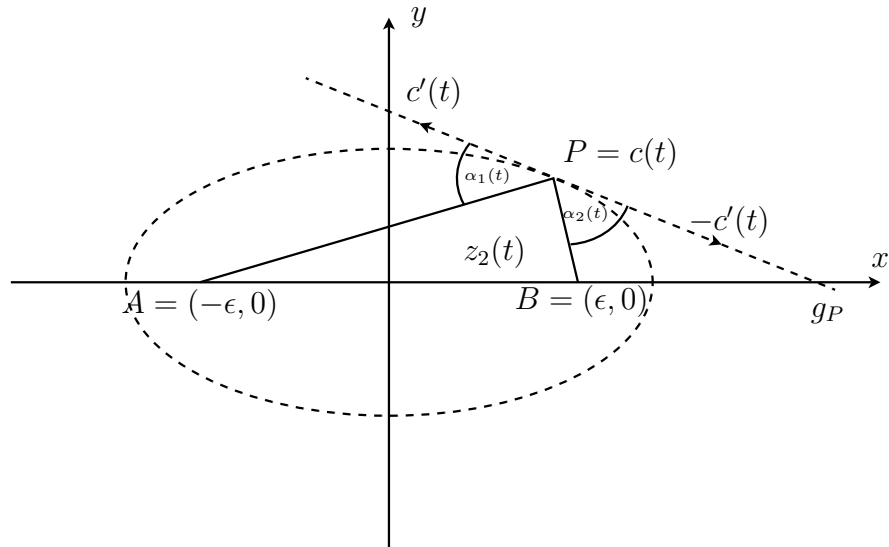


Abb. 1.22

Nach Lineare Algebra gilt für $i = 1, 2$

$$\cos \alpha_i(t) = \frac{\langle z_i(t), (-1)^{i-1} c'(t) \rangle}{|z_i(t)| |c'(t)|}.$$

Die auftretenden Vektoren sind leicht zu berechnen:

$$\begin{aligned} z_i(t) &= (-a \cos t + (-1)^i \varepsilon, -b \sin t), \\ c'(t) &= (-a \sin t, b \cos t). \end{aligned}$$

Wir beachten jetzt, dass $b < a$ und $\varepsilon^2 = a^2 - b^2$ (warum?). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (-1)^{i-1} \langle z_i(t), c'(t) \rangle &= (-1)^{i-1} ((-1)^i \varepsilon - a \cos t)(-a \sin t) \\ &\quad + (-1)^{i-1} (-b \sin t) b \cos t \\ &= \varepsilon a \sin t + (-1)^{i-1} a^2 \cos t \sin t + (-1)^i b^2 \cos t \sin t \\ &= \sin t (\varepsilon a + (-1)^{i-1} \cos t (a^2 - b^2)) \\ &= \varepsilon \sin t (a + (-1)^{i-1} \varepsilon \cos t), \end{aligned}$$

weiter

$$\begin{aligned} |z_i(t)|^2 &= ((-1)^i \varepsilon - a \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t \\ &= \varepsilon^2 + 2(-1)^{i-1} \varepsilon a \cos t + a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t \\ &= a^2 - b^2 + 2(-1)^{i-1} \varepsilon a \cos t + \varepsilon^2 \cos^2 t + b^2 \\ &= (a + (-1)^{i-1} \varepsilon \cos t)^2, \\ |c'(t)|^2 &= a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt wegen $\varepsilon < a$ für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i(t) &= \frac{\varepsilon \sin t (a + (-1)^{i-1} \varepsilon \cos t)}{(a + (-1)^{i-1} \varepsilon \cos t)(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}} \\ &= \frac{\varepsilon \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Ü 1.25 Zu zeigen ist, dass für eine logarithmische Spirale $c_{\rho, \sigma}$ der Winkel γ zwischen dem Ortsvektor und dem Tangentenvektor konstant ist und dass $\cot \gamma(t) = -\sigma$ gilt

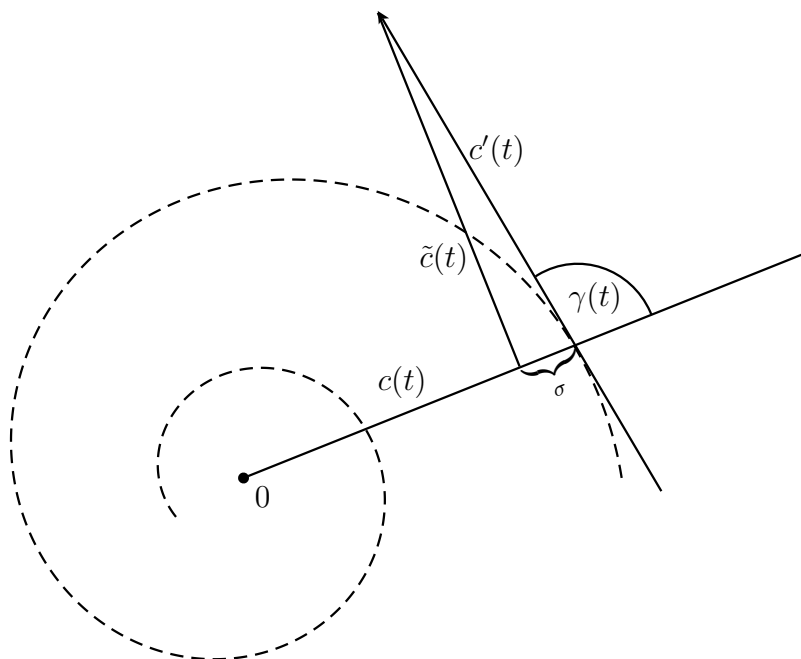


Abb. 1.23

Die logarithmische Spirale ist gegeben durch

$$c_{\rho, \sigma}(t) = \rho e^{-\sigma t} (\cos t, \sin t) =: c(t).$$

Setzen wir $r(t) := \rho e^{-\sigma t} > 0$, so gilt für den Tangentenvektor

$$c'(t) = r'(t)(\cos t, \sin t) + r(t)(-\sin t, \cos t) =: \frac{r'(t)}{r(t)} c(t) + \tilde{c}(t).$$

Hierbei ist $\frac{r'(t)}{r(t)} = -\sigma$, und $\tilde{c}(t) = r(t)(-\sin t, \cos t)$ ist orthogonal zu $c(t)$ mit gleicher Länge, $|\tilde{c}(t)| = |c(t)|$. Weiter ist

$$|c'(t)|^2 = |c(t)|^2(1 + \sigma^2), \quad \langle c'(t), c(t) \rangle = -\sigma |c(t)|^2.$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}\cot \gamma(t) &= \frac{\cos \gamma(t)}{\sin \gamma(t)} = \cos \gamma(t)(1 - \cos^2 \gamma(t))^{-1/2} \\ &= -\sigma \frac{|c(t)|}{|c'(t)|} \left(1 - \sigma^2 \frac{|c(t)|^2}{|c'(t)|^2}\right)^{-1/2} = -\sigma |c(t)| (|c'(t)|^2 - \sigma^2 |c(t)|^2)^{-1/2} = -\sigma.\end{aligned}$$

Ü 1.26

1. Es ist zu überlegen, ob es eine logarithmische Spirale geben kann, sodass der Winkel γ zwischen Orts- und Tangentenvektor gleich $-\frac{\pi}{2}$, 0 oder $\frac{\pi}{2}$ ist. Nach Ü 1.25 gilt für jede logarithmische Spirale $c_{\rho, \sigma}$ mit $\rho, \sigma > 0$: $\cot \gamma = -\sigma$. Doch es gilt $\cot(-\frac{\pi}{2}) = 0 = \cot \frac{\pi}{2}$, im Widerspruch zu $\sigma > 0$. Ferner ist der Cotangens an der Stelle 0 nicht definiert, es gilt: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\cot \alpha| = \infty$;
2. Für jede reguläre C^2 -Kurve $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle c(t), c'(t) \rangle = |c(t)| |c'(t)| \cos \gamma(t),$$

wobei $\gamma(t)$ wieder den Winkel zwischen $c(t)$ und $c'(t)$ bezeichnet. Für $\gamma \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ haben wir also $\langle c(t), c'(t) \rangle = 0$ und $c(\mathbb{R})$ liegt nach 1.5.2, Beispiel 2), auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 . Ist $\gamma = 0$, so sind $c(t)$ und $c'(t)$ parallel für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. $c(\mathbb{R})$ liegt auf einer Geraden, vgl. Ü 1.23 oder ebenfalls 1.5.2, Beispiel 2).

Ü 1.27

1. Zu bestimmen ist eine C^∞ -Parametrisierung $\tilde{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Abwicklung eines Fadens der Länge 2π am Einheitskreis $K := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

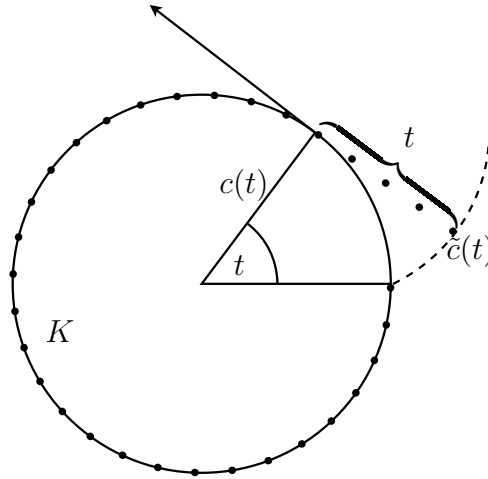


Abb. 1.24

Wir parametrisieren K durch $c(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, also mit Bogenlänge. Es folgt unmittelbar

$$\tilde{c}(t) = c(t) - tc'(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t).$$

2. Es ist zu zeigen, dass $\tilde{c}'(t)$ senkrecht auf $c'(t)$ steht für alle $t \in [0, 2\pi]$, d.h. $\langle \tilde{c}'(t), c'(t) \rangle = 0$. Wegen $\tilde{c}'(t) = c'(t) - tc''(t)$ gilt:

$$\langle \tilde{c}'(t), c'(t) \rangle = -t \langle c''(t), c'(t) \rangle = -\frac{t}{2} \frac{d}{dt} (|c'(t)|^2) = 0.$$

3. Wir skizzieren das Bild von $\tilde{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der folgenden Wertetabelle:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\tilde{c}(t)$	(1, 0)	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	(-1, π)	$(-\frac{3}{2}\pi, -1)$	(1, -2π)

4. Die bevorstehenden Aufgaben sollen nun gelöst werden, wenn der Faden entgegengesetzt um den Kreis gewickelt ist. Zu diesem Zweck wird die Parametrisierung des Kreises K anders orientiert:

$$c(t) := (\cos t, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Es folgt dann

$$\tilde{c}(t) = c(t) - tc'(t) = (\cos t + t \sin t, -\sin t + t \cos t), \quad \tilde{c}'(t) = -tc''(t),$$

$$\langle \tilde{c}'(t), c'(t) \rangle = -t \langle c''(t), c'(t) \rangle = -\frac{t}{2} \frac{d}{dt} (|c'(t)|^2) = 0.$$

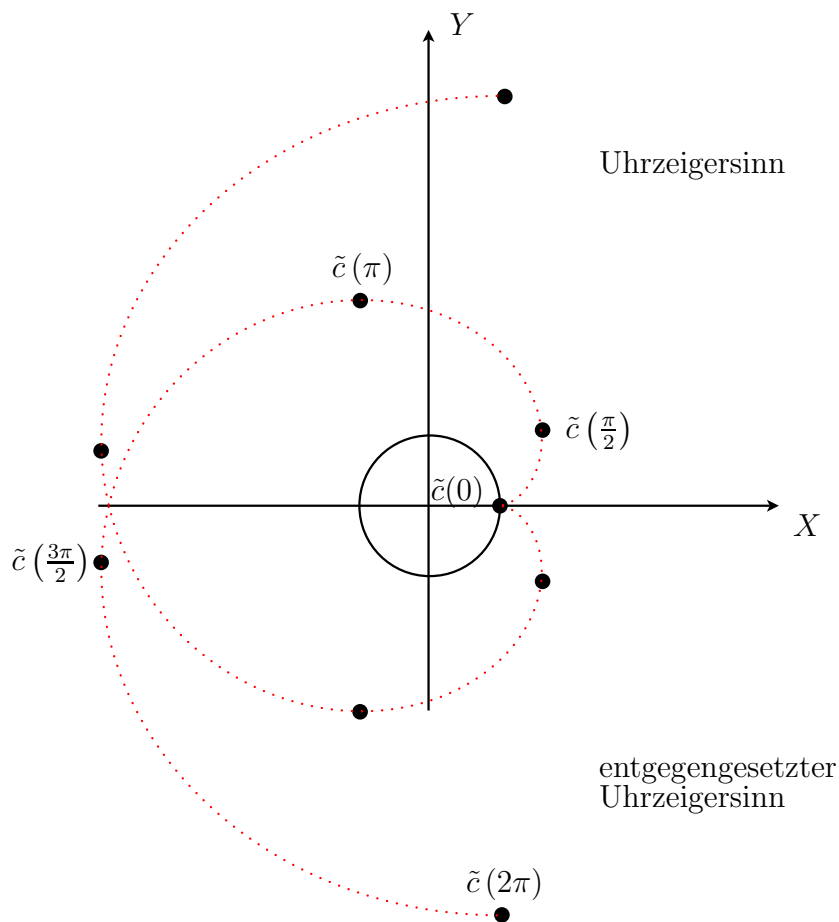


Abb. 1.25

Die Wertetafel hat also folgende Form:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\tilde{c}(t)$	(1, 0)	$(\frac{\pi}{2}, -1)$	$(-1, \pi)$	$(-\frac{3}{2}\pi, -1)$	(1, 2π)

Das Bild von \tilde{c} ist in der gleichen Skizze angedeutet. Es ist klar, dass \tilde{c} in diesem Fall aus dem vorigen durch Spiegelung an der x -Achse entsteht.

1.7.1 Bemerkungen

Die Kurven des gerade beschriebenen Typs \tilde{c} heißen (Faden-)Evolventen des Kreises K . Natürlich gibt es von jedem Punkt auf K ausgehend solche Kurven. Die angeführte Konstruktion ist in analoger Weise möglich für jede reguläre parametrisierte C^r -Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $r \geq 2$, sodass das Bild von c nicht auf einer Geraden liegt. Denn ist c mit Bogenlänge parametrisiert, so erfüllt die Evolvente \tilde{c} die Gleichung

$$(1.11) \quad \tilde{c}(t) = c(t) + (t_0 - t)c'(t), \quad t \geq t_0,$$

wobei $c(t_0)$ der Startpunkt des Fadenendes ist. Die beiden Teile von \tilde{c} sind von der Klasse C^{r-1} . Das Fadenmodell ist auf diesen allgemeineren Fall übertragbar.

Für höhere Dimensionen, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, wäre eine Evolvente $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch die „Abrollvorschrift“ (und den Startpunkt) allein **nicht** festgelegt, weil für das Fadenende nicht nur eine Ebene als **Freiheitsgrad** zur Verfügung steht. Man fordert deshalb, dass das Bild von \tilde{c} in der sogenannten **Tangentenfläche von c** enthalten ist:

$$\tilde{c}(I) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = c(t) + hc'(t) \quad \text{für } t \in I \quad \text{und } h \in \mathbb{R}\}.$$

Man kann also ansetzen

$$\tilde{c}(t) = c(t) + h(t)c'(t)$$

mit einer differenzierbaren Funktion $h : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\tilde{c}'(t) = c'(t) + h'(t)c'(t) + h(t)c''(t) \quad \text{und} \quad \langle \tilde{c}'(t), c'(t) \rangle = 1 + h'(t),$$

falls c wie vorher mit Bogenlänge parametrisiert ist.

Der Ansatz $\tilde{c} = c + hc'$ liefert also genau dann eine Evolvente zu c , wenn ein $t_0 \in I$ existiert mit $h(t) = t_0 - t$, denn $h'(t) = 1$ für alle $t \in I$.

Stichwortverzeichnis

- Äquivalenzrelation, 22
- Ast, 6
- Auffassung
 - dynamische, 13
- Auffassung
 - statische, 13
- Bahngleichung, 11
- Bewegung
 - gleichförmige, 25
- Bogenlänge, 52
- Bogenlänge einer Kurve, 30
- Brennpunkt, 5
- Brennstrahl, 5
- Cosinus Hyperbolicus, 44
- Deferent, 10
- Delisches Problem, 9
- Doppelhelix, 15
- Ekliptik, 11
- Ellipse, 4
- Epizykel, 10
- Erzeugungsweise
 - organische, 9
- Feinheit einer Zerlegung, 26
- Freiheitsgrad, 59
- Ganghöhe, 15
- Gerade, 4
- Gesetz
 - 1. Kepler'sches, 11
 - 2. Kepler'sches, 12, 39
- Graph, 16
- Höhenlinie, 16
- Helix, 15
- Hyperbel, 6
- Isohypsen, 16
- Jordankurve, 14
- Kegelschnitte, 6
- Kissoide, 7
- Kreis, 4
- Kurve
 - konstante, 14
 - parametrisierte, 14
 - reguläre, 31
- Länge einer Kurve, 26
- Leitlinie, 5
- Lineal, 9
- linear äquivalent, 23
- logarithmische Spirale, 29
- orientierbar äquivalent, 23
- Ortsliniendefinition, 4
- Parabel, 5
 - Neil'sche, 19
- Parametertransformation, 23
- Parametrisierbarkeit, 22
- Parametrisierung, 12
- Peanokurven, 17
- Punktmenge, 7

Randpunkt, 14

Regularität, 52

Schraubenlinie, 15

Sinus Hyperbolicus, 44

Tangente, 5, 32

Tangentenfläche, 59

Tangentialvektor, 32

Traktrix, 33

Zirkel, 9

Zusammensetzung, 21