## Aufgabe B0601

Lösen Sie das folgende LOP mit Hilfe der revidierten Simplexmethode:

$$\text{Max } x_0$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
x_0 - & 2x_1 - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
& x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & = & 6 \\
& x_1 + & 2x_2 & & + x_4 & & & = & 8 \\
& x_1 & & & & + x_5 & & = & 4 \\
& & x_2 & & & & + x_6 & = & 3 \\
& & & & & x_1, \ldots, x_6 & & \geq & 0.
\end{array}$$

## Lösungshinweise

Das vollständige Ausgangstableau lautet:

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 1 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| $x_4$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| $x_6$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |

Das Ausgangstableau für das revidierte Verfahren ist

| **T.1** | $x_0$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_B$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 2 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 |
| $x_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 1* |

Als Index der aufzunehmenden Variablen erhält man $j_0$ = 2. Diese Spalte kann unmittelbar aus **T.1** abgelesen werden. Das Element 1 ist das Pivotelement, da

$$\frac{3}{1} = \mathrm{Min}\left\{\frac{6}{1}, \frac{8}{2}, \frac{3}{1}\right\}.$$

Der Pivotschritt führt zum Folgetableau

| **T.2** | $x_0$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 9 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 3 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | 2 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |

in dem die Basisvariable $x_6$ des Tableaus **T.2** durch $x_2$ ersetzt worden ist. Die Kriteriumselemente der „fehlenden" $x_1$-Spalte bzw. der $x_2$-Spalte sind

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3)(-2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}} = -2 \quad \text{und} \quad (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3)(-3,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}} = 0\,,$$

wobei die Spaltenvektoren dem Tableau **T.1** entnommen sind. Somit ist $x_1$ die aufzunehmende Variable. Die aufzunehmende Spalte lautet also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sie wird dem Tableau **T.3** hinzugefügt:

| **T.3** | $x_0$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_B$ | $x_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 9 | -2 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 3 | 1 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | 2 | 1* |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 |

Das Pivotelement ist 1, ein Pivotschritt liefert

| **T.4** | $x_0$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 1 | 0 | 2 | 0 | -1 | 13 |
| $x_3$ | 0 | 1 | -1 | 0 | 1* | 1 |
| $x_1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | 2 |
| $x_5$ | 0 | 0 | -1 | 1 | 2 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |

| **T.5** | $x_0$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 14 |
| $x_6$ | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| $x_1$ | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_5$ | 0 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 2 |

Die Kriteriumselemente der $x_1$-Spalte bzw. der $x_2$-Spalte sind

$$(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)(-2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}} = 0 \quad \text{und} \quad (1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)(-3,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}} = 0\,.$$

Somit sind alle Kriteriumselemente nichtnegativ. Das Tableau **T.5** ist also optimal. Die optimale Basislösung ist $(x_1,\ldots,x_6)^{\mathrm{T}} = (4,2,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ mit Zielfunktionswert 14.

✓