Prof. Dr. Wolfgang Beekmann

Modul 61211

Analysis

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

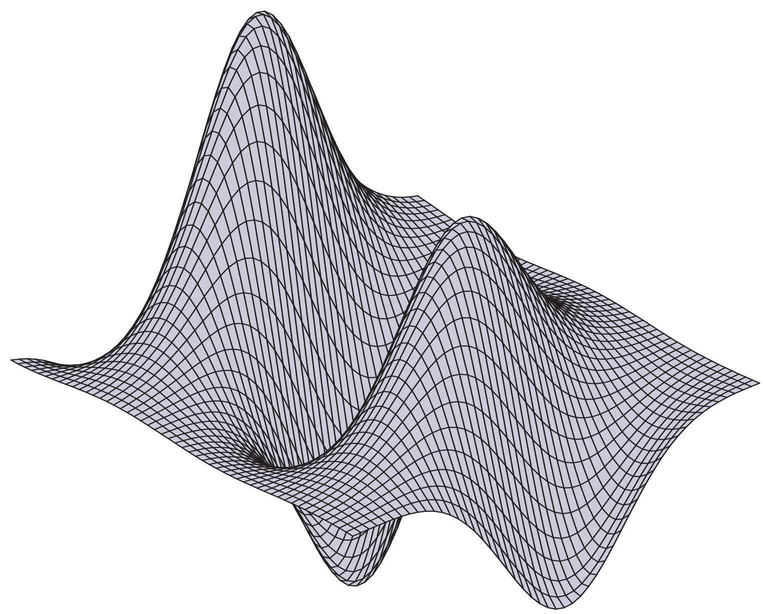
FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen

Analysis

Kurseinheit 1: $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

Autor: W. Beekmann



$$\mathbf{grad\ f = 0}$$

$$\mathbf{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0}$$

Inhaltsverzeichnis

Kurseinheit 1

Liebe Studentin, lieber Student,

wir begrüßen Sie herzlich als Teilnehmer des Kurses **Analysis** und wünschen Ihnen guten Erfolg bei der Bearbeitung.

Es handelt es sich um einen Ausbau des Kurses **Mathematische Grundlagen**[1], den die meisten von Ihnen in einem vorausgegangenen Semester bearbeitet haben, und zwar um einen Ausbau der Kurseinheiten 4 bis 6 und des ersten Teiles von Kurseinheit 7, die sich auf die Analysis beziehen. Deren Inhalte werden dem Wesen nach als bekannt vorausgesetzt. Mit „dem Wesen nach" ist gemeint, dass Teilnehmer, die die entsprechenden Kenntnisse auf andere Weise erworben haben, keine Nachteile befürchten müssen. In zusammenfassenden Rückblicken wird an das Gelernte erinnert, der Text von **MG** muss zum Verständnis nicht vorliegen.

Inhalt des Kurses Analysis

Im Kurs **MG** werden (u. a.) die Themen Reelle Zahlen, Stetigkeit, Differenziation und Integration von reellen Funktionen einer Veränderlichen behandelt. Hier werden nun Funktionen mehrerer Veränderlicher einbezogen. Im Einzelnen sind für die sieben Kurseinheiten folgende Inhalte vorgesehen:

§1 $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

- **1.0** Einführung
- **1.1** Rückblick und Ergänzungen: Reelle Zahlen
- **1.2** Rückblick und Ergänzungen: Konvergenz
- **1.3** $\mathbb{R}^n$ als reeller Vektorraum
- **1.4** $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum
- **1.5** Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

§2 Stetige Funktionen

- **2.0** Einführung
- **2.1** Rückblick und Ergänzungen: Stetigkeit
- **2.2** Allgemeines über Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$
- **2.3** Stetigkeit. Lokale Eigenschaften

[1] Im Folgenden zitieren wir diesen Kurs als **MG**.

Literatur

(Eine kleine Auswahl aus dem sehr großen Angebot an Analysisbüchern.)

1. Amann, H. und J. Escher: *Analysis I.*
Birkhäuser Verlag, Basel, 3. Aufl., 2006

2. Barner, M. und F. Flohr: *Analysis.*
de Gruyter, Berlin–New York
Band I: 5., durchges. und erw. Aufl., 2000,
Band II: 3., durchges. Aufl., 1995

3. Endl, K. und W. Luh: *Analysis.*
Eine integrierte Darstellung. Aula–Verlag, Wiesbaden
Band 2: 8. Aufl., 1994

4. Forster, O.: *Analysis.*
Vieweg + Teubner in GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden
Band 1 (Differential– und Integralrechnung einer Veränderlichen): 9., überarb. Aufl., 2008,
Band 2 (Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen): 8., aktualis. Aufl., 2007

5. Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis.*
Vieweg + Teubner in GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden
Teil 1: 16., durchges. Aufl., 2006

6. Kaballo, W.: *Einführung in die Analysis.*
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin – Oxford
Band I: 2. Aufl., 2000,
Band II: 1997

7. Königsberger, K.: *Analysis.*
Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York
Band 1: 6., durchges. Aufl., 2003,
Band 2: 3., überarb. Aufl., 2000

8. Lang, S.: *Undergraduate Analysis.*
Springer–Verlag, New York – Berlin – Heidelberg
Second Edidion. 4., corr. Printing, 2005

9. Walter, W.: *Analysis.*
Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo
Band 1: 7. Aufl., 2004,
Band 2: 5., erw. Aufl., 2002

Die meisten dieser Lehrbücher enthalten auch Abschnitte über Differenzialgleichungen, doch sollen hier noch zwei einschlägige Werke (aus der großen Auswahl) aufgeführt werden:

10. Braun, M.: *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen.*
Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 3. Aufl., 1994

11. Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.*
Einführung in Lehre und Gebrauch.
Vieweg + Teubner in GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden,
5., durchges. Aufl., 2006

Tafelwerk:

12. Gradstein, I. S., Ryshik, I. M.: *Summen–, Produkt– und Integraltafeln.*
Dtsch.–engl. Text nach der 5. von J. Geronimus und M. Zeitlin bearb. russ. Aufl.,
übersetzt von L. Boll. (2 Bände, 1181 Seiten)
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M., 1981

Einige Hinweise zum Aufbau der Studienbriefe

Jede Kurseinheit von **Analysis** besteht aus den folgenden Elementen:

1. Studierhinweise (gelbes Papier)
Darin wird Ihnen die Gliederung des Studienbriefes anhand einer Grafik verdeutlicht. Aus ihr geht hervor, welche Themen aus den „Mathematischen Grundlagen“ (**MG**) wiederholt und welche zusätzlich eingebracht werden. In den Zielelementen werden die Lerninhalte der einzelnen Abschnitte schlagwortartig beschrieben und zugleich der Aufbau der mathematischen Begriffsbildungen schematisch sichtbar gemacht. Ferner werden die Lernziele genannt, und im Selbstkontrollelement (meist eine einfache Aufgabe) wird versucht, Ihnen dabei behilflich zu sein, das Erreichen der Lernziele zu kontrollieren.

2. Lehrtext (weißes Papier)
Der Lehrtext besteht pro Kurseinheit aus einem Paragrafen, der in Abschnitte unterteilt ist. (Z. B. ist §1 in 1.0, 1.1, ..., 1.5 unterteilt.) Innerhalb der Abschnitte sind Definitionen, Sätze, Folgerungen, Bemerkungen usw. durchnummeriert. (Z. B. innerhalb des Abschnitts 1.2 mit den Nummern 1.2.1 bis 1.2.26.) Die Definitionen und Sätze sind zudem meist noch mit einem Schlagwort (gelegentlich mit einem Namen) versehen, das auf den Inhalt verweist. Am Ende eines jeden Abschnitts finden Sie einige Übungsaufgaben (z. B. Ü 1.3.1 bis Ü 1.3.4 am Ende des Abschnitts 1.3), die Sie zur Selbstkontrolle zu lösen versuchen sollten.

3. Lösungen (blaues Papier)
In diesem Teil der Kurseinheit sind Lösungen zu den Übungsaufgaben, die am Ende der Abschnitte angefügt sind, zusammengestellt. Sie tragen die Nummer der jeweiligen Aufgabe.

4. Glossar (rosa Papier)
Hier finden Sie die wesentlichen Inhalte noch einmal in knapper Form zusammengestellt.

Ein Hinweis zur Studiertechnik

Darüber haben Sie in **MG** ausführlich gelesen, trotzdem hier noch einmal die „guten Ratschläge“: Die Erfahrung hat gezeigt, dass nur passives Zurkenntnisnehmen („Lesen“) mathematischer Texte sehr rasch zum Scheitern führt. Es mag sinnvoll sein, einen Abschnitt zunächst einmal rasch durchzugehen unter Auslassung der Beweise (deren Ende durch das Zeichen □ markiert ist), um einen ersten Überblick zu gewinnen. Es ist aber dann unerlässlich, dass Sie sich in einem zweiten Durchgang den Stoff **aktiv mit Papier und Bleistift** erarbeiten, indem sie jeden Schritt – in der Regel schriftlich – nachvollziehen. Darüber hinaus sollten Sie versuchen, sich zu jeder Definition und zu jedem Satz **eigene Beispiele** auszudenken und **aufzuschreiben**, zusätzlich zu den Beispielen aus dem Lehrtext, die Sie natürlich besonders sorgfältig anschauen werden.

Der **Übungsaufgaben** am Ende eines jeden Abschnittes sollten Sie sich sehr ernsthaft annehmen und Ihre Lösungsversuche **schriftlich fixieren**, bevor Sie den blauen Teil, sei es als Lösungshilfe, sei es zur Kontrolle Ihrer Lösung, in Anspruch nehmen. Sie können auf diese Art Hinweise erhalten, wieweit Sie die Lernziele erreicht haben.

Auch an den **Einsendeaufgaben** sollten Sie sich, wenn irgend möglich, beteiligen. Hier sind Sie gezwungen, einem Außenstehenden Ihre Überlegungen in **schriftlicher Form** mitzuteilen. Lassen Sie diese Möglichkeit zur Fremdkontrolle Ihres Lernerfolges nicht ungenutzt!

Die Beschäftigung mit Mathematik erfordert die Fähigkeit, sich klar und unmissverständlich auszudrücken, und die wird durch schriftliche (und damit jederzeit nachprüfbare) Formulierung von Sachverhalten besonders geschult. Daneben ist es aber auch wichtig, die Fähigkeit zu üben, mathematische Sachverhalte mündlich mitzuteilen und darüber in Rede und Gegenrede, in Frage und Antwort zu kommunizieren. Die Möglichkeit hierzu bietet sich Ihnen im Studienzentrum, wo Sie mit Mentoren und anderen Studenten in regelmäßigen Beratungsstunden Fragen zum Kurs besprechen können.

Das griechische Alphabet

Sie haben es in **MG** klar gesehen: Für den Mathematiker reichen die 2×26 Buchstaben (groß und klein) des lateinischen Alphabets als „Variable“ beim besten Willen nicht aus! Außerdem liest sich ein mathematischer Text viel besser, wenn man verschiedenartige mathematische Objekte mit verschiedenartigen Buchstabentypen bezeichnet. Im Druck ist es einfach, *schräge* oder **fette** Buchstaben zu benutzen, was man handschriftlich schlecht nachmachen kann. Deshalb wird neben dem lateinischen Alphabet vor allem das griechische verwendet. (Früher griff man auch häufig auf das deutsche Alphabet zurück.) Nachstehend finden Sie eine Zusammenstellung:

Das griechische Alphabet:

A	α	Alpha	E	ε	Epsilon
B	β	Beta	Z	ζ	Zeta
Γ	γ	Gamma	H	η	Eta
Δ	δ	Delta	Θ	θ, ϑ	Theta

I	ι	Jota	P	ρ, ϱ	Rho[2]
K	κ	Kappa	Σ	σ, ς	Sigma
Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
M	μ	My	Υ	υ	Ypsilon
N	ν	Ny	Φ	ϕ, φ	Phi[2]
Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
O	$\circ$	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Gelegentlich verwenden wir andere Schrifttypen, z. B. Skriptbuchstaben wie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \ldots$ (lies: Skript–A, Skript–B, ...), aber in vielen Fällen ist es günstiger, für neue „Variablen“ keine neuen Buchstaben oder Buchstabentypen einzuführen, sondern denselben Buchstaben zu indizieren oder zu markieren, z. B. im Fall des Buchstabens x :

$x_0, x_1, x_2, \ldots$	(lies: x null, x eins, x zwei, ...)
x', x'', x'''	(lies: x Strich, x Zweistrich, x Dreistrich)
$\overline{x}$	(lies: x quer)
$\widetilde{x}$	(lies: x Schlange oder x Tilde)
$\widehat{x}$	(lies: x Dach oder x Hut)
x^*	(lies: x Stern)
$\underline{x}$	(lies: x unten quer)
$\vec{x}$	(lies: x Pfeil)

usw.

Die festen Bezeichnungen $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$ für die reellen, rationalen, natürlichen, ganzen, komplexen Zahlen[3] kennen Sie aus **MG**; wir verwenden sie natürlich auch.

Und nun kann es losgehen. Noch einmal wünschen wir Ihnen viel Erfolg!

Ihr Kursteam

[2]Schreiben Sie in Ihren Aufzeichnungen das kleine Rho stets als ϱ, das kleine Phi als φ.
[3]Schreiben Sie in Ihren Aufzeichnungen einfach IR, ℚ, IN, ℤ, ℂ, also R, Q, N, Z, C mit einem zusätzlichen senkrechten bzw. schrägen Strich.

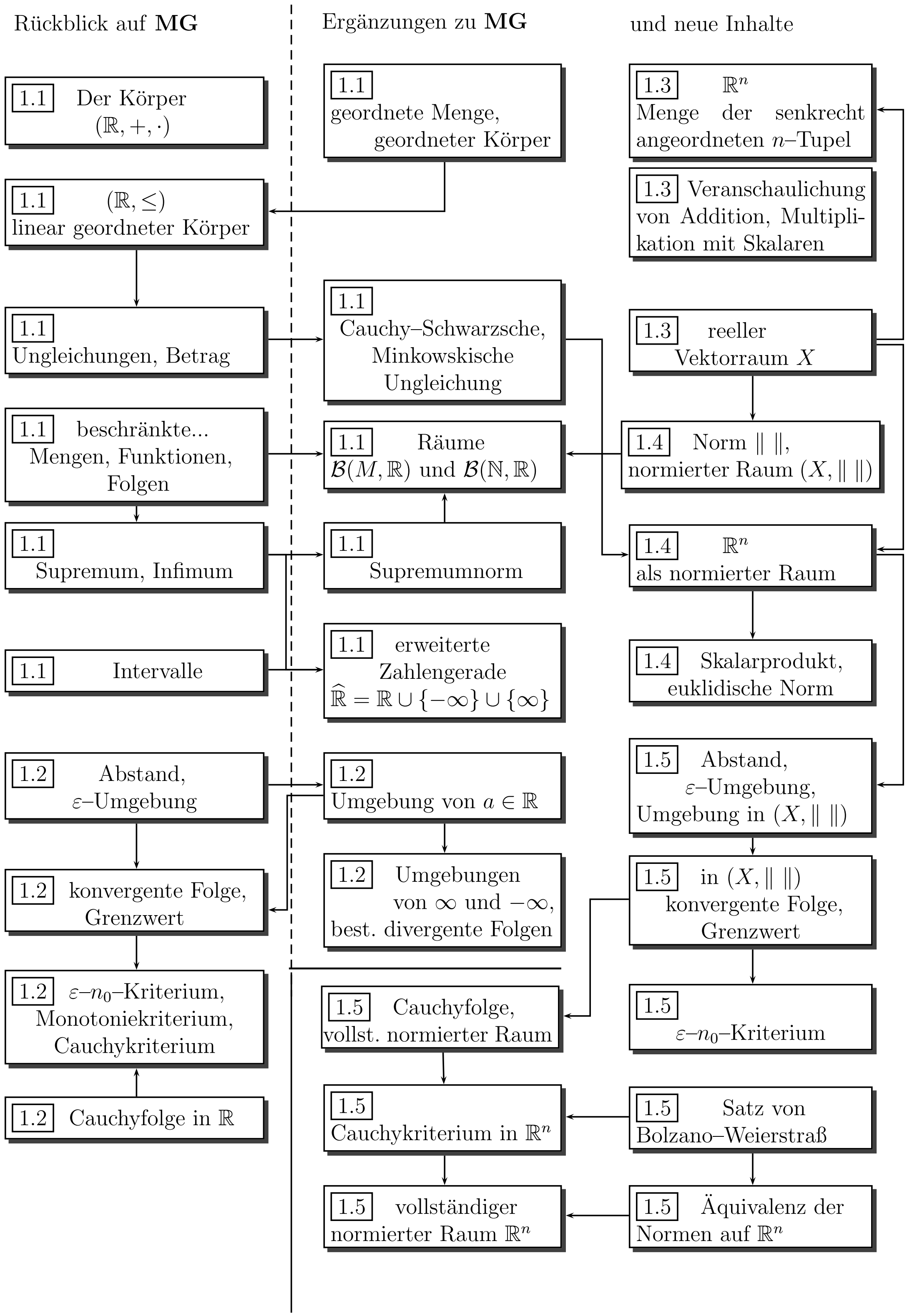
Studierhinweise zu Kurseinheit 1

Diese Kurseinheit dient der Einführung des Raumes $\mathbb{R}^n$ und einiger seiner Strukturen. Wer den Kurs **Mathematische Grundlagen** (**MG**) noch gut im Gedächtnis hat, wird die ersten beiden Abschnitte im Wesentlichen übergehen können, doch lohnt sich zumindest ein Überfliegen, um durch die Art, wie der Rückblick aufbereitet ist, auf das Folgende vorbereitet zu werden und auch die hie und da eingefügten Ergänzungen des früheren Stoffes nicht zu verpassen.

Vom dritten Abschnitt an werden eine ganze Reihe von Begriffsbildungen vorgestellt, denen sich der $\mathbb{R}^n$ als wichtiges Beispiel unterordnet oder die für den $\mathbb{R}^n$ eine wichtige Bedeutung haben: reeller Vektorraum, normierter Raum, Umgebung eines Punktes; besonders wichtig der Konvergenzbegriff und der Vollständigkeitsbegriff (Abschnitt 5).

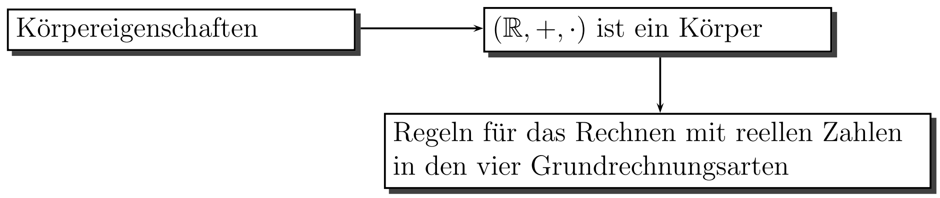
Abgesehen davon, dass es sich bei den neuen Begriffen um genaue Analogien zu schon Bekanntem aus **MG** handelt, besitzen die meisten eine anschaulich–geometrische Deutung, sodass Sie mit ihnen bald sicher werden umgehen können, insbesondere wenn Sie in anschließenden Kurseinheiten öfter mit ihnen zu arbeiten haben. Auch hier gilt: Sprachen lernt man durch Gebrauch.

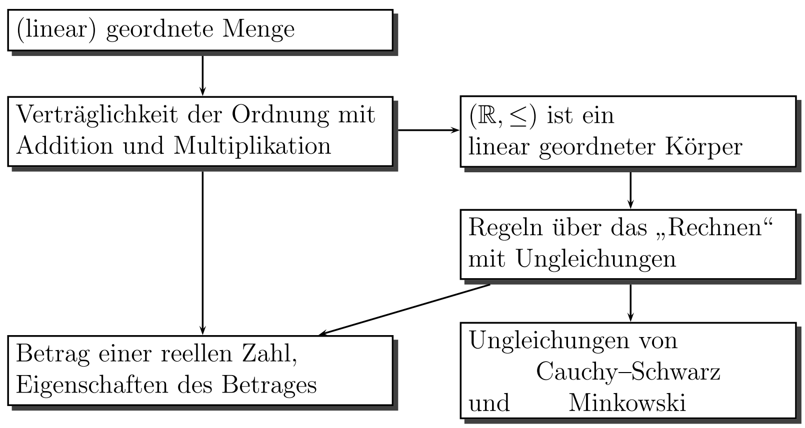
Struktur der Kurseinheit 1:

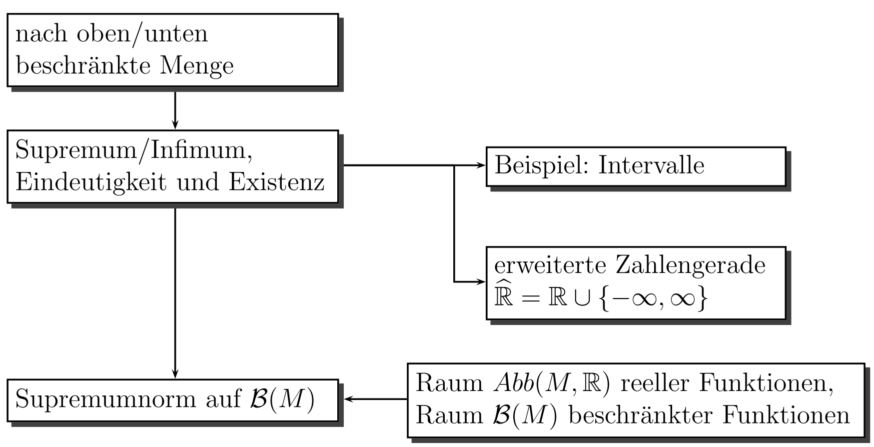


Zielelement 1.1

Lerninhalte: Rückblick und Ergänzungen: Reelle Zahlen







Lernziele:

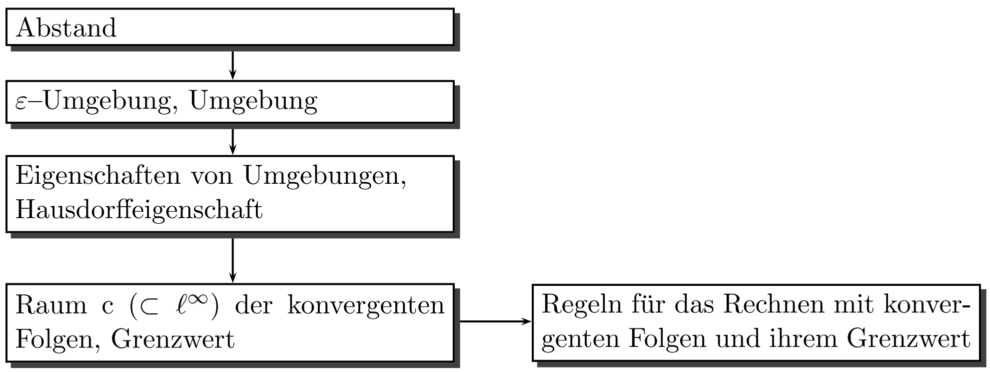
Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Ihnen diese Inhalte aus dem Kurs **MG** (Kapitel 11) wieder geläufig sein.

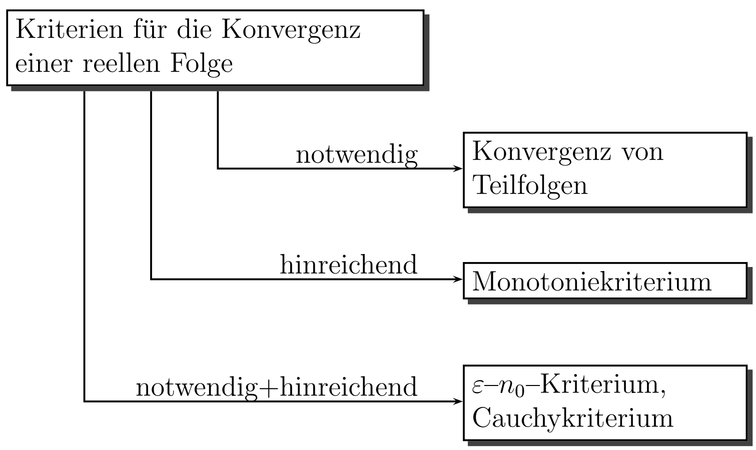
Selbstkontrollelement 1.1

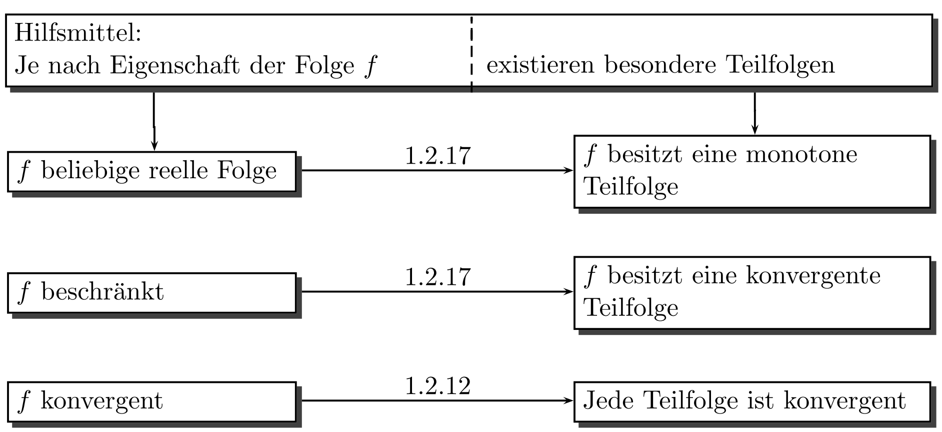
„Sehen“ Sie, dass die Menge $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht nach oben beschränkt ist? – Können Sie einen Beweis angeben?

Zielelement 1.2

Lerninhalte: Rückblick und Ergänzungen: Konvergenz







Lernziele:

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein, den Begriff der Umgebung mit dem der ε–Umgebung in Verbindung zu bringen.

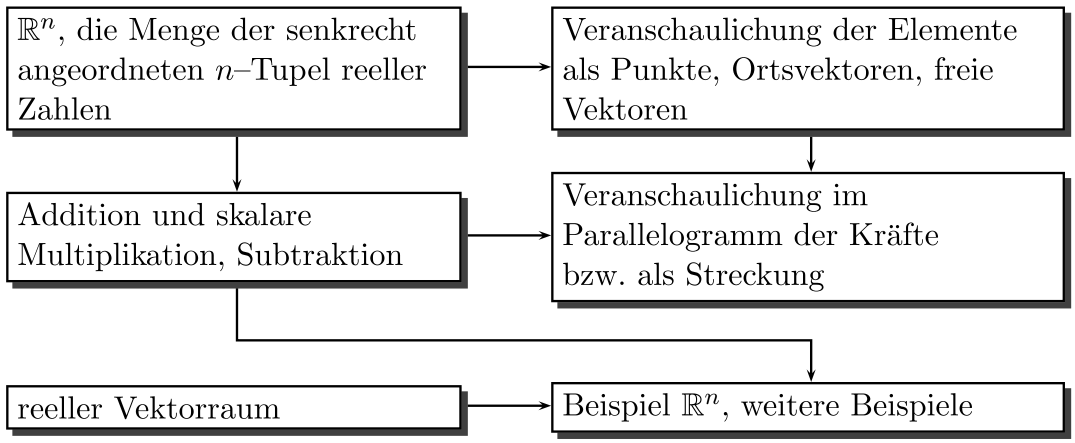
Im Übrigen sollten Ihnen die Inhalte aus dem Kurs **MG** (Kapitel 12) wieder geläufig sein.

Selbstkontrollelement 1.2

Können Sie einige Bedingungen (notwendig und/oder hinreichend) dafür nennen, dass eine Folge keine Cauchyfolge ist?

Zielelement 1.3

Lerninhalte: $\mathbb{R}^n$ als reeller Vektorraum



Lernziele:

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein,

– den Raum $\mathbb{R}^n$ (seine Elemente, die Addition und skalare Multiplikation) zu beschreiben und im Fall $n = 2$ und $n = 3$ geometrisch zu veranschaulichen,

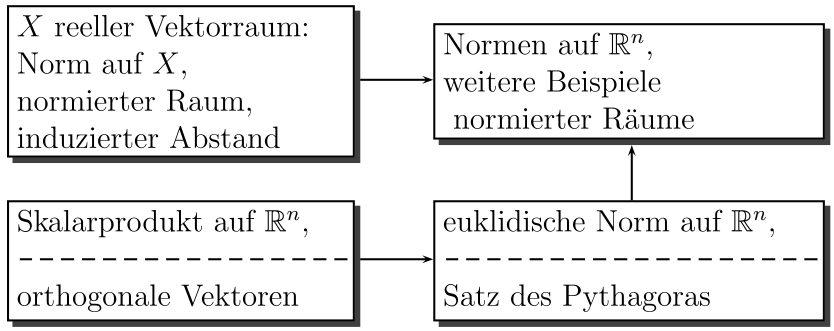
– die allgemeine Struktur des reellen Vektorraums zu beschreiben und $\mathbb{R}^n$ als Beispiel zu erkennen.

Selbstkontrollelement 1.3

Sei X ein reeller Vektorraum, und sei $\emptyset \neq U \subseteq X$. Ist Ihnen klar, dass U genau dann ein Unterraum von X ist (vgl. **MG**, Abschnitt 6.2), wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und für alle $x, y \in U$ der Vektor $\alpha x + \beta y$ in U liegt?

Zielelement 1.4

Lerninhalte: $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum



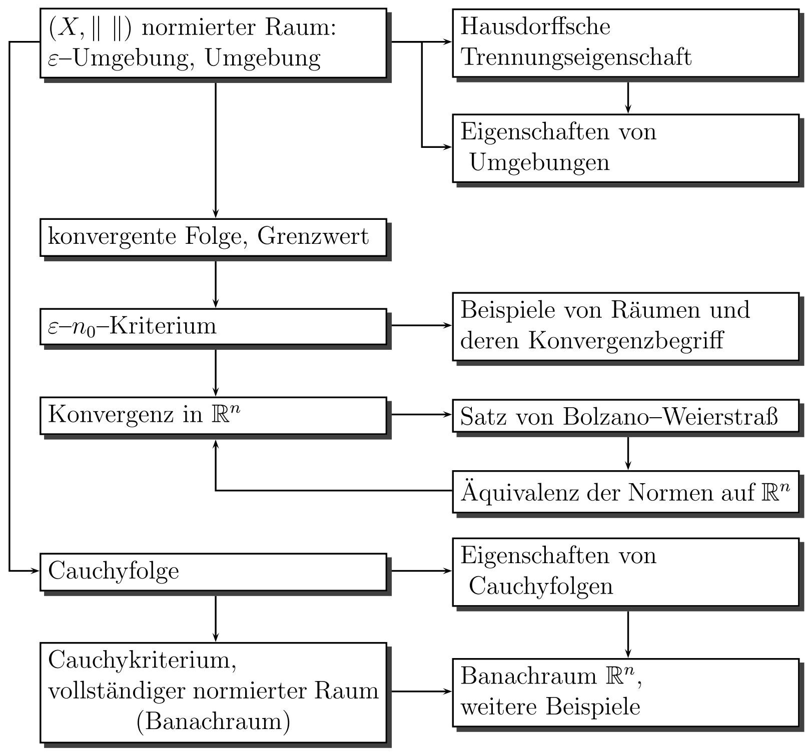
Lernziele:
Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein,

- den Begriff „normierter (reeller Vektor–)Raum" zu definieren und an Beispielen, insbesondere am Beispiel $\mathbb{R}^n$, zu erläutern,
- den von einer Norm induzierten Abstand zu definieren,
- das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ in Zusammenhang zu bringen.

Selbstkontrollelement 1.4
Sei $\big(X, \| \,\|\big)$ ein normierter Raum, d der von $\| \,\|$ induzierte Abstand. „Sehen" Sie, dass d „translationsinvariant" ist, d. h. $d(x+a, y+a) = d(x, y)$ für alle $x, y, a \in X$ erfüllt?

Zielelement 1.5

Lerninhalte: Konvergenz in $\mathbb{R}^n$



Lernziele:

Nach Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein,

– die Begriffe „ε–Umgebung“ und „Umgebung“ zu definieren und ihre wichtigsten Eigenschaften zu nennen,

– den Begriff der konvergenten Folge und ihres Grenzwertes in einem normierten Raum zu definieren und an Beispielen zu erläutern,

– die Konvergenz von Folgen in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ zu charakterisieren,

– den Begriff der Cauchyfolge und den des vollständigen normierten Raumes zu definieren und an Beispielen zu erläutern, insbesondere

– den Raum $\mathbb{R}^n$ als Beispiel eines vollständigen normierten Raumes zu sehen,

und Sie sollten wissen, dass die Normen auf $\mathbb{R}^n$ in dem Sinne äquivalent sind, dass sie alle dieselben Mengen als Umgebungen und denselben Konvergenzbegriff definieren.

Selbstkontrollelement 1.5

„Sehen“ Sie, dass eine Folge in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ mit beliebiger Norm genau dann Cauchyfolge ist, wenn jede der n Koordinatenfolgen Cauchyfolgen in $(\mathbb{R}, | \ |)$, also im Sinne von **MG**, sind?

Kurseinheit 1

$\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

1.0 Einführung

Dieser Kurs baut auf dem Kurs **Mathematische Grundlagen** (im Folgenden kurz: **MG**) auf. Darin haben Sie im Rahmen einer Einführung in die Lineare Algebra und in die Analysis reeller Funktionen erste Kenntnisse, Techniken und Methoden der höheren Mathematik kennen gelernt und erste wichtige mathematische Erfahrungen gesammelt. Zwei Kurse, im Wesentlichen unabhängig voneinander zu studieren, der eine mit Schwerpunkt „Lineare Algebra“, der andere mit Schwerpunkt „Analysis“, sollen die Grundlagen vertiefen und ausbauen und bilden damit die beiden wesentlichen Säulen für das Mathematikstudium.

Der vorliegende Kurs ist der Analysis gewidmet, und das Vorgehen ist so angelegt, dass bestimmte Aspekte aus dem Grundkurs **MG** im Rückblick in einer Weise dargestellt werden, dass der anschließende große Schritt beim Ausbau der Theorie als nahe liegend und als Teil einer generellen Struktur erscheint.

So werden im ersten Abschnitt noch einmal die algebraische Struktur und die Ordnungsstruktur des „linear geordneten Körpers“ $\mathbb{R}$ beleuchtet und gelegentlich ergänzt, also die Strukturen, die das Rechnen mit reellen Zahlen und das Rechnen mit Ungleichungen steuern. Wer den Grundkurs **MG** sorgfältig studiert hat, wird nicht viel Neues finden und den Rückblick rasch durchgehen können. Der zweite Abschnitt zielt auf die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ab. Es wird noch einmal nachvollzogen, wie über „Betrag“ $\longrightarrow$ „Abstand“ $\longrightarrow$ „Umgebung“ der Begriff des Grenzwerts entwickelt wird. Im Hinblick auf spätere Themen wird besonderes Gewicht auf Kriterien gelegt, die die Existenz eines Grenzwerts garantieren. Dabei gewinnt das Cauchysche Konvergenzkriterium besondere Bedeutung, weil es sich leicht in allgemeineren Situationen formulieren lässt (unabhängig davon, ob es dann Gültigkeit besitzt oder nicht).

Im dritten Abschnitt geht es „richtig“ los. Es geht allgemein um reelle Vektorräume ($\mathbb{R}$–Vektorräume, in der Sprache von **MG**, Kapitel 6), insbesondere um den Raum $\mathbb{R}^n$ mit einem $n \in \mathbb{N}$. In der Analysis spielen aber auch Vektorräume eine Rolle, deren Elemente Funktionen sind. Sie lernen erste Beispiele kennen.

Dann startet im vierten und fünften Abschnitt der Prozess „Norm“ $\longrightarrow$ „Abstand“ $\longrightarrow$ „Umgebung“ $\longrightarrow$ „Grenzwert“ in normierten Räumen, insbesondere in $\mathbb{R}^n$. Die Norm übernimmt die Rolle des Betrages, und im Übrigen läuft die Aktion wie gehabt. Natürlich bleiben einige Dinge, die für $\mathbb{R}^1$ geläufig sind, auf der Strecke, weil sie in allgemeinen reellen Vektorräumen einfach nicht erklärt sind, wie z. B. alles, was mit Fragen einer Ordnung zu tun hat. Was bleibt, ist jedenfalls das Cauchysche Konvergenzkriterium, dessen Gültigkeit im normierten Raum $\mathbb{R}^n$ nachgewiesen wird, das aber in anderen normierten Räumen nicht immer gültig ist.

1.1 Rückblick und Ergänzungen: Reelle Zahlen

Wir beginnen mit einem Rückblick auf die reellen Zahlen (Kapitel 11 von **MG**). Dort wurden zunächst die nachstehenden Eigenschaften, „Gesetze“ genannt, zusammengestellt. Der Standpunkt ist der, dass man sich die reellen Zahlen irgendwie gegeben denkt (z. B. als Dezimalbrüche) und Regeln aufstellt, nach denen mit ihnen umzugehen ist. Diese Regeln werden nicht bewiesen, sodass es sich also eigentlich um Axiome handelt. Um eine übersichtliche Basis zu schaffen, versucht man, mit einer möglichst kleinen Zahl von Axiomen zu starten und sich bei allen weiteren Entwicklungen nur auf sie zu berufen. Die erste Gruppe von Axiomen (die Körperaxiome) regeln das Rechnen mit reellen Zahlen, wie Sie es in der Schule trainiert haben.

1.1.1 Eigenschaft ($\mathbb{R}$ als Körper)
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ist ein* **Körper***, d. h., auf* $\mathbb{R}$ *sind zwei Verknüpfungen* $+$ *und* $\cdot$ *mit folgenden Eigenschaften gegeben: Für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i) Kommutativität:

$$x + y = y + x \quad \text{und} \quad x \cdot y = y \cdot x,$$

(ii) Assoziativität:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{und} \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

(iii) Distributivität:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

(iv) Existenz neutraler Elemente: *Es gibt eine reelle Zahl* 0 *(„Null“) und eine davon verschiedene reelle Zahl* 1 *(„Eins“), sodass gilt*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \; x + 0 = x \quad \text{und} \quad x \cdot 1 = x.$$

(v) Existenz inverser Elemente: *Zu jeder reellen Zahl* a *gibt es eine reelle Zahl* x*, sodass* $a + x = 0$ *ist, und zu jeder reellen Zahl* $a \neq 0$ *gibt es eine reelle Zahl* y*, sodass* $a \cdot y = 1$ *ist.*

Sie kennen diese Regeln natürlich in– und auswendig, aber um auf ein paar Feinheiten (Spitzfindigkeiten?) aufmerksam zu machen, die in der Formulierung der obigen Eigenschaften stecken, seien die folgenden Anmerkungen angefügt. Genau genommen handelt es sich bereits um erste Konsequenzen aus den aufgeführten Eigenschaften.

- Die Assoziativgesetze zeigen, dass es bei der Addition mehrerer Zahlen nicht darauf ankommt, welche Summation zuerst ausgeführt wird; daher können die Klammern dort auch weggelassen werden: $(x + y) + z = x + y + z$. Entsprechendes gilt für das Produkt mehrerer Faktoren.

- Das Distributivitätsgesetz hätten wir eigentlich präziser in der Form

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

schreiben müssen, denn auf der rechten Seite der Gleichung ist es keineswegs gleichgültig, in welcher Reihenfolge die drei Operationen $\cdot, +, \cdot$ ausgeführt werden. Die Klammern geben genau an, wie zu verfahren ist: Es müssen erst die beiden Produkte berechnet werden, bevor die Summe gebildet werden kann. Das entspricht der bekannten Regel *„Punktrechnung geht vor Strichrechnung"*, und diese Regel ist bei der Formulierung des Distributivgesetzes unausgesprochen verwendet worden und *wird natürlich auch weiterhin verwendet.*

- Die neutralen Elemente 0 und 1, deren Existenz gefordert ist, sind durch die Eigenschaften (i) bis (iii) bereits eindeutig bestimmt. [Denn ist $0'$ ebenfalls eine reelle Zahl mit $x + 0' = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, so erhält man hieraus für $x = 0$ die Beziehung $0 + 0' = 0$. Da andererseits $x + 0 = x$ insbesondere für $x = 0'$ die Beziehung $0' + 0 = 0'$ liefert, ergibt die Kommutativität $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$, also $0 = 0'$. Entsprechend ergibt sich die Einzigkeit der 1.]

- Die inversen Elemente x und y, deren Existenz gefordert ist, sind ebenfalls eindeutig bestimmt. [Denn gelten etwa für y und y' die Gleichungen $a \cdot y = 1$ und $a \cdot y' = 1$, so folgt aus der ersten Gleichung $(a \cdot y) \cdot y' = 1 \cdot y' = y' \cdot 1 = y'$ und aus der zweiten Gleichung $(a \cdot y') \cdot y = 1 \cdot y = y \cdot 1 = y$. Somit ergibt sich mit $(a \cdot y) \cdot y' = a \cdot (y \cdot y') = a \cdot (y' \cdot y) = (a \cdot y') \cdot y$ die Gleichheit $y' = y$. (Haben Sie bemerkt, welche Eigenschaften von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bei dieser kurzen Überlegung eine Rolle gespielt haben?)]

- Da die zu a inversen Elemente x und y eindeutig bestimmt sind, können sie durch einen Namen eindeutig gekennzeichnet werden:

$$x = -a \quad \text{bzw.} \quad y = a^{-1} \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{a}.$$

- Die Subtraktion und die Division (durch eine Zahl $\neq 0$) wird dann durch

$$a - b := a + (-b) \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$$

eingeführt[1].

- Aus den aufgelisteten („algebraischen“) Eigenschaften können nun alle die üblichen Rechenregeln, welche die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die zugehörigen Klammerregeln betreffen, abgeleitet werden. Der Multiplikationspunkt wird dabei normalerweise weggelassen.

Eine sehr einfache Verschärfung der Eigenschaft „Existenz inverser Elemente“ ist die folgende:

1.1.2 Folgerung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = b$, und, falls $a \neq 0$ ist, gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $ay = b$.

Beweisen Sie diese Aussage (Ü 1.1.1), wobei Sie nur 1.1.1(i)–(v) verwenden.

Sie haben in **MG** weitere Körper kennen gelernt, also Strukturen mit den in 1.1.1 beschriebenen Eigenschaften, z. B. den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ oder $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen

$$0 + 0 := 0,\ 0 + 1 := 1,\ 1 + 0 := 1,\ 1 + 1 := 0,$$
$$0 \cdot 0 := 0,\ 0 \cdot 1 := 0,\ 1 \cdot 0 := 0,\ 1 \cdot 1 := 1.$$

Auch die folgende Menge von 2×2–Matrizen

$$\mathbf{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein Körper mit der üblichen Matrizenaddition (**MG**, Kapitel 2)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix}$$

und der üblichen Matrizenmultiplikation (**MG**, Kapitel 2)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}.$$

Sie sehen bereits auf einen Blick, dass jedenfalls die Summe und das Produkt von zwei Elementen aus **C** wieder in **C** liegen, und da die Matrizenverknüpfungen assoziativ und distributiv sind, gelten Assoziativität und Distributivität auch für **C**. Nicht selbstverständlich ist die Kommutativität, da diese ja nicht allgemein

[1] Das Zeichen „:=“ kennen Sie wahrscheinlich schon: Der Ausdruck auf der Seite des Doppelpunktes wird durch den Ausdruck auf der anderen des Gleichheitszeichens definiert.

für Matrizen gilt. Diese ist also extra nachzuprüfen! Die Nullmatrix bzw. die Einheitsmatrix

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind natürlich die neutralen Elemente bezüglich der Addition bzw. bezüglich der Multiplikation, und

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie y^{-1} im Fall $y := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ (Ü 1.1.2)! Zeigen Sie ferner:

Wird $\mathbf{i} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} \quad \text{und} \quad \mathbf{i}^2 := \mathbf{i}\,\mathbf{i} = -\mathbf{1}.$$

Wir kommen zur Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$. In **MG** wurde diese mithilfe der Relation $<$ („kleiner“) beschrieben. In der Analysis wird viel öfter die Relation $\leq$ („kleiner oder gleich“) gebraucht, da sie etwas schwächer als $<$ und daher oft leichter nachzuweisen ist. Und da wir in diesem Kurs den Strukturgedanken betonen wollen, beginnen wir mit dem allgemeinen Begriff der „geordneten Menge“.

1.1.3 Definition (geordnete Menge)

Sei M eine nichtleere Menge. Auf M sei eine **Relation** *υ gegeben, d. h., υ ist eine Teilmenge von $M \times M$. Gilt $(x, y) \in \upsilon$, so schreiben wir*

$$x\,\upsilon\,y \quad \textit{(lies: x vor y).}$$

Die Relation υ heißt eine **Ordnung** *auf M und das Paar (M, υ) eine* **geordnete Menge**, *wenn für alle $x, y, z \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $x\,\upsilon\,x$ *(Reflexivität),*

(ii) $(x\,\upsilon\,y) \wedge (y\,\upsilon\,x) \Longrightarrow x = y$ *(Antisymmetrie),*

(iii) $(x\,\upsilon\,y) \wedge (y\,\upsilon\,z) \Longrightarrow x\,\upsilon\,z$ *(Transitivität).*

Gilt über (i), (ii) *und* (iii) *hinaus auch noch*

(iv) $(x\,\upsilon\,y) \vee (y\,\upsilon\,x)$,

so heißt υ eine **lineare Ordnung** *auf M und (M, υ) eine* **linear geordnete Menge**.

Die Forderungen (i), (ii) und (iii), vor allem (iii), sind anschauliche Bedingungen, wie man sie an eine Relation stellen würde, wenn es um Größenvergleiche geht. Dabei ist es durchaus zugelassen, dass gelegentlich zwei „Größen", also Elemente von M, gar nicht miteinander verglichen werden können, d. h., dass weder $x \upsilon y$ noch $y \upsilon x$ gilt. Die Bedingung (iv) erst garantiert die unbeschränkte Vergleichbarkeit.

1.1.4 Beispiele

Sei M eine Menge.

(a) Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Teilmengen von M ($\mathcal{P}$ heißt oft die **Potenzmenge** von M). Die Relation υ sei gegeben durch

$$x \upsilon y \;:\Longleftrightarrow\; x \subseteq y,$$

d. h., sind x und y Teilmengen von M, so schreiben wir $x \upsilon y$, wenn x Teilmenge von y ist. (Der Doppelpunkt vor dem Zeichen $\Longleftrightarrow$ bedeutet, dass die Äquivalenz definitionsgemäß gilt.) Dann ist $(\mathcal{P}, \upsilon)$ eine geordnete Menge, denn:

(i) Ist $x \in \mathcal{P}$, d. h. $x \subseteq M$, so gilt

$$x \subseteq x, \quad \text{d. h.} \quad x \upsilon x.$$

(ii) Sind $x, y \in \mathcal{P}$, d. h. $x \subseteq M$, $y \subseteq M$, so gilt

$$(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x) \implies x = y, \quad \text{d. h.} \quad (x \upsilon y) \wedge (y \upsilon x) \implies x = y.$$

(iii) Sind $x, y, z \in \mathcal{P}$, d. h. $x \subseteq M$, $y \subseteq M$, $z \subseteq M$, so gilt

$$(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z) \implies x \subseteq z, \quad \text{d. h.} \quad (x \upsilon y) \wedge (y \upsilon z) \implies x \upsilon z.$$

Die Bedingung (iv) ist i. Allg. nicht erfüllt. [Ist z. B. $M := \{0, 1, 2\}$, so sind $\{1\}$ und $\{2\}$ Teilmengen von M, aber es gilt weder $\{1\} \subseteq \{2\}$ noch $\{2\} \subseteq \{1\}$.]

(b) Sei $M := \mathbb{Z}$ (Menge aller ganzen Zahlen), und die Relation υ sei definiert durch

$$x \upsilon y \;:\Longleftrightarrow\; y - x \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dann ist (M, υ) eine linear geordnete Menge, denn es gilt:

(i) Ist $x \in \mathbb{Z}$, so gilt $x - x = 0 \in \mathbb{N}_0$, d. h. $x \upsilon x$.

(ii) Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ gegeben mit $x \upsilon y$ und $y \upsilon x$, so bedeutet dies

$$y - x \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad -(y - x) = x - y \in \mathbb{N}_0.$$

Eine ganze Zahl aus $\mathbb{N}_0$, deren Negatives auch in $\mathbb{N}_0$ liegt, kann aber nur die Null sein, d. h. $y - x = 0$ und somit $y = x$.

(iii) Sind $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x \mathrel{\upsilon} y$ und $y \mathrel{\upsilon} z$ gegeben, so gilt also $y - x \in \mathbb{N}_0$ und $z - y \in \mathbb{N}_0$. Die Summe zweier Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ ist aber wieder in $\mathbb{N}_0$; daher gilt insbesondere $z - x = (y - x) + (z - y) \in \mathbb{N}_0$, d. h. $x \mathrel{\upsilon} z$.
Aber auch die Bedingung (iv) von 1.1.3 ist erfüllt, denn für jede ganze Zahl w gilt $w \in \mathbb{N}_0$ oder $-w \in \mathbb{N}_0$, insbesondere gilt dies für $w := y - x$, wenn $x, y \in \mathbb{Z}$ gegeben sind, d. h., es gilt

$$y - x \in \mathbb{N}_0 \quad \text{oder} \quad -(y - x) \in \mathbb{N}_0,$$

was

$$x \mathrel{\upsilon} y \quad \text{oder} \quad y \mathrel{\upsilon} x$$

bedeutet.

Wir können nun die entscheidende Aussage über die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen formulieren.

1.1.5 Eigenschaft ($\mathbb{R}$ als linear geordneter Körper)
Es existiert eine lineare Ordnung $\leq$ („kleiner oder gleich") auf $\mathbb{R}$, sodass $(\mathbb{R}, \leq)$ eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:

(i) *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y \implies x + z \leq y + z$*
(Verträglichkeit mit der Addition).

(ii) *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y$ und $0 \leq z \implies xz \leq yz$*
(Verträglichkeit mit der Multiplikation).

Eine Beziehung $x \leq y$ nennt man meist eine **Ungleichung** oder **Abschätzung** (x wird durch y „nach oben abgeschätzt" bzw. y wird durch x „nach unten abgeschätzt"). Die Verträglichkeitseigenschaften (i) und (ii) besagen also, dass eine Ungleichung ihre Gültigkeit nicht verliert, wenn man auf beiden Seiten dieselbe reelle Zahl addiert bzw. beide Seiten mit derselben reellen Zahl z multipliziert, wobei hier allerdings $0 \leq z$ vorausgesetzt ist.

Es sei noch angemerkt, dass wir auch diese Aussage 1.1.5 (ähnlich wie die Aussage 1.1.1 „$\mathbb{R}$ ist ein Körper") nicht beweisen, sondern als gegeben annehmen, die Aussage also als Axiom auffassen. Tatsächlich wird auch nur hierauf Bezug genommen, wenn die handlichen Regeln für das Arbeiten mit Ungleichungen, die Sie zum großen Teil ja auch schon kennen und benutzt haben, hergeleitet werden. Bevor wir einige davon zur Erinnerung hier noch einmal zusammenstellen, wollen wir bekannte Sprechweisen wiederholen, die üblich und praktisch sind.

1.1.6 Definition

Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) *$y \geq x$ („y ist größer oder gleich x“) bedeutet dasselbe wie $x \leq y$.*

(ii) *$x < y$ („x ist kleiner als y“) bedeutet dasselbe wie $x \leq y$ und $x \neq y$.*

(iii) *$y > x$ („y ist größer als x“) bedeutet dasselbe wie $x < y$.*

(iv) *y heißt* **nichtnegativ** *(bzw.* **positiv***), wenn $0 \leq y$ (bzw. $0 < y$) gilt.*

(v) *x heißt* **nichtpositiv** *(bzw.* **negativ***), wenn $x \leq 0$ (bzw. $x < 0$) gilt.*

Ebenso wie $x \leq y$ nennt man auch Beziehungen wie $y \geq x$, $x < y$, $y > x$ Ungleichungen oder Abschätzungen. Mit diesen Bezeichnungen lässt sich die Linearität der Ordnung auf $\mathbb{R}$ noch prägnanter formulieren, in **MG** „Trichotomie“ genannt:

Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Diese Aussage beinhaltet zwei Teilaussagen:

(1) *Mindestens* eine der drei Beziehungen trifft zu.

(2) *Höchstens* eine der drei Beziehungen trifft zu.

Zu (1): Die Linearität der Ordnung besagt, dass mindestens eine der Beziehungen

$$x \leq y \quad \text{oder} \quad x \geq y$$

zutrifft. Im ersten Fall bestehen die beiden Möglichkeiten

$$x \leq y \quad \text{und} \quad x \neq y \quad (\text{d. h. } x < y)$$

oder

$$x \leq y \quad \text{und} \quad x = y \quad (\text{insbesondere } x = y).$$

Entsprechend folgt aus $x \geq y$, dass

$$x > y \quad \text{oder} \quad x = y$$

gilt. Insgesamt ist damit (1) gezeigt.

Zu (2): Da $x < y$ insbesondere $x \neq y$ bedeutet, können $x < y$ und $x = y$ nicht gleichzeitig erfüllt sein. Entsprechend können die beiden Beziehungen $x > y$ und $x = y$ nicht gleichzeitig richtig sein. Es bleibt nur noch zu überlegen, dass

$$x < y \quad \text{und} \quad x > y$$

nicht gleichzeitig bestehen können. Wäre es doch der Fall, so wären auch

$$x \leq y \quad \text{und} \quad y \leq x \tag{1.1:1}$$

gleichzeitig richtig (denn aus $x < y$ folgt $x \leq y$, und aus $y < x$ folgt $y \leq x$). Aus (1.1:1) würde wegen der Antisymmetrie der Ordnung sofort $x = y$ folgen. Dies widerspricht aber unserer Voraussetzung, dass $x < y$ gilt. Unsere Annahme, $x < y$ und $x > y$ würden gleichzeitig gelten, führt also auf einen Widerspruch und muss daher falsch sein.

Ähnlich wie aus den Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ (vgl. 1.1.1) die Regeln über das Rechnen mit reellen Zahlen fließen, ergeben sich aus 1.1.5 alle Regeln über das Umgehen mit Ungleichungen. Der folgende Satz fasst die wichtigsten dieser Regeln zusammen. Bei der Formulierung werden oft zwei Ungleichungen als eine **Doppelungleichung** zusammengefasst; z. B. bedeutet

„$a < b \leq c$“ dasselbe wie „$a < b$ und $b \leq c$“,

und entsprechend sind andere Doppelungleichungen zu interpretieren.

1.1.7 Satz

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $a < b \implies a + c < b + c$
(Verträglichkeit von $<$ mit der Addition.)

(ii) $a \leq b$ *und* $c \leq d \implies a + c \leq b + d$
$a < b$ *und* $c \leq d \implies a + c < b + d$
(Gleichgerichtete Ungleichungen „darf man addieren“.)

(iii) $a < b$ *und* $0 < c \implies ac < bc$
(Verträglichkeit von $<$ mit der Multiplikation.)

(iv) $0 \leq a \leq b$ *und* $0 \leq c \leq d \implies ac \leq bd$
$0 \leq a < b$ *und* $0 < c \leq d \implies ac < bd$
(Gleichgerichtete Ungleichungen zwischen nichtnegativen Zahlen „dürfen miteinander multipliziert“ werden.)

(v) $a \leq b$ *und* $c < 0 \implies ac \geq bc$
$a < b$ *und* $c < 0 \implies ac > bc$
(Multiplikation mit einer negativen Zahl „kehrt das Ungleichheitszeichen um“.)

(vi) $0 < a \implies 0 < \frac{1}{a}$
$0 < a < b \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(vii) $0 < 1$

Die Beweise finden Sie im Wesentlichen bereits in **MG**, Kapitel 11. Es wären nur die Fälle zu untersuchen, wo aufgrund des Zeichens „$\leq$“ das Gleichheitszeichen auftreten könnte. □

Sie haben in **MG** viel Gelegenheit gehabt, die eine oder andere dieser Regeln anzuwenden, und werden das inzwischen intuitiv richtig machen. Um Sie in Übung zu halten (und weil wir später darauf zurückgreifen werden), sollen hier zwei wichtige Ungleichungen notiert und bewiesen werden. Die Bedeutung der Ungleichungen erkennen Sie schon daran, dass sie eigene Namen haben. Dabei (und im Rest dieses Abschnitts) verwenden wir den Betrag $|a|$ einer reellen Zahl a, der Ihnen aus **MG** vertraut ist. In 1.2.2 werden wir einige seiner Eigenschaften noch einmal zusammenstellen.

1.1.8 Satz (Cauchy–Schwarzsche und Minkowskische Ungleichung)
Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $y_1, y_2, \dots, y_n$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

(Cauchy–Schwarzsche Ungleichung[2]),

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

(Minkowskische Ungleichung[3]).

Beweis:
(i) Wir zeigen, dass sogar

(1.1:2) $$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

gilt, woraus dann sofort die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung folgt.

[2]Augustin Louis Cauchy (sprich: Koschi), 1789–1857; Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921.

[3]Hermann Minkowski, 1864–1909.

Wenn alle x_k oder alle y_k null sind, dann sind die Ungleichungen sogar Gleichungen und offensichtlich richtig. Wir können uns also auf den Fall $\alpha := x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$ und $\beta := y_1^2 + \ldots + y_n^2 \neq 0$ beschränken: Dann ist

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| - |y_k|)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - 2|x_k||y_k| + y_k^2) = \alpha - 2\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| + \beta,$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\alpha = \beta = 1$ ist. Dann haben wir

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq 1 = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta},$$

und das ist für diesen Fall gerade die Ungleichung (1.1:2).

Nun seien α und β beliebig, aber $\neq 0$, also > 0. Dann betrachten wir statt der x_k und y_k die Zahlen

$$x'_k := \frac{x_k}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{und} \quad y'_k := \frac{y_k}{\sqrt{\beta}} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Für diese gilt

$$\alpha' := \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 \quad \text{und entsprechend} \quad \beta' = 1;$$

für solche Zahlen haben wir die Ungleichung (1.1:2) aber schon bewiesen, d. h., es gilt $\sum_{k=1}^{n} |x'_k||y'_k| \leq 1$, ausführlich geschrieben

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k||y_k|}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} \leq 1,$$

was wegen $\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k||y_k|}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k|$ durch Multiplikation mit $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} > 0$ genau die behauptete Ungleichung (1.1:2) ergibt.

(ii) Damit ist die Hauptarbeit schon getan. Denn es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 &= \alpha + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \beta \\
&\leq \alpha + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \beta \qquad \text{[Cauchy–Schwarzsche Ungleichung!]} \\
&= (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2.
\end{aligned}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Wurzel, so folgt die Minkowskische Ungleichung, da die auftretenden Größen alle nichtnegativ sind. □

Die Ordnung, die $\mathbb{R}$ zu einem linear geordneten Körper macht, tut dies auch mit $\mathbb{Q}$. Es muss also noch eine Eigenschaft hinzu kommen, die $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Diese Eigenschaft, die Sie in **MG** in verschiedenen Gewändern, als „Schnittaxiom“, „Supremumsprinzip“ oder „Prinzip der Intervallschachtelung“, kennen gelernt haben, läuft auf eine Vollständigkeitseigenschaft („Lückenlosigkeit der Zahlengeraden“) hinaus, die $\mathbb{R}$ besitzt, $\mathbb{Q}$ aber nicht. Hier beschränken wir uns auf die Beschreibung des Supremumsprinzips.

1.1.9 Definition (beschränkte Menge)
Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, und sei $s \in \mathbb{R}$.

(i) *s heißt eine* **obere Schranke** *(bzw. eine* **untere Schranke***) von M, wenn*

$$\forall\, x \in M : \, x \leq s \qquad \text{(bzw. } \forall\, x \in M : \, s \leq x\text{)}$$

gilt.

(ii) *M heißt* **nach oben beschränkt** *(bzw.* **nach unten beschränkt***), wenn es eine obere Schranke (bzw. eine untere Schranke) von M gibt.*

(iii) *M heißt* **beschränkt***, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Ist beispielsweise $M := \mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen, so ist jedes s mit $s \leq 0$ eine untere Schranke von M; $\mathbb{R}_+$ ist also nach unten beschränkt. $\mathbb{R}_+$ besitzt jedoch keine obere Schranke, denn wäre $s \in \mathbb{R}$ obere Schranke von $\mathbb{R}_+$, so wäre $s \geq 1$ wegen $1 \in \mathbb{R}_+$, und daher wäre $s + 1 \in \mathbb{R}_+$, aber es gilt $s + 1 > s$; folglich wäre s doch keine obere Schranke von $\mathbb{R}_+$. Aus diesem Widerspruch folgt, dass $\mathbb{R}_+$ nicht nach oben beschränkt ist. $\mathbb{R}_+$ ist folglich auch nicht beschränkt.

1.1.10 Definition (Supremum, Infimum)
Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, und sei $S \in \mathbb{R}$.

(i) *S heißt* **Supremum** *(oder* **obere Grenze** *oder* **kleinste obere Schranke***) von M, wenn*

S eine obere Schranke von M

ist und

$S \leq s$ für jede obere Schranke $s \in \mathbb{R}$ von M

gilt (Letzteres heißt: Kein $s < S$ ist obere Schranke von M).

(ii) *S heißt* **Infimum** *(oder* **untere Grenze** *oder* **größte untere Schranke***) von M, wenn*

$$S \text{ eine untere Schranke von } M$$

ist und

$$s \leq S \text{ für jede untere Schranke } s \in \mathbb{R} \text{ von } M$$

gilt (Letzteres heißt: Kein $s > S$ ist untere Schranke von M).

Mit dieser Definition ist noch nicht ausgesagt, dass jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ein Supremum oder ein Infimum besäße. Aber wenn es vorhanden ist, dann ist es eindeutig bestimmt, denn es gilt:

1.1.11 Satz (Eindeutigkeit des Supremums/Infimums)
Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.
Das *Supremum von M (bzw.* **das** *Infimum von M) wird, falls vorhanden, mit*

$$\sup M \quad \textit{bzw.} \quad \inf M$$

bezeichnet.

Beweis:
Seien S_1 und S_2 obere Grenzen von M. Dann gilt $S_1 \leq S_2$ (weil S_2 obere Schranke und S_1 kleinste obere Schranke von M ist). Ebenso gilt $S_2 \leq S_1$. Also folgt $S_1 = S_2$. Entsprechend beweisen Sie die Eindeutigkeit des Infimums (falls vorhanden).
$\square$

Wie schon betont, ist bisher über die Existenz des Supremums bzw. Infimums noch nichts gesagt. Und tatsächlich kann sie aus den bisher aufgezählten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ nicht gefolgert werden. Die folgende Aussage ist also eigentlich ein Axiom.

1.1.12 Eigenschaft (Existenz des Supremums)
Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Hieraus kann man folgern, dass *jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen ein Infimum in $\mathbb{R}$ besitzt* (vgl. Ü 1.1.5).

Es sei hier ohne Beweis angemerkt, dass $\mathbb{R}$ durch die Eigenschaften (Axiome) 1.1.1, 1.1.5 und 1.1.12 „im Wesentlichen“ (bis auf Isomorphie) eindeutig festgelegt ist.

Beachten Sie, dass das Supremumsprinzip 1.1.12 eine Existenzaussage macht, es wird die Existenz von bestimmten reellen Zahlen postuliert. Die Wichtigkeit einer solchen Existenzaussage mag Ihnen deutlich werden, wenn ich Ihnen verrate, dass ein Großteil der Mathematik darin besteht, die Existenz von Objekten (meist Lösungen von irgendwie gearteten Gleichungen oder Gleichungssystemen) nachzuweisen (und dann rechnerisch zu bestimmen, was allzu oft nur näherungsweise möglich ist). Z. B. haben Sie in **MG** gesehen, wie mithilfe des Supremumsprinzips die Existenz von p–ten Wurzeln aus einer nichtnegativen Zahl nachgewiesen wurde.

Das Supremum (bzw. Infimum) einer nichtleeren Menge existiert nach Definition 1.1.10 höchstens dann, wenn die Menge nach oben (bzw. nach unten) beschränkt ist. Um dem abzuhelfen, erweitert man $\mathbb{R}$. Dabei lässt man sich von der Vorstellung leiten, die Zahlengerade nach rechts hin durch einen „unendlich fernen“ Punkt ∞ (gelesen: unendlich) und nach links durch einen „unendlich fernen“ Punkt $-\infty$ (gelesen: minus unendlich) zu ergänzen. Natürlich sind ∞ und $-\infty$ neue (voneinander verschiedene) Objekte und *keine* reellen Zahlen.

1.1.13 Definition (Erweiterung von $\mathbb{R}$)

(i) $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *heißt* **erweiterte reelle Zahlengerade**.

(ii) *Definitionsgemäß sei* $-\infty < \infty$ *und* $-\infty < x < \infty$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}$.

(iii) *Für* $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, *wird definiert:*
$\sup M := \infty$, *falls* M *nicht nach oben beschränkt ist,*
$\inf M := -\infty$, *falls* M *nicht nach unten beschränkt ist.*

Die Definition (ii) erweitert die Ordnung $\leq$ von $\mathbb{R}$ auf $\widehat{\mathbb{R}}$. ((ii) bedeutet ja insbesondere $-\infty \leq \infty$, $-\infty \leq x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $x \leq \infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}$; man kann sich überlegen, dass $(\widehat{\mathbb{R}}, \leq)$ durch diese Erweiterung tatsächlich zu einer linear geordneten Menge wird.) Durch Definition (iii) besitzt nun *jede* nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ Supremum und Infimum, allerdings nicht immer in $\mathbb{R}$.

Übrigens wird für die leere Menge oft $\sup \emptyset := -\infty$ und $\inf \emptyset := \infty$ definiert, aber das mutet schon fast pervers an, ist aber konsequent: Denn für die leere Menge ist jedes $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke und auch eine untere Schranke. (Insofern ist $\emptyset$ beschränkt.) Die kleinste obere Schranke in $\widehat{\mathbb{R}}$ ist somit $-\infty$ und die größte untere Schranke ∞.

An den Intervallen, die Sie auch schon aus **MG** kennen, lässt sich Supremum und Infimum noch einmal anschaulich erläutern.

1.1.14 Beispiele (Intervalle)

(i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Mengen, **Intervalle** genannt, beschränkt:

$$
\begin{aligned}
]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \textit{(offenes Intervall}^4\textit{)}, \\
]a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} && \textit{(links halboffenes Intervall)}, \\
[a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} && \textit{(rechts halboffenes Intervall)}, \\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} && \textit{(abgeschlossenes Intervall)}.
\end{aligned}
$$

Das Infimum ist a, das Supremum ist b, falls die jeweilige Menge nichtleer ist.

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Mengen, ebenfalls **Intervalle** genannt, nicht beschränkt:

$$
\begin{aligned}
]-\infty,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}, \\
]-\infty,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}, \\
]-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \le b\}, \\
]a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}, \\
[a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < \infty\}.
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\inf\,]-\infty,\infty[&= \inf\,]-\infty,b[\;=\; \inf\,]-\infty,b] \;=\; -\infty, \\
\inf\,]a,\infty[&= \inf\,[a,\infty[\;=\; a, \\
\sup\,]-\infty,\infty[&= \sup\,]a,\infty[\;=\; \sup\,[a,\infty[\;=\; \infty, \\
\sup\,]-\infty,b[&= \sup\,]-\infty,b] \;=\; b.
\end{aligned}
$$

Für die unter (i) und (ii) betrachteten Intervalle heißt a der **linke Endpunkt** und b der **rechte Endpunkt** des Intervalls.

Sie sehen an diesen Beispielen, dass das Supremum oder das Infimum (oder auch beide) zur Menge gehören kann, aber nicht notwendig muss. Ist M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, so heißt

$$\sup M \quad \text{das } \textbf{Maximum} \text{ von } M, \text{ wenn } \sup M \in M$$

gilt, und wird dann mit $\max M$ bezeichnet. Entsprechend heißt

$$\inf M \quad \text{das } \textbf{Minimum} \text{ von } M, \text{ wenn } \inf M \in M$$

[4] Wir schreiben $]a,b[$ statt (a,b), wie Sie es aus **MG** gewohnt sind, um das Intervall von dem Paar $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besser unterscheiden zu können; konsequenterweise verwenden wir die Bezeichnungen $]a,b]$ bzw. $[a,b[$ für die halboffenen Intervalle.

gilt, und wird dann mit $\min M$ bezeichnet.

Sie sehen auch, dass die Intervalle $]a,b[\,,\ ]a,b]\,,\ ]-\infty,\infty[\,,\ ]-\infty,b[\,,\ ]-\infty,b]$ und $]a,\infty[$ kein Minimum in $\mathbb{R}$ besitzen und die Intervalle $]a,b[\,,\ [a,b[\,,\ ]-\infty,\infty[\,,$ $]-\infty,b[\,,\ ]a,\infty[$ und $[a,\infty[$ kein Maximum in $\mathbb{R}$ haben.

In diesem Zusammenhang notieren wir noch die folgende sehr einsichtige Aussage, vgl. **MG**, Proposition 11.2.40:

1.1.15 Bemerkung

Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so besitzt die Menge $M := \{a_1, \ldots, a_n\}$ Maximum und Minimum (in $\mathbb{R}$). Im Fall $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} \max\{a_1, a_2\} &= \tfrac{1}{2}\left(a_1 + a_2 + |a_1 - a_2|\right), \\ \min\{a_1, a_2\} &= \tfrac{1}{2}\left(a_1 + a_2 - |a_1 - a_2|\right). \end{aligned}$$

Eng verknüpft mit dem Begriff der beschränkten Menge ist der der beschränkten Funktion (**MG**, Kapitel 13). Hier legen wir (im Hinblick auf spätere Entwicklungen) eine beliebige Menge M als Definitionsbereich zugrunde, d. h., M braucht nicht unbedingt eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu sein. Zuvor erinnern wir an rationale Operationen, die für reellwertige Funktionen definiert sind. Es geht also um die Menge $Abb(M, \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, der so genannten **reellen Funktionen**.

1.1.16 Definition und Satz (Raum $\boldsymbol{Abb(M, \mathbb{R})}$)

Sei M eine nichtleere Menge. Sind $f, g \in Abb(M, \mathbb{R})$ und ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind die folgenden Funktionen ebenfalls in $Abb(M, \mathbb{R})$:

(i) $f + g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $f - g : M \longrightarrow \mathbb{R}$, *definiert durch* $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ *bzw.* $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ *für jedes* $x \in M$,

(ii) $\alpha f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, *definiert durch* $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ *für jedes* $x \in M$,

(iii) $fg : M \longrightarrow \mathbb{R}$, *definiert durch* $(fg)(x) := f(x)g(x)$ [5] *für jedes* $x \in M$,

(iv) $\frac{f}{g} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, *definiert durch* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$, *falls* $g(x) \neq 0$ *für jedes* $x \in M$ *ist.*

1.1.17 Definition (beschränkte Funktion)

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f \in Abb(M, \mathbb{R})$ heißt **beschränkt**, *wenn die Menge der Funktionswerte beschränkt ist, d. h. (vgl. Ü 1.1.4), wenn*

$$\|f\|_\infty := \sup\Big\{|f(x)| \;\Big|\; x \in M\Big\} < \infty$$

[5] Im Fall $f = g$ schreibt man natürlich meist f^2 statt ff.

gilt oder (äquivalent), wenn es eine reelle Zahl $K > 0$ gibt mit

$$|f(x)| \leq K \quad \textit{für jedes } x \in M.$$

Die Zahl $\|f\|_\infty$ heißt die **Supremumnorm** *der Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Teilmenge aller beschränkten Funktionen in $Abb(M, \mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(M)$.*

Der Fall $M = \mathbb{N}$ sei besonders hervorgehoben. Denn $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist nichts anderes als die Menge aller reellen Folgen, und in 1.1.17 ist also auch erklärt, was eine beschränkte Folge ist. Ebenso kann der folgende Satz als Satz über beschränkte Folgen interpretiert werden.

1.1.18 Satz (Raum $\mathcal{B}(M)$ der beschränkten Funktionen)
Sei M eine nichtleere Menge, seien $f, g \in \mathcal{B}(M)$, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$f+g,\ f-g,\ \alpha f \quad \textit{und} \quad fg$$

ebenfalls in $\mathcal{B}(M)$.

Beweis:
(i) Für jedes $x \in M$ gilt (betrachten Sie zunächst immer das obere Zeichen, danach das untere Zeichen)

$$\begin{aligned} |(f \pm g)(x)| &= |f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \sup\Big\{|f(y)| \ \Big| \ y \in M\Big\} + \sup\Big\{|g(y)| \ \Big| \ y \in M\Big\} \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty. \end{aligned}$$

Also ist $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ eine obere Schranke der Menge $\{|(f+g)(x)| \mid x \in M\}$ und von $\{|(f-g)(x)| \mid x \in M\}$. Da $\|f+g\|_\infty$ bzw. $\|f-g\|_\infty$ nach Definition die kleinste obere Schranke dieser Mengen ist, gilt

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{bzw.} \quad \|f-g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

(ii) Für jedes $x \in M$ gilt

$$|(\alpha f)(x)| = |\alpha f(x)| = |\alpha| \ |f(x)| \leq |\alpha| \ \|f\|_\infty < \infty.$$

Folglich ergibt sich

$$\|\alpha f\|_\infty \leq |\alpha| \ \|f\|_\infty < \infty.$$

(iii) Für jedes $x \in M$ gilt

$$|(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)| \ |g(x)| \leq \|f\|_\infty \ \|g\|_\infty < \infty.$$

Also folgt $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \, \|g\|_\infty < \infty$. □

Wir notieren noch, dass die Supremumnorm $\| \; \|_\infty$ die typischen Eigenschaften eines Betrages hat. (Wir kommen im vierten Abschnitt darauf zurück, siehe 1.4.1.)

1.1.19 Satz (Supremumnorm auf $\mathcal{B}(M)$)

Sei M eine nichtleere Menge. Dann gilt für alle $f, g \in \mathcal{B}(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) $\|f\|_\infty \geq 0$ *und* $(\|f\|_\infty = 0 \iff f = \widehat{0}\,)$[6] *(Definitheit),*

(ii) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \; \|f\|_\infty$ *(positive Homogenität),*

(iii) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ *(Dreiecksungleichung).*

Außerdem gilt

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Beweis:

Zu (i): Dass $\|f\|_\infty \geq 0$ gilt, ist klar, weil das Supremum über nichtnegative Zahlen gebildet wird, und auch $\|\widehat{0}\|_\infty = 0$ ist klar, da die Menge der Funktionswerte die Menge $\{0\}$ ist, sodass das Supremum dieser Menge $= 0$ ist. Nun sei $f \neq \widehat{0}$. Dann gibt es ein $a \in M$ mit $|f(a)| > 0$. Es folgt $\|f\|_\infty \geq |f(a)| > 0$. Also erhalten wir durch Kontraposition die Inklusion $\|f\|_\infty = 0 \Longrightarrow f = \widehat{0}$. Damit ist (i) bewiesen.

Zu (ii): Im Beweis des vorherige Satzes wurde $\|\alpha f\|_\infty \leq |\alpha| \|f\|_\infty$ bewiesen. Ist $\alpha \neq 0$, so können wir $\beta := \frac{1}{\alpha}$ und $g := \alpha f$ betrachten und erhalten $\|\beta g\|_\infty \leq |\beta| \|g\|_\infty$, d. h. $\|f\|_\infty \leq |\beta| \|\alpha f\|_\infty = \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha f\|_\infty$; Multiplikation mit $|\alpha| > 0$ ergibt $|\alpha| \|f\|_\infty \leq \|\alpha f\|_\infty$ und damit die Gleichheit (ii).

Den Beweis von (iii) und von $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ finden Sie bereits beim vorherigen Satz 1.1.18. □

Zum Schluss dieses Abschnitts sei noch an ein Argument erinnert (siehe **MG** 11.2.28), das in der Analysis immer wieder herangezogen wird.

1.1.20 Bemerkung (klassische Schlussweise der Analysis)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Gilt $0 \leq x < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$, so ist $x = 0$.

Diese Bemerkung zeigt: *Es gibt keine kleinste positive reelle Zahl.*

[6] Hierbei sei $\widehat{0} : M \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow \widehat{0}(x) := 0$.

Übungsaufgaben zu 1.1

Ü 1.1.1 Beweisen Sie 1.1.2.

Ü 1.1.2 Berechnen Sie zu $y = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \neq \mathbf{0}$ die Inverse y^{-1} in $\mathbf{C}$ (vgl. die Definition im Anschluss an 1.1.2).

Zeigen Sie ferner für $\mathbf{1} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{i} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$:

$$y = a\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} \quad \text{und} \quad \mathbf{i}^2 := \mathbf{i}\,\mathbf{i} = -\mathbf{1}.$$

Ü 1.1.3 Sei $(\mathbb{K}, v)$ ein **linear geordneter Körper**, d. h., $\mathbb{K}$ erfüllt (i) bis (v) von 1.1.1, (i) bis (iv) von 1.1.3 sowie (i) bis (ii) (mit v anstelle von $\leq$) von 1.1.5. Zeigen Sie, dass die Beziehung $0 \; v \; a^2$ mit $a^2 := a\,a$ für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt.

Können die Körper $\mathbb{F}_2$ und $\mathbf{C}$ mit einer Ordnung versehen werden, sodass sie zu linear geordneten Körpern werden?

Ü 1.1.4 Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass M genau dann beschränkt ist, wenn $|M| := \{|x| \mid x \in M\}$ nach oben beschränkt ist. Dabei ist

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

der Betrag von x.

Ü 1.1.5 Sei A eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$-A := \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; -x \in A\Big\}$$

nach oben beschränkt ist, und benutzen Sie diese Aussage, um mithilfe von 1.1.12 die Existenz des Infimums jeder nichtleeren, nach unten beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu beweisen. Zeigen Sie ferner $\inf A = -\sup(-A)$.

1.2 Rückblick und Ergänzungen: Konvergenz

Folgen reeller Zahlen haben Sie in **MG** in großer Ausführlichkeit betrachtet. Wir können den Rückblick daher kurz fassen. Im Hinblick auf spätere Situationen erweitern wir jedoch bereits hier einige Begriffsbildungen, z. B. werden wir schon bald Folgen betrachten, deren Elemente keine reellen Zahlen sind.

1.2.1 Definition (Folge)

Sei M eine nichtleere Menge. Eine **Folge** *in M ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$. Die Elemente $a_k := f(k)$ heißen* **Glieder** *der Folge f.*
Schreibweisen:

$$f = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \textit{oder} \quad f = (a_k) \quad \textit{oder} \quad f = (a_1, a_2, \ldots).$$

Ist $\ell \in \mathbb{Z}$ und a_k für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq \ell$ definiert, so verstehen wir unter $(a_k)_{k\geq\ell}$ die Folge $(a_{\ell-1+k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Im Fall $M := \mathbb{R}$ sprechen wir von **reellen Folgen**.

Um über Konvergenz zu sprechen, benötigt man die Begriffe des Abstands und der Umgebung. Beide bauen auf dem des Betrags auf, vgl. **MG**, Abschnitt 11.2. (In Abschnitt 1.1 wurden schon Eigenschaften von ihm verwendet.)

1.2.2 Definition und Satz (Betrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x, & \textit{falls } x \geq 0, \\ -x, & \textit{falls } x < 0, \end{cases}$$

der (absolute) **Betrag** *von x. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $|x| \geq 0 \quad \textit{und} \quad (|x| = 0 \iff x = 0),$

(ii) $|xy| = |x|\,|y|, \quad \textit{insbesondere } |-y| = |-1|\,|y| = |y|,$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \qquad$ *(Dreiecksungleichung).*

Außerdem gilt

(iv) $x \leq |x|,\ -x \leq |x| \quad \textit{und} \quad (|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y),$

(v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \qquad$ *(zweite Dreiecksungleichung),*

(vi) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \quad \textit{für } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$

Mit seiner Hilfe wird der Abstand $d(x, y)$ zweier reeller Zahlen definiert.

1.2.3 Definition und Satz (Abstand)
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $d(x, y) := |x - y|$ der **Abstand** *von x und y.*
Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $d(x, y) \geq 0$ *und* $(d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$ *(Definitheit),*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie),*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Dreiecksungleichung).*

Sie wissen aus **MG** auch, was die ε–Umgebung einer reellen Zahl a ist, nämlich das offene Intervall $U_\varepsilon(a) = \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\,$. Wir führen hier noch einen etwas allgemeineren Umgebungsbegriff ein, der später manche Formulierung griffiger macht. Charakteristisch für eine Umgebung U von a ist, dass alle Punkte in genügender „Nähe“ von a zu U gehören, gleichgültig, wie U sonst aussehen mag, genauer:

1.2.4 Definition ($\boldsymbol{\varepsilon}$–Umgebung, Umgebung)

(i) *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$[7] gegeben. Dann heißt*

$$U_\varepsilon(a) := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; d(x, a) < \varepsilon \right\}$$

die **$\boldsymbol{\varepsilon}$–Umgebung** *von a.*

(ii) *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt U* **Umgebung** *von a, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$.*

Wenn wir von „einer“ ε–Umgebung von a sprechen, meinen wir $U_\varepsilon(a)$ mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$; entsprechend haben wir verschiedene ε–Werte im Auge, wenn wir von ε–Umgebungen (Plural!) sprechen. Wenn wir statt des Buchstabens ε etwa ein δ verwenden, so sprechen wir natürlich von einer δ–Umgebung.

1.2.5 Satz (Eigenschaften von Umgebungen)
Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei U eine Umgebung von a. Dann gilt:

(i) $a \in U$.

(ii) *Jede Obermenge von U ist auch Umgebung von a. (Insbesondere ist die Vereinigung von beliebig vielen Umgebungen von a wieder eine Umgebung von a.)*

[7] Statt „$\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$“ werden wir im weiteren Verlauf kürzer „$\varepsilon > 0$“ schreiben; ε wird stets eine reelle Zahl bedeuten.

(iii) *Der Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von a ist wieder eine Umgebung von a.*

Beweis:

(i) Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Umgebung, da offenbar $a \in U_\varepsilon(a)$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt.

(ii) Da U Umgebung von a ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$. Ist M eine Obermenge von U, also $U \subseteq M$, so gilt $U_\varepsilon(a) \subseteq M$, und M ist daher Umgebung von a.

(iii) Seien $U_1, \ldots, U_n$ Umgebungen von a. Dann gibt es $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_n > 0$ mit $U_{\varepsilon_k}(a) \subseteq U_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Setzen wir $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, so gilt $\varepsilon > 0$ und

$$U_\varepsilon(a) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} U_{\varepsilon_k}(a)$$

(vgl. Ü 1.2.1). Folglich gilt

$$U_\varepsilon(a) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} U_k,$$

und das bedeutet, dass $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ eine Umgebung von a ist. □

Für die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge ist der folgende „Trennungssatz“ von Bedeutung.

1.2.6 Satz (Hausdorffeigenschaft[8])

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Dann gibt es eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von b mit $U \cap V = \emptyset$.

Verschiedene Punkte a und b lassen sich also durch disjunkte Umgebungen voneinander „trennen“.

Beweis:

Die folgende Abbildung liefert die Beweisidee.

Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{2}\, d(a, b)$ (wegen $a \neq b$ ist dann $\varepsilon > 0$) und $U := U_\varepsilon(a)$, $V := U_\varepsilon(b)$. U und V sind also Umgebungen von a bzw. b. Wir zeigen $U \cap V = \emptyset$ durch Widerspruchsbeweis: Wäre $x \in U \cap V$, so würde

$$d(x, a) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d(x, b) < \varepsilon$$

[8] Felix Hausdorff, 1868–1942.

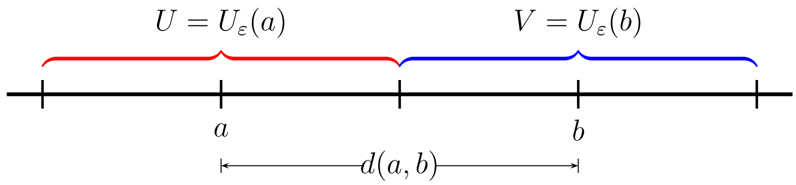


Abb. 1.2–1: Trennung zweier Punkte durch disjunkte Umgebungen

gelten und folglich auch

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \varepsilon + \varepsilon = d(a,b),$$

also $d(a,b) < d(a,b)$, was offensichtlich falsch ist. Die Annahme, es könnte ein $x \in U \cap V$ geben, ist also falsch. $\square$

Wir kommen nun zum Begriff der Konvergenz von Folgen. Um eine kurze Sprechweise zur Verfügung zu haben, setzen wir

$$\omega := \mathit{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \quad \text{(das ist die Menge aller reellen Folgen)},$$

$$\ell^\infty := \{f \in \omega \mid \|f\|_\infty < \infty\} \quad \text{(das ist die Menge der beschränkten reellen Folgen)}^9.$$

1.2.7 Definition (konvergente Folgen)
Seien $f = (a_k) \in \omega$ und $a \in \mathbb{R}$.

(i) *f heißt* **konvergent gegen** *a, wenn in jeder Umgebung von a alle Glieder der Folge mit höchstens endlich vielen Ausnahmen liegen.*

(ii) *f heißt* **konvergent**, *wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft „f ist konvergent gegen a“.*

(iii) *Die Menge der konvergenten Folgen in ω bezeichnen wir mit c.*[10]

Darüber hinaus sind noch folgende Sprechweisen geläufig: Statt „f ist konvergent (gegen a)“ sagt man auch

„*f konvergiert (gegen a)*“

und statt „f ist nicht konvergent“ auch

„f ist *divergent*“ oder „*f divergiert*“.

[9] ℓ^∞ wird „ell unendlich“ gesprochen.
[10] Die Bezeichnung rührt vom englischen Wort *convergent* (d. h. konvergent) her.

Um die lange Floskel „alle ... mit höchstens endlich vielen Ausnahmen“ in der Definition der konvergenten Folge abzukürzen, werden wir statt dessen

„fast alle“

sagen (vgl. auch **MG**, Kapitel 12; dass 1.2.7(i) äquivalent zur Definition in **MG** ist, werden wir unten in 1.2.14 feststellen).

Zunächst überzeugen wir uns davon, dass es höchstens einen Wert gibt, gegen den eine Folge konvergieren kann. Entscheidend dafür ist – wie der Beweis zeigt – die Hausdorffeigenschaft.

1.2.8 Satz und Definition (Eindeutigkeit des Grenzwerts)
Sei $f = (a_k) \in c$ gegeben. Dann gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft „f ist konvergent gegen a“. Dieses a heißt der **Grenzwert** *von f und wird mit*

$$\lim f \quad \textit{oder} \quad \lim_{k\to\infty} a_k$$

(gelesen: „Limes von f“ bzw. „Limes von a_k für k gegen unendlich“) bezeichnet. Statt

$$(a_k) \in c \quad \textit{und} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = a$$

schreibt man auch oft

$$a_k \longrightarrow a \quad \textit{für } k \longrightarrow \infty$$

(gelesen: „a_k konvergiert gegen a für k gegen unendlich“).

Beweis:
Sei f konvergent gegen a, und sei $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq a$. Wir zeigen, dass f nicht gegen b konvergieren kann: Wegen der Hausdorffeigenschaft 1.2.6 gibt es Umgebungen U von a und V von b mit $U \cap V = \emptyset$. Nach Voraussetzung liegen fast alle Glieder von f in U; in V können also höchstens endlich viele Glieder von f liegen, sodass f nicht gegen b konvergent sein kann. □

In **MG** haben Sie bereits ausgiebig mit konvergenten Folgen gearbeitet, sodass hier auf Beispiele verzichtet werden kann. Auch die folgende Aussage ist Ihnen aus **MG** geläufig, vielleicht nicht in der hier gewählten Formulierung.

1.2.9 Satz (c und ℓ^∞)
Ist eine reelle Folge f konvergent, so ist sie auch beschränkt, und es gilt

$$|\lim f| \leq \|f\|_\infty .$$

Beweis (der Ungleichung):
Aufgrund der Definition 1.1.17 ist $\|f\|_\infty = \sup\{|a_k| \mid k \in \mathbb{N}\}$; also gilt

$$|a_k| \leq \|f\|_\infty \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Sei $\lim f = a$. Wäre $\|f\|_\infty < |a|$, so wäre $\varepsilon := |a| - \|f\|_\infty > 0$. Bilden wir für dieses ε die Umgebung $U_\varepsilon(a)$, so gäbe es wegen

$$\begin{aligned} |a_k - a| &\geq |a| - |a_k| \qquad \text{[vgl. 1.2.2(v)]} \\ &\geq |a| - \|f\|_\infty = \varepsilon \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

kein einziges Glied in dieser Umgebung; a wäre also nicht der Grenzwert von f. Daher muss $|\lim f| = |a| \leq \|f\|_\infty$ gelten. □

Wir kommen nun zur Untersuchung von c. Der folgende Satz stellt Regeln für das Rechnen mit konvergenten Folgen und ihren Grenzwerten bereit. Sie kennen sie aus **MG**.

1.2.10 Satz (Raum c)
Seien $f = (a_k)$, $g = (b_k) \in c$, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $f + g \in c$ *und* $\lim(f + g) = \lim f + \lim g$,
$f - g \in c$ *und* $\lim(f - g) = \lim f - \lim g$.

(ii) $\alpha f \in c$ *und* $\lim(\alpha f) = \alpha \lim f$.

(iii) $fg \in c$ *und* $\lim(fg) = \lim f \cdot \lim g$.

(iv) $b_k \neq 0$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\lim g \neq 0$

$$\Longrightarrow \frac{f}{g} \in c \quad \textit{und} \quad \lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}.$$

(v) $a_k \leq b_k$ *für fast alle* $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim f \leq \lim g$.

Darüber hinaus gilt:

(vi) *Ist* $\lim f = 0$ *und* $h \in \ell^\infty$, *so ist* $fh \in c$ *und* $\lim fh = 0$.

(vii) *Ist* $\lim f = \lim g$ *und ist* $h = (c_k)$ *eine Folge mit*

$$a_k \leq c_k \leq b_k \quad \textit{für fast alle } k \in \mathbb{N},$$

so ist $h \in c$ *und* $\lim f = \lim h = \lim g$.

Die letzte Aussage wird in **MG** „Einschnürungssatz“ genannt, in der angelsächsische Literatur finden Sie dafür häufig die anschauliche Bezeichnung „Sandwich–Theorem“.

Nach den Rechenregeln stellen wir nun zu Ihrer Erinnerung die wichtigsten Konvergenzkriterien aus **MG** zusammen.

1.2.11 Bemerkung (endlich viele Abänderungen)

Die Folge (a'_k) entstehe aus der reellen Folge (a_k) durch Abänderung oder durch Weglassen oder durch Hinzufügen endlich vieler Glieder. Ist (a_k) konvergent, so auch (a'_k), und in diesem Fall ist

$$\lim_{k\to\infty} a'_k = \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Beweis:

In jeder Umgebung von $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ liegen fast alle Glieder a_k; das sind aber auch fast alle a'_k. □

1.2.12 Definition und Satz (Teilfolge)

Die Folge $(a'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ heißt eine **Teilfolge** *von $f = (a_k)$, wenn es eine Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ gibt mit $k_j < k_{j+1}$ und $a'_j = a_{k_j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$.* ((a'_j) entsteht aus f durch Weglassen von endlich oder unendlich vielen Gliedern.)

Jede Teilfolge (a'_j) einer konvergenten Folge $f = (a_k) \in \omega$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{j\to\infty} a'_j = \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Beweis:

Ist U eine Umgebung von $a := \lim f$, so liegen darin fast alle Glieder a_k, erst recht also fast alle Glieder a'_j, da jedes a'_j ja ein gewisses a_k ist. □

Aus diesem Satz ergibt sich ein einfaches, aber oft brauchbares Divergenzkriterium.

1.2.13 Satz (Divergenzkriterium)

Besitzt eine reelle Folge $f = (a_k)$ eine divergente Teilfolge oder zwei konvergente Teilfolgen f' und f'' mit $\lim f' \neq \lim f''$, so ist f divergent.

Beweis:

Besitzt f eine divergente Teilfolge, so kann f nach 1.2.12 nicht konvergent sein (denn sonst wäre jede Teilfolge konvergent).

Besitzt f zwei konvergente Teilfolgen f' und f'' mit $\lim f' \neq \lim f''$ und wäre f konvergent, so gälte nach 1.2.12 $\lim f' = \lim f$ und $\lim f'' = \lim f$, also $\lim f' = \lim f''$, was aber unserer Voraussetzung widerspricht. □

Soll in der Definition der Konvergenz der Begriff Umgebung vermieden werden, so kommt man zu folgendem Kriterium, das in **MG** als Definition benutzt wird.

1.2.14 Satz ($\boldsymbol{\varepsilon}$–$\boldsymbol{n_0}$–Kriterium)
Sei $f \in \omega$. Dann gilt:
$f = (a_k) \in c$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : \ (k \geq n_0 \implies |a_k - a| < \varepsilon).$$

In Worten lautet die Bedingung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich (i. Allg. in Abhängigkeit von ε) eine natürliche Zahl n_0 angeben mit der Eigenschaft

$$|a_k - a| < \varepsilon \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq n_0.$$

Das ε–n_0–Kriterium, das nur eine einfache Umformulierung unserer Konvergenzdefinition ist (führen Sie den Beweis aus!), erfordert, dass der Grenzwert schon bekannt ist oder erraten wird, bevor es zum Nachweis der Konvergenz verwendet werden kann. Die folgenden Kriterien setzen die Kenntnis des Grenzwerts nicht voraus. Im ersten handelt es sich um monotone Folgen, deren Definition wir zunächst wiederholen.

1.2.15 Definition (monotone Folge)
Eine reelle Folge $f = (a_k)$ heißt **monoton wachsend**, *wenn*

$$a_k \leq a_{k+1} \quad \textit{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

gilt. Sie heißt **monoton fallend**, *wenn*

$$a_k \geq a_{k+1} \quad \textit{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

gilt. Eine Folge heißt **monoton**, *wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.*

Für monotone Folgen gilt nun eine Umkehrung der Aussage 1.2.9.

1.2.16 Satz (Monotoniekriterium)
Eine monotone Folge $f = (a_k) \in \omega$ ist konvergent, wenn sie beschränkt ist. Genauer:

(i) *Ist f monoton wachsend und nach oben beschränkt (d. h.* $\sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} < \infty$*), so ist f konvergent, und es gilt* $\lim f = \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(ii) *Ist f monoton fallend und nach unten beschränkt (d. h.* $\inf\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} > -\infty$*), so ist f konvergent, und es gilt* $\lim f = \inf\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Ein wenig mehr über das Verhältnis von Konvergenz und Divergenz reeller Folgen besagt der folgende Satz.

1.2.17 Satz (monotone Teilfolgen)

(i) *Jede reelle Folge enthält eine monotone Teilfolge.*

(ii) *Jede beschränkte reelle Folge enthält eine konvergente Teilfolge* (Satz von Bolzano–Weierstraß[11]).

Wir kommen nun zu dem (zumindest aus theoretischer Sicht) wichtigsten Konvergenzkriterium. Bevor wir es formulieren, führen wir eine Bezeichnung ein, um die Bedingung des Kriteriums einfach ausdrücken zu können.

1.2.18 Definition (Cauchyfolge)
Eine reelle Folge $f = (a_k)$ heißt **Cauchyfolge***, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : \ (k > n_0 \implies |a_k - a_{n_0}| < \varepsilon).$$

In Worten lautet die Bedingung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 (i. Allg. abhängig von ε), sodass gilt

$$|a_k - a_{n_0}| < \varepsilon \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k > n_0.$$

Wenn Sie dies mit der Bedingung im ε–n_0–Kriterium 1.2.14 vergleichen, so sehen Sie, dass hier das Glied a_{n_0} an der Stelle steht, wo dort der Grenzwert von f erscheint. Die Bedingung in 1.2.18 kann also formuliert werden, ohne dass über die Existenz eines Grenzwerts oder gar dessen Wert etwas bekannt ist.

Es sei noch eine Variante zur obigen Bedingung für eine Cauchyfolge genannt:

1.2.19 Bemerkung (Cauchyfolge)
Die reelle Folge $f = (a_k)$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k, \ell \in \mathbb{N} : \ (k \geq n_0, \ell \geq n_0 \implies |a_k - a_\ell| < \varepsilon).$$

gilt.

[11] Bernard Bolzano, 1781–1848; Karl Weierstraß, 1815–1897.

Beweisen Sie die Äquivalenz der beiden Bedingungen (Ü 1.2.3).

1.2.20 Hilfssatz (Eigenschaften von Cauchyfolgen)

(i) *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

(ii) *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

(iii) *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

Die Menge der Cauchyfolgen umfasst also c und ist in ℓ^∞ enthalten. Der Beweis dieser Aussagen findet sich bereits in **MG**, allerdings versteckt im Beweis des Cauchykriteriums, das sich nun sehr einfach formulieren lässt.

1.2.21 Satz (Cauchykriterium)
Jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

In Kombination mit 1.2.20(i) haben wir also die Äquivalenzaussage:
Eine reelle Folge f ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Obwohl Sie mit dem Cauchykriterium in **MG** bereits gearbeitet haben, wollen wir es hier noch einmal an zwei Beispielen (die Ihnen eigentlich auch schon bekannt sind) erläutern:

1.2.22 Beispiele
Seien $f = (s_k)$ und $g = (t_k)$ durch

$$s_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$$

bzw.

$$t_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = 1 - \frac{1}{2} + - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

definiert. Dann ist

(i) f keine Cauchyfolge, also divergent,

(ii) g eine Cauchyfolge, also konvergent.

Beweis:
(i) Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Differenz

$$s_{2k} - s_k = \sum_{j=k+1}^{2k} \frac{1}{j} = \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} \geq \underbrace{\frac{1}{2k} + \ldots + \frac{1}{2k}}_{k \text{ Summanden}} = \frac{1}{2}.$$

Wäre f eine Cauchyfolge, müsste es zu jedem $\varepsilon > 0$ (also auch zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit

$$|s_k - s_{n_0}| < \varepsilon \quad \text{für jedes } k > n_0,$$

insbesondere für $k := 2n_0$ (wegen $2n_0 > n_0$). Nach der obigen Abschätzung gilt dies aber im Fall $\varepsilon := \frac{1}{2}$ nicht.

(ii) Für $k, j \in \mathbb{N}$ mit $k > j$ gilt

$$\begin{aligned}
(-1)^j(t_k - t_j) &= (-1)^j \sum_{\nu=j+1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \\
&= \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} + - \ldots + \frac{(-1)^{k-1+j}}{k} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right), & \text{falls } k+j \text{ gerade,} \\ \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) + \frac{1}{k}, & \text{falls } k+j \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Da in jeder Klammer eine positive Zahl steht, folgt also

$$(-1)^j(t_k - t_j) \geq 0, \tag{1.2:1}$$

und dies ist auch für $k = j$ richtig. Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ gilt. Für jedes $k > n_0$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
|t_k - t_{n_0}| &= |(-1)^{n_0}(t_k - t_{n_0})| \\
&= (-1)^{n_0}(t_k - t_{n_0}) \qquad \text{[wegen (1.2:1)]} \\
&= \frac{1}{n_0+1} - \left[\frac{1}{n_0+2} - + \ldots - \frac{(-1)^{k-1+n_0}}{k}\right] \\
&= \frac{1}{n_0+1} - (-1)^{n_0+1}(t_k - t_{n_0+1}) \\
&\leq \frac{1}{n_0+1} \qquad \text{[wegen (1.2:1)]} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Die Folge (t_k) ist also eine Cauchyfolge und daher konvergent. (Ihr Grenzwert ist, wie Sie aus **MG** wissen, $\ln 2$, was näherungsweise $0,6931\ldots$ ist.) □

Zum Abschluss dieses Abschnitts behandeln wir noch den Fall, dass ∞ oder $-\infty$ als „uneigentlicher“ Grenzwert auftreten kann. Wir beginnen damit, Umgebungen für die „uneigentlichen Punkte“ ∞ und $-\infty$ definieren.

1.2.23 Definition (Umgebungen von ∞ und $-\infty$)
Sei $U \subseteq \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(i) *U heißt* **Umgebung von ∞**, *wenn $\infty \in U$ ist und es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $]\alpha, \infty[\ \subseteq U$.*

(ii) *U heißt* **Umgebung von $-\infty$**, *wenn $-\infty \in U$ ist und es ein $\beta \in \mathbb{R}$ gibt mit $]-\infty, \beta[\subseteq U$.*

Sie werden sich rasch davon überzeugen, dass die entscheidenden Eigenschaften von Umgebungen, wie sie in Satz 1.2.5 formuliert sind, auch für den Fall gelten, dass $a = \infty$ oder $a = -\infty$ ist. Prüfen Sie dies nach! (Vgl. Ü 1.2.4.) Wir können daher die Definition 1.2.7 erweitern.

1.2.24 Definition (bestimmt divergente Folge)
Sei $f = (a_k) \in \omega$, und sei $a = \infty$ oder $a = -\infty$. f heißt **bestimmt divergent** *gegen a, wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder von f liegen.*
In diesem Fall heißt a der[12] **uneigentliche Grenzwert** *von f.*
Schreibweisen:

$$\lim f = a \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \text{oder} \quad a_k \longrightarrow a \text{ für } k \longrightarrow \infty$$

(wobei Letzteres zu lesen ist als „a_k divergiert bestimmt gegen a für k gegen ∞“).

Oft spricht man auch von **uneigentlicher Konvergenz**, was auch durch das folgende Kriterium nahe gelegt wird.

1.2.25 Satz (ε–n_0–Kriterium)
Für $f = (a_k) \in \omega$ gilt:

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : (k \geq n_0 \Longrightarrow a_k > \frac{1}{\varepsilon})$.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = -\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : (k \geq n_0 \Longrightarrow a_k < -\frac{1}{\varepsilon})$.

Überlegen Sie sich, dass diese Äquivalenzen richtig sind (vgl. Ü 1.2.5).

1.2.26 Beispiele
(1) Sei $f := (k)$, also $a_k = k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim f = \lim\limits_{k\to\infty} k = \infty$.
[Denn ist U eine Umgebung von ∞, so gilt $]\alpha, \infty[\subseteq U$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Für alle $k > \alpha$ gilt $k \in]\alpha, \infty[$, das sind fast alle.]

[12] Sie überlegen sich sehr rasch, dass höchstens eines der beiden Elemente ∞ oder $-\infty$ als uneigentlicher Grenzwert in Frage kommt.

(2) Sei $f := \big((-1)^k k\big)$, also $a_k = (-1)^k k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann ist f weder konvergent noch bestimmt divergent.

[Da $\|f\|_\infty = \sup\{|a_k| \mid k \in \mathbb{N}\} = \sup \mathbb{N} = \infty$ ist, ist f nicht beschränkt, also auch nicht konvergent, vgl. 1.2.9. f ist nicht bestimmt divergent gegen ∞, denn $U := \,]0, \infty[\, \cup \{\infty\}$ ist eine Umgebung von ∞, welche die unendlich vielen Folgenglieder $-(2j+1)$ für $j = 0, 1, 2, \ldots$ nicht enthält. Entsprechend ergibt sich, dass f nicht bestimmt gegen $-\infty$ divergiert.]

(3) Sei $f = (a_k) \in \omega$ monoton wachsend und nicht (nach oben) beschränkt. Dann gilt $\lim f = \infty$. Entsprechend ist eine monoton fallende Folge bestimmt divergent gegen $-\infty$, falls sie nicht (nach unten) beschränkt ist.

[Denn sei f monoton wachsend, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f nicht nach oben beschränkt ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$. Da f monoton wachsend ist, gilt $a_k \geq a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $k \geq n_0$; also ist das Kriterium 1.2.25(i) erfüllt. Ist f monoton fallend und nicht nach unten beschränkt, so argumentiert man analog.]

(4) Sei $f = (a_k) \in \omega$ mit $a_k > 0$ (bzw. $a_k < 0$) für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $\lim f = 0$, so gilt $\lim \frac{\widehat{1}}{f} = \infty$ (bzw. $\lim \frac{\widehat{1}}{f} = -\infty$). Dabei ist $\widehat{1}$ die konstante Folge $(1, 1, \ldots)$.

[Denn ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\lim f = 0$, so gibt es nach dem ε–n_0–Kriterium 1.2.14 ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_k| < \varepsilon$ für jedes $k \geq n_0$ erfüllt ist. Hieraus folgt für alle $k \geq n_0$

$$\frac{1}{a_k} > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ falls } a_k > 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a_k} < -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ falls } a_k < 0.$$

Mit 1.2.25 ergibt sich hieraus die Behauptung.]

(5) Sei $f = (a_k) \in \omega$ mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist f bestimmt divergent (gegen ∞ oder $-\infty$), so gilt $\lim \frac{\widehat{1}}{f} = 0$.

[Denn ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\lim f = \infty$ (bzw. $\lim f = -\infty$), so gibt es nach dem ε–n_0–Kriterium 1.2.25 ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_k > \frac{1}{\varepsilon}$ (bzw. $a_k < -\frac{1}{\varepsilon}$) für jedes $k \geq n_0$ erfüllt ist. Hieraus folgt für alle $k \geq n_0$

$$0 < \frac{1}{a_k} < \varepsilon \ \text{ (bzw. } 0 < -\frac{1}{a_k} < \varepsilon\text{)}, \quad \text{also} \quad \left|\frac{1}{a_k} - 0\right| < \varepsilon \ \text{ (in beiden Fällen).}$$

Mit 1.2.14 ergibt sich hieraus die Behauptung.]

Hat eine reelle Folge weder einen reellen Grenzwert noch einen uneigentlichen Grenzwert, so kann manchmal der Begriff des Häufungswertes, wie er in **MG**, Kapitel 17, beschrieben ist, als Ersatz dienen. Wir wollen an dieser Stelle nicht darauf eingehen.

Übungsaufgaben zu 1.2

Ü 1.2.1 Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ positive Zahlen, und sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$. Zeigen Sie:

$$U_\varepsilon(a) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} U_{\varepsilon_k}(a).$$

Ü 1.2.2 Seien $f = (a_k)$ und $g = (b_k)$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die „Monotonie" des Grenzwerts (Eigenschaft (v) von 1.2.10):

$$a_k \leq b_k \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N} \implies \lim f \leq \lim g.$$

Ü 1.2.3 Sei (a_k) eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass die beiden Bedingungen

(i) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \in \mathbb{N} : \; (k > n_0 \implies |a_k - a_{n_0}| < \varepsilon)$

und

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k, \ell \in \mathbb{N} : \; (k \geq n_0, \ell \geq n_0 \implies |a_k - a_\ell| < \varepsilon)$

äquivalent sind.

Ü 1.2.4 Zeigen Sie, dass 1.2.5 auch für Umgebungen von ∞ und $-\infty$ richtig bleibt: Sei $a \in \{-\infty, \infty\}$, und sei U eine Umgebung von a. Dann gilt:

(i) $a \in U$.

(ii) Jede Obermenge von U ist auch Umgebung von a.

(iii) Der Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von a ist wieder eine Umgebung von a.

Ü 1.2.5 Beweisen Sie die ε–n_0–Kriterien 1.2.25.

1.3 $\mathbb{R}^n$ als reeller Vektorraum

Die Differenzial– und Integralrechnung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher, welche das Hauptthema dieses Kurses **Analysis** darstellt, spielt sich im „*n–dimensionalen Raum*“ $\mathbb{R}^n$ ab[13]. Der besteht aus allen geordneten *n–Tupeln*[14] reeller Zahlen. Es hat sich herausgestellt, dass es aus mancherlei Gründen vorteilhaft ist, die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als senkrecht angeordnete n–Tupel (die man dann auch **Spalten** oder **Spaltenvektoren** nennt) zu schreiben.

1.3.1 Definition (Menge $\mathbb{R}^n$)
Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 1, \ldots, n \right\}$$

der ***n*–dimensionale reelle Raum**. *Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ nennen wir auch* **Punkte** *oder* **Vektoren** *von $\mathbb{R}^n$, und x_k $(1 \leq k \leq n)$ heißt* ***k*–te Koordinate** *von*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zwei Spalten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ heißen definitionsgemäß **gleich**, *wenn $x_k = y_k$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt.*

Um Platz zu sparen, schreiben wir außerdem eine Spalte öfter auch in der Form ${}^t(x_1, \ldots, x_n)$, wobei das t andeutet, dass die „Zeile“ $(x_1, \ldots, x_n)$ zu „transponieren“ (zu kippen) ist. – Später werden wir neben den Elementen von $\mathbb{R}^n$, also den Spalten, auch waagerecht angeordnete n–Tupel, also Zeilen, zu betrachten haben. – Übrigens werden wir statt $\mathbb{R}^1$ meist $\mathbb{R}$ schreiben und die Elemente von $\mathbb{R}^1$ nicht als (x_1), also in Klammern, wie es die Definition 1.3.1 formal vorsieht, sondern wir werden die Klammern weglassen.

Eine Veranschaulichung ist in den Fällen $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ mittels der Zahlengeraden (Abb. 1.3–1a), mittels eines rechtwinkligen Koordinatensystems in

[13] $\mathbb{R}^n$ wird gelesen als „Rn“ oder „R hoch n“. Dabei ist n immer eine natürliche Zahl (≥ 1).
[14] Statt 2–Tupel, 3–Tupel bzw. 4–Tupel sagt man meist *Paar, Tripel* bzw. *Quadrupel.*

der Zeichenebene (Abb. 1.3–1b) bzw. mittels eines rechtwinkligen Koordinatensystems im dreidimensionalen Anschauungsraum (Abb. 1.3–1c) möglich.

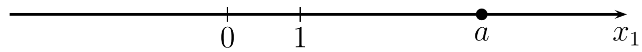


Abb. 1.3–1a: Darstellung des Elements $a \in \mathbb{R}^1$ als Punkt

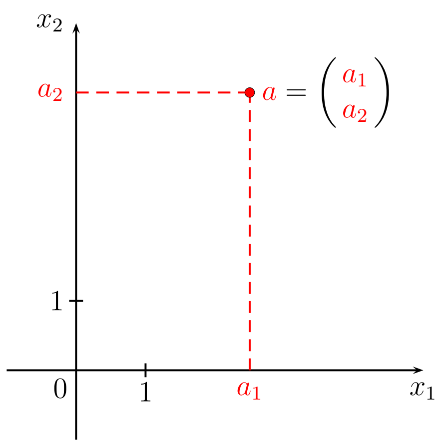


Abb. 1.3–1b: Darstellung des Elements $a = {}^t(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ als Punkt

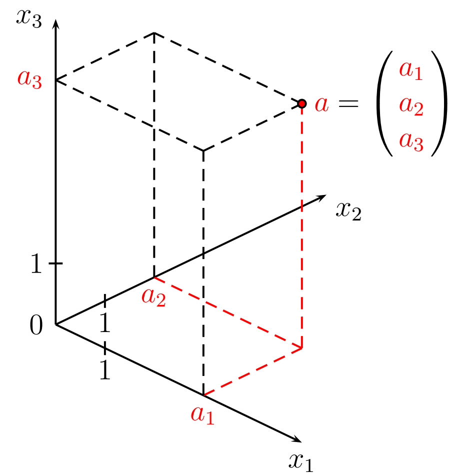


Abb. 1.3–1c: Darstellung des Elements $a = {}^t(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ als Punkt

Die Bezeichnung „Vektoren" für die Elemente von $\mathbb{R}^n$ rührt von einer anderen Veranschaulichung her:

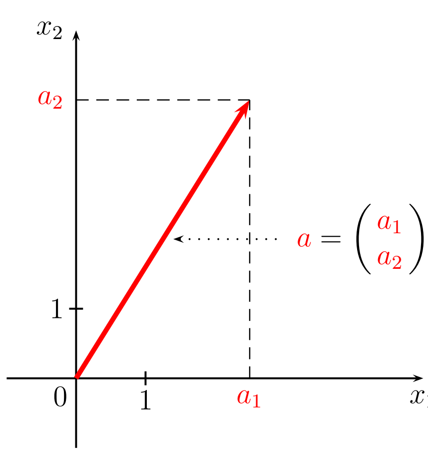


Abb. 1.3–2a: Darstellung des Elements $a = {}^t(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ als Ortsvektor

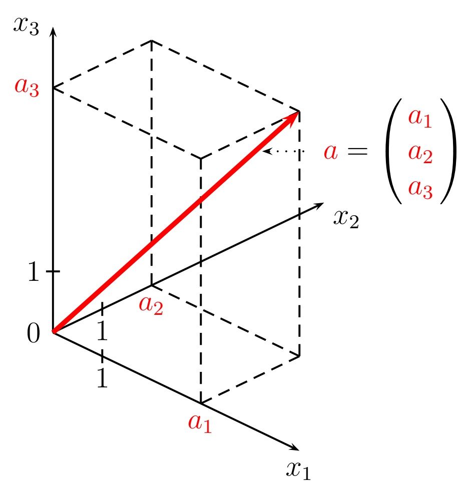


Abb. 1.3–2b: Darstellung des Elements $a = {}^t(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ als Ortsvektor

Hat man ein $a \in \mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^3$) als Punkt der Zeichenebene (oder des Anschauungsraumes) dargestellt, so verbindet man den Nullpunkt 0 des Koordinatensystems mit dem Punkt a durch einen Pfeil (Spitze bei a) und benutzt nun diesen Pfeil als Darstellung von a (Abb. 1.3–2); man nennt ihn den zum Punkt gehörigen **Ortsvektor**. Es ist einleuchtend, dass umgekehrt jeder Ortsvektor (d. h. jeder Pfeil, der vom Nullpunkt ausgeht) eindeutig einen Punkt festlegt, nämlich durch seine Spitze. Der Unterschied zwischen den Darstellungen eines Elements von $\mathbb{R}^n$ (als Punkt oder als Ortsvektor) ist also geringfügig, doch je nach Situation ist die eine oder die andere vorteilhafter.

Meist bleibt man bei der Darstellung als Ortsvektor nicht stehen, sondern geht noch einen Schritt weiter, indem man die Bindung der Pfeile an den Nullpunkt aufgibt und erlaubt, dass ein Pfeil unter Beibehaltung von Richtung und Länge (in der Ebene bzw. im Raum) beliebig parallel verschoben werden darf, also von jedem beliebigen Punkt ausgehen darf. Das Element a ist dann als der Pfeil selbst, unabhängig von seinem Ausgangspunkt aufgefasst. In Abb. 1.3–3 stellen daher alle eingezeichneten Pfeile dasselbe Element a dar. Man spricht von einem **freien Vektor**.

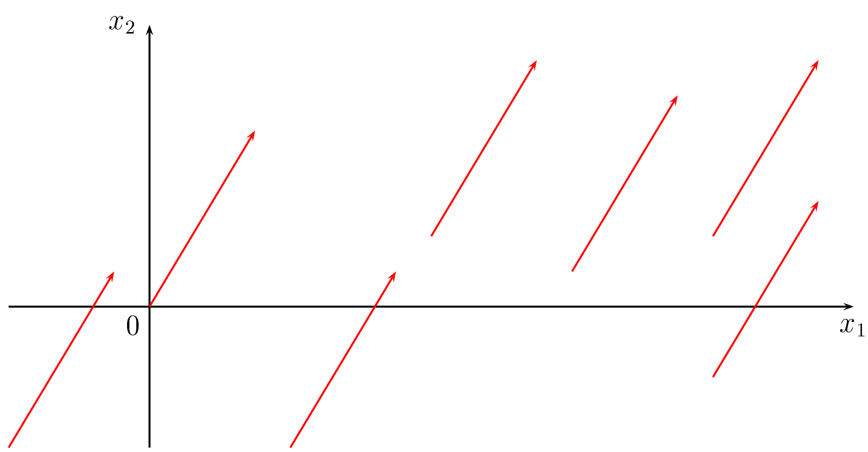


Abb. 1.3–3: Alle Pfeile stellen dasselbe Element $a \in \mathbb{R}^2$ dar

Freilich haben alle diese Veranschaulichungen ihre Grenzen (nicht nur durch die Einschränkung $n \leq 3$), und Beweise werden sich darauf nicht stützen können. Doch werden wir die Veranschaulichungsmöglichkeiten nutzen, wenn immer sie geeignet erscheinen, Zusammenhänge zu verdeutlichen und „einsichtiger" zu machen. Z. B. werden wir dies gleich anschließend bei der Definition der Addition und der Multiplikation mit einer reellen Zahl tun. Zur besseren Unterscheidung von den Vektoren werden in diesem Zusammenhang die reellen Zahlen oft **Skalare** genannt.

1.3.2 Definition (Addition und skalare Multiplikation)

Durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad \textit{für } \alpha \in \mathbb{R}$$

wird die **Addition** *zweier Elemente von* $\mathbb{R}^n$ *bzw. die* **skalare Multiplikation** *eines Elements von* $\mathbb{R}^n$ *mit einem Skalar definiert.*

Die beiden Operationen lassen sich für $\mathbb{R}^2$ in der Zeichenebene wie folgt veranschaulichen (Abb. 1.3–4).

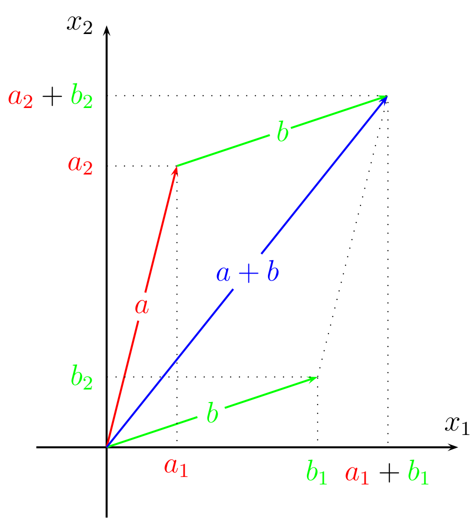


Abb. 1.3–4a: Addition $a + b$

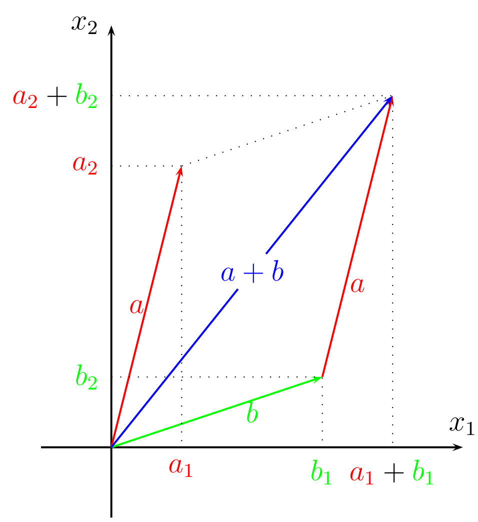


Abb. 1.3–4b: Addition $b + a$

Aus den Ortsvektoren a und b erhält man den Vektor $a + b$, indem man den Pfeil b parallel zu sich selbst verschiebt und ihn dann an der Spitze des Pfeils a ansetzt oder indem man den Pfeil a parallel zu sich verschiebt und ihn an der Spitze von b ansetzt. (Man kommt zum selben Ergebnis: $a + b = b + a$.) Der Vektor $a + b$ wird durch die – mit Pfeilspitze versehene – Diagonale in dem Parallelogramm, das von den Vektoren a und b aufgespannt wird, dargestellt. Man spricht hier auch vom *Parallelogramm der Kräfte*. Dies rührt von der Deutung eines Ortsvektors x als einer Kraft her, die im Nullpunkt angreift, deren Größe durch die Länge von x und deren Angriffsrichtung durch die Richtung von x repräsentiert wird. In der Physik kann man z. B. experimentell überprüfen, dass die gemeinsame Wirkung zweier Kräfte die gleiche ist wie die Wirkung einer einzigen Kraft, deren Größe und Richtung durch die Diagonale im Kräfteparallelogramm dargestellt ist.

Die Multiplikation eines Vektors a mit einer reellen Zahl α bedeutet eine Streckung (um den Faktor $|\alpha|$, falls $|\alpha| > 1$ ist) oder eine Stauchung (um den Faktor $|\alpha|$, falls $|\alpha| < 1$ ist), wobei im Fall $\alpha < 0$ zusätzlich noch die Richtung umgekehrt wird (Abb. 1.3–5).

Im Fall $\alpha = 0$ ergibt sich

$$0\,a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{der } \textbf{Nullvektor},$$

den man ebenfalls mit 0 bezeichnet. (Aus dem Zusammenhang wird stets klar sein, welche Null gemeint ist.) Für den Nullvektor rechnet man sofort

$$0 + a = a + 0 = a \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R}^n$$

nach, er spielt also die Rolle des neutralen Elementes bezüglich der Addition.

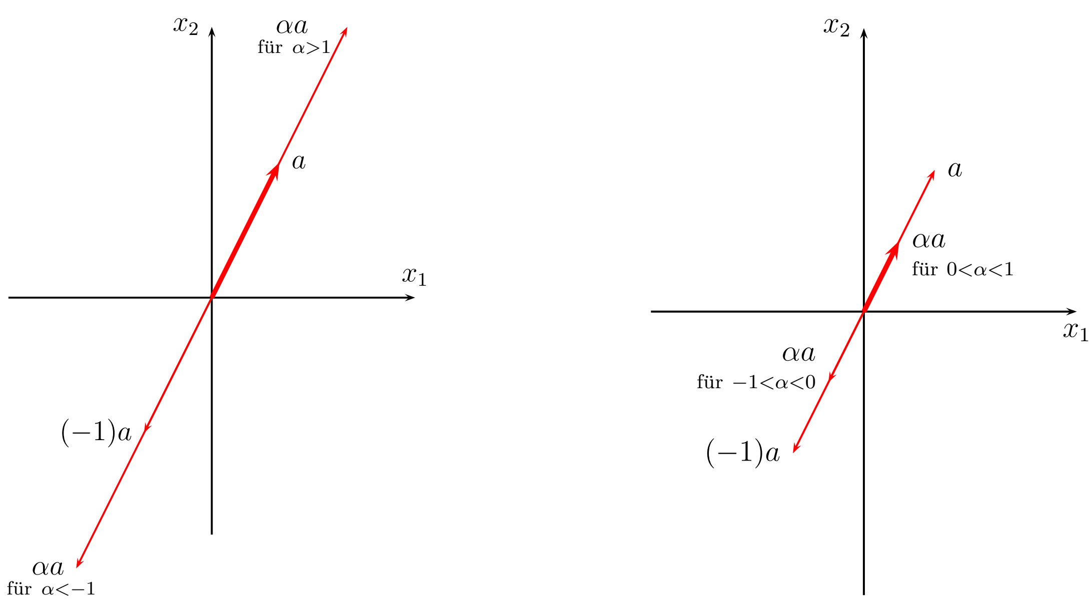


Abb. 1.3–5: Multiplikation mit einer reellen Zahl α

Im Fall $\alpha = -1$ erhält man

$$(-1)a = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} =: -a, \quad \text{den zu} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

entgegengesetzten Vektor. Für ihn gilt

$$a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

er ist das (eindeutig bestimmte) zu a inverse Element bezüglich der Addition.

Man kann nun kaum anders, als die **Subtraktion** in $\mathbb{R}^n$ durch

$$b - a := b + (-a) \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}^n$$

zu definieren. Der Vektor $b - a$ ist dann nämlich die eindeutig bestimmte Lösung x der Gleichung $x + a = b$ (und der Gleichung $a + x = b$). Die Veranschaulichung in der Zeichenebene ist klar: Man bildet $-a$, den zu a entgegengesetzten Vektor, und setzt ihn, parallel zu sich verschoben, an b an (Abb. 1.3–6).

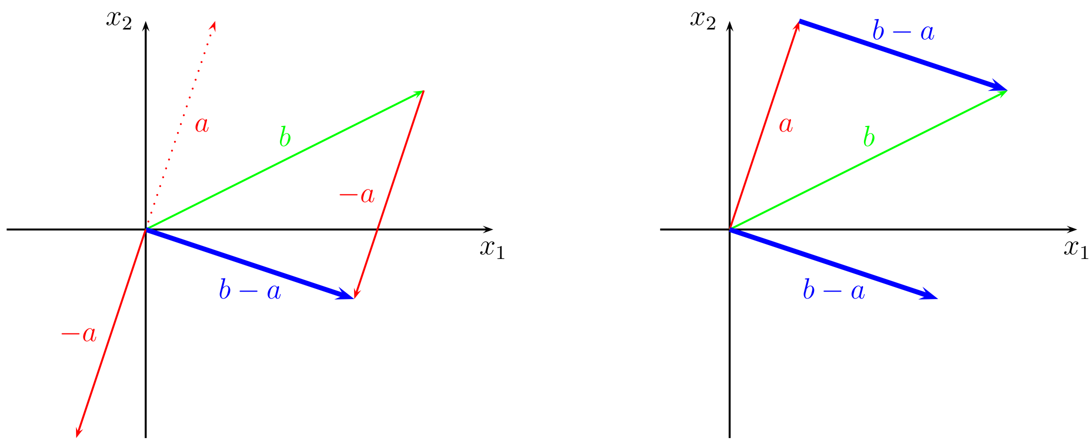


Abb. 1.3–6: Darstellung von $b - a$

Verschiebt man den erhaltenen Ortsvektor $b - a$ parallel zu sich und setzt ihn an a an, trifft seine Spitze auf die von b, denn es ist $a + (b - a) = b$.

Die Struktur, die dem Raum $\mathbb{R}^n$ durch Einführung der Addition und skalaren Multiplikation aufgeprägt wird, tritt deutlicher in Erscheinung, wenn man von den speziellen Gegebenheiten der Menge $\mathbb{R}^n$ abstrahiert. Sie werden sehr rasch feststellen, dass $\mathbb{R}^n$ sich dem allgemeinen Begriff des Vektorraums unterordnet, den Sie aus **MG** (Kapitel 6) bereits kennen. Während dort beliebige Körper zugrunde gelegt werden, wird hier der Grundkörper stets $\mathbb{R}$ sein.

1.3.3 Definition (reeller Vektorraum)

Sei X eine nichtleere Menge. Auf X sei eine **Addition** *erklärt, d. h., je zwei Elementen $x, y \in X$ sei eindeutig ein Element $x+y \in X$ zugeordnet, mit folgenden Eigenschaften:*

(Add$_1$) *Für alle $x, y, z \in X$ gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität).*

(Add$_2$) *Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $0 \in X$, genannt* **neutrales Element** *oder* **Nullvektor**, *mit $x + 0 = 0 + x = x$ für alle $x \in X$ (Existenz des neutralen Elements).*

(Add$_3$) *Zu jedem Element $x \in X$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $-x \in X$, das zu x* **inverse Element** *oder der zu x* **entgegengesetzte Vektor**, *mit $x + (-x) = (-x) + x = 0$ (Existenz der inversen Elemente).*

(Add$_4$) *Für alle $x, y \in X$ gilt $x + y = y + x$ (Kommutativität).*

Auf X sei ferner eine **skalare Multiplikation** *erklärt, d. h., je einer reellen Zahl α und je einem $x \in X$ sei eindeutig ein Element $\alpha x \in X$ zugeordnet, mit folgenden Eigenschaften:*

(Mult$_1$) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ gilt $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (Assoziativität).*

(Mult$_2$) *Für alle $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*[15]
$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *(Distributivität).*

(Mult$_3$) *Für alle $x \in X$ gilt $1x = x$.*

Dann heißt X (mit dieser Addition und skalaren Multiplikation) ein **reeller Vektorraum** *oder* **linearer Raum** *(über $\mathbb{R}$). Seine Elemente werden als* **Vektoren** *bezeichnet.*

Bevor wir auf Beispiele eingehen (zu denen nach dem vorher Gesagten jedenfalls $\mathbb{R}^n$ gehört) wollen wir einige Bemerkungen zur Definition machen:

(1) Eine Menge X, auf der eine Addition mit den Eigenschaften (Add$_1$) bis (Add$_4$) erklärt ist, heißt eine (additiv geschriebene) **kommutative Gruppe**.

(2) (Add$_2$) und (Add$_3$) enthalten eine Redundanz: Die Eindeutigkeit des neutralen Elements bzw. des zu x inversen Elements folgt bereits aus

$$x + 0 = x \quad \text{für alle } x \in X$$

bzw. aus

$$x + (-x) = 0 \ \text{ zusammen mit (Add}_1\text{) und (Add}_2\text{).}$$

Beim Nachprüfen, ob in einem gegebenen Fall die Bedingung (Add$_2$) bzw. (Add$_3$) erfüllt ist, kann also auf den Eindeutigkeitsnachweis sowie wegen (Add$_4$) auf den Nachweis von $0 + x = x$ bzw. $(-x) + x = 0$ verzichtet werden.

(3) Die Assoziativgesetze (Add$_1$) und (Mult$_1$) erlauben es, statt $(x + y) + z$ bzw. $\alpha(\beta x)$ einfach $x + y + z$ bzw. $\alpha\beta x$ zu schreiben, also auf die Klammerung zu verzichten, da es ja nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge addiert bzw. multipliziert wird.

[15] Um Klammern zu sparen, ist die Konvention „Punktrechnung (d. h. hier: die skalare Multiplikation) geht vor Strichrechnung“ in Kraft.

(4) Die Distributivgesetze (Mult$_2$) regeln das Zusammenspiel von Addition und skalarer Multiplikation. Wie üblich gilt die Konvention, dass die Multiplikation der Addition vorgeht (sonst hätten wir sorgfältiger $(\alpha x) + (\alpha y)$ statt $\alpha x + \alpha y$ schreiben müssen).

(5) Es ist $0x = 0$ und $(-1)x = -x$ für $x \in X$ (wobei in der ersten Beziehung links die Null von $\mathbb{R}$ und rechts der Nullvektor von X steht).

(6) Im reellen Vektorraum X wird die **Subtraktion** durch

$$x - y := x + (-y)$$

eingeführt. Für sie gelten dann die üblichen Regeln

$$\begin{aligned} x - (y + z) &= (x - y) - z \qquad (x, y, z \in X), \\ \alpha(x - y) &= \alpha x - \alpha y \qquad (x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

usw.

Zur Einübung des Begriffs des reellen Vektorraums sei Ihnen empfohlen, sich einen Beweis der Bemerkungen (5) und (6) zu überlegen (Ü 1.3.1). Doch zuvor sollten Sie sich die folgenden Beispiele ansehen. Bis auf $\mathbb{R}^n$ handelt es sich um reelle Vektorräume, die Sie alle aus **MG** kennen, allerdings nicht unter diesem Markenzeichen.

1.3.4 Beispiele

(0) $X := \mathbb{R}^n$ ist mit der in 1.3.2 eingeführten Addition und skalaren Multiplikation ein reeller Vektorraum. (Auch $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ ist also ein reeller Vektorraum.)

(1) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und X der *Raum aller reellen Funktionen auf* M, also

$$X := \mathit{Abb}(M, \mathbb{R}) = \Big\{ f \;\Big|\; f \text{ ist eine Funktion von } M \text{ nach } \mathbb{R} \Big\}.$$

Mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von reellen Funktionen, nämlich

$$\begin{aligned} f + g : M \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow (f + g)(t) := f(t) + g(t), \\ \alpha f : M \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow (\alpha f)(t) := \alpha f(t), \end{aligned}$$

ist X ein reeller Vektorraum. Insbesondere (Spezialfall $M = \mathbb{N}$) ist der *Raum aller reellen Folgen*

$$\omega = \Big\{ f = (a_k) \;\Big|\; f \text{ ist eine reelle Folge} \Big\}$$

mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von reellen Folgen ein reeller Vektorraum.

(2) Sei M eine nichtleere Menge und X der *Raum aller auf M definierten und beschränkten reellen Funktionen*, also

$$X := \mathcal{B}(M) = \Big\{ f \in \mathit{Abb}(M, \mathbb{R}) \;\Big|\; f \text{ ist beschränkt} \Big\},$$

vgl. 1.1.18. Dann ist X mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen ein reeller Vektorraum, und zwar ein Unterraum von $\mathit{Abb}(M, \mathbb{R})$. Insbesondere (Spezialfall $M = \mathbb{N}$) ist der *Raum aller beschränkten Folgen*, also

$$\ell^\infty = \Big\{ f \in \omega \;\Big|\; f \text{ ist eine beschränkte Folge} \Big\}$$

ein reeller Vektorraum, und zwar ein Unterraum von ω.

(3) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. Mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von reellen Funktionen ist der *Raum der stetigen Funktionen auf M*,

$$C(M) := \Big\{ f \in \mathit{Abb}(M, \mathbb{R}) \;\Big|\; f \text{ ist stetig} \Big\},$$

ein reeller Vektorraum, ein Unterraum von $\mathit{Abb}(M, \mathbb{R})$; ebenso ist, wenn jeder Punkt von M ein Häufungspunkt von M ist, der *Raum der stetig differenzierbaren Funktionen*

$$C^1(M) := \Big\{ f \in \mathit{Abb}(M, \mathbb{R}) \;\Big|\; f \text{ ist differenzierbar, und } f' \text{ ist stetig} \Big\}$$

ein reeller Vektorraum, ein Unterraum von $C(M)$ (und auch von $\mathit{Abb}(M, \mathbb{R})$).

(4) Sei I ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ mit mehr als einem Punkt. Mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von reellen Funktionen ist der *Raum der über I integrierbaren Funktionen*

$$\mathcal{R}(I) := \Big\{ f \in \mathcal{B}(I) \;\Big|\; f \text{ ist integrierbar} \Big\}$$

ein reeller Vektorraum.

(5) Mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation reeller Funktionen sind

$$\mathcal{P}_n := \Big\{ P \in \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\Big|\; P \text{ ist eine Polynomfunktion vom Grad } \leq n \Big\}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\mathcal{P} := \Big\{ P \in \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\Big|\; P \text{ ist eine Polynomfunktion} \Big\}$$

reelle Vektorräume.

(6) Mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation reeller Folgen sind

$$c = \Big\{ f \in \omega \;\Big|\; f \text{ ist konvergent} \Big\} \quad (\textit{Raum der konvergenten Folgen})$$

und

$$c_0 := \Big\{ f \in c \;\Big|\; \lim_{k \to \infty} f(k) = 0 \Big\} \quad (\textit{Raum der Nullfolgen})$$

reelle Vektorräume.

In den Beispielen (1) bis (6) ist jedes Mal die konstante Funktion $f = \widehat{0}$ mit $f(t) = 0$ für jedes t (gegebenenfalls eingeschränkt auf M oder I) bzw. die konstante Folge $\widehat{0} = (0, 0, \ldots)$ das neutrale Element der Addition (also der „Nullvektor“), und $-f := (-1)f$ ist das zu f inverse Element bezüglich $+$. Im Übrigen ergibt sich aus den bekannten Eigenschaften beschränkter, stetiger, differenzierbarer bzw. integrierbarer Funktionen, beschränkter und konvergenter Folgen usw., dass jeweils die Vektorraumbedingungen erfüllt sind. Es sei Ihnen empfohlen, dies in dem einen oder anderen der aufgeführten Beispiele genauer nachzuprüfen (Ü 1.3.2).

Übrigens spielt in der Analysis nicht nur der Begriff des Vektorraums, sondern auch der Begriff des Homomorphismus zwischen Vektorräumen eine Rolle. In **MG**, Kapitel 8, haben sie gelernt, dass ein Homomorphismus $f : V \longrightarrow W$ eines $\mathbb{K}$–Vektorraums V in einen $\mathbb{K}$–Vektorraum W eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften ist:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) && \text{für alle } x, y \in V, \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) && \text{für alle } \alpha \in \mathbb{K} \text{ und alle } x \in V. \end{aligned}$$

Sie werden aufgrund der Rechenregeln für Integrale bzw. für konvergente Folgen rasch erkennen, dass die Abbildungen

$$\int : \mathcal{R}(I) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

und

$$\lim :\ c \longrightarrow \mathbb{R},\ (a_k) \longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k$$

Vektorraumhomomorphismen sind. Im Moment wollen wir aber hierauf nicht genauer eingehen.

Übungsaufgaben zu 1.3

Ü 1.3.1 Beweisen Sie die Bemerkungen (5) und (6) zu 1.3.3.

Ü 1.3.2 Beweisen Sie, dass $Abb(M, \mathbb{R})$, $C(M)$ und $\mathcal{P}_n$ (Beispiele 1.3.4(1), (3), (5)) reelle Vektorräume sind.

Ü 1.3.3 Seien

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

und sei $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$.

(ii) Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reelle Zahlen mit $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, so gilt $\alpha_k = x_k$ für $k = 1, \ldots, n$.

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich also auf genau eine Weise als „Linearkombination“ $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ darstellen. Die $e_1, \ldots, e_n$ heißen die **Standardbasisvektoren** oder die **kanonischen Basisvektoren**. (Vgl. **MG**, Kapitel 6.)

Ü 1.3.4 Seien a und b aus $\mathbb{R}^2$ mit $a \neq b$. Beschreiben Sie die Menge

$$G_{ab} := \Big\{ a + t(b-a) \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \Big\}$$

geometrisch (konstruieren Sie zunächst $a + t(b-a)$ für einige $t \in \mathbb{R}$), und zeigen Sie, dass sich G_{ab} in der Form

$$\Big\{ \tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; Ax + By + C = 0 \Big\}$$

mit reellen Konstanten A, B, C darstellen lässt.

1.4 $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

Im vorangehenden Abschnitt haben wir die Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^n$ (häufig auch „lineare Struktur“ genannt) beschrieben. Wir kommen nun zur metrischen Struktur, bei der die Abstandsmessung das wesentliche Element ist. Wir gehen ganz ähnlich vor wie im Fall $\mathbb{R}^1$, wo der Ausgangspunkt der Betrag einer reellen Zahl war. Bevor wir den Betrag eines Vektors in $\mathbb{R}^n$ einführen, wollen wir, um den Strukturgedanken stärker hervorzuheben, mit einem verallgemeinerten Betragsbegriff in einem reellen Vektorraum beginnen. Man spricht dann allerdings meist nicht mehr vom Betrag, sondern von einer Norm.

1.4.1 Definition (Norm, normierter Raum)
Sei X ein reeller Vektorraum. Eine Funktion[16] $\|\ \| : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow \|x\|$ *heißt eine* **Norm** *auf X, und $(X, \|\ \|)$ heißt ein* **normierter reeller Vektorraum** *(kurz: ein* **normierter Raum***), falls für alle $x, y \in X$ die Beziehungen*

(i) $\|x\| \geq 0$ *und* $(\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$ *(Definitheit),*

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(positive Homogenität),*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung)*

gelten.[17]

Ein Vergleich mit 1.2.2 zeigt sofort: Auf dem reellen Vektorraum $X := \mathbb{R}$ ist die Betragsfunktion $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Norm; $(\mathbb{R}, |\ |)$ ist also ein normierter Raum.

Bevor wir auf weitere Beispiele eingehen, wollen wir – ganz analog zu 1.2.3 – mithilfe einer Norm einen Abstand erzeugen.

1.4.2 Definition und Satz (Norm und Abstand)
Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum. Dann wird durch

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

der **Abstand** *zweier Elemente $x, y \in X$ definiert. Er heißt der von der Norm* **induzierte** *(oder* **erzeugte***)* **Abstand**.

[16] Das Zeichen $\|\ \|$ liest man als „Norm“; statt $\|\ \|(x)$ schreibt man $\|x\|$ und liest dies als „Norm von x“ oder „Norm x“.

[17] Wählt man $\alpha := 0$ und $x := 0$ in (ii), so erhält man $\|0\| = \|00\| = |0|\,\|0\| = 0$, und folglich kann die zweite Bedingung in (i) zu $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ abgeschwächt werden. Wegen (ii) gilt ferner $\|-x\| = |-1|\,\|x\| = \|x\|$ für alle $x \in X$. Mit (iii) folgt daher $\|x\| = \frac{1}{2}(\|x\| + \|x\|) = \frac{1}{2}(\|x\| + \|-x\|) \geq \frac{1}{2}\|x - x\| = \frac{1}{2}\|0\| = 0$; in (i) kann also die erste Bedingung weggelassen werden.

Für alle $x, y, z \in X$ gilt

(i) $d(x,y) \geq 0$ *und* $(d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$ *(Definitheit),*

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ *(Symmetrie),*

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(Dreiecksungleichung).*

Man sagt auch häufig, dass durch die Norm eine **Metrik**, also eine Abstandsmessung, auf X erzeugt wird. Die Eigenschaften (i) bis (iii) sind die typischen Eigenschaften, die man von einem Abstand erwarten darf.

Beweis von 1.4.2:
Seien $x, y, z \in X$ gegeben.

(i) Wegen der Definitheit der Norm gilt

$$d(x,y) = \|x-y\| > 0, \quad \text{falls } x \neq y \text{ ist,}$$

und wegen $\|0\| = 0$ gilt im Fall $x = y$

$$d(x,x) = \|x-x\| = 0.$$

Daraus folgt $d(x,y) \geq 0$ sowie $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(ii) Wegen der positiven Homogenität der Norm erhalten wir

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| \\ &= \|y-x\| = d(y,x). \end{aligned}$$

(iii) Mit der Dreiecksungleichung der Norm folgt

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \\ &\leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Damit sind die Abstandseigenschaften nachgewiesen. □

1.4.3 Beispiele

(1) Sei M eine nichtleere Menge. Auf $X := \mathcal{B}(M)$, dem Raum der beschränkten Funktionen auf M, vgl. Beispiel 1.3.4(2), ist durch

$$\|f\|_\infty := \sup\Big\{|f(t)| \;\Big|\; t \in M\Big\}$$

eine Norm (die **Supremumnorm**) definiert, es ist also $(\mathcal{B}(M), \|\ \|_\infty)$ ein normierter Raum. [Die Normeigenschaften wurden schon in 1.1.19 konstatiert.]

(2) Auf dem Raum

$$\ell^\infty = \left\{ f = (a_k) \in \omega \;\middle|\; f \text{ ist beschränkt} \right\},$$

dem Raum der beschränkten reellen Folgen, ist durch

$$\|(a_k)\|_\infty := \sup \left\{ |a_k| \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Norm (die **Supremumnorm**) definiert. [Es ist ja $\ell^\infty = \mathcal{B}(\mathbb{N})$.]

(3) Seien $I := [a, b]$ mit $a < b$ und

$$C(I) = \left\{ f \in Abb(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; f \text{ ist stetig} \right\}.$$

Dann ist durch

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt \quad (f \in C(I))$$

(lies: Einsnorm von f) eine Norm auf $C(I)$ gegeben.

Im Übrigen ist $C(I)$ eine Teilmenge (genauer: ein Unterraum) von $\mathcal{B}(I)$, vgl. **MG**, Kapitel 14. Daher ist auch die Supremumnorm (Beispiel (1)) eine Norm auf $C(I)$.

Zum Beweis von 1.4.3(3) benötigen wir Eigenschaften des Integrals, die ein wenig über das hinausgehen, was Sie in **MG** über Integration gelernt haben. Wir gehen später (in Kurseinheit 5) genauer darauf ein.

Da das Beispiel $\mathbb{R}^n$ für uns besonders wichtig ist, heben wir es wieder in einem eigens formulierten Satz hervor.

1.4.4 Satz und Definition (Normen auf $\mathbb{R}^n$)

Sei $p = 1$ oder $p = 2$. Dann werden durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

und durch

$$\|x\|_\infty := \max \left\{ |x_k| \;\middle|\; 1 \le k \le n \right\} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Normen $\|\ \|_p$ und $\|\ \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Die Norm $\|\ \|_2$ heißt **euklidische**[18] **Norm** *und der von ihr erzeugte Abstand $d_2(x, y)$* **euklidischer Abstand** *auf $\mathbb{R}^n$. Die Norm $\|\ \|_\infty$ heißt* **Maximumnorm**. *Den von $\|\ \|_1$ bzw. $\|\ \|_\infty$ erzeugten Abstand bezeichnen wir mit $d_1(x, y)$ bzw. $d_\infty(x, y)$.*

[18] Eukleides (von Alexandria), ca. 360 bis ca. 280 v. Chr.

Beweis:
Die Definitheit und die positive Homogenität sind einfach einzusehen. Schwierigkeiten bereitet nur die Dreiecksungleichung im Fall $p = 2$. Diese ist aber genau die Minkowskische Ungleichung aus 1.1.8. □

Im Fall $n = 1$ sind alle drei Abstände identisch, aber schon für $n = 2$ ergeben sich Unterschiede, wie sich auch aus Abb. 1.4–1 ablesen lässt.

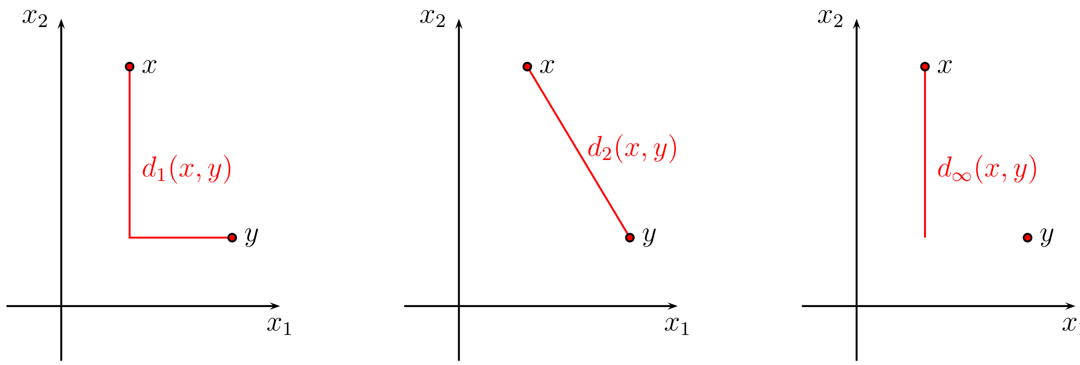


Abb. 1.4–1a: $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$

Abb. 1.4–1b: $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$

Abb. 1.4–1c: $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$

Der euklidische Abstand $d_2(x, y)$ misst den Luftlinienabstand zwischen x und y. Man wird ihn immer dann verwenden, wenn man an den „wahren“ Längen in einem geometrischen Zusammenhang interessiert ist. Der Abstand $d_1(x, y)$ dagegen ist die Länge des Weges, den ein Auto von x nach y zurücklegt, wenn es sich in einem rechtwinklig angelegten Straßennetz bewegen muss. (Dies ist in vielen amerikanischen Städten der Fall; $d_1(x, y)$ wird deshalb in der englischsprachigen Literatur gelegentlich auch „taxi cab distance“ genannt.) Der Abstand $d_\infty(x, y)$ ist die längste Seite in dem von x und y festgelegten achsenparallelen Rechteck.

Intuitiv wird Ihnen einleuchten, dass die euklidische Norm $\| \; \|_2$ (und damit der euklidische Abstand $d_2(x, y)$) besonders wichtig ist. Allerdings, und das ist der Wermutstropfen, ist dieser Abstand in Rechnungen manchmal schwerer zu handhaben (wegen der auftretenden Wurzel), weshalb man gerne auf andere Normen ausweicht. Sie werden bald sehen, wo dies möglich ist.

Oft nennt man $\|x\|_2$ den **Betrag** von $x \in \mathbb{R}^n$ und schreibt

$$|x| \quad \text{statt} \quad \|x\|_2.$$

Die besondere Bedeutung rührt vor allem daher, dass der Betrag (die euklidische Norm) mithilfe des nachstehenden Skalarproduktes[19] $x \cdot y$ gewonnen werden kann, nämlich durch

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}.$$

1.4.5 Definition (Skalarprodukt, Orthogonalität)

Für $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ und $y = {}^t(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Skalarprodukt *(oder* **inneres Produkt***) von x und y.*[20]

Gilt $x \cdot y = 0$, so heißen x und y **orthogonal** *oder* **senkrecht zueinander***.*

Im Fall $n = 1$ ist das Skalarprodukt $x \cdot y$ das gewöhnliche Produkt xy. Dieses ist genau dann 0, wenn wenigstens einer der Faktoren x oder y die Zahl 0 ist. Im Fall $n > 1$ ist aber $x \cdot y = 0$ durchaus auch dann möglich, wenn beide Faktoren vom Nullvektor verschieden sind. Z. B. gilt dies für je zwei der Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die schon in Ü 1.3.3 betrachtet wurden. Sie rechnen sofort nach, dass

$$e_i \cdot e_k = \delta_{ik} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k, \\ 0, & \text{falls } i \neq k, \end{cases}$$

gilt. Insbesondere sind e_i und e_k für $i \neq k$ senkrecht zueinander. Auch gilt z. B. für die Vektoren $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ und $\binom{-y}{x} \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $\binom{x}{y} \cdot \binom{-y}{x} = x(-y) + yx = 0$, und wenn Sie für irgendeine Wahl von x und y die beiden Vektoren zeichnen, so sehen Sie, dass sie aufeinander senkrecht stehen. Machen Sie z. B. eine Skizze der beiden Ortsvektoren $\binom{1}{1}$ und $\binom{-1}{1}$!

Da Sie von **MG** her mit dem Produkt von Matrizen vertraut sind, werden Sie erkennen, dass $x \cdot y$ das Produkt der $1 \times n$–Matrix ${}^t x = (x_1, \ldots, x_n)$ (Zeile) mit der $n \times 1$–Matrix $y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ (Spalte) ist, weniger platzsparend geschrieben:

$$x \cdot y = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu .$$

[19] Bitte nicht mit der skalaren Multiplikation (= Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar) verwechseln! Hier werden Vektoren miteinander multipliziert, und das Ergebnis ist ein Skalar.

[20] Statt $x \cdot y$ schreibt man auch oft $\langle x, y \rangle$.

1.4.6 Satz (Eigenschaften des Skalarprodukts)
Für alle Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt[21]

(i) $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$,
$(\alpha x)\cdot z = \alpha(x\cdot z)$ *(Linearität bezüglich des ersten Faktors),*
$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$,
$x\cdot(\beta z) = \beta(x\cdot z)$ *(Linearität bezüglich des zweiten Faktors),*

(ii) $x\cdot y = y\cdot x$ *(Kommutativität),*

(iii) $x\cdot x \geq 0$ *und* $(x\cdot x = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$ *(positive Definitheit).*

Die Eigenschaft (i) wird auch als **Bilinearität** bezeichnet und ein Produkt mit dieser Eigenschaft als **Bilinearform**, sodass es sich bei dem Skalarprodukt um eine positiv definite, kommutative Bilinearform handelt. Übrigens besagt die letzte Bedingung in (iii), dass der Nullvektor als einziger zu sich selbst orthogonal ist. – Auf den einfachen Beweis von 1.4.6 verzichten wir.

Die Regeln, nach denen mit einem Skalarprodukt gerechnet wird, sind also die üblichen Klammerregeln. Die nächste Aussage ist eine einfache Folgerung daraus.

1.4.7 Folgerung (Satz des Pythagoras[22])
Seien x und y aus $\mathbb{R}^n$. Sind x und y senkrecht zueinander, so gilt

$$(x-y)\cdot(x-y) = x\cdot x + y\cdot y$$

oder, mithilfe der euklidischen Norm ausgedrückt,

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(x-y)\cdot(x-y) &= x\cdot(x-y) - y\cdot(x-y)\\ &= x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y\\ &= x\cdot x + y\cdot y \quad [\text{wegen } x\cdot y = y\cdot x = 0].\end{aligned}$$ □

[21] Um Klammern zu sparen, ist wieder die Konvention „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“ in Kraft.
[22] Pythagoras, ca. 570 bis ca. 480 v. Chr.

Die Veranschaulichung im Fall $n = 2$ ergibt sich aus Abb. 1.4–2: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

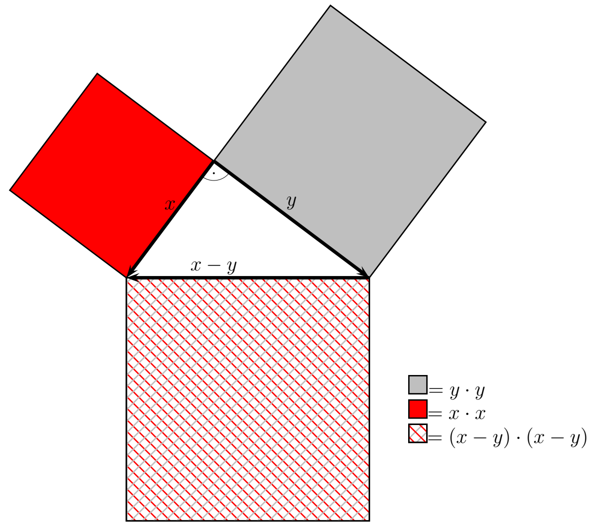


Abb. 1.4–2: Zum Satz des Pythagoras

Übungsaufgaben zu 1.4

Ü 1.4.1 Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum.

(i) Beweisen Sie die **zweite Dreiecksungleichung**

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x + y\| \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

(ii) Folgern Sie für den von $\| \ \|$ gemäß 1.4.2 erzeugten Abstand d die zweite Dreiecksungleichung

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y) \quad \text{für alle } x, y, z \in X.$$

Ü 1.4.2 Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ gesetzt. Zeigen Sie, dass durch d ein Abstand auf $\mathbb{R}$ definiert ist, d. h., dass d die Eigenschaften (i) bis (iii) von 1.4.2 hat.

Hinweis: Die Funktion $h : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow h(t) := \frac{t}{1+t}$ ist monoton wachsend. (Warum?)

Ist d durch eine Norm erzeugt, d. h., gibt es eine Norm $\| \ \|$ auf $\mathbb{R}$, sodass $d(x,y) = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt?

Ü 1.4.3 Sei X ein reeller Vektorraum, auf dem ein **Skalarprodukt** $x * y$ erklärt ist, d. h., es gelten die Eigenschaften von 1.4.6 mit $*$ anstelle von $\cdot$. Ferner sei

$$\|x\| := \sqrt{x * x} \quad \text{für } x \in X$$

gesetzt. Beweisen Sie:

(i) Es gilt die (verallgemeinerte) **Cauchy–Schwarzsche Ungleichung**

$$(x * y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \quad \text{für } x, y \in X.$$

Hinweis: Zeigen Sie $(\alpha x + y) * (\alpha x + y) = \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha(x * y) + \|y\|^2 \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, und betrachten Sie speziell $\alpha := -\frac{x*y}{\|x\|^2}$ im Fall $x \neq 0$.

(ii) $\| \ \|$ ist eine Norm auf X.

1.5 Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

Bei topologischen Eigenschaften handelt es sich um solche, welche die Lage verschiedener Punkte zueinander betreffen. Als zentralen Begriff haben Sie in **MG** bereits den Begriff der ε–Umgebung in $\mathbb{R}$ kennen gelernt (vgl. den Rückblick in Abschnitt 1.2), der für die Konvergenz von Folgen und damit auch für die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von grundlegender Bedeutung ist. Hier wollen wir nun systematisch vorgehen, indem wir vom Umgebungsbegriff in allgemeinen normierten Räumen ausgehen und – wie schon im vorangehenden Abschnitt – den Raum $\mathbb{R}^n$ als Spezialfall herausarbeiten.

1.5.1 Definition (ε–Umgebung, Umgebung)
Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter reeller Vektorraum, und sei $d(x,y) = \|x-y\|$ der von $\| \ \|$ erzeugte Abstand.

(i) *Sind $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so heißt*

$$U_\varepsilon(a) := \Big\{ x \in X \ \Big| \ d(x,a) < \varepsilon \Big\} = \Big\{ x \in X \ \Big| \ \|x-a\| < \varepsilon \Big\}$$

die **ε–Umgebung** *von a (in $(X, \| \ \|)$).*

(ii) *Sind $a \in X$ und $U \subseteq X$ gegeben, so heißt U* **Umgebung** *von a (in $(X, \| \ \|)$), wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ gibt.*

Das entspricht wortwörtlich der Definition 1.2.4. Nur kann hier weit reichender interpretiert werden.

Die ε–Umgebung von a in $(X, \| \ \|)$ hängt natürlich von der Norm bzw. von dem durch sie induzierten Abstand d ab. Wenn es nötig ist, dies deutlich zu machen, schreiben wir gelegentlich auch $U_\varepsilon^d(a)$. In Abb. 1.5–1 ist $U_\varepsilon^d(a)$ für die drei Normen $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ und $\| \ \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ bzw. die dadurch erzeugten Abstandsdefinitionen aus 1.4.4 dargestellt, vgl. auch Abb. 1.4–1.

Sie überlegen sich, dass sich im Fall $\mathbb{R}^3$ in den drei Fällen ein Rhombus, eine Kugel bzw. ein Würfel ergibt. Im Fall $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$ geht die Anschaulichkeit verloren; aber auch hier ist die Vorstellung einer Kugel als ε–Umgebung oft sehr hilfreich. Ich muss Ihnen gestehen, dass ich mir im Fall von allgemeinen normierten Räumen unter einer ε–Umgebung fast immer eine Kugel vorstelle, obwohl diese Vorstellung in konkreten Fällen meist weit von der Realität entfernt ist.

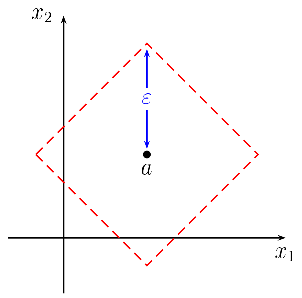


Abb. 1.5–1a: $U_\varepsilon^d(a)$ für $d = d_1$

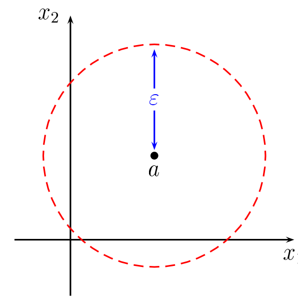


Abb. 1.5–1b: $U_\varepsilon^d(a)$ für $d = d_2$

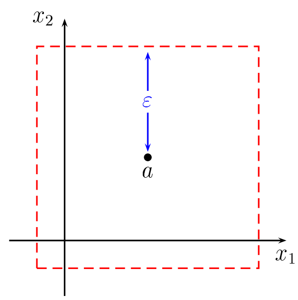


Abb. 1.5–1c: $U_\varepsilon^d(a)$ für $d = d_\infty$

Als weiteres Beispiel wollen wir uns noch überlegen, wie eine ε–Umgebung im Raum $(\mathcal{B}(M), \|\ \|_\infty)$, vgl. Beispiel 1.4.3(1), aussieht. Die „Punkte“ des Raumes sind Funktionen, und der Abstand zweier Funktionen f, g ist durch

$$\|f - g\|_\infty = \sup\left\{ |f(t) - g(t)| \;\middle|\; t \in M \right\}$$

gegeben. Aus $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ folgt $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ für jedes $t \in M$, d. h.

$$f(t) - \varepsilon < g(t) < f(t) + \varepsilon \quad \text{für jedes } t \in M.$$

Liegt also g in der ε–Umgebung von f, so liegt der Graph von g zwischen den

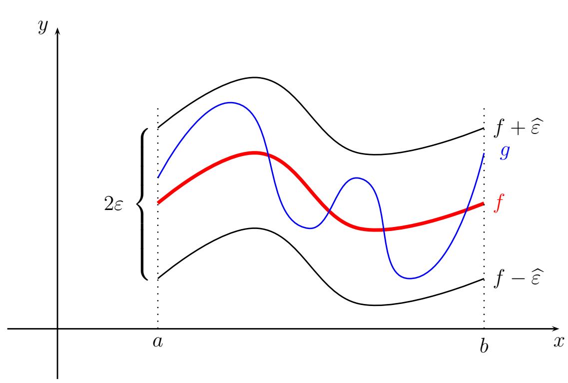


Abb. 1.5–2: $g \in U_\varepsilon(f)$ in $(\mathcal{B}(M), \|\ \|)$

Graphen von $f - \widehat{\varepsilon}|_M$ und $f + \widehat{\varepsilon}|_M$, verläuft also in dem Streifen der Breite 2ε um den Graphen von f; vgl. Abb. 1.5–2, worin $M = [a, b]$ ist.

$U_\varepsilon(f)$ eine „Kugel“ um den „Punkt“ f? – Trotzdem: Diese gedankliche Vorstellung ist oft hilfreich, wie Sie noch sehen werden.

Wir kommen zu den Eigenschaften von Umgebungen, die natürlich die gleichen sind wie in 1.2.5, und der Beweis kann wörtlich übernommen werden.

1.5.2 Satz (Eigenschaften von Umgebungen)
Seien $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, $a \in X$ und U eine Umgebung von a. Dann gilt:

(i) $a \in U$.

(ii) *Jede Obermenge von U ist auch Umgebung von a. (Insbesondere ist die Vereinigung von beliebig vielen Umgebungen von a wieder eine Umgebung von a.)*

(iii) *Der Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von a ist wieder eine Umgebung von a.*

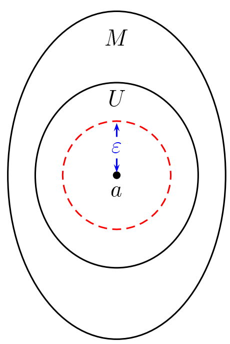


Abb. 1.5–3a: Jede Obermenge einer Umgebung von a ist eine Umgebung von a

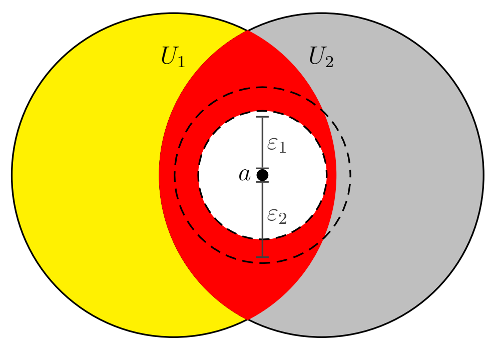


Abb. 1.5–3b: Der Durchschnitt von zwei Umgebungen von a ist eine Umgebung von a

Für die Eindeutigkeit von Grenzwerten wird der folgende „Trennungssatz“ von Bedeutung sein, vgl. 1.2.6.

1.5.3 Satz (Hausdorffeigenschaft)
Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, und seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Dann gibt es eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von b mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis:
Der Beweis von 1.2.6 kann wörtlich übernommen werden, nur sieht hier die Interpretation etwas anders aus: Mit $d(x, y) := \|x - y\|$ setzen wir wie dort $\varepsilon := \frac{1}{2} d(a, b)$ (wegen $a \neq b$ ist dann $\varepsilon > 0$) und $U := U_\varepsilon(a)$, $V := U_\varepsilon(b)$, vgl. Abb. 1.5–4.

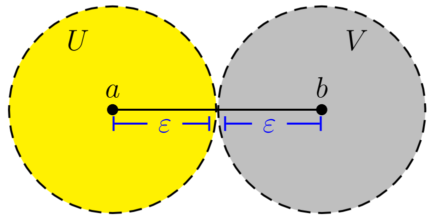


Abb. 1.5–4: Trennung zweier Punkte durch disjunkte Umgebungen

Wäre $x \in U \cap V$, so würde $d(x,a) < \varepsilon$ und $d(x,b) < \varepsilon$ und damit $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \varepsilon + \varepsilon = d(a,b)$ folgen, aber $d(a,b) < d(a,b)$ ist falsch. □

Wir können jetzt analog zu Abschnitt 1.2 fortfahren und die Konvergenz von Folgen definieren.

1.5.4 Definition (konvergente Folge)

Seien $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, $f = (x_k)$ eine Folge in X und $a \in X$.

(i) *f heißt* **konvergent gegen a in $(X, \| \ \|)$** *(oder einfach* **konvergent gegen a**, *wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welcher normierte Raum $(X, \| \ \|)$ gemeint ist), in Zeichen:*

$$x_k \longrightarrow a \text{ in } (X, \| \ \|) \text{ für } k \longrightarrow \infty \quad (\text{oder einfach } x_k \longrightarrow a),$$

wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder x_k der Folge liegen.

(ii) *f heißt* **konvergent in $(X, \| \ \|)$** *(oder einfach* **konvergent***), wenn es ein $a \in X$ gibt mit der Eigenschaft „f ist konvergent gegen a in $(X, \| \ \|)$“.*

(iii) *f heißt* **divergent in $(X, \| \ \|)$** *(oder einfach* **divergent***), wenn f nicht konvergent in $(X, \| \ \|)$ ist.*[23]

Wie im Fall $X := \mathbb{R}$ ergibt sich aus der Hausdorffeigenschaft 1.5.3, dass es in einem normierten Raum höchstens ein a gibt, gegen das eine gegebene Folge f konvergent sein kann. [Wäre f auch gegen $b \neq a$ konvergent, so gäbe es nach 1.5.3 disjunkte Umgebungen von a bzw. von b, in denen jeweils fast alle Folgenglieder liegen müssten. Das ist aber nicht möglich.] Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

[23] Statt „ist konvergent“ bzw. „ist divergent“ sagt man oft auch „konvergiert“ bzw. „divergiert“.

1.5.5 Definition (Grenzwert)

Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum. Ist $f = (x_k)$ eine in $(X, \| \ \|)$ gegen a konvergente Folge, so heißt a der **Grenzwert** *von f und wird mit*

$$\lim f \quad \textit{oder} \quad \lim_{k\to\infty} x_k$$

bezeichnet (mit dem Zusatz „in $(X, \| \ \|)$“, falls dies zur Klarstellung erforderlich ist).

Die Definition der Konvergenz lässt sich in ein ε–n_0–Kriterium ummünzen.

1.5.6 Satz (ε–n_0–Kriterium)

Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, $f = (x_k)$ eine Folge in X, und es sei $a \in X$. Dann gilt: Genau dann konvergiert f gegen a, wenn die Bedingung

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, k \in \mathbb{N} : \ (k \geq n_0 \Longrightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon)$$

erfüllt ist, d. h., wenn

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0 \qquad \textit{(im gewöhnlichen Sinn in } \mathbb{R}\textit{)}$$

gilt.

Die Bedingung besagt also einfach, dass die reelle Folge $(\|x_k - a\|)_{k\in\mathbb{N}}$ der Abstände von x_k und a eine ganz gewöhnliche Nullfolge ist. Die Konvergenz in $(X, \| \ \|)$ ist damit auf die gewöhnliche Konvergenz (in $\mathbb{R}$) zurückgespielt.

Beweis:

(i) Sei (x_k) konvergent gegen a, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann liegen in der Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a fast alle x_k, d. h., es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U_\varepsilon(a)$ für alle $k \geq n_0$. Nun bedeutet $x_k \in U_\varepsilon(a)$ gerade $\|x_k - a\| < \varepsilon$, sodass wir erhalten: Zu dem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x_k - a\| < \varepsilon$ für alle $k \geq n_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben war, ist damit das Erfülltsein der Bedingung nachgewiesen.

(ii) Sei nun die Bedingung erfüllt, und sei eine Umgebung U von a gegeben. Dann gibt es nach Definition der Umgebung ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$. Wir wählen ein solches ε und können dazu laut Bedingung ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden mit der Eigenschaft

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \ (k \geq n_0 \Longrightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon),$$

d. h., alle x_k mit $k \geq n_0$ liegen in $U_\varepsilon(a)$. Das sind fast alle. Wegen $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ liegen also fast alle x_k in U. Da U beliebig vorgegeben war, bedeutet dies die Konvergenz von f gegen a. $\square$

1.5.7 Beispiele

(1) Seien $(X, \| \ \|) := (\mathbb{R}, | \ |)$, $f = (x_k)$ eine reelle Folge, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach 1.5.6

$$\begin{aligned} x_k \longrightarrow a \ \text{ in } (\mathbb{R}, | \ |) \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |x_k - a| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = a. \end{aligned}$$

Wir haben den gewöhnlichen Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}$.

(2) Seien $(X, \| \ \|) := (\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$ (also $\|\binom{x_1}{x_2}\|_1 = |x_1| + |x_2|$) und $f = (x_k)$ die Folge in $\mathbb{R}^2$ mit

$$x_k := \begin{pmatrix} \frac{k}{1+k} \\ (1+\frac{1}{k})^k \end{pmatrix}.$$

Dann konvergiert f gegen $a := \binom{1}{e}$.

[Denn es gilt

$$\|x_k - \tbinom{1}{e}\|_1 = |\tfrac{k}{1+k} - 1| + |(1+\tfrac{1}{k})^k - e| \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \longrightarrow \infty,$$

wegen $\frac{k}{1+k} \longrightarrow 1$ und $(1+\frac{1}{k})^k \longrightarrow e$ für $k \longrightarrow \infty$, wie Sie aus **MG**, Kapitel 12, wissen.]

Das Beispiel (2) ist in dem Sinne typisch, dass Konvergenz in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$ „komponentenweise“ Konvergenz bedeutet. Das gilt übrigens unabhängig davon, welche Norm auf $\mathbb{R}^n$ betrachtet wird, wie wir noch sehen werden. Zunächst betrachten wir die Maximumnorm.

1.5.8 Beispiel (Konvergenz in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$)

Sei $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumnorm $\| \ \|_\infty$ versehen (Satz 1.4.4), sei $f = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = {}^t(x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, und sei $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$x_k \longrightarrow a \ \textit{ in } (\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_{k\nu} = a_\nu \ \ \textit{für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Die Konvergenz in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ bedeutet also die gewöhnliche Konvergenz jeder Koordinatenfolge.

Beweis:

(i) $x_k \longrightarrow a$ in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ bedeutet nach 1.5.6

$$m_k := \max\Big\{|x_{k\nu} - a_\nu| \ \Big| \ \nu = 1, \ldots, n\Big\} \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \longrightarrow \infty$$

(im gewöhnlichen Sinn). Für festes ν ist

$$0 \le |x_{k\nu} - a_\nu| \le m_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Hieraus folgt („Sandwich–Theorem“) $\lim\limits_{k\to\infty} |x_{k\nu} - a_\nu| = 0$, also $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k\nu} = a_\nu$.

(ii) Sei $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k\nu} = a_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$, d. h.,

$$(x_{k\nu} - a_\nu)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge für jedes } \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Daher ist auch die (endliche) Summe $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_k := |x_{k_1} - a_1| + \ldots + |x_{kn} - a_n|$$

eine Nullfolge. Wegen

$$0 \le m_k \le s_k \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

ist auch (m_k) eine Nullfolge. Dies wiederum bedeutet nach 1.5.6, dass (x_k) gegen a in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ konvergiert. □

Wie wir bald sehen werden, kann in Beispiel 1.5.8 die Norm $\|\ \|_\infty$ durch jede andere Norm auf $\mathbb{R}^n$ ersetzt werden. Als Beweishilfsmittel wird dabei der Satz von Bolzano–Weierstraß benutzt, den Sie für $\mathbb{R}^1$ bereits kennen (vgl. 1.2.17(ii)).

1.5.9 Satz (von Bolzano–Weierstraß)

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, die $\|\ \|_\infty$–beschränkt ist, d. h., es gebe eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ mit

$$\|x_k\|_\infty \le S \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es eine Teilfolge von (x_k), die in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ konvergiert.

Beweis (durch vollständige Induktion bezüglich n):
Die Aussage im Fall $n = 1$ ist der „gewöhnliche“ Satz von Bolzano–Weierstraß 1.2.17(ii). Nun sei die Aussage für n richtig, und es sei

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad x_k = {}^t(x_{k1}, \dots, x_{kn}, x_{k,n+1})$$ [24]

eine Folge in $\mathbb{R}^{n+1}$, die $\|x_k\|_\infty \le S$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann gilt für die $(n+1)$–ten Koordinaten

$$|x_{k,n+1}| \le \|x_k\|_\infty \le S \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Die reelle Folge $(x_{k,n+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist also beschränkt und besitzt (nach dem gewöhnlichen Satz von Bolzano–Weierstraß, 1.2.17(ii)) eine konvergente Teilfolge, etwa $(x_{k_j,n+1})_{j\in\mathbb{N}}$. Nun betrachten wir die Folge (y_j) mit

$$y_j := {}^t(x_{k_j1}, \dots, x_{k_jn}) \in \mathbb{R}^n.$$

[24] Doppelindizes schreiben wir in der Regel direkt nebeneinander; besteht jedoch einer der beiden Indizes aus mehr als einem Zeichen, so setzen wir oft ein Komma dazwischen, um Missverständnisse zu vermeiden.

Wegen $\|y_j\|_\infty \le \|x_{k_j}\|_\infty \le S$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist die Induktionsvoraussetzung auf (y_j) anwendbar: (y_j) besitzt eine in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ konvergente Teilfolge, etwa $(z_\nu) := (y_{j_\nu})$. Dann ist $z_\nu = {}^t(x_{r_\nu 1}, \ldots, x_{r_\nu n})$, wobei (r_ν) eine Teilfolge der Indexfolge (k_j) ist. Die Konvergenz von (z_ν) in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ bedeutet nach 1.5.8, dass die n reellen Folgen $(x_{r_\nu 1})_{\nu\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{r_\nu n})_{\nu\in\mathbb{N}}$ sämtlich konvergieren. Da auch $(x_{r_\nu, n+1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge der konvergenten Folge $(x_{k_j, n+1})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, folgt aus 1.5.8 die Konvergenz von (x_{r_ν}) in $(\mathbb{R}^{n+1}, \|\ \|_\infty)$. □

Entscheidend für die weiter oben angedeutete Gleichwertigkeit aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ ist der folgende Hilfssatz.

1.5.10 Hilfssatz (Normen auf $\mathbb{R}^n$)

Sei $\|\ \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$, und sei $\|\ \|_\infty$ die Maximumnorm (vgl. 1.4.4). Dann gibt es positive Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(i) $\|x\| \le \alpha\|x\|_\infty$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $\|x\|_\infty \le \beta\|x\|$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:

(i) Sei $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt

$$x = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu,$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$ sind (vgl. Ü 1.3.3). Die Dreiecksungleichung liefert

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu \right\| \le \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu e_\nu\| = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \|e_\nu\| \\ &\le \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \sum_{\nu=1}^{n} \|e_\nu\| = \|x\|_\infty\, \alpha, \end{aligned}$$

wenn $\alpha := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \|e_\nu\|$ gesetzt wird.

(ii) Diesen Beweis führen wir indirekt und nehmen an, dass es kein β mit der behaupteten Eigenschaft gibt. Das bedeutet dann, dass es zu jedem $\beta > 0$ ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty > \beta\|x\|$ gibt. Wir können also insbesondere zu $\beta = k \in \mathbb{N}$ ein $x =: y_k \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|y_k\|_\infty > k\|y_k\| \quad (k \in \mathbb{N})$$

wählen. Wir setzen $\lambda_k := \frac{1}{\|y_k\|_\infty}$ und $x_k := \lambda_k y_k$ und erhalten (für jedes $k \in \mathbb{N}$)

$$\|x_k\|_\infty = \|\lambda_k y_k\|_\infty = |\lambda_k|\,\|y_k\|_\infty = 1 \tag{1.5:1}$$

und

$$k\|x_k\| = k\|\lambda_k y_k\| = k|\lambda_k|\,\|y_k\| < |\lambda_k|\,\|y_k\|_\infty = 1,$$

also

$$\|x_k\| < \frac{1}{k} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}. \tag{1.5:2}$$

Aus (1.5:1) und (1.5:2) leiten wir einen Widerspruch ab: Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß 1.5.9 gibt es wegen (1.5:1) eine Teilfolge $(x_{k_j}) =: (z_j)$ von (x_k), die in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ konvergiert, etwa gegen den Grenzwert z. Es gilt also (nach 1.5.6)

$$\|z_j - z\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{für } j \longrightarrow \infty.$$

Nach der schon bewiesenen Ungleichung (i) ist $0 \leq \|z_j - z\| \leq \alpha\|z_j - z\|_\infty$ und folglich

$$\lim_{j\to\infty} \|z_j - z\| = 0.$$

Das heißt $z_j \longrightarrow z$ in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$. Aus (1.5:2) folgt aber $x_k \longrightarrow 0$ in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ und, da (z_j) eine Teilfolge von (x_k) ist, auch $z_j \longrightarrow 0$ in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$. Da der Grenzwert eindeutig bestimmt ist, erhalten wir $z = 0$. Andererseits ist wegen (1.5:1)

$$\begin{aligned} 1 &= \|z_j\|_\infty = \|(z_j - z) + z\|_\infty \\ &\leq \|z_j - z\|_\infty + \|z\|_\infty \longrightarrow \|z\|_\infty \quad \text{für } j \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

und folglich $1 \leq \|z\|_\infty$ (dabei kommt genau genommen 1.2.10(v) ins Spiel), was $z \neq 0$ und damit einen Widerspruch zur Folge hat. Die Annahme, von der wir ausgegangen sind, ist falsch, und damit ist (ii) bewiesen. □

Als Folgerung aus Hilfssatz 1.5.10 erhalten wir den folgenden Satz.

1.5.11 Satz (Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^n$)

Seien $\|\ \|$ und $\|\ \|^*$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$, $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = {}^t(x_{k1}, \ldots, x_{kn})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(i) *U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$*
$\Longleftrightarrow$ U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|^*)$.

(ii) *(x_k) ist konvergent (gegen a) in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$*
$\Longleftrightarrow$ (x_k) ist konvergent (gegen a) in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|^*)$
$\Longleftrightarrow$ Für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ konvergiert $(x_{k\nu})_{k\in\mathbb{N}}$ (gegen a_ν) im gewöhnlichen Sinn, also in $(\mathbb{R}, |\ |)$.

Beweis:
Wir zeigen, dass die Aussagen im Fall $\| \ \|^* = \| \ \|_\infty$ richtig sind. (Überlegen Sie sich, dass daraus die allgemeineren Aussagen leicht zu folgern sind!)

(i) Sei U eine Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\} \subseteq U$, d. h., aus $\|x - a\| < \varepsilon$ folgt $x \in U$. Nun gilt $\|x - a\| \leq \alpha \|x - a\|_\infty$ für ein $\alpha > 0$ (Hilfssatz 1.5.10(i)). Setzt man also $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{\alpha}$, so folgt aus $\|x - a\|_\infty < \varepsilon'$ sofort

$$\|x - a\| < \alpha\varepsilon' = \varepsilon \text{ und damit } x \in U;$$

es gilt also $U_{\varepsilon'}^{d_\infty}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty < \varepsilon'\} \subseteq U$, und U ist daher eine Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$.

Ganz entsprechend beweist man, dass U Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ ist, falls U Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ ist, indem man Hilfssatz 1.5.10(ii) heranzieht.

(ii) Diese Aussage folgt unmittelbar aus (i) in Verbindung mit Definition 1.5.4 der konvergenten Folge und Beispiel 1.5.8. □

Bei so viel Übereinstimmung treffen wir die folgende Vereinbarung:

1.5.12 Vereinbarung

In Zukunft nehmen wir immer an, dass $\mathbb{R}^n$ mit einer Norm (bzw. mit dem von der betreffenden Norm induzierten Abstand) versehen ist, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Im Fall $n = 1$ nehmen wir immer die Betragsfunktion als Norm.

Häufig werden wir die Maximumnorm $\| \ \|_\infty$ benutzen, weil sie sich bei Abschätzungen vielfach leicht handhaben lässt; bei geometrischen Überlegungen wird der Betrag, also die euklidische Norm $\| \ \|_2$, im Vordergrund stehen, da sie die „wahren" Abstände angibt.

In reellen Vektorräumen X sind eine Addition und eine skalare Multiplikation definiert, und dementsprechend kann man auch für Folgen (x_k) und (y_k) in einen normierten Raum $(X, \| \ \|)$ eine Addition und eine skalare Multiplikation einführen, nämlich durch

$$(x_k) + (y_k) := (x_k + y_k) \quad \text{bzw.} \quad \alpha(x_k) := (\alpha x_k) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Die folgende Aussage ist dann fast selbstverständlich.

1.5.13 Satz (Regeln)

Sei $(X, \| \ \|)$ *ein normierter Raum, sei* $\alpha \in \mathbb{R}$, *sei* (x_k) *konvergent gegen* a *in* $(X, \| \ \|)$, *und sei* (y_k) *konvergent gegen* b *in* $(X, \| \ \|)$. *Dann gilt:*

(i) $(x_k) + (y_k)$ *ist konvergent gegen* $a + b$ *in* $(X, \| \ \|)$.

(ii) $\alpha(x_k)$ *ist konvergent gegen* $\alpha\, a$ *in* $(X, \| \ \|)$.

Der Beweis ist einfach und Ihnen zur Einübung des Konvergenzbegriffes empfohlen (Ü 1.5.4). □

Da im Fall $n \geq 2$ auf $\mathbb{R}^n$ keine Ordnung definiert ist, bleibt für die Übertragung der in $\mathbb{R}^1$ gültigen Konvergenzkriterien (Abschnitt 1.2) auf den höher dimensionalen Fall nur das Cauchykriterium übrig. Die Definition einer Cauchyfolge in beliebigen normierten Räumen kann fast wörtlich übernommen werden.

1.5.14 Definition (Cauchyfolge)

Sei $(X, \| \ \|)$ *ein normierter Raum. Eine Folge* (x_k) *in* X *heißt* **Cauchyfolge in** $(\boldsymbol{X}, \| \ \|)$ *(oder* **Cauchyfolge in** $\boldsymbol{X}$ *oder einfach* **Cauchyfolge**, *wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Norm* $\| \ \|$ *bzw. welcher normierte Raum* $(X, \| \ \|)$ *gemeint ist), wenn die Bedingung*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \in \mathbb{N} : \,(k > n_0 \Longrightarrow \|x_k - x_{n_0}\| < \varepsilon)$$

erfüllt ist.
In Worten: Wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ *einen Index* n_0 *gibt, sodass* $\|x_k - x_{n_0}\| < \varepsilon$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k > n_0$ *gilt.*

Vergleichen Sie die Bedingung einmal mit jener im ε–n_0–Kriterium 1.5.6 ! Sie werden sehen, dass der wesentliche Unterschied darin besteht, dass der dortige Grenzwert a hier durch das Folgenglied x_{n_0} ersetzt ist. Die Bedingung für die Cauchyfolge kann also formuliert werden, ohne dass man den Grenzwert kennt, ja ohne dass man weiß, ob die Folge überhaupt konvergent ist oder nicht.

Die Bedingung, durch die Cauchyfolgen in 1.5.14 charakterisiert sind, ist mit der folgenden äquivalent:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k, \ell \in \mathbb{N} : \,(k, \ell \geq n_0 \Longrightarrow \|x_k - x_\ell\| < \varepsilon).$$

Das sehen Sie sofort ein, wenn Sie den Fall $n = 1$ (Ü 1.2.3) noch einmal anschauen. Sie brauchen nur $| \ |$ durch $\| \ \|$ zu ersetzen.

Entsprechend problemlos übertragen sich die Eigenschaften reeller Cauchyfolgen auf allgemeine normierte Räume.

1.5.15 Hilfssatz (Eigenschaften von Cauchyfolgen)

In einem normierten Raum $(X, \| \ \|)$ *gilt:*

(i) *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

(ii) *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

(iii) *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

Die wichtigste Aussage, die Cauchyfolgen in $(\mathbb{R}^1, | \ |)$ betreffend, ist, dass die Umkehrung von 1.5.15(i) in $(\mathbb{R}, | \ |)$ gilt: Jede Cauchyfolge in $(\mathbb{R}, | \ |)$ ist konvergent (1.2.21). Dieser Satz ist leider in beliebigen normierten Räumen *nicht* richtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

1.5.16 Beispiel (divergente Cauchyfolge)

Es sei c_0 der Raum aller reellen Nullfolgen, also

$$c_0 = \left\{ f = (x_j) \in c \ \Big| \ \lim_{j \to \infty} x_j = 0 \right\},$$

versehen mit der Norm

$$\|f\| = \|(x_j)\| := \sup \left\{ \tfrac{|x_j|}{j} \ \Big| \ j \in \mathbb{N} \right\}, \text{ also } \|(x_j)\| = \|(\tfrac{x_j}{j})\|_\infty .$$

Sie werden rasch verifizieren, dass $\| \ \|$ tatsächlich eine Norm auf c_0 ist. Die Folge $f = (f_k)$ in c_0 sei nun wie folgt definiert: Für $k = 1, 2, \ldots$ sei f_k die Folge $f_k := (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$, wobei die letzte 1 das k–te Folgenglied ist, d. h., die ersten k Folgenglieder von f_k haben den Wert 1, alle nachfolgenden den Wert 0. Offenbar gilt $f_k \in c_0$ für jedes k.

Wir zeigen nun, dass (f_k) eine Cauchyfolge in $(c_0, \| \ \|)$ ist: Für $k > n_0$ ist $f_k - f_{n_0} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0 \ldots)$, wobei der ersten Gruppe von n_0 Nullen genau $k - n_0$ Einsen folgen und dann nur noch Nullen kommen. Daher gilt

$$\|f_k - f_{n_0}\| = \sup \left\{ \tfrac{1}{j} \ \Big| \ n_0 + 1 \le j \le k \right\} = \tfrac{1}{n_0 + 1}.$$

Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle man für n_0 eine natürliche Zahl $\ge \frac{1}{\varepsilon}$. Man erhält dann für alle $k > n_0$ die Abschätzung $\|f_k - f_{n_0}\| = \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. Die Bedingung für das Vorliegen einer Cauchyfolge ist damit erfüllt.

Aber die Folge (f_k) ist nicht konvergent in $(c_0, \| \ \|)$: Denn wäre (f_k) doch konvergent gegen ein $g \in c_0$, so hieße das $\|f_k - g\| \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow \infty$. Ist nun $f_k(j)$ bzw. $g(j)$ das j–te Folgenglied von f_k bzw. g, so würde (für jedes feste j)

$$\left| \frac{f_k(j)}{j} - \frac{g(j)}{j} \right| \le \|f_k - g\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \longrightarrow \infty$$

folgen und damit $f_k(j) \longrightarrow g(j)$ für $k \longrightarrow \infty$. Es ist aber $f_k(j) = 1$ für $k \geq j$, und somit wäre $g(j) = 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Damit hätten wir einen Widerspruch: g wäre doch nicht in c_0.

Es ist also schon etwas Besonderes, wenn jede Cauchyfolge in einem normierten Raum auch konvergent ist, und solche Räume erhalten nun einen besonderen Namen.

1.5.17 Definition (vollständiger normierter Raum)
Ein normierter Raum $(X, \| \ \|)$, in welchem jede Cauchyfolge konvergent ist, heißt **vollständig** *oder ein* **Banachraum**[25].

Das wichtigste Beispiel für einen Banachraum ist $\mathbb{R}^n$ (versehen mit einer Norm).

1.5.18 Satz ($\mathbb{R}^n$ als Banachraum)
Sei $\| \ \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ vollständig, also ein Banachraum.

Beweis:
Wir beweisen dies zunächst für die Maximumnorm $\| \ \|_\infty$. Sei (x_k) eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$, $x_k = {}^t(x_{k1}, \ldots, x_{kn})$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_k - x_{n_0}\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } k > n_0.$$

Daraus ergibt sich wegen

$$|x_{k\nu} - x_{n_0\nu}| \leq \|x_k - x_{n_0}\|_\infty \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, n$$

sofort, dass die Folgen $(x_{k\nu})_{k\in\mathbb{N}}$ für $\nu = 1, \ldots, n$ sämtlich Cauchyfolgen in $(\mathbb{R}^1, | \ |)$ sind. In diesem Raum gilt aber das Cauchykriterium, siehe 1.2.21, sodass die Folgen in $(\mathbb{R}^1, | \ |)$ konvergent sind. Ist a_ν der Grenzwert von $(x_{k\nu})_{k\in\mathbb{N}}$, so gilt also

$$\lim_{k\to\infty} x_{k\nu} = a_\nu \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Nach Beispiel 1.5.8 folgt $x_k \longrightarrow a := {}^t(a_1, \ldots, a_n)$ für $k \longrightarrow \infty$ in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$. Damit ist die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ bewiesen.

Die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ für eine beliebige Norm ergibt sich nun rasch aus Hilfssatz 1.5.10 über Normen auf $\mathbb{R}^n$: Danach gilt mit geeignetem $\beta > 0$

$$\text{(1.5:3)} \qquad \|x\|_\infty \leq \beta\|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

[25] Stefan Banach, 1892–1945.

Ist also (x_k) eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ und ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{\beta}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_k - x_{n_0}\| < \varepsilon' \quad \text{für alle } k > n_0.$$

Mit (1.5:3) folgt hieraus

$$\|x_k - x_{n_0}\|_\infty \leq \beta \|x_k - x_{n_0}\| < \beta\varepsilon' = \varepsilon \quad \text{für alle } k > n_0,$$

d. h., (x_k) ist eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$. Nach dem zuvor Bewiesenen ist daher (x_k) in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ konvergent, und nach Satz 1.5.11(ii) konvergiert dann (x_k) auch in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$. Das war zu zeigen. □

Der Satz (und genauer noch der Beweis) zeigt, dass in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ dieselben Folgen wie in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ Cauchyfolgen sind und dass dies genau die konvergenten Folgen sind, ein Grund mehr für die Vereinbarung 1.5.12: $\mathbb{R}^n$ (ohne Zusatz) bedeutet $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ mit irgendeiner Norm.

Wir wollen noch einige der Räume aus früheren Beispielen auf Vollständigkeit untersuchen. Die beiden ersten Beispiele sind besonders wichtig.

1.5.19 Beispiele

(i) $(\mathcal{B}(M), \| \ \|_\infty)$ mit einer Menge $M \neq \emptyset$ und $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \mid t \in M\}$ (vgl. Beispiel 1.4.3(1)) ist vollständig, also ein Banachraum.

(ii) $(C([a,b]), \| \ \|_\infty)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $\| \ \|_\infty$ wie in (i) (vgl. Beispiel 1.4.3(3)) ist vollständig, also ein Banachraum.

(iii) $(C([0,1]), \| \ \|_1)$ mit $\|f\|_1 := \int\limits_0^1 |f(t)| dt$ (vgl. Beispiel 1.4.3(3)) ist *nicht* vollständig.

Beweis:

(i) Es sei (f_k) eine Cauchyfolge in $(\mathcal{B}(M), \| \ \|_\infty)$, also eine Folge beschränkter Funktionen $f_k : M \longrightarrow \mathbb{R}$, die der Bedingung

$$\text{(1.5:4)} \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, k, \ell \in \mathbb{N} : (k \geq n_0, \ell \geq n_0 \Longrightarrow \|f_k - f_\ell\|_\infty < \varepsilon)$$

genügt. Für festes $t \in M$ gilt $|f_k(t) - f_\ell(t)| \leq \|f_k - f_\ell\|_\infty$, und daher folgt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, k, \ell \in \mathbb{N} : (k \geq n_0, \ell \geq n_0 \Longrightarrow |f_k(t) - f_\ell(t)| < \varepsilon),$$

d. h., die reelle Folge $(f_k(t))$ ist eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}, | \ |)$ und hat daher einen Grenzwert in $\mathbb{R}$; dieser hängt natürlich von t ab und wir bezeichnen ihn mit $f(t)$. Wir zeigen zunächst, dass die hierdurch definierte Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist:

Da jede Cauchyfolge beschränkt ist (vgl. 1.5.15(ii)), gibt es eine Konstante C mit $\|f_k\|_\infty \le C$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Damit schätzen wir für festes $t \in M$ ab:

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |f_k(t) + (f(t) - f_k(t))| \le |f_k(t)| + |f(t) - f_k(t)| \\ &\le \|f_k\|_\infty + |f(t) - f_k(t)| \le C + |f(t) - f_k(t)|. \end{aligned}$$

Aus der letzten Ungleichung folgt mit 1.2.10(v)

$$\lim_{k\to\infty} |f(t)| \le \lim_{k\to\infty} (C + |f(t) - f_k(t)|), \text{ also } |f(t)| \le C.$$

Da die letzte Ungleichung für jedes $t \in M$ gilt, folgt $\|f\|_\infty \le C$, d. h. $f \in \mathcal{B}(M)$.

Nun zeigen wir $f_k \longrightarrow f$ in $(\mathcal{B}(M), \|\ \|_\infty)$: Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gemäß (1.5:4) wählen wir ein n_0, sodass $\|f_k - f_\ell\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \ge n_0, \ell \ge n_0$ gilt, und schätzen für festes $t \in M$ und $k \ge n_0, \ell \ge n_0$ ab:

$$\begin{aligned} |f(t) - f_k(t)| &= |(f(t) - f_\ell(t)) + (f_\ell(t) - f_k(t))| \\ &\le |f(t) - f_\ell(t)| + |f_\ell(t) - f_k(t)| \\ &\le |f(t) - f_\ell(t)| + \|f_\ell - f_k\|_\infty \le |f(t) - f_\ell(t)| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung liefert nun durch Grenzübergang $\ell \longrightarrow \infty$ (vgl. 1.2.10(v)) $|f(t) - f_k(t)| \le 0 + \frac{\varepsilon}{2}$. Da hier die rechte Seite nicht von t abhängt, gilt

$$\|f - f_k\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{für jedes } k \ge n_0.$$

Das bedeutet $f_k \longrightarrow f$ in $(\mathcal{B}(M), \|\ \|_\infty)$.

(ii) Sei (f_k) eine Cauchyfolge in $(C([a,b]), \|\ \|_\infty)$. Nun haben Sie in **MG** gelernt, dass eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetige Funktion beschränkt ist. Folglich ist die Folge (f_k) eine Cauchyfolge in $(\mathcal{B}([a,b]), \|\ \|_\infty)$; nach Beispiel (i) gibt es also eine Funktion $f \in \mathcal{B}([a,b])$ mit $\|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow \infty$. Wir haben zu zeigen, dass dieses f nicht nur beschränkt, sondern auch stetig ist:

Sei $t_0 \in [a,b]$ gegeben. Für $k \in \mathbb{N}$ und $t \in [a,b]$ liefert die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= |(f(t) - f_k(t)) + (f_k(t) - f_k(t_0)) + (f_k(t_0) - f(t_0))| \\ &\le |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(t_0)| + |f_k(t_0) - f(t_0)|. \end{aligned} \tag{1.5:5}$$

Nun sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $\|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0$ gibt es ein n_0, sodass $\|f_{n_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ und damit auch

$$|f(t) - f_{n_0}(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ (für jedes } t \in [a,b]) \quad \text{und} \quad |f_{n_0}(t_0) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Da f_{n_0} in t_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } t \in [a,b] \text{ mit } |t - t_0| < \delta$$

ausfällt. Daher ergibt sich, wenn man $k = n_0$ in (1.5:5) setzt,

$$\forall\, t \in [a,b] : \Big(|t - t_0| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\Big).$$

Dies bedeutet, dass f stetig in t_0 ist.

(iii) Wir betrachten (vgl. Abb. 1.5–5) $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_k(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t \le \frac{k-1}{2k}, \\ 2k\left(t - \frac{k-1}{2k}\right) & \text{für } \frac{k-1}{2k} < t \le \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

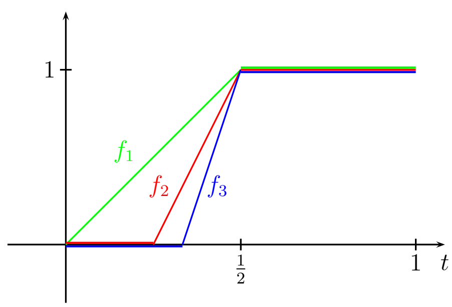


Abb. 1.5–5: Eine Cauchyfolge in $(C([0,1]), \|\ \|_1)$

Dann ist $f_k \in C([0,1])$, und für $k > n_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|f_k - f_{n_0}\|_1 &= \int_0^1 |f_k(t) - f_{n_0}(t)|\, dt \\ &= \int_0^1 (f_{n_0}(t) - f_k(t))\, dt = \int_0^1 f_{n_0}(t)\, dt - \int_0^1 f_k(t)\, dt \\ &= \frac{1}{4n_0} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4n_0} < \varepsilon, \end{aligned}$$

wenn n_0 größer als $\frac{1}{4\varepsilon}$ gewählt wird. Die Folge (f_k) ist also bezüglich $\|\ \|_1$ eine Cauchyfolge. Sie ist aber in $(C([0,1]), \|\ \|_1)$ nicht konvergent. Denn gäbe es ein $f \in C([0,1])$ mit $f_k \longrightarrow f$ (bezüglich $\|\ \|_1$), so müsste

$$0 \le \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\, dt \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} |f_k(t) + (f(t) - f_k(t))|\, dt$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} (|f_k(t)| + |f(t) - f_k(t)|)\, dt$$

[hier haben wir die Ungleichung für Integrale benutzt, auf die wir später beim Thema Integration noch eingehen werden:

$$g(t) \leq h(t) \text{ für alle } t \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt]$$

$$= \frac{1}{4k} + \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t) - f_k(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 0\, dt$$

$$\leq \frac{1}{4k} + \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t) - f_k(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t) - f_k(t)|\, dt$$

[erneute Verwendung der Ungleichung für Integrale!]

$$= \frac{1}{4k} + \int_0^1 |f(t) - f_k(t)|\, dt$$

$$= \frac{1}{4k} + \|f - f_k\|_1 \longrightarrow 0$$

gelten, also $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\, dt = 0$ und daher $f(t) = 0$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, weil $\|\ \|_1$ eine Norm auf $C([0, \frac{1}{2}])$ ist, vgl. Beispiel 1.4.3(3). Ganz entsprechend könnte man auf $\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t) - 1|\, dt = 0$ und damit auf $f(t) = 1$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ schließen. Es würde also insbesondere $f(\frac{1}{2}) = 0$ und $f(\frac{1}{2}) = 1$ folgen, was natürlich unmöglich ist. □

Übungsaufgaben zu 1.5

Ü 1.5.1 Sei $x_k := {}^t\left(\frac{\ln k}{k}, \frac{2^k}{k!}, \sqrt[k]{k}\right) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Folge (x_k) in $\mathbb{R}^3$ konvergent ist (d. h. nach 1.5.12 konvergent in $(\mathbb{R}^3, \| \ \|)$ mit irgendeiner Norm $\| \ \|$ auf $\mathbb{R}^3$).
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis $\ln k < 2\sqrt{k}$ für $k \geq 1$.

Ü 1.5.2 Seien $X := C([0,1])$ (Beispiel 1.4.3(3)) und (f_k) die Folge der $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow f_k(t) := t^k$. Untersuchen[26] Sie, ob (f_k) konvergent ist

(i) in $(C([0,1]), \| \ \|_\infty)$ mit $\|f\|_\infty := \sup\left\{|f(t)| \;\middle|\; 0 \leq t \leq 1\right\}$,

(ii) in $(C([0,1]), \| \ \|_1)$ mit $\|f\|_1 := \int\limits_0^1 |f(t)|\, dt$.

Ü 1.5.3 Seien $\| \ \|$ und $\| \ \|^*$ zwei beliebige Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es positive Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|x\| \leq \alpha\|x\|^* \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|x\|^* \leq \beta\|x\| \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ü 1.5.4 Beweisen Sie die Regeln 1.5.13.

[26] Das Wort „untersuchen“ bedeutet in der Mathematik, eine Antwort zu finden und diese zu beweisen.

DIESE SEITE BLEIBT FREI.

Lösungen zu Kurseinheit 1

Lösungen der Aufgaben zu 1.1

Ü 1.1.1 **(i)** Wir zeigen, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Gleichung (1) $a+x=b$ genau eine Lösung besitzt: Nach 1.1.1(v) hat die Gleichung $a+x_0=0$ eine Lösung, nämlich $x_0=-a$. Es folgt $a+(x_0+b)=(a+x_0)+b=0+b=b$. Also löst $x:=x_0+b=-a+b$ die Gleichung (1).

Wäre $\tilde{x}$ ebenfalls eine Lösung von (1), so hätten wir $a+x=b=a+\tilde{x}$. Hieraus folgt $-a+(a+x)=-a+(a+\tilde{x})$, also $(-a+a)+x=(-a+a)+\tilde{x}$, woraus $0+x=0+\tilde{x}$, also $x=\tilde{x}$ folgt. Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung von (1) gezeigt.

(ii) Ganz analog gehen Sie vor, um für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ zu zeigen, dass die Gleichung (2) $a\,y=b$ eine eindeutig bestimmte Lösung y besitzt.

Ü 1.1.2 Wir zeigen, dass $y := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ eine eindeutig bestimmte Inverse y^{-1} in $\mathbf{C}$ hat, wenn $y \neq \mathbf{0}$ ist. Dazu nehmen wir zunächst einmal an, dass eine Inverse in $\mathbf{C}$ vorhanden ist; diese hat dann die Form $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha. \end{smallmatrix}\right)$ Es gilt also

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta & a\beta + b\alpha \\ -(a\beta + b\alpha) & a\alpha - b\beta \end{pmatrix},$$

sodass sich die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a\alpha - b\beta &= 1 \\ a\beta + b\alpha &= 0 \end{aligned}$$

ergeben. Addition des b–Fachen der zweiten Gleichung zum a–Fachen der ersten Gleichung einerseits und Subtraktion des b–Fachen der ersten Gleichung von dem a–Fachen der zweiten Gleichung andererseits ergibt

$$\begin{aligned} (a^2+b^2)\alpha &= a \\ (a^2+b^2)\beta &= -b. \end{aligned}$$

Nun ist $y \neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt, sodass a und b nicht gleichzeitig null sein können, d. h., dass $a^2+b^2 \neq 0$ gilt. Damit folgt

$$\alpha = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Bis jetzt haben wir gezeigt: *Wenn* eine Inverse in $\mathbf{C}$ existiert, dann muss sie notwendigerweise die Form $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ mit den obigen Werten für α und β haben. Dass tatsächlich eine Inverse vorliegt, folgt erst durch Nachprüfen, ob wirklich

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. (Multiplizieren Sie also aus!)

Ferner rechnen wir einfach nach:

$$\mathbf{i}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 0+0 \\ 0+0 & -1+0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$$

und

$$a\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = y.$$

Ü 1.1.3 Sei $a \in \mathbb{K}$ gegeben, wobei $(\mathbb{K}, v)$ ein linear geordneter Körper ist. Wir zeigen $0 \; v \; a^2$: Wegen der Linearität der Ordnung gilt $0 \; v \; a$ oder $a \; v \; 0$. Im ersten Fall können wir die „Ungleichung“ $0 \; v \; a$ auf beiden Seiten mit a multiplizieren (Verträglichkeitseigenschaft (ii) von 1.1.5) und erhalten sofort $0 \; v \; a^2$. Im zweiten Fall addieren wir auf beiden Seiten von $a \; v \; 0$ das inverse Element $-a$ (Verträglichkeitseigenschaft (i)) und erhalten $(a+(-a)) \; v \; (0+(-a))$, also $0 \; v \; (-a)$. Wir dürfen also die Beziehung $0 \; v \; (-a)$ auf beiden Seiten mit $-a$ multiplizieren (Verträglichkeitseigenschaft (ii)), was $0 \; v \; (-a)(-a)$ und somit $0 \; v \; a^2$ ergibt. [Dass $(-a)(-a) = a^2$ gilt, ergibt sich wie folgt: Aus $a + (-a) = 0$ folgt sowohl $(a + (-a))\, a = 0\, a = 0$ als auch $(-a)(a + (-a)) = (-a)\, 0 = 0$, d. h. $a\, a + (-a)a = 0$ und $(-a)a + (-a)(-a) = 0$, was zeigt, dass sowohl $a^2 (= a\, a)$ als auch $(-a)(-a)$ das zu $(-a)a$ inverse Element ist. Aus der Eindeutigkeit des inversen Elements ergibt sich $(-a)(-a) = a^2$.]

Wir zeigen, dass $\mathbb{F}_2$ mit keiner Relation v zu einem linear geordneten Körper gemacht werden kann: Wäre es doch der Fall, so gälte (nach dem zuvor Bewiesenen) $0 \; v \; 1^2$, also $0 \; v \; 1$, und die Verträglichkeitseigenschaft (i) von 1.1.5 ergäbe durch Addition von 1 auf beiden Seiten die Beziehung $0 + 1 \; v \; 1 + 1$, also, da in $\mathbb{F}_2$ die Gleichung $1 + 1 = 0$ gilt, $1 \; v \; 0$. Zusammen mit $0 \; v \; 1$ ergäbe sich $1 = 0$ aufgrund der Antisymmentrie–Eigenschaft (ii) von 1.1.3. Das ist aber ein Widerspruch, da die neutralen Elemente eines Körpers definitionsgemäß verschieden sind.

Wir zeigen, dass der Körper $\mathbf{C}$ mit keiner Relation v zu einem linear geordneten Körper gemacht werden kann: Wäre es doch der Fall, so wäre also $0 \; v \; a^2$ für jedes $a \in \mathbf{C}$, insbesondere für $a = \mathbf{i}$, d. h. (vgl. Ü 1.1.2) $0 \; v \; (-\mathbf{1})$. Addition von $\mathbf{1}$ liefert nun $\mathbf{1} \, v \, 0$. Zusammen mit $0 \, v \, \mathbf{1}^2$, also $0 \, v \, \mathbf{1}$ (wegen $\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}$), ergibt sich $\mathbf{1} = \mathbf{0}$, ein Widerspruch.

Die Frage ist also in beiden Fällen zu verneinen.

Ü 1.1.4 Wir zeigen, dass eine nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ genau dann beschränkt ist, wenn $|M| := \{|x| \mid x \in M\}$ nach oben beschränkt ist.

(i) Ist M beschränkt, dann existieren für M eine untere Schranke s und eine obere Schranke S, sodass also

$$s \leq x \leq S \quad \text{für jedes } x \in M$$

gilt. Für $x \in M$ folgt daher $x \leq S$ und $-x \leq -s$, also $|x| \leq \max\{S, -s\} =: K$; somit ist K obere Schranke von $|M|$.

(ii) Ist umgekehrt K eine obere Schranke von $|M|$, d. h. $|x| \leq K$ für $x \in M$, so folgt $K \geq 0$ (wegen $M \neq \emptyset$), und es gilt $x = |x| \leq K$, falls $x \geq 0$, und $-x = |x| \leq K$, falls $x < 0$. In beiden Fällen folgt $-K \leq x \leq K$, d. h., $-K$ ist eine untere Schranke, K eine obere Schranke von M; damit ist M beschränkt.

Ü 1.1.5 Sei A eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass

$$-A := \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; -x \in A\Big\}$$

nach oben beschränkt ist, und folgern, dass $\inf A$ existiert und den Wert $\inf A = -\sup(-A)$ hat: Sei s eine untere Schranke von A, d. h.

$$\forall\, x \in A: \; s \leq x, \quad \text{was äquivalent ist mit} \quad \forall\, x \in A: \; -x \leq -s.$$

Letzteres aber bedeutet (wegen $-x \in A \Longleftrightarrow x \in -A$): $-s$ ist obere Schranke von $-A$. Nach 1.1.12 existiert daher $S := \sup(-A)$ in $\mathbb{R}$.

Dass $-S$ das Infimum von A ist, ergibt sich so: Ist s untere Schranke von A, so folgt (wie schon gezeigt), dass $-s$ obere Schranke von $-A$ ist. Nun ist S kleinste obere Schranke von $-A$, sodass also $S \leq -s$ gilt. Hieraus folgt $s \leq -S$. Dies aber bedeutet, dass $-S$ die größte unter den unteren Schranken von A ist, d. h. $-S = \inf A$.

Lösungen der Aufgaben zu 1.2

Ü 1.2.1 Sei $a \in \mathbb{R}$, seien $\varepsilon_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$ ($n \in \mathbb{N}$) gegeben, und sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Da dieses Minimum nach 1.1.15 existiert, ist $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ und folglich $\varepsilon > 0$. Wir zeigen

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_{\varepsilon_k}(a) = U_\varepsilon(a).$$

Sei zunächst $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{\varepsilon_k}(a)$. Dann ist $x \in U_{\varepsilon_k}(a)$ für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$. Wegen $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ ist also auch $x \in U_\varepsilon(a)$.

Nun sei $x \in U_\varepsilon(a)$, d. h. $d(x, a) < \varepsilon$. Wegen $\varepsilon \leq \varepsilon_k$ für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ folgt dann $d(x, a) < \varepsilon_k$, d. h. $x \in U_{\varepsilon_k}(a)$, für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$. Damit ist $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{\varepsilon_k}(a)$.

Ü 1.2.2 Seien $f = (a_k)$ und $g = (b_k)$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Wir beweisen die „Monotonie“ des Grenzwertes (Eigenschaft (v) von 1.2.10):

$$a_k \leq b_k \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N} \implies \lim f \leq \lim g.$$

Wir nehmen $a := \lim f > b := \lim g$ an und setzen $m := \frac{a+b}{2}$. Dann ist $b < m < a$, also $b \in \,]-\infty, m[$ und $a \in \,]m, \infty[$. Es ist $]m, \infty[$ eine Umgebung von a und $]-\infty, m[$ eine Umgebung von b, da $U_\varepsilon(a)$ mit $\varepsilon := a - m$ in $]m, \infty[$ bzw. $U_\varepsilon(b)$ mit $\varepsilon := m - b$ in $]-\infty, m[$ liegt. Daher gilt

$$b_k \in \,]-\infty, m[\quad \text{und} \quad a_k \in \,]m, \infty[\quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also haben wir

$$b_k < m < a_k \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N},$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ü 1.2.3 Für eine reelle Folge (a_k) zeigen wir die Äquivalenz der beiden Aussagen

(i) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : (k > n_0 \implies |a_k - a_{n_0}| < \varepsilon)$

und

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k, \ell \in \mathbb{N} : (k \geq n_0, \ell \geq n_0 \implies |a_k - a_\ell| < \varepsilon)$.

Sei (i) erfüllt, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_k - a_{n_0}| < \varepsilon'$ für alle $k \geq n_0$ (für $k = n_0$ ist $a_k - a_{n_0} = 0$). Sind nun k und ℓ beide $\geq n_0$, so gilt

$$|a_k - a_\ell| = |(a_k - a_{n_0}) + (a_{n_0} - a_\ell)| \leq |a_k - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a_\ell| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

Damit ist (ii) nachgewiesen.

Nun sei (ii) erfüllt. Dann gilt die darin enthaltene Folgebeziehung insbesondere für $\ell = n_0$. Das ist gerade (i).

Ü 1.2.4 Wir zeigen, dass der Satz 1.2.5 auch im Fall $a \in \{-\infty, \infty\}$ richtig bleibt. Sei also $a = \infty$ oder $a = -\infty$, und sei U eine Umgebung von a.

(i) $a \in U$ gilt dann definitionsgemäß (vgl. 1.2.23).

(ii) Ist $M \supseteq U$, so ist M eine Umgebung von a, denn im Fall $a = \infty$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $]\alpha, \infty[\ \subseteq U \subseteq M$, und es ist $\infty \in U \subseteq M$, also M Umgebung von ∞. (Den Fall $a = -\infty$ behandelt man analog.)

(iii) Sind $U_1, \ldots, U_n$ Umgebungen von a, so ist $D := \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ wieder eine Umgebung von a, denn im Fall $a = \infty$ gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$]\alpha_k, \infty[\ \subseteq U_k \quad \text{und} \quad \infty \in U_k \quad \text{für alle } k \in \{1, \ldots, n\};$$

für $\alpha := \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ gilt dann

$$]\alpha, \infty[\ \subseteq U_k \quad \text{für jedes } k \in \{1, \ldots, n\},$$

also

$$]\alpha, \infty[\ \subseteq D;$$

wegen $\infty \in D$ ist somit D eine Umgebung von ∞. (Im Fall $a = -\infty$ geht man analog vor.)

Ü 1.2.5 Wir zeigen mithilfe der Definitionen 1.2.23 und 1.2.24, dass Folgendes gilt:

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : (k \geq n_0 \Longrightarrow a_k > \frac{1}{\varepsilon})$,

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = -\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : (k \geq n_0 \Longrightarrow a_k < -\frac{1}{\varepsilon})$.

Sei $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = -\infty$) vorausgesetzt, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist $U_1 := \left]\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right[\cup \{\infty\}$ (bzw. $U_2 := \left]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right[\cup \{-\infty\}$) eine Umgebung von ∞ (bzw. von $-\infty$). Folglich liegen fast alle a_k in U_1 (bzw. in U_2), d. h., es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k \in U_1$ (bzw. $a_k \in U_2$) für alle $k \geq n_0$. Das bedeutet

$$\tfrac{1}{\varepsilon} < a_k < \infty \quad (\text{bzw. } -\infty < a_k < -\tfrac{1}{\varepsilon}) \quad \text{für alle } k \geq n_0.$$

Sei nun umgekehrt die Bedingung in Kriterium (i) (bzw. (ii)) erfüllt, und sei U eine Umgebung von ∞ (bzw. von $-\infty$), sodass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. ein $\beta \in \mathbb{R}$) gibt mit $]\alpha, \infty[\subseteq U$ (bzw. mit $]-\infty, \beta[\subseteq U$). Wir können $\alpha > 0$ (bzw. $\beta < 0$) annehmen und setzen $\varepsilon := \frac{1}{\alpha}$ (bzw. $\varepsilon := -\frac{1}{\beta}$); dann ist $\varepsilon > 0$, und so gibt es aufgrund der Bedingung hierzu ein n_0 mit $a_k > \frac{1}{\varepsilon}$ (bzw. mit $a_k < -\frac{1}{\varepsilon}$) für alle $k \geq n_0$, also für fast alle k. Daraus folgt aber $a_k \in U$ für fast alle k, was zu zeigen war.

Lösungen der Aufgaben zu 1.3

Ü 1.3.1 Sei X ein reeller Vektorraum, und sei

(L1.3:1) $$x - y := x + (-y) \quad \text{für } x, y \in X$$

gesetzt. Wir zeigen, dass für $x, y, z \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

(i) $0x = 0$,

(ii) $(-1)x = -x$,

(iii) $x - (y + z) = (x - y) - z$,

(iv) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

gelten. Seien dazu $x, y, z \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} 0x + x &= (0+1)x && [\text{nach } (\text{Mult}_2)] \\ &= 1x \\ &= x && [\text{nach } (\text{Mult}_3)]. \end{aligned}$$

Da das neutrale Element bezüglich der Addition in X eindeutig bestimmt ist, folgt hieraus, dass $0x$ dieses neutrale Element ist, d. h., dass $0x = 0$ gilt.

(ii) Es ist zu zeigen, dass $(-1)x$ das inverse Element zu x ist. Dies ist aber wegen

$$\begin{aligned} x + ((-1)x) &= 1x + ((-1)x) && [\text{nach } (\text{Mult}_3)] \\ &= (1 + (-1))x && [\text{nach } (\text{Mult}_2)] \\ &= 0x \\ &= 0 && [\text{nach (i)}] \end{aligned}$$

der Fall (vgl. Sie die Bemerkung (2) zur Definition 1.3.3).

(iii) Wir erhalten

$$\begin{aligned} x - (y + z) &= x + (-(y + z)) && [\text{nach (L1.3:1)}] \\ &= x + ((-1)(y + z)) && [\text{nach (ii)}] \\ &= x + ((-1)y + (-1)z) && [\text{nach } (\text{Mult}_2)] \\ &= x + ((-y) + (-z)) && [\text{nach (ii)}] \\ &= (x + (-y)) + (-z) && [\text{nach } (\text{Add}_1)] \\ &= (x - y) - z && [\text{nach (L1.3:1)}]\,. \end{aligned}$$

(iv) Es ist

$$\begin{aligned}
\alpha(x-y) &= \alpha(x+(-y)) && \text{[nach (L1.3:1)]}\\
&= \alpha x + \alpha(-y) && \text{[nach (Mult}_2\text{)]}\\
&= \alpha x + \alpha((-1)y) && \text{[nach (ii)]}\\
&= \alpha x + (\alpha(-1))y && \text{[nach (Mult}_1\text{)]}\\
&= \alpha x + ((-1)\alpha)y && \\
&= \alpha x + (-1)(\alpha y) && \text{[nach (Mult}_1\text{)]}\\
&= \alpha x - \alpha y && \text{[nach (L1.3:1)]}\,.
\end{aligned}$$

Ü 1.3.2 Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $Abb(M,\mathbb{R})$, d. h. die Menge der Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$, sowie

$$C(M) = \Big\{ f \in Abb(M,\mathbb{R}) \;\Big|\; f \text{ ist stetig} \Big\}$$

und für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{P}_n = \Big\{ P \in Abb(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\Big|\; P \text{ ist ein Polynom vom Grad} \leq n \Big\}$$

reelle Vektorräume sind, wenn man sie mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation reeller Funktionen versieht, nämlich

$$\begin{aligned}
&f+g : M \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow (f+g)(t) := f(t)+g(t),\\
&\alpha f : M \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow (\alpha f)(t) := \alpha f(t).
\end{aligned}$$

$Abb(M,\mathbb{R})$: Wir prüfen die Eigenschaften aus Definition 1.3.3 nach. (Beachten Sie dabei die Bemerkung (2) zur Definition 1.3.3.)

(Add$_1$): Für alle $f,g,h \in Abb(M,\mathbb{R})$ und $t \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(t) &= (f+g)(t)+h(t) = (f(t)+g(t))+h(t)\\
&= f(t)+(g(t)+h(t)) = f(t)+(g+h)(t)\\
&= (f+(g+h))(t),
\end{aligned}$$

d. h. $(f+g)+h = f+(g+h)$.

(Add$_2$): Für die Nullabbildung $\widehat{0} : M \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow \widehat{0}(t) := 0$ und für $f \in Abb(M,\mathbb{R})$ gilt

$$(f+\widehat{0})(t) = f(t)+\widehat{0}(t) = f(t)+0 = f(t)$$

für jedes $t \in M$, also $f+\widehat{0} = f$. Damit ist $\widehat{0}$ das neutrale Element.

(Add$_3$): Für $f \in \mathit{Abb}(M,\mathbb{R})$ sei $-f := (-1)f$. Dann gilt für jedes $t \in M$

$$\begin{aligned}(f+(-f))(t) &= f(t)+(-f)(t) = f(t)+((-1)f)(t)\\ &= f(t)+(-1)f(t) = f(t)-f(t) = 0\\ &= \widehat{0}(t).\end{aligned}$$

Also ist $-f$ das inverse Element zu f.

(Add$_4$): Für alle $f,g \in \mathit{Abb}(M,\mathbb{R})$ und alle $t \in M$ gilt

$$(f+g)(t) = f(t)+g(t) = g(t)+f(t) = (g+f)(t),$$

d. h. $f+g = g+f$.

(Mult$_1$): Für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $t \in M$ und $f \in \mathit{Abb}(M,\mathbb{R})$ gilt

$$(\alpha(\beta f))(t) = \alpha((\beta f)(t)) = \alpha(\beta f(t)) = (\alpha\beta)f(t) = ((\alpha\beta)f)(t),$$

also $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.

(Mult$_2$): Für alle $f,g \in \mathit{Abb}(M,\mathbb{R})$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $t \in M$ gilt

$$\begin{aligned}(\alpha(f+g))(t) &= \alpha((f+g)(t)) = \alpha(f(t)+g(t))\\ &= \alpha f(t)+\alpha g(t) = (\alpha f)(t)+(\alpha g)(t)\\ &= (\alpha f+\alpha g)(t),\end{aligned}$$

d. h. $\alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$, sowie

$$\begin{aligned}((\alpha+\beta)f)(t) &= (\alpha+\beta)f(t) = \alpha f(t)+\beta f(t)\\ &= (\alpha f)(t)+(\beta f)(t) = (\alpha f+\beta f)(t)\end{aligned}$$

und somit $(\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$.

(Mult$_3$): Für $f \in \mathit{Abb}(M,\mathbb{R})$ erhalten wir

$$(1f)(t) = 1f(t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in M,$$

also $1f = f$. Damit ist $\mathit{Abb}(M,\mathbb{R})$ als reeller Vektorraum nachgewiesen.

Wir zeigen, dass $C(M)$ ein Unterraum von $\mathit{Abb}(M,\mathbb{R})$ und $\mathcal{P}_n$ ein Unterraum von $\mathit{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist. Dazu benutzen wir, dass eine Teilmenge U des reellen Vektorraums V ein Unterraum von V ist (vgl. **MG**, Abschnitt 6.2), wenn das Nullelement von V in U liegt und die Aussagen $f+g \in U$ und $\alpha f \in U$ für alle $f,g \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten.

$C(M)$: Offenbar gilt $\widehat{0} \in C(M)$. Aus **MG**, Kapitel 14.1, wissen Sie, dass die Summe zweier stetiger Funktionen sowie das skalare Vielfache einer stetigen Funktion wieder stetig ist. Daher gilt

$$f + g \in C(M) \quad \text{und} \quad \alpha f \in C(M)$$

für alle $f, g \in C(M)$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$, und folglich ist $C(M)$ ein Unterraum von $Abb(M, \mathbb{R})$, insbesondere ein reeller Vektorraum.

$\mathcal{P}_n$: Bekanntlich ist $\widehat{0} \in \mathcal{P}_n$. Da die Summe zweier Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ sowie das skalare Vielfache einer Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ offensichtlich wieder eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ ist, ist auch $\mathcal{P}_n$ ein Unterraum von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und somit ein reeller Vektorraum.

Ü 1.3.3 Seien

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

und sei $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(i) Es gilt $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, denn nach Definition der Addition und der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}^n$ (vgl. 1.3.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x. \end{aligned}$$

(ii) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gegeben, und es gelte $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Dann ist $\alpha_k = x_k$ für jedes $k = 1, \ldots, n$, denn wie in (i) gilt

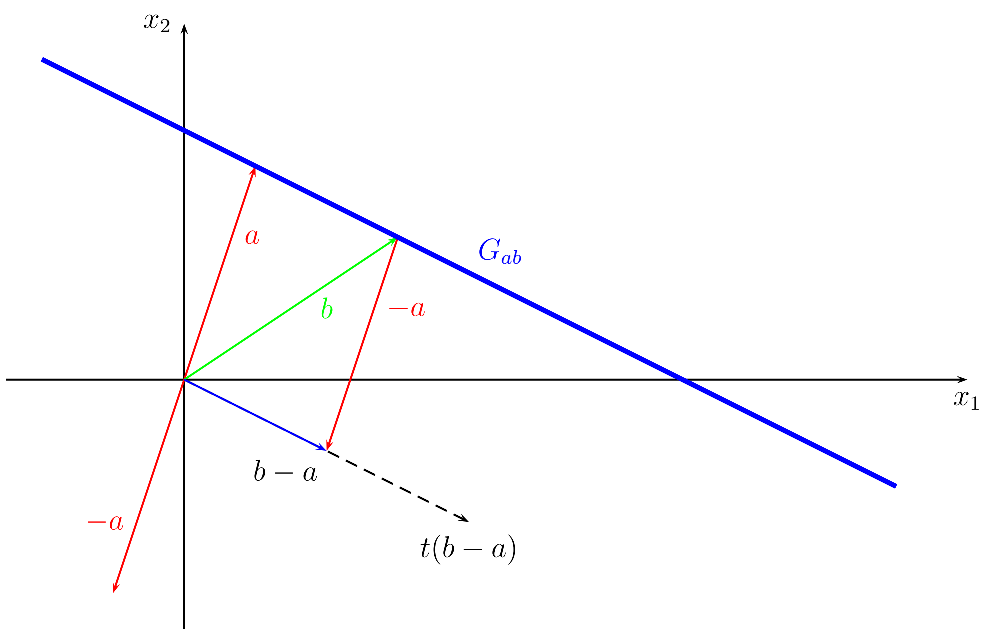
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

woraus nach der Gleichheitsdefinition zweier Vektoren von $\mathbb{R}^n$ (vgl. 1.3.1) die Behauptung folgt.

Ü 1.3.4 Seien $a = \binom{a_1}{a_2}$, $b = \binom{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq b$ gegeben. Dann gilt $a_1 \neq b_1$ oder $a_2 \neq b_2$. Wir beschreiben zunächst die Menge

$$G_{ab} := \Big\{ a + t(b-a) \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \Big\}$$

geometrisch. Dazu betrachten wir in der Zeichenebene die Ortsvektoren a und b und bilden zunächst wie in Abb. 1.3–6 den Vektor $b - a$.



Für ein gegebenes $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir dann aus $b - a$ den Vektor $t(b-a)$ als Streckung um den Faktor $|t|$, falls $|t| \geq 1$ ist, oder als Stauchung um den Faktor $|t|$, falls $|t| < 1$ ist, wobei im Fall $t < 0$ noch zusätzlich die Richtung umgekehrt wird (vgl. Abb. 1.3–5). Setzen wir nun alle Vektoren $t(b-a)$ für $t \in \mathbb{R}$, parallel zu sich selbst verschiebend, an der Spitze des Pfeils a an, so bilden die Pfeilspitzen der Vektoren $t(b-a)$ diejenige Gerade, die durch die Spitzen der Pfeile a und b verläuft; G_{ab} ist also die Gerade durch die Punkte a und b.

Wir zeigen jetzt, dass es $A, B, C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$G_{ab} = \Big\{ \tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; Ax + By + C = 0 \Big\}$$

gilt. Sei dazu ein Element $\binom{u}{v} \in G_{ab}$ gegeben. Es existiert also ein $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = a + t(b-a) = \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ a_2 + t(b_2 - a_2) \end{pmatrix},$$

d. h. $u = a_1 + t(b_1 - a_1)$ und $v = a_2 + t(b_2 - a_2)$. Multipliziert man die erste Gleichung mit $b_2 - a_2$, die zweite mit $b_1 - a_1$ und subtrahiert, so ergibt sich

$$-(b_2 - a_2)u + (b_1 - a_1)v + a_1(b_2 - a_2) - a_2(b_1 - a_1) = 0.$$

Wir setzen daher

$$\begin{aligned} A &:= -(b_2 - a_2), \\ B &:= b_1 - a_1, \\ C &:= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

und erhalten $\binom{u}{v} \in \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0\}$. Da A, B, C nicht von dem betrachteten Element $\binom{u}{v}$ abhängen, haben wir

$$G_{ab} \subseteq \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Ax + By + C = 0 \right\}$$

gezeigt, wobei A, B, C die eben definierten Zahlen sind.

Sei nun ein Punkt $\binom{u}{v}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $Au + Bv + C = 0$ gegeben. Im Fall $a_1 = b_1$ bedeutet dies $-(b_2 - a_2)(u - a_1) = 0$. Weil in diesem Fall $a_2 \neq b_2$ sein muss (wegen der Voraussetzung $a \neq b$), ist also $u = a_1$; setzen wir

$$t := \frac{v - a_2}{b_2 - a_2},$$

so erhalten wir daraus

$$v = a_2 + t(b_2 - a_2).$$

Da wegen $a_1 = b_1$ mit diesem t auch

$$u = a_1 = a_1 + t(b_1 - a_1)$$

gilt, haben wir $\binom{u}{v} \in G_{ab}$ gezeigt.

Wir betrachten jetzt den Fall $a_1 \neq b_1$. Die Gleichung $Au + Bv + C = 0$ bedeutet dann

$$-(b_2 - a_2)u + (b_1 - a_1)v + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

d. h.

(L1.3:2)
$$v = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} u - \frac{a_1(b_2 - a_2) - a_2(b_1 - a_1)}{b_1 - a_1}.$$

Setzt man

$$t := \frac{u - a_1}{b_1 - a_1},$$

so folgt $u = a_1 + t(b_1 - a_1)$ und

$$\begin{aligned} a_2 + t(b_2 - a_2) &= a_2 + (u - a_1)\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \\ &= a_2 + \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}u - a_1\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \\ &= v \end{aligned}$$

nach (L1.3:2). Damit gilt auch in diesem Fall $\binom{u}{v} \in G_{ab}$ und folglich

$$\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Ax + By + C = 0 \right\} \subseteq G_{ab}.$$

Lösungen der Aufgaben zu 1.4

Ü 1.4.1 **(i)** Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, und seien $x, y \in X$. Wir beweisen die *zweite Dreiecksungleichung*

$$\big| \, \|x\| - \|y\| \, \big| \le \|x + y\|.$$

Diese ist nach 1.2.2(iv) äquivalent zu der Doppelungleichung

$$\text{(L1.4:1)} \qquad -(\|x + y\|) \le \|x\| - \|y\| \le \|x + y\|.$$

Nun gilt nach der Dreiecksungleichung für $\| \ \|$ und der positiven Homogenität von $\| \ \|$

$$\|x\| = \|(x + y) + (-1)y\| \le \|x + y\| + \|(-1)y\| = \|x + y\| + \|y\|$$

und folglich $\|x\| - \|y\| \le \|x + y\|$, sowie

$$\|y\| = \|(x + y) + (-1)x\| \le \|x + y\| + \|(-1)x\| = \|x + y\| + \|x\|$$

und folglich $-\|x\| + \|y\| \le \|x + y\|$. Damit ist (L1.4:1) bewiesen.

(ii) Sei d der von $\| \ \|$ induzierte Abstand, also $d(x, y) = \|x - y\|$. Für $x, y, z \in X$ beweisen wir die *zweite Dreiecksungleichung*

$$|d(x, z) - d(z, y)| \le d(x, y).$$

Dies bedeutet nach Definition von d

$$\big|\|x - z\| - \|z - y\|\big| \le \|x - y\|.$$

Setzen wir $x' = x - z$ und $y' = z - y$, so liefert die in (i) bewiesene zweite Dreiecksungleichung

$$\big| \, \|x'\| - \|y'\| \, \big| \le \|x' + y'\|,$$

und das ist bereits die Behauptung, da ja $x' + y' = x - y$ ist.

Ü 1.4.2 Wir zeigen, dass durch $d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ein Abstand auf $\mathbb{R}$ definiert wird, d. h., dass d die Eigenschaften (i) bis (iii) von 1.4.2 hat.

(i) (Definitheit) Offenbar ist stets $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, x) = 0$. Ist $d(x, y) = 0$, so folgt $|x - y| = 0$ und somit $x = y$.

(ii) (Symmetrie) Wegen $|x - y| = |y - x|$ ist $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d(y, x)$.

(iii) (Dreiecksungleichung) Wir betrachten die Funktion, die auf dem Intervall $[0, \infty[$ durch $h(t) := \frac{t}{1+t}$ gegeben ist. Dann ist h monoton wachsend (**MG**, Kapitel 13), d. h., für $0 \leq s < t$ ist $h(s) \leq h(t)$. [Denn aus $s \leq t$ folgt $s + st \leq t + st$, also $s(1 + t) \leq t(1 + s)$. Division durch $(1 + s)(1 + t) > 0$ liefert $h(s) \leq h(t)$.] Wegen $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ ergibt sich daraus die Ungleichung $h(|x - y|) \leq h(|x - z| + |z - y|)$, d. h.

$$\begin{aligned}
\frac{|x-y|}{1+|x-y|} &\leq \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \\
&= \frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|} + \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \\
&\leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|},
\end{aligned}$$

was $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ bedeutet.

Würde $d(x, y) = \|x - y\|$ mit einer Norm $\| \ \|$ gelten, so wäre $\|x\| = d(x, 0)$, und für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ müsste $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, also $d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0)$ gelten. Letzteres bedeutet aber $\frac{|\alpha x|}{1+|\alpha x|} = |\alpha| \frac{|x|}{1+|x|}$, was aber z. B. für $\alpha = 2$ und $x = 1$ falsch ist. Der Abstand d ist also nicht durch eine Norm erzeugt.

Ü 1.4.3 Sei X ein reeller Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $x * y$ für alle $x, y \in X$ erklärt ist, d. h., es gelten die Eigenschaften von 1.4.6 mit $*$ anstelle von $\cdot$ (wenn wir im Folgenden 1.4.6 zitieren, ist das in diesem Sinne aufzufassen). Ferner sei

(L1.4:2) $$\|x\| := \sqrt{x * x} \quad \text{für } x \in X$$

gesetzt (wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts [vgl. 1.4.6(iii)] ist $\|x\|$ wohldefiniert).

(i) Wir beweisen die (verallgemeinerte) Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$(x * y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \quad \text{für } x, y \in X.$$

Dazu verifizieren wir zunächst die im Hinweis der Aufgabenstellung angegebene Beziehung: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\alpha x + y) * (\alpha x + y) && \text{[nach 1.4.6(iii)]} \\
&= (\alpha x + y) * (\alpha x) + (\alpha x + y) * y && \text{[nach 1.4.6(i)]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha x) * (\alpha x) + y * (\alpha x) + (\alpha x) * y + y * y && \text{[nach 1.4.6(i)]}\\
&= \alpha\alpha(x * x) + \alpha(y * x) + \alpha(x * y) + y * y && \text{[nach 1.4.6(i)]}\\
&= \alpha^2(x * x) + 2\alpha(x * y) + y * y && \text{[nach 1.4.6(ii)]}\\
&= \alpha^2\|x\|^2 + 2\alpha(x * y) + \|y\|^2 && \text{[nach (L1.4:2)].}
\end{aligned}$$

1. Fall: Es gelte $\|x\| = 0$. Dann ist $x = 0 = 0x$ und damit (nach 1.4.6(i)) $x * y = (0x) * y = 0(x * y) = 0$. Also ist die Ungleichung erfüllt.

2. Fall: Es gelte $\|x\| \neq 0$. Mit $\alpha := -\frac{x*y}{\|x\|^2}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{(x * y)^2}{\|x\|^4}\|x\|^2 - 2\frac{(x * y)}{\|x\|^2}(x * y) + \|y\|^2\\
&= \frac{(x * y)^2}{\|x\|^2} - 2\frac{(x * y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 = -\frac{(x * y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2,
\end{aligned}$$

woraus sich

$$\frac{(x * y)^2}{\|x\|^2} \leq \|y\|^2$$

und daher die Behauptung ergibt.

(ii) Nun zeigen wir, dass durch (L1.4:2) eine Norm $\|\ \|$ auf X definiert ist. Seien dazu $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

Definitheit: $\|x\| \geq 0$ und $\|0\| = 0$ sind klar. Ist $x \neq 0$, so gilt $x * x > 0$ nach der positiven Definitheit des Skalarprodukts (vgl. 1.4.6(iii)), also $\|x\| > 0$.

Positive Homogenität: Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \sqrt{(\alpha x) * (\alpha x)} = \sqrt{\alpha\alpha(x * x)} && \text{[nach 1.4.6(i)]}\\
&= |\alpha|\sqrt{x * x} = |\alpha|\,\|x\|.
\end{aligned}$$

Dreiecksungleichung: Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= (x + y) * (x + y)\\
&= (x * x) + (y * x) + (x * y) + (y * y) && \text{[nach 1.4.6(i)]}\\
&= \|x\|^2 + 2(x * y) + \|y\|^2 && \text{[nach (L1.4:2) und 1.4.6(ii)]}\\
&\leq \|x\|^2 + 2|x * y| + \|y\|^2\\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 && \text{[Cauchy–Schwarzsche Ungleichung aus (i)]}\\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

woraus (wegen $\|x + y\| \geq 0$ und $\|x\| + \|y\| > 0$) die Dreiecksungleichung folgt.

Lösungen der Aufgaben zu 1.5

Ü 1.5.1 Wir weisen nach, dass die Folge (x_k) mit

$$x_k := {}^t\left(\frac{\ln k}{k}, \frac{2^k}{k!}, \sqrt[k]{k}\right) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

in $\mathbb{R}^3$ konvergiert. Dazu zeigen wir, dass die Koordinatenfolgen in $\mathbb{R}$ konvergieren; wegen 1.5.11(ii) ist dies äquivalent zur Konvergenz von (x_k) in $\mathbb{R}^3$.

Nach dem Hinweis ist $0 \leq \frac{\ln k}{k} < \frac{2}{\sqrt{k}}$, und das „Sandwich–Theorem" liefert dann $\frac{\ln k}{k} \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow \infty$, da ja $\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right)$ gegen 0 strebt.

Da die Reihe $\exp 2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ konvergiert, bilden die Reihenglieder eine Nullfolge, d. h. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^k}{k!} = 0$. Zudem ist $\sqrt[k]{k} = \exp b_k$ mit $b_k := \frac{\ln k}{k}$. Da die Exponentialfunktion stetig in 0 ist, gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \exp(b_k) = \exp(0)$, also $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$.

Somit ist (x_k) konvergent in $\mathbb{R}^3$, und der Grenzwert ist ${}^t(0, 0, 1)$.

[Eine Bemerkung zum Hinweis:
Für $x \geq 1$ ist $\ln x = \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int\limits_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$ wegen $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ für $t \geq 1$.]

Ü 1.5.2 Wir betrachten den Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zusammen mit der Norm $\| \ \|_\infty$ bzw. $\| \ \|_1$, definiert durch

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &:= \sup\left\{|f(t)| \;\middle|\; 0 \leq t \leq 1\right\}, \\ \|f\|_1 &:= \int\limits_0^1 |f(t)|\, dt \end{aligned}$$

für $f \in C([0,1])$, und untersuchen jeweils, ob die Folge (f_k) mit

$$f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow f_k(t) := t^k$$

konvergiert.

(i) Die Folge (f_k) konvergiert in $(C([0,1]), \| \ \|_\infty)$ *nicht*, denn würde (f_k) gegen ein $f \in C([0,1])$ konvergieren, so würde die Zahlenfolge $(f_k(t))$ für jedes feste

$t \in [0,1]$ wegen $|f_k(t) - f(t)| \leq \|f_k - f\|_\infty$ gegen $f(t)$ konvergieren, was bedeutet, dass

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0,1[\,, \\ 1 & \text{für } t = 1 \end{cases}$$

wäre. Da diese Funktion aber nicht stetig ist, divergiert (f_k) in $(C([0,1]), \|\ \|_\infty)$.

(ii) In $(C([0,1]), \|\ \|_1)$ konvergiert (f_k) gegen die konstante Funktion $\widehat{0}|_{[0,1]}$, denn es gilt

$$\|f_k - \widehat{0}|_{[0,1]}\|_1 = \int_0^1 t^k\, dt = \frac{1}{k+1} t^{k+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \longrightarrow \infty.$$

Ü 1.5.3 Seien $\|\ \|$ und $\|\ \|^*$ zwei beliebige Normen auf $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass es $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ gibt mit

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \alpha \|x\|^* \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n, \\ \|x\|^* &\leq \beta \|x\| \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Nach 1.5.10 gibt es $\alpha_1 > 0$ und $\beta_1 > 0$ mit

$$\|x\| \leq \alpha_1 \|x\|_\infty \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty \leq \beta_1 \|x\| \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n$$

sowie $\alpha_2 > 0$ und $\beta_2 > 0$ mit

$$\|x\|^* \leq \alpha_2 \|x\|_\infty \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty \leq \beta_2 \|x\|^* \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt

$$\|x\| \leq \alpha_1 \|x\|_\infty \leq \alpha_1 \beta_2 \|x\|^* = \alpha \|x\|^* \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n,$$

wenn man $\alpha := \alpha_1 \beta_2$ setzt, und

$$\|x\|^* \leq \alpha_2 \|x\|_\infty \leq \alpha_2 \beta_1 \|x\| = \beta \|x\| \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n,$$

wenn man $\beta := \alpha_2 \beta_1$ setzt.

Ü 1.5.4 Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum, seien $a, b \in X$, und seien (x_k), (y_k) Folgen in X, die in $(X, \|\ \|)$ gegen a bzw. b konvergieren. Wir weisen nach, dass dann $(x_k) + (y_k)$ in $(X, \|\ \|)$ gegen $a + b$ und $\alpha(x_k)$ in $(X, \|\ \|)$ gegen αa konvergiert, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ sei:

$x_k \longrightarrow a$ bzw. $y_k \longrightarrow b$ in $(X, \| \ \|)$ bedeutet $\|x_k - a\| \longrightarrow 0$ bzw. $\|y_k - b\| \longrightarrow 0$.
Wegen

$$0 \leq \|x_k + y_k - (a+b)\| \leq \|x_k - a\| + \|y_k - b\|$$

und

$$0 \leq \|\alpha x_k - \alpha a\| = |\alpha| \, \|x_k - a\|$$

folgt dann („Sandwich–Theorem"!)

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k + y_k - (a+b)\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \|\alpha x_k - \alpha a\| = 0$$

und somit wegen $(x_k) + (y_k) = (x_k + y_k)$ und $\alpha(x_k) = (\alpha x_k)$ die Behauptung.

DIESE SEITE BLEIBT FREI.

Glossar zu Kurseinheit 1

1.1 REELLE ZAHLEN (Rückblick und Ergänzungen)

1.1.1 **Körpereigenschaften:** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein **Körper**, d. h., auf $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften gegeben: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(i) Kommutativität:

$$x + y = y + x \quad \text{und} \quad x \cdot y = y \cdot x,$$

(ii) Assoziativität:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{und} \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

(iii) Distributivität:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

(Dabei gilt *„Punktrechnung geht vor Strichrechnung“*.)

(iv) Existenz neutraler Elemente: Es gibt eine reelle Zahl 0 („Null“) und eine davon verschiedene reelle Zahl 1 („Eins“), sodass gilt

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \; x + 0 = x \quad \text{und} \quad x \cdot 1 = x.$$

(v) Existenz inverser Elemente: Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine reelle Zahl x, sodass $a + x = 0$ ist, und zu jeder reellen Zahl $a \neq 0$ gibt es eine reelle Zahl y, sodass $a \cdot y = 1$ ist.

Die neutralen Elemente 0 und 1 sowie die inversen Elemente x und y sind jeweils eindeutig bestimmt; Letztere werden mit $-a$ bzw. $\frac{1}{a}$ bezeichnet. Die Subtraktion und die Division (durch eine Zahl $b \neq 0$) wird dann durch

$$a - b := a + (-b) \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$$

definiert.

1.1.3 **Geordnete Menge:** Sei M eine nichtleere Menge. Auf M sei eine **Relation** υ gegeben, d. h., υ ist eine Teilmenge von $M \times M$. Gilt $(x, y) \in \upsilon$, so schreiben wir

$$x \,\upsilon\, y \quad \text{(lies: } x \text{ vor } y\text{).}$$

Die Relation υ heißt eine **Ordnung** auf M und das Paar (M, υ) eine **geordnete Menge**, wenn für alle $x, y, z \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $x \,\upsilon\, x$ (Reflexivität),

(ii) $(x \upsilon y) \wedge (y \upsilon x) \Longrightarrow x = y$ (Antisymmetrie),

(iii) $(x \upsilon y) \wedge (y \upsilon z) \Longrightarrow x \upsilon z$ (Transitivität).

Gilt über (i), (ii) und (iii) hinaus auch noch

(iv) $(x \upsilon y) \vee (y \upsilon x)$,

so heißt υ eine **lineare Ordnung** auf M und (M, υ) eine **linear geordnete Menge**.

1.1.4 **Beispiele:**
(a) Sei M eine Menge, und sei $\mathcal{P}$ die **Potenzmenge** von M (d. i. die Menge aller Teilmengen von M). Mit der Relation υ, gegeben durch

$$x \upsilon y \;:\Longleftrightarrow\; x \subseteq y,$$

ist $\mathcal{P}$ eine geordnete Menge (i. Allg. nicht linear geordnet).

(b) $\mathbb{Z}$, die Menge aller ganzen Zahlen, versehen mit der Relation

$$x \upsilon y \;:\Longleftrightarrow\; y - x \in \mathbb{N}_0 \quad (= \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

ist eine linear geordnete Menge.

1.1.5 **Linear geordneter Körper $\mathbb{R}$:** Es existiert eine lineare Ordnung $\leq$ („kleiner oder gleich") auf $\mathbb{R}$, sodass $(\mathbb{R}, \leq)$ eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:

(i) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y \implies x + z \leq y + z$
(Verträglichkeit mit der Addition).

(ii) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y$ und $0 \leq z \implies xz \leq yz$
(Verträglichkeit mit der Multiplikation).

1.1.6 **Verwandte Definitionen:** Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $y \geq x$ („y ist größer oder gleich x") bedeutet dasselbe wie $x \leq y$.

(ii) $x < y$ („x ist kleiner als y") bedeutet dasselbe wie $x \leq y$ und $x \neq y$.

(iii) $y > x$ („y ist größer als x") bedeutet dasselbe wie $x < y$.

(iv) y heißt **nichtnegativ** (bzw. **positiv**), wenn $0 \leq y$ (bzw. $0 < y$) gilt.

(v) x heißt **nichtpositiv** (bzw. **negativ**), wenn $x \leq 0$ (bzw. $x < 0$) gilt.

Folgerung: *Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen*

$$x < y\,,\ \ x = y\,,\ \ x > y \quad (\text{„Trichotomie“}).$$

1.1.7 **Regeln:** Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $a < b \implies a + c < b + c$
(Verträglichkeit von $<$ mit der Addition.)

(ii) $a \le b$ und $c \le d \implies a + c \le b + d$
$a < b$ und $c \le d \implies a + c < b + d$
(Gleichgerichtete Ungleichungen „darf man addieren“.)

(iii) $a < b$ und $0 < c \implies ac < bc$
(Verträglichkeit von $<$ mit der Multiplikation.)

(iv) $0 \le a \le b$ und $0 \le c \le d \implies ac \le bd$
$0 \le a < b$ und $0 < c \le d \implies ac < bd$
(Gleichgerichtete Ungleichungen zwischen nichtnegativen Zahlen „dürfen miteinander multipliziert“ werden.)

(v) $a \le b$ und $c < 0 \implies ac \ge bc$
$a < b$ und $c < 0 \implies ac > bc$
(Multiplikation mit einer negativen Zahl „ kehrt das Ungleichheitszeichen um“.)

(vi) $0 < a \implies 0 < \frac{1}{a}$
$0 < a < b \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(vii) $0 < 1$

1.1.8 **Cauchy–Schwarzsche und Minkowskische Ungleichung:** Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \qquad \text{(Cauchy–Schwarzsche Ungleichung),}$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \qquad \text{(Minkowskische Ungleichung).}$$

1.1.9 **Beschränkte Menge:** Seien M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$.

(i) s heißt eine **obere Schranke** (bzw. eine **untere Schranke**) von M, wenn

$$\forall\, x \in M:\ x \leq s \qquad (\text{bzw. } \forall\, x \in M:\ s \leq x)$$

gilt.

(ii) M heißt **nach oben beschränkt** (bzw. **nach unten beschränkt**), wenn es eine obere Schranke (bzw. eine untere Schranke) von M gibt.

(iii) M heißt **beschränkt**, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

1.1.10 **Supremum, Infimum:** Seien M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $S \in \mathbb{R}$.

(i) S heißt **Supremum** (oder **obere Grenze** oder **kleinste obere Schranke**) von M, wenn

$$S \text{ eine obere Schranke von } M$$

ist und $$S \leq s \text{ für jede obere Schranke } s \in \mathbb{R} \text{ von } M$$ gilt.

(ii) S heißt **Infimum** (oder **untere Grenze** oder **größte untere Schranke**) von M, wenn

$$S \text{ eine untere Schranke von } M$$

ist und $$s \leq S \text{ für jede untere Schranke } s \in \mathbb{R} \text{ von } M$$ gilt.

1.1.11 Supremum und Infimum von M sind (falls vorhanden) eindeutig bestimmt und werden mit

$$\sup M \quad \text{bzw.} \quad \inf M$$

bezeichnet.

$\sup M$ bzw. $\inf M$ heißt das **Maximum** bzw. das **Minimum** von M, wenn $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$ gilt und wird dann mit

$$\max M \quad \text{bzw.} \quad \min M$$

bezeichnet.

1.1.15 Jede nichtleere, endliche Menge reeller Zahlen besitzt Maximum und Minimum.

1.1.12 **Existenz des Supremums/Infimum:** Zu jeder nichtleeren, nach oben (bzw.
Ü 1.1.5 nach unten) beschränkten Menge reeller Zahlen existiert das Supremum (bzw. Infimum) in $\mathbb{R}$.

1.1.13 **Erweiterung von $\mathbb{R}$:**

(i) $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt **erweiterte reelle Zahlengerade**.

(ii) Definitionsgemäß sei $-\infty < \infty$ und $-\infty < x < \infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Für $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, wird definiert:
$\sup M := \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt ist,
$\inf M := -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt ist.

1.1.14 **Intervalle:**
(i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ werden die folgenden Mengen **Intervalle** genannt:

$$\begin{array}{lcll}]a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \textit{(offenes Intervall),} \\ ]a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} & \textit{(links halboffenes Intervall),} \\ [a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & \textit{(rechts halboffenes Intervall),} \\ [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & \textit{(abgeschlossenes Intervall).} \end{array}$$

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ werden auch die folgenden Mengen **Intervalle** genannt:

$$\begin{array}{rcl}]-\infty,\infty[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}, \\ ]-\infty,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}, \\ ]-\infty,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}, \\ ]a,\infty[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}, \\ [a,\infty[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}. \end{array}$$

Für die unter (i) und (ii) betrachteten Intervalle heißt a der **linke Endpunkt** und b der **rechte Endpunkt** des Intervalls.

1.1.16 **Raum $\boldsymbol{Abb(M,\mathbb{R})}$:** Sei M eine nichtleere Menge. Sind $f, g \in Abb(M,\mathbb{R})$ und ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind die folgenden Funktionen ebenfalls in $Abb(M,\mathbb{R})$:

(i) $f + g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f - g : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch
$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ bzw. $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$ für jedes $x \in M$,

(ii) $\alpha f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ für jedes $x \in M$,

(iii) $fg : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $(fg)(x) := f(x)g(x)$ für jedes $x \in M$,

(iv) $\frac{f}{g} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$, falls $g(x) \neq 0$ für jedes $x \in M$ ist.

1.1.17 **Beschränkte Funktion:** Sei M eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f \in Abb(M,\mathbb{R})$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge der Funktionswerte beschränkt ist, d. h., wenn

$$\|f\|_\infty := \sup\Big\{|f(x)| \;\Big|\; x \in M\Big\} < \infty$$

gilt oder (äquivalent), wenn es eine reelle Zahl $K > 0$ gibt mit

$$|f(x)| \leq K \quad \text{für jedes } x \in M.$$

Die Zahl $\|f\|_\infty$ heißt die **Supremumnorm** der Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Teilmenge aller beschränkten Funktionen in $Abb(M, \mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(M)$.

1.1.18 **Raum $\boldsymbol{\mathcal{B}(M)}$ der beschränkten Funktionen:** Sei M eine nichtleere Menge,
1.1.19 und seien $f, g \in \mathcal{B}(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$f + g,\ f - g,\ \alpha f \quad \text{und} \quad fg$$

ebenfalls in $\mathcal{B}(M)$. Ferner gilt für die Supremumnorm

(i) $\|f\|_\infty \geq 0$ und $(\|f\|_\infty = 0 \iff f = \widehat{0}\,)$ (Definitheit),

(ii) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\ \|f\|_\infty$ (positive Homogenität),

(iii) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung),

(iv) $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

1.1.20 **Klassische Schlussweise der Analysis:** Sei $x \in \mathbb{R}$. Gilt $0 \leq x < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$, so ist $x = 0$.

1.2 KONVERGENZ (Rückblick und Ergänzungen)

1.2.2 **Betrag:** Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

der (absolute) **Betrag** von x. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $|x| \geq 0 \quad \text{und} \quad (|x| = 0 \iff x = 0)$,

(ii) $|xy| = |x|\,|y|, \quad \text{insbesondere } |-y| = |-1|\,|y| = |y|$,

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).

Außerdem gilt

(iv) $x \leq |x|,\ -x \leq |x| \quad \text{und} \quad (|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y)$,

(v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$ (zweite Dreiecksungleichung),

(vi) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ für $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

1.2.3 **Abstand:** Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $d(x,y) := |x-y|$ der **Abstand** von x und y. Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $d(x,y) \geq 0 \quad \text{und} \quad (d(x,y) = 0 \iff x = y)$ (Definitheit),

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

1.2.4 **ε–Umgebung, Umgebung:** Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

(i) Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(a) := \Big\{ x \in \mathbb{R} \;\Big|\; d(x,a) < \varepsilon \Big\}$$

die **ε–Umgebung** von a.

(ii) Für $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt U **Umgebung** von a, wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ gibt.

1.2.5 **Eigenschaften von Umgebungen:** Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei U eine Umgebung von a. Dann gilt:

(i) $a \in U$.

(ii) Jede Obermenge von U ist auch Umgebung von a. (Insbesondere ist die Vereinigung von beliebig vielen Umgebungen von a wieder eine Umgebung von a.)

(iii) Der Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von a ist wieder eine Umgebung von a.

1.2.6 **Hausdorffeigenschaft:** Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gibt es eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von b mit $U \cap V = \emptyset$.

1.2.1 **Folge:** Sei $M \neq \emptyset$. Eine **Folge** in M ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$.
Die Elemente $a_k := f(k)$ heißen **Glieder** der Folge f.
Schreibweisen: $f = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ oder $f = (a_k)$ oder $f = (a_1, a_2, \ldots)$.
Ist $\ell \in \mathbb{Z}$ und a_k für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq \ell$ definiert, so verstehen wir unter $(a_k)_{k\geq\ell}$ die Folge $(a_{\ell-1+k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Im Fall $M := \mathbb{R}$ sprechen wir von **reellen Folgen**.

1.2.7 **Konvergente Folgen:** Seien $f = (a_k) \in \omega := Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$.

(i) f heißt **konvergent gegen** a, wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen. („fast alle" heißt „alle mit höchstens endlich vielen Ausnahmen".)

(ii) f heißt **konvergent**, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft „f ist konvergent gegen a".

(iii) Die Menge der konvergenten Folgen in ω bezeichnen wir mit c.

Andere Sprechweisen:
„*f konvergiert (gegen a)*" statt „f ist konvergent (gegen a)",
„f ist *divergent*" oder „f divergiert" statt „f ist nicht konvergent".

1.2.8 **Grenzwert:** Zu $f = (a_k) \in c$ gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft „f ist konvergent gegen a". Dieses a heißt der **Grenzwert** von f und wird bezeichnet mit

$$\lim f \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Statt „$(a_k) \in c$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$" wird oft „$a_k \longrightarrow a$ für $k \longrightarrow \infty$" geschrieben.

1.2.9 ***c* und $\boldsymbol{\ell^\infty}$:** Ist eine Folge f konvergent, so ist sie auch beschränkt, also $c \subseteq \ell^\infty := \mathcal{B}(\mathbb{N})$, und es gilt $|\lim f| \leq \|f\|_\infty$.

1.2.10 **Raum *c*:** Seien $f = (a_k)$, $g = (b_k) \in c$, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $f + g \in c$ und $\lim(f + g) = \lim f + \lim g$,
$f - g \in c$ und $\lim(f - g) = \lim f - \lim g$.

(ii) $\alpha f \in c$ und $\lim(\alpha f) = \alpha \lim f$.

(iii) $fg \in c$ und $\lim(fg) = \lim f \cdot \lim g$.

(iv) $b_k \neq 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $\lim g \neq 0$

$$\Longrightarrow \frac{f}{g} \in c \quad \text{und} \quad \lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}.$$

(v) $a_k \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim f \leq \lim g$.

Darüber hinaus gilt:

(vi) Ist $\lim f = 0$ und $h \in \ell^\infty$, so ist $fh \in c$ und $\lim fh = 0$.

(vii) Ist $\lim f = \lim g$ und ist $h = (c_k)$ eine Folge mit

$$a_k \leq c_k \leq b_k \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N},$$

so ist $h \in c$ und $\lim f = \lim h = \lim g$ („Sandwich–Theorem“).

1.2.12 **Teilfolge:** Die Folge $(a'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ heißt eine **Teilfolge** von $f = (a_k)$, wenn es eine Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ gibt mit $k_j < k_{j+1}$ und $a'_j = a_{k_j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ (d. h., (a'_j) entsteht aus f durch Weglassen von endlich oder unendlich vielen Gliedern).
Ist (a'_j) Teilfolge einer konvergenten Folge $f = (a_k) \in \omega$, so ist sie konvergent, und es gilt $\lim\limits_{j\to\infty} a'_j = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$.

1.2.13 **Divergenzkriterium:** Besitzt eine reelle Folge $f = (a_k)$ eine divergente Teilfolge oder zwei konvergente Teilfolgen f' und f'' mit $\lim f' \neq \lim f''$, so ist f divergent.

1.2.14 **ε–n_0–Kriterium:** $f = (a_k) \in c$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \in \mathbb{N} : \; (k \geq n_0 \Longrightarrow |a_k - a| < \varepsilon).$$

1.2.15 **Monotone Folge:** Eine Folge $f = (a_k)$ heißt **monoton wachsend**, wenn

$$a_k \leq a_{k+1} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

gilt. Sie heißt **monoton fallend**, wenn

$$a_k \geq a_{k+1} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

gilt. Eine Folge heißt **monoton**, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

1.2.16 **Monotoniekriterium:** Eine monotone Folge $f \in \omega$ ist konvergent, wenn sie beschränkt ist.

1.2.17 **Monotone Teilfolgen:**

(i) Jede reelle Folge enthält eine monotone Teilfolge.

(ii) Jede beschränkte reelle Folge enthält eine konvergente Teilfolge. (Satz von Bolzano–Weierstraß)

1.2.18 **Cauchyfolge:** Eine reelle Folge $f = (a_k)$ heißt **Cauchyfolge**, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \in \mathbb{N} : \; (k > n_0 \implies |a_k - a_{n_0}| < \varepsilon),$$

1.2.19 was äquivalent ist mit

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k, \ell \in \mathbb{N} : \; (k \geq n_0, \ell \geq n_0 \implies |a_k - a_\ell| < \varepsilon).$$

1.2.20 **Eigenschaften von Cauchyfolgen:**

(i) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

(ii) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

(iii) Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.

1.2.21 **Cauchykriterium:**
Jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.
Damit gilt: Eine reelle Folge f ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist, d. h., wenn sie eine der Bedingungen aus 1.2.18 oder 1.2.19 erfüllt.

1.2.23 **Umgebungen von ∞ und $-\infty$:** Sei $U \subseteq \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(i) U heißt **Umgebung von** ∞, wenn $\infty \in U$ ist und es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $]\alpha, \infty[\; \subseteq U$.

(ii) U heißt **Umgebung von** $-\infty$, wenn $-\infty \in U$ ist und es ein $\beta \in \mathbb{R}$ gibt mit $]-\infty, \beta[\; \subseteq U$.

1.2.24 **Bestimmt divergente Folge:** Sei $f = (a_k) \in \omega$, und sei $a = \infty$ oder $a = -\infty$. f heißt **bestimmt divergent** gegen a, wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder von f liegen. In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt und heißt der **uneigentliche Grenzwert** von f.
Schreibweisen:

$$\lim f = a \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \text{oder} \quad a_k \longrightarrow a \text{ für } k \longrightarrow \infty$$

(wobei Letzteres zu lesen ist als „a_k divergiert bestimmt gegen a für k gegen ∞“. Man spricht auch von **uneigentlicher Konvergenz**.)

1.2.25 **ε–n_0–Kriterium:** Für $f = (a_k) \in \omega$ gilt:

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \in \mathbb{N} : \; (k \geq n_0 \implies a_k > \frac{1}{\varepsilon}),$

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = -\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \in \mathbb{N} : \; (k \geq n_0 \implies a_k < -\frac{1}{\varepsilon}).$

1.3 $\mathbb{R}^n$ ALS REELLER VEKTORRAUM

1.3.3 **Reeller Vektorraum:** Sei X eine nichtleere Menge. Auf X sei eine **Addition** erklärt, die je zwei Elementen $x, y \in X$ genau ein Element $x + y \in X$ zuordnet und folgende Eigenschaften hat:

(Add$_1$) $\forall\, x, y, z \in X:\ (x + y) + z = x + (y + z)$ *(Assoziativität).*

(Add$_2$) Es gibt genau ein Element $0 \in X$ mit
$x + 0 = 0 + x = x$ für alle $x \in X$ *(Existenz des neutralen Elements).*
0 heißt **neutrales Element** oder **Nullvektor**.

(Add$_3$) Zu jedem $x \in X$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $-x \in X$ mit
$x + (-x) = (-x) + x = 0$ *(Existenz der inversen Elemente).*
$-x$ heißt das zu x **inverse Element** oder der zu x **entgegengesetzte Vektor.**

(Add$_4$) $\forall\, x, y \in X:\ x + y = y + x$ *(Kommutativität).*

Auf X sei eine **skalare Multiplikation** erklärt, die jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedem $x \in X$ genau ein Element $\alpha\, x \in X$ zuordnet und folgende Eigenschaften hat:

(Mult$_1$) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X:\ \alpha(\beta\, x) = (\alpha\, \beta)x$ *(Assoziativität).*

(Mult$_2$) $\forall\, x, y \in X\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}:\ \alpha(x + y) = \alpha\, x + \alpha\, y,$
$(\alpha + \beta)x = \alpha\, x + \beta\, y$ *(Distributivität).*

(Mult$_3$) $\forall\, x \in X:\ 1x = x.$

Dann heißt X (mit dieser Addition und dieser skalaren Multiplikation) ein **reeller Vektorraum** oder **linearer Raum** (über $\mathbb{R}$). Seine Elemente werden als **Vektoren** bezeichnet.

1.3.1 **Die Menge $\mathbb{R}^n$:** Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 1, \ldots, n \right\}$$

der **n–dimensionale reelle Raum.** Ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Punkt** oder **Vektor** von $\mathbb{R}^n$, und x_k $(1 \le k \le n)$ heißt die **k–te Koordinate** von x.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ heißen **gleich**, wenn $x_k = y_k$ für alle $k = 1, \ldots, n$

gilt.

1.3.2 **Addition in $\mathbb{R}^n$:**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Skalare Multiplikation auf $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha\, x_1 \\ \vdots \\ \alpha\, x_n \end{pmatrix} \text{ für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nullvektor: $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Nullvektor des $\mathbb{R}^n$.

Entgegengesetzter Vektor:

Zu $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist $-a := \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ der entgegengesetzte Vektor.

Ü 1.3.3 **Basisvektoren:**

Die Vektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ heißen **Standardbasisvektoren** oder die **kanonischen Basisvektoren.**

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich eindeutig als *Linearkombination* $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ mit $x_k \in \mathbb{R}$ für $1 \leq k \leq n$ darstellen.

1.3.4 $\mathbb{R}^n$ ist mit der eingeführten Addition und skalaren Multiplikation ein reeller Vektorraum.

1.3.4 Weitere **Beispiele** reeller Vektorräume: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) $Abb(M, \mathbb{R})$ ist mit der Addition $f+g : M \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow (f+g)(t) := f(t)+g(t)$ und der skalaren Multiplikation $\alpha f : M \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow (\alpha f)(t) := \alpha f(t)$ für alle $f, g \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Vektorraum.
Spezialfall: $\omega := Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *(Raum der reellen Folgen).*

(2) $\mathcal{B}(M) := \{f \in Abb\,(M, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist beschränkt}\}$ ist mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation (vgl. (1)) ein reeller Vektorraum.

Spezialfall: $\ell^\infty := \mathcal{B}(\mathbb{N})$ *(Raum der beschränkten Folgen).*

(3) Mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation (vgl. (1)) sind

$C(M) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$
und
$C^1(M) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar, und } f' \text{ ist stetig}\}$
reelle Vektorräume. (Im zweiten Fall muss jedes $x \in M$ Häufungspunkt von M sein, damit $f'(x)$ gebildet werden kann.)

(4) Sei I ein nichtleeres, abgeschlossenes Intervall. Mit Addition und skalarer Multiplikation aus (1) ist $\mathcal{R}(I) := \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar}\}$ ein reeller Vektorraum.

(5) $\mathcal{P}_n := \{P \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid P \text{ ist Polynomfunktion vom Grad } \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $\mathcal{P} := \{P \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid P \text{ ist eine Polynomfunktion}\}$ sind reelle Vektorräume (Addition und Multiplikation wie in (1)).

(6) $c := \{f \in \omega \mid f \text{ ist konvergent}\}$, $c_0 := \{f \in c \mid \lim f = 0\}$ sind mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Folgen reelle Vektorräume.

1.4 $\mathbb{R}^n$ ALS NORMIERTER RAUM

Im Folgenden sei X ein reeller Vektorraum.

1.4.1 Eine Funktion $\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow \|x\|$ heißt **Norm** auf X und $(X, \| \ \|)$ **normierter Raum**, falls für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\|x\| \geq 0$ und $(\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$ *(Definitheit),*

(ii) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$ *(positive Homogenität),*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung).*

Jede Norm erfüllt außerdem

Ü 1.4.1(i) **(iv)** $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x + y\|$ *(zweite Dreiecksungleichung).*

1.4.2 **Norm und Abstand:** Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum. Dann wird durch

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

der Abstand zweier Elemente $x, y \in X$ definiert. Er heißt der von der Norm **induzierte** (oder **erzeugte**) **Abstand**. Für alle $x, y, z \in X$ gilt (vgl. 1.2.3)

(i) $d(x, y) \geq 0$ und $(d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$ (Definitheit),

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

1.4.3 **Beispiele:**

(0) Auf $X := \mathbb{R}$ ist durch die Betragsfunktion $|\ |$ eine Norm gegeben (vgl. 1.2.2).

(1) Auf $X := \mathcal{B}(M)$, dem Raum der beschränkten Funktionen auf M, ist durch

$$\|f\|_\infty := \sup \Big\{ |f(t)| \ \Big| \ t \in M \Big\}$$

eine Norm (die **Supremumnorm**) gegeben, vgl. Satz 1.1.19.

(2) Auf dem Raum

$$\ell^\infty = \Big\{ f = (a_k) \in \omega \ \Big| \ f \text{ ist beschränkt} \Big\}$$

der beschränkten reellen Folgen ist durch

$$\|(a_k)\|_\infty := \sup \Big\{ |a_k| \ \Big| \ k \in \mathbb{N} \Big\}$$

eine Norm (die **Supremumnorm**) definiert.

(3) Ist $I := [a,b]$, $a < b$, so ist auf

$$C(I) = \Big\{ f \in Abb(I,\mathbb{R}) \;\Big|\; f \text{ ist stetig} \Big\}$$

durch

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt \quad \big(f \in C(I)\big)$$

eine Norm auf $C(I)$ gegeben. Wegen $C(I) \subseteq \mathcal{B}(I)$ ist auch die Supremumnorm aus (1) eine Norm auf $C(I)$.

1.4.4 **Normen auf $\mathbb{R}^n$:** Sei $p = 1$ oder $p = 2$. Dann werden für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty := \max \Big\{ |x_k| \;\Big|\; 1 \leq k \leq n \Big\}$$

Normen $\|\ \|_p$ und $\|\ \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert. $\|\ \|_2$ heißt **euklidische Norm**, der von ihr erzeugte Abstand d_2 heißt **euklidischer Abstand**; und die Norm $\|\ \|_\infty$ heißt **Maximumnorm**. Statt $\|x\|_2$ schreibt man auch $|x|$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Den von $\|\ \|_1$ bzw. $\|\ \|_\infty$ erzeugten Abstand bezeichnen wir mit $d_1(x,y)$ bzw. $d_\infty(x,y)$.

SKALARPRODUKT

Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, $y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$.

1.4.5 $x \cdot y := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ heißt **Skalarprodukt** (oder **inneres Produkt**) von x und y.

x und y sind **orthogonal** oder **senkrecht zueinander**, wenn $x \cdot y = 0$ gilt.

1.4.6 **Eigenschaften:** Für alle Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
$(\alpha\, x) \cdot z = \alpha\, (x \cdot z)$ *(Bilinearität),*
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
$x \cdot (\beta\, z) = \beta\, (x \cdot z)$

(ii) $x \cdot y = y \cdot x$ *(Kommutativität),*

(iii) $x \cdot x \geq 0$ und $(x \cdot x = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$ *(positive Definitheit).*

Für die euklidische Norm gilt $|x| = \|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.

1.4.7 **Satz des Pythagoras:** Sind x und y senkrecht zueinander, so gilt

$$(x-y) \cdot (x-y) \;=\; x \cdot x + y \cdot y$$

oder, mithilfe der euklidischen Norm ausgedrückt,

$$|x-y|^2 \;=\; |x|^2 + |y|^2.$$

1.5 KONVERGENZ IN $\mathbb{R}^n$

1.5.1 **ε–Umgebung, Umgebung** (vgl. 1.2.4): Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter reeller Vektorraum, und sei d der von $\| \ \|$ erzeugte Abstand, also $d(x, y) = \|x - y\|$.

(i) Sind $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so heißt

$$U_\varepsilon(a) := \Big\{x \in X \ \Big| \ d(x, a) < \varepsilon\Big\} = \Big\{x \in X \ \Big| \ \|x - a\| < \varepsilon\Big\}$$

die **ε–Umgebung** von a (in $(X, \| \ \|)$).

(ii) Sind $a \in X$ und $U \subseteq X$ gegeben, so heißt U **Umgebung** von a (in $(X, \| \ \|)$), wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ gibt.

1.5.2 **Eigenschaften von Umgebungen:** Seien $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, $a \in X$ und U eine Umgebung von a. Dann gilt (vgl. 1.2.5):

(i) $a \in U$.

(ii) Jede Obermenge von U ist auch Umgebung von a. (Insbesondere ist die Vereinigung von beliebig vielen Umgebungen von a wieder eine Umgebung von a.)

(iii) Der Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von a ist wieder eine Umgebung von a.

1.5.3 **Hausdorffeigenschaft:** Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, und seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Dann gibt es eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von b mit $U \cap V = \emptyset$ (vgl. 1.2.6).

1.5.4
1.5.5 **Konvergente Folge, Grenzwert** (vgl. 1.2.7): Seien $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, $f = (x_k)$ eine Folge in X und $a \in X$.

(i) f heißt **konvergent gegen a in $(X, \| \ \|)$** (oder einfach **konvergent gegen a**, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welcher normierte Raum $(X, \| \ \|)$ gemeint ist), in Zeichen:

$$x_k \longrightarrow a \text{ in } (X, \| \ \|) \ \text{ für } k \longrightarrow \infty \quad (\text{oder einfach } x_k \longrightarrow a),$$

wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder x_k der Folge liegen.

(ii) f heißt **konvergent in $(X, \| \ \|)$** (oder einfach **konvergent**), wenn es ein $a \in X$ gibt mit der Eigenschaft „f ist konvergent gegen a in $(X, \| \ \|)$“.

(iii) f heißt **divergent in $(X, \| \ \|)$** (oder einfach **divergent**), wenn f nicht konvergent in $(X, \| \ \|)$ ist.

Ist $f = (x_k)$ gegen a konvergent, so ist a eindeutig bestimmt und heißt der **Grenzwert** von f. Er wird mit

$$\lim f \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} x_k$$

bezeichnet (mit dem Zusatz „in $(X, \|\ \|)$“, falls dies zur Klarstellung erforderlich ist).

1.5.6 **ε–n_0–Kriterium:** Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum, $f = (x_k)$ eine Folge in X, und es sei $a \in X$.
Genau dann ist f konvergent gegen a, wenn die Bedingung

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} :\ (k \geq n_0 \Longrightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon)$$

erfüllt ist, d. h., wenn

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0 \qquad \text{(im gewöhnlichen Sinn in } \mathbb{R}\text{)}$$

gilt (vgl. 1.2.14).

1.5.7 **Konvergenz in $(\mathbb{R}, |\ |)$:** Sei $f = (x_k)$ eine reelle Folge, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_k \longrightarrow a \ \text{ in } (\mathbb{R}, |\ |) &\iff \lim_{k\to\infty} |x_k - a| = 0 \\ &\iff \lim_{k\to\infty} x_k = a. \end{aligned}$$

Wir haben den gewöhnlichen Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}$.

1.5.8 **Konvergenz in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$:** Sei $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumnorm $\|\ \|_\infty$ versehen (vgl. 1.4.4), sei $f = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = {}^t(x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, und sei $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$x_k \longrightarrow a \ \text{ in } (\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty) \iff \lim_{k\to\infty} x_{k\nu} = a_\nu \ \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Die Konvergenz in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ bedeutet also die gewöhnliche Konvergenz jeder Koordinatenfolge.

1.5.9 **Satz von Bolzano–Weierstraß:** Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, die $\|\ \|_\infty$–beschränkt ist, d. h., es gebe eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ mit

$$\|x_k\|_\infty \leq S \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es eine Teilfolge von (x_k), die in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ konvergiert.

1.5.10 **Normen auf $\mathbb{R}^n$:** Sei $\|\ \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$, und sei $\|\ \|_\infty$ die Maximumnorm (vgl. 1.4.4). Dann gibt es positive Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(i) $\|x\| \le \alpha \|x\|_\infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $\|x\|_\infty \le \beta \|x\|$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

1.5.11 **Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^n$:** Seien $\|\ \|$ und $\|\ \|^*$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$, $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = {}^t(x_{k1}, \dots, x_{kn})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(i) U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$
$\iff$ U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|^*)$.

(ii) (x_k) ist konvergent (gegen a) in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$
$\iff$ (x_k) ist konvergent (gegen a) in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|^*)$
$\iff$ Für jedes $\nu = 1, \dots, n$ konvergiert $(x_{k\nu})_{k\in\mathbb{N}}$ (gegen a_ν) im gewöhnlichen Sinn, also in $(\mathbb{R}, |\ |)$.

1.5.12 **Vereinbarung:** Es wird immer angenommen, dass $\mathbb{R}^n$ mit einer Norm (bzw. mit dem von der betreffenden Norm induzierten Abstand) versehen ist, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Im Fall $n = 1$ nehmen wir immer die Betragsfunktion als Norm.

1.5.13 **Regeln:** Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum, sei $\alpha \in \mathbb{R}$, sei (x_k) konvergent gegen a in $(X, \|\ \|)$, und sei (y_k) konvergent gegen b in $(X, \|\ \|)$. Dann gilt:

(i) $(x_k) + (y_k)$ ist konvergent gegen $a + b$ in $(X, \|\ \|)$.

(ii) $\alpha(x_k)$ ist konvergent gegen $\alpha\, a$ in $(X, \|\ \|)$.

1.5.14 **Cauchyfolge:** Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum. Eine Folge (x_k) in X heißt **Cauchyfolge in** $(X, \|\ \|)$ (oder **Cauchyfolge in** X oder einfach **Cauchyfolge**, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Norm $\|\ \|$ bzw. welcher normierte Raum $(X, \|\ \|)$ gemeint ist), wenn die Bedingung (vgl. 1.2.18)

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} :\ (k > n_0 \Longrightarrow \|x_k - x_{n_0}\| < \varepsilon)$$

erfüllt ist.

1.5.15 **Eigenschaften (Cauchyfolgen):** In einem normierten Raum $(X, \|\ \|)$ gilt:

(i) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

(ii) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

(iii) Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.

1.5.17 **Vollständiger normierter Raum:**
Ein normierter Raum $(X, \| \ \|)$, in welchem jede Cauchyfolge konvergent ist, heißt **vollständig** oder ein **Banachraum**.

1.5.18 **$\mathbb{R}^n$ als Banachraum:** Sei $\| \ \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ vollständig, also ein Banachraum.

1.5.19 **Beispiele:**
(i) $(\mathcal{B}(M), \| \ \|_\infty)$ mit $M \neq \emptyset$ und $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \mid t \in M\}$ (vgl. Beispiel 1.4.3(1)) ist vollständig, also ein Banachraum.

(ii) $(C([a,b]), \| \ \|_\infty)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $\| \ \|_\infty$ wie in (i) (vgl. Beispiel 1.4.3(3)) ist vollständig, also ein Banachraum.

(iii) $(C([0,1]), \| \ \|_1)$ mit $\|f\|_1 := \int\limits_0^1 |f(t)|\, dt$ (vgl. Beispiel 1.4.3(3)) ist *nicht* vollständig.

DIESE SEITE BLEIBT FREI.

Gesamtindex

Die Zahl vor dem Bindestrich gibt die Kurseinheit, die Zahl danach die Seite an.