

Aufgabe B0402

Im neu errichteten Produktionsbetrieb eines Unternehmens sollen Spielzeuge in fünf Ausführungen A_i , $i = 1, \dots, 5$ mit jeweiligen Wochenstückzahlen x_i hergestellt werden. Die Fertigung erfolgt auf drei vollautomatisierten Maschinen M_1 , M_2 und M_3 . Die spezifischen Stückbearbeitungszeiten je Produkt und Maschine sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

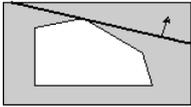
Bearbeitungszeit [Min/St.]	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
M_1	1	2	1	0	1
M_2	0	1	1	1	1
M_3	1	0	1	1	0

Zu beachten ist, dass M_1 auch für einen anderen Betrieb benötigt wird und nur 7 Stunden pro Woche zur Verfügung steht, M_2 dagegen 5 Stunden pro Woche und M_3 nur 3 Stunden pro Woche. Eine genaue Kalkulation ergab, dass A_1 und A_5 einen Deckungsbeitrag von 2 € pro Stück, A_2 und A_4 einen Deckungsbeitrag von 1 € pro Stück und A_3 einen Deckungsbeitrag von 3 € pro Stück erzielen werden.

Gesucht ist das deckungsbeitragsmaximale wöchentliche Produktionsprogramm.

- Formulieren Sie ein lineares Modell, welches den gesamten Deckungsbeitrag maximiert.
- Berechnen Sie die optimale Lösung mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.
- Warum ergibt sich eine ganzzahlige Lösung?





Lösungshinweise

a)

$$\max 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5$$

u.d.N.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \leq 420$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 300$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 180$$

$$x_j \geq 0 \text{ und ganzzahlig, } j = 1, \dots, 5$$

b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Δz_j	-2	-1	-3	-1	-2	0
s_1	1	2	1	0	1	420
s_2	0	1	1	1	1	300
s_3	<u>1</u>	0	1	1	0	180

	s_3	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Δz_j	2	-1	-1	1	-2	360
s_1	-1	2	0	-1	<u>1</u>	240
s_2	0	1	1	1	1	300
x_1	1	0	1	1	0	180

	s_3	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
Δz_j	0	3	-1	-1	2	840
x_5	-1	2	0	-1	1	240
s_2	1	-1	<u>1</u>	2	-1	60
x_1	1	0	1	1	0	180

	s_3	x_2	s_2	x_4	s_1	RHS
Δz_j	1	2	1	1	1	900
x_5	-1	2	0	-1	1	240
x_3	1	-1	1	2	-1	60
x_1	0	1	-1	-1	1	120

$$x^{opt} = (120, 0, 60, 0, 240)^T, \quad z^{\max} = 900.$$



- c) Die Ausgangskoeffizienten sind alle ganzzahlig. Da alle Pivotelemente den Wert 1 haben, bleiben auch die Koeffizienten in den Folgetableaus ganzzahlig: Wie im Simplex-Algorithmus erkennbar, wird ja ausschließlich durch das jeweilige Pivotelement dividiert.

