Vektorprodukt und Graves-Cayley-Oktonionen

Holger P. Petersson
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fernuniversität in Hagen
D-58084 Hagen
Germany
Email: holger.petersson@fernuni-hagen.de

Mathematisches Weihnachts-Kolloquium
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fernuniversität in Hagen
15. Dezember 2015, 11:00–11:30

Meine sehr verehrten Damen und Herren, in Fortführung einer Tradition, die unser verehreter Herr Kollege Andrei Duma vor zwei Jahren ins Leben gerufen hat, will ich Ihnen heute im Vorfeld unserer Weihnachstfeier einige wenige völlig elementare, hoffentlich aber amüsante Beobachtungen mitteilen über die im Titel meines Vortrags genannten Gegenstände. Lassen Sie mich, wie es sich für die Mathemartik gehört, damit beginnen, die einschlägigen Begriffe zu klären.

*

Der erste Begriff, dem ich mich dabei zuwende, ist der Gymnasialmathematik entnommen. Es handelt sich um das insbesondere bei Physikern und Ingenieuren so beliebte Vektorprodukt, das ich hier allerdings nicht, wie Sie es möglicherweise gewohnt sind, im dreidimensionalen *reellen* Zahlenraum betrachten will, sondern im dreidimensionalen *komplexen* Zahlenraum. Ich operiere also im Folgenden über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und habe es zu tun mit dem dreidimensionalen komplexen Spaltenraum $\mathbb{C}^3$, bei dem es sich als zweckmäßig erweist, ihn nicht als komplexen *Links*vektorraum aufzufassen, sondern als komplexen *Rechts*vektorraum. Dann steht mir insbesondere das gewöhnliche Skalarprodukt zur Verfügung, also die Abbildung von $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ nach $\mathbb{C}$, die ein Paar (u, v) dreigliedriger komlexer Spaltenvektoren in $u^t v$ überführt:

$$\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \longmapsto u^t v.$$

Dieses Skalarprodukt ist natürlich nicht mehr positiv definit, aber wenigstens noch bilinear, symmetrisch und vor allem nicht-ausgeartet. Dieser Sachverhalt wiederum erlaubt es mir, die folgende elementare Überlegung anzustellen. Gegeben seien zwei beliebige Spaltenvektoren $u, v \in \mathbb{C}^3$. Mit einem dritten Spaltenvektor $w \in \mathbb{C}^3$ bilde ich dann die Determinante der dreireihig quadratischen komplexen Matrix mit den Spaltenvektoren u, v, w. Der entstehende Ausdruck ist offenbar linear in w, und folglich gibt es einen eindeutig bestimmten, nur von u und v abhängigen Vektor $u \times v \in \mathbb{C}^3$, eben das *Vektorprodukt* von u und v, so dass für alle $w \in \mathbb{C}^3$ die Gleichung

$$(u \times v)^t w = \det(u, v, w)$$

erfüllt ist. Dies ist da *komplexe Spatprodukt*, das uns nunmehr für alle $u, v, w \in \mathbb{C}^3$ zur Verfügung steht und dem man die weitaus meisten Standardeigenschaften des

Vektorproduktes unmittelbar entnehmen kann, wie etwa die Bilinearität, wie etwa die Antikommutativität, aber auch die Eigenschaft, dass das Vektorprodukt von u und v sowohl auf u als auch auf v senkrecht steht.

Es gibt jedoch eine Eigenschaft des Vektorproduktes, die man, wie es scheint, dem komplexen Spatproduct nicht unmittelbar entnehmen kann, und das ist die *Grassmann-Identität.* Die Grassmann-Identität macht eine Aussage über das iterierte Vektorprodukt $(u \times v) \times w$, das natürlich auf $u \times v$ senkrecht steht und folglich, wenn u und v in allgemeiner Lage sind, eine Linearkombination von u und v sein muss. In der Tat gilt *für alle* $u, v, w \in \mathbb{C}^3$, dass dieses iterierte Vektorprodukt übereinstimmt mit

$$(u \times v) \times w = vw^t u - uw^t v.$$

Soviel zum Vektorprodukt.

*

Die zweite Begriffsbildung, welche im Rahmen meines heutigen Vortrags der Klärung bedarf, das sind die Graves-Cayley-Oktonionen. Die Graves-Cayley-Oktonionen fügen sich ein in die allgemeine Systematik der reellen Divisionsalgebren. Dabei wird unter einer *reellen Algebra* ein in diesem Vortrag stets endlichdimensionaler reeller Vektorraum verstanden, versehen mit einer multiplikativ geschriebenen, bilinearen Verknüpfung, welche über die Bilinearität hinaus jedoch keinerlei weiteren Einschränkungen unterliegt: weder muss sie ein Einselement zulassen, noch muss sie kommutativ oder assoziativ sein. Eine solche reelle Algebra D heißt eine *Divisionsalgebra*, falls sie erstens nicht nur aus der Null besteht und zweitens für alle $u, v \in D$, $u \neq 0$, die Gleichungen $ux = v$ und $yu = v$ eindeutig in D gelöst werden können; wegen der endlichen Dimension ist die zweite dieser Bedingungen äquivalent damit, dass D keine Nullteiler besitzt: für $x, y \in D$ folgt aus $xy = 0$ notwendig $x = 0$ oder $y = 0$.

Mit den reellen Divisionsalgebren hat es eine eigenartige Bewandnis: auf der einen Seite gibt es sie in so großer Zahl, dass jeder Versuch, sie bis auf Isomorphie vollständig zu klassifizieren, von vornherein zum Scheitern verurteilt ist. Auf der anderen Seite sind ihre Dimensionen ausgesprochen dünn gesät. Nach dem Satz von Bott-Milnor [1], Kervaire [3] aus dem Jahre 1958, einem tiefliegenden Resultat der algebraischen Topologie, gibt es reelle Divisionsalgebren nur in den Dimensionen $d = 1, 2, 4, 8$. Standardbeispiel, welche diese Dimensionen realisieren, sind seit langem bekannt. In der Dimension $d = 1$ sind es natürlich die reellen Zahlen, in der Dimension $d = 2$ sind es natürlich die komplexen Zahlen, in der Dimension $d = 4$ sind es die von Hamilton 1843 entdeckten und nach ihm benannten Hamiltonschen Quaternionen, und in der Dimension $d = 8$ schließlich sind es die von Graves ebenfalls 1843 entdeckten und von Cayley 1845 wieder entdeckten Graves-Cayley-Oktonionen. Von diesen soll im Folgenden die Redee sein.

Um die Multiplikation der Graves-Cayley-Oktonionen zu definieren, werde ich allerdings nicht den von Graves und Cayley, aber auch von der Wikipedia eingeschlagenen Weg beschreiten, welche diese Multiplikation zunächst auf der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^8$ definiert hatten, um sie anschließend auf den gesamten Vektorraum bilinear fortzusetzen, sondern ich werde mich eines Ansatzes bedienen, den Max Zorn im Jahre 1933 vorgelegt hat [5]. Dieser Ansatz findet sich auch in dem Fernstudienkurs "Aufbau des Zahlsystems" von Harald Holmann [2]. Ausgangspunkt des Zornschen Ansatzes ist eine eigenartige Realisierung des $\mathbb{R}^8$. Man gibt sich vor eine Kopie der komplexen Zahlen, des weiteren eine Kopie des dreidimensionalen komplexen Spaltenraums $\mathbb{C}^3$, bildet von beiden die direkte Summe und fasst das Resultat als einen offenbar achtdimensionalen reellen Vektorraum auf:

$$\mathbb{R}^8 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^3.$$

Diesen reellen Vektorraum verwandelt man in eine reelle Algebra, eben die Algebra der *Graves-Cayley-Oktonionen*, bezeichnet mit

$$\mathbb{O} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^3,$$

indem man zwei beliebige Elemente

$$\mathbb{O} \ni x_j = a_j \oplus u_j, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad u_j \in \mathbb{C}^3, \quad j = 1, 2,$$

auf die folgende Weise miteinander multipliziert.

$$x_1 x_2 := (a_1 a_2 - \bar{u}_1^t u_2) \oplus (u_2 \bar{a}_1 + u_1 a_2 + \bar{u}_1 \times \bar{u}_2).$$

Was auf diese Weise entsteht, ist offenbar eine reelle Algebra, von der man sofort sieht, dass sie ein Einselement besitzt, nämlich $1_{\mathbb{O}} := 1 \oplus 0$, von der man des weiteren sofort sieht, dass sie nicht kommutativ ist, weil nämlich die rechte Seite der obigen Gleichung nicht symmetrisch ist in x_1 und x_2, und von der man schließlich durch einfaches Herumprobieren verifiziert, dass sie auch das Assoziativgesetz verletzt. Es handelt sich also um eine im wahrsten Sinne des Wortes nicht assoziative achtdimensionale reelle Algebra. Die Frage, ob diese reelle Algebra eine Divisionsalgebra ist, beantwortet man am besten dadurch, dass man eine auf den ersten Blick harmlos aussehende, in Wahrheit jedoch höchst bedeutsame reelle quadratische Form ins Spiel bringt, die *Norm* von $\mathbb{O}$, bezeichnet mit $n_{\mathbb{O}}$, die auf $\mathbb{O}$ operiert und nach der folgenden Vorschrift reelle Werte annimmt.

$$n_{\mathbb{O}}(a \oplus u) := |a|^2 + \|u\|^2 = \bar{a}a + \bar{u}^t u \qquad\qquad (a \in \mathbb{C}\, u \in \mathbb{C}^3).$$

Die Bedeutung dieser reellen quadratischen Form für die Graves-Cayley-Oktonionen wird vor allem durch die Tatsache unterstrichen, dass sie, wie man in diesem Zusammenhang zu sagen pflegt, Komposition gestattet: die Norm eines Produktes ist stets dasselbe wie das Produkt der Normen, es gilt also

$$n_{\mathbb{O}}(x_1 x_2) = n_{\mathbb{O}}(x_1) n_{\mathbb{O}}(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{O}$. Diese fundamentale Identität verifiziert man völlig elementar, indem man man an der richtigen Stelle das komplexe Spatprodukt und die Grassmann-Identität verwendet.

Da die reelle quadratische Form $n_{\mathbb{O}}$ offenbar positiv definit ist, die Null also nur trivial darstellt, folgt aus dieser Gleichung unmittelbar, dass die Graves-Cayley-Oktonionen keine Nullteiler besitzen, wegen ihrer endlichen Dimension also eine Divisionsalgebra bilden.

*

Lassen Sie mich nun noch einmal auf die vor wenigen Minuten getroffene Feststellung zurückkommen, dass die Graves-Cayley-Oktonionen nicht assoziativ sind. Man kann die Frage stellen, wie weit ihre Multiplikation vom Assoziativgesetz tatsächlich entfernt ist, und der kanonische Weg, diese Distanz zu messen, besteht darin, dass man sich den Assoziator anschaut. Der *Assoziator* von $\mathbb{O}$ ist definiert als die Abbildung

$$\mathbb{O} \times \mathbb{O} \times \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}, \quad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto [x_1, x_2, x_3] := (x_1 x_2) x_3 - x_1 (x_2 x_3).$$

Was kann man über den Assoziator sagen? Nun, er ist offenbar trilinear und nach dem, was wir schon wiederholt festgestellt hatten, von Null verschieden. Will man mehr über ihn in Erfahrung bringen, bleibt nichts übrig, als ihn explizit auszurechnen. Dazu schreiben wir wie oben

$$x_j = a_j \oplus u_j, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad u_j \in \mathbb{C}^3, \quad j = 1, 2, 3,$$

verwenden erneut das komplexe Spatprodukt und die Grassmann-Identität, um nach einer kurzen Rechnung das folgende Ergebnis zu erhalten.

$$\begin{aligned}[x_1, x_2, x_3] = &\Big(\overline{\det(u_1, u_2, u_3)} - \det(u_1, u_2, u_3)\Big) \\ &\oplus \Big(\sum_{(jkl)\in \mathrm{Cyc}(123)} \big((u_j \times u_k) \times \bar{u}_l + (\bar{u}_j \times \bar{u}_k)(\bar{a}_l - a_l)\big)\Big),\end{aligned}$$

wobei die Summationsbedingung in der $\mathbb{C}^3$-Komponente verlangt, über alle zyklischen Permutationen (jkl) der Ziffern (123) zu summieren. Auf den ersten Blick sieht diese Formel nicht sehr ermutigend aus. Wenn man jedoch etwas genauer hinschaut, so stellt man fest, dass die $\mathbb{C}$-Komponente des Assoziators nicht nur trilinear ist in x_1, x_2, x_3, sondern auch *alternierend*, dh, sie verschwindet, sobald zwei der drei Argumente übereinstimmen. Wenn man *noch* etwas genauer hinschaut und insbesondere berücksichtigt, dass in der $\mathbb{C}^3$-Komponente über alle *zyklischen* Permutationen der Ziffern $1, 2, 3$ summiert wird, stellt man des weiteren fest, dass auch die $\mathbb{C}^3$-Komponente des Assoziators alternierend ist in x_1, x_2, x_3. Insgesamt erweist sich also der Assoziator selber als eine trilineare, von Null verschiedene, alternierende Funktion seiner Argumente.

Seit Artin in den 1930er Jahren heißen Algebren, deren Assoziator alternierend ist, *alternativ*. Wir können also konstatieren, dass *die Graves-Cayley-Oktonionen eine echt alternative reelle Divisionsalgebra bilden*, bis auf Isomorphie übrigens die einzige.

Uns steht heute eine umfassende, sehr allgemeine Theorie alternativer Algebren über beliebigen kommutativen Ringen zur Verfügung, und für den systematisch denkenden Mathematiker ist die Versuchung groß, diese allgemeine Theorie auf die Graves-Cayley-Oktonionen loszulassen. Es gibt jedoch gute Gründe, einer solchen Versuchung zu widerstehen, und zwar vor allem deshalb, weil es eine Vielzahl von Wissenschaftlern gibt (nicht nur von Mathematikern), welche sich für die Graves-Cayley-Oktonionen interessieren, verständlicherweise aber nicht die geringste Neigung verspüren, sich in die allgemeine Theorie der alternativen Algebren einzuarbeiten.

Vor diesem Hintergrund muss es das Ziel sein, für die Graves-Cayley-Oktonionen einen ad-hoc-Zugang zu entwickeln. Dabei kann es freilich nicht ausbleiben, dass es gelegentlich notwendig sein wird, Resultate der allgemeinen Theorie entweder ohne Beweis zu übernehmen oder aber sie für die Graves-Cayley-Oktonionen direkt zu verifizieren. Lassen Sie mich die Vorzüge dieser zweiten Alternative am Schluss meines Vortrags durch ein einfaches Beispiel verdeutlichen.

Es handelt sich um die drei *Moufang-Identitäten*, die Ruth Moufang 1935 für beliebige alternative Divisionsringe bewiessen hat [4]. Sie lauten folgendermaßen: *Für alle x, y, z gilt*

$$x\big(y(xz)\big) = (xyx)z, \quad (xy)(zx) = x(yz)x, \quad \big((zx)y\big)x = z(xyx).$$

Beachten Sie, dass in alternativen Algebren bei Ausdrücken der Form aba keine Klammern erforderlich sind, weil der Assoziator $[x_1, x_2, x_3]$ für $x_1 = x_3 = a$, $x_2 = b$ wegen der Alternativgesetze notwendig verschwindet.

Wir sehen uns also der Aufgabe gegenüber, die drei Moufang-Identitäten für die Graves-Cayley-Oktonionen ad-hoc zu verifizieren. Wenn man das tut, erlebt man allerdings eine kleine Überraschung. Nach durchaus unangenehmen Rechnungen stellt sich nämlich heraus, dass *jede dieser drei Identitäten für die Graves-Cayley-Oktonionen zu einer Identität für das gewöhnliche Vektorprodukt äquivalent ist, die mir persönlich jedenfalls nicht bekannt war.*

Erinnern Sie sich daran, dass das komplexe Spatprodukt mit Ausdrücken der Form $(u\times v)^t w$ operiert, also mit Skalaren. In der Identität, die ich Ihnen jetzt vorstellen will, haben wir es demgegenüber zu tun mit Ausdrücken der Form $(u \times v)w^t$, also mit komplexen 3×3-Matrizen vom Rang ≤ 1. Genauer gilt. Werden diesem Ausdruck die beiden anderen Ausdrücke hinzugefügt, die aus ihm durch zyklische Vertauschung der Variablen entstehen, so erhält man ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix, und der zugehörige skalare Faktor ist nichts anderes als die Determinante der Matrix mit den Spaltenvektoren u, v, w:

$$(u \times v)w^t + (v \times w)u^t + (w \times u)v^t = \det(u, v, w)\mathbf{1}_3 \qquad (u, v, w \in \mathbb{C}^3).$$

Hat man diese Ientität einmal zur Kenntnis genommen, ist es ein Kinderspiel, sie direkt zu verifizieren[1] Daher halte ich es für äußerst unwahrcheinlich, dass es keine Formelsammlung der Ingenieurmathematik geben soll, welche diese Identität enthält. Sollte jemand unter Ihnen, meine sehr verehrten Damen und Herren, in der Lage sein, mir hierzu einen sachdienlichen Hinweis zu geben, dann wäre *ein* Zweck meines heutigen Vortrags bereits erfüllt. Ich danke Ihnen für Ihre Aufmerksamkeit.

Danksagung. Mein Dank gilt Herrn Thomas Müller, der mir ein Exemplar von [2] als pdf-Datei zur Verfügung gestellt hat, und ganz besonders Herrn Jörn P. Petersson für nützliche Hinweise und Diskussionen.

References

[1] R. Bott and J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87–89.

[2] H. Holmann, *Aufbau des Zahlsystems*, Fernstudienkurs, Fernuniversität in Hagen, Hagen, 1987.

[3] M.A. Kervaire, *Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **44** (1958), no. 3, 280–283.

[4] R. Moufang, *Zur Struktur von Alternativkörpern*, Math. Ann. **110** (1935), no. 1, 416–430.

[5] M. Zorn, *Alternativkörper und quadratische Systeme*, Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. **9** (1933), 395–402.

[1] Die linke Seite der behaupteten Gleichung, geschrieben als $s(u, v, w)$, ist offenbar trilinear und alternierend in u, v, w. Mit beliebigem $x \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ gilt dies dann auch für $\mathrm{tr}(s(u, v, w)x)$. Folglich gibt es genau einen Skalar $\lambda(x) \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{tr}\big(s(u, v, w)x\big) = \lambda(x)\det(u, v, w)$$

für alle $u, v, w \in \mathbb{C}^3$. Wir bezeichnen mit (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis von $\mathbb{C}^3$ und mit e_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, die Matrizeneinheiten von $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$. Setzt man dann $u = e_1$, $v = e_2$, $w = e_3$ und beachtet $(e_j \times e_k)e_l^t = e_l e_l^t = e_{ll}$ für alle zyklischen Permutationen (jkl) von (123), also $s(e_1, e_2, e_3) = \mathbf{1}_3$, so folgt $\lambda(x) = \mathrm{tr}(x)$, also

$$\mathrm{tr}\big(s(u, v, w)x\big) = \mathrm{tr}\Big(\big(\det(u, v, w)\mathbf{1}_3\big)x\Big),$$

und da die Spur als symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ nicht-ausgeartet ist, folgt die Behauptung.