Aufgabe B0301

Gegeben sei das folgende rein-ganzzahlige LP.

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\ \ & 3x_1 + 5x_2 \\
& \text{u.d.N.} \\
& 2x_1 + x_2 \leq 14 \\
& x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ und ganzzahlig}
\end{aligned}
$$

Die Relaxation führte zu folgendem optimalen Endtableau.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
1	0	0	4/5	7/5	196/5
0	1	0	3/5	-1/5	22/5
0	0	1	-1/5	2/5	26/5

a) Führen Sie für die erste Restriktion <u>einen</u> Schnitt gemäß dem „ersten Gomory-Verfahren“ im Tableau durch.

b) Stellen Sie den durch den Schnitt aus a) verkleinerten Lösungsraum der Relaxation in geeigneter Weise graphisch dar!

<u>Anleitung:</u> Die Schnittrestriktion ist, bevor eine Gomory-Schlupfvariable x_5 eingefügt wird, eine Nebenbedingung in den beiden Schlupfvariablen x_3 und x_4 des Ausgangsmodells. Diese lässt sich durch die beiden Modellvariablen x_1 bzw. x_2 ausdrücken, wenn man das aus den beiden Ausgangsmodellrestriktionen in kanonischer Form bestehende Gleichungssystem nach x_3 bzw. x_4 aufgelöst in die Schnittrestriktion einsetzt. Diese lässt sich nun in der x_1-x_2-Ebene darstellen. Insbesondere sollte die optimale Lösung der Relaxation dieses Modells Ihr Ergebnis aus a) bestätigen!

Lösungshinweise

Endtableau der Relaxation laut Aufgabenstellung:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
1	0	0	4/5	7/5	196/5
0	1	0	3/5	-1/5	22/5
0	0	1	-1/5	2/5	26/5

mit der Lösung $\mathbf{x}^1 = (4\,{}^2/_5\,;\,5\,{}^1/_5)$ und dem Zielwert $x_0^1 = 39\,{}^1/_5$.

a) Die Schnittrestriktion für die erste Restriktion nach erstem Gomory-Verfahren

$-3/5\ x_3 - 4/5\ x_4 + g = -2/5$ führt zum Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	g	RHS
1	0	0	4/5	7/5	0	196/5
0	1	0	3/5	-1/5	0	22/5
0	0	1	-1/5	2/5	0	26/5
0	0	0	**-3/5**	-4/5	1	-2/5

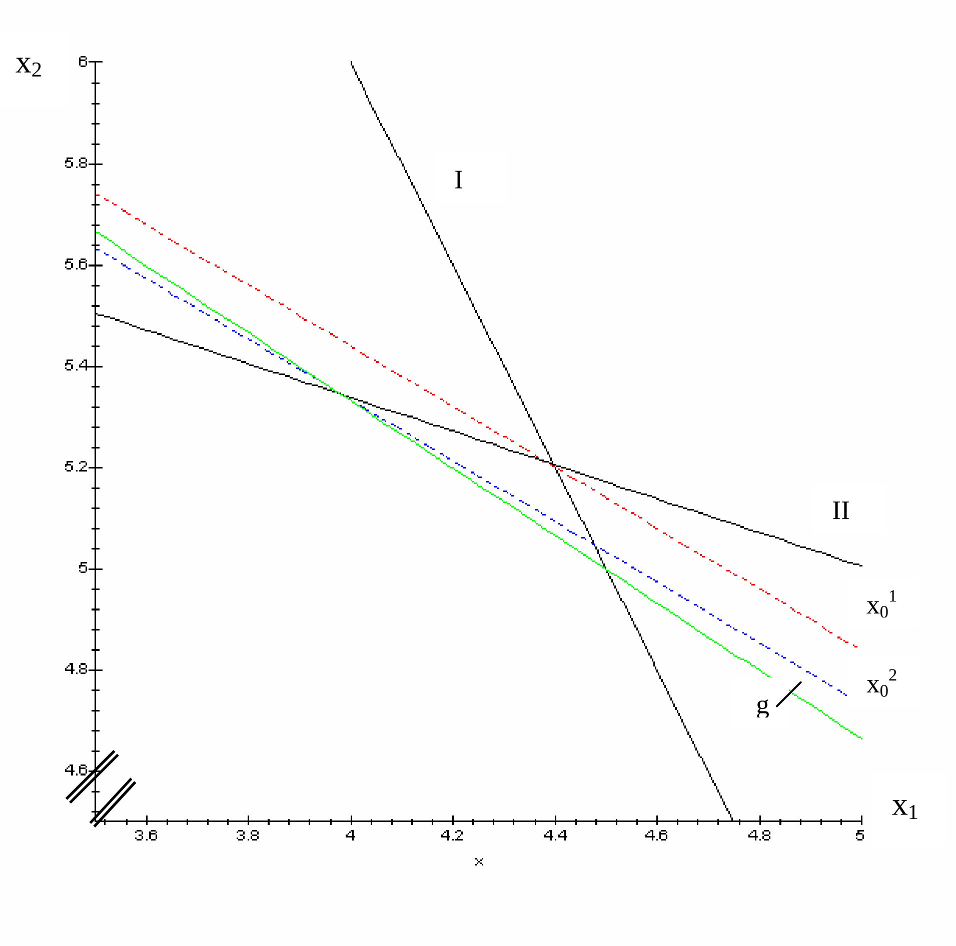
Ein dualer Simplex-Schritt liefert:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	g	RHS
1	0	0	0	1/3	4/3	116/3
0	1	0	0	-1	1	4
0	0	1	0	2/3	-1/3	16/3
0	0	0	1	4/3	-5/3	2/3

Bis hierhin ist laut Aufgabenstellung zu rechnen (noch nicht zulässig, aber die Relaxation ist optimal) mit der Lösung $\mathbf{x}^2 = (4\,;\,5\,{}^1/_3)$ und dem Zielwert $x_0^2 = 38\,{}^2/_3$.

b) Ein Einsetzen der beiden nach den Schlupfvariablen aufgelösten Modellrestriktionen (kanonische Form) in die Gomory-Restriktion liefert:

$2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 24$



Beachten Sie bitte, dass nur der Teil des Lösungsraums dargestellt wird, in dem sich durch den Schnitt *g* eine Veränderung (Zielwert jetzt auf dem Niveau x_0^2) ergibt.