Aufgabe 3-6-2

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Die Knoten von G heißen **zulässig** gefärbt, wenn jedem Knoten eine Farbe aus einer – zunächst beliebigen – Menge von Farben so zugeordnet ist, dass die Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, nicht dieselbe Farbe tragen. Man spricht auch vereinfachend von der Färbung des Graphen.
Eine triviale Färbung erhält man, wenn jedem Knoten eine neue Farbe zugewiesen wird; bei n Knoten benötigt man also genau n Farben.

Interessant sind nun genau die zulässigen Färbungen, bei denen möglichst wenig Farben verwendet werden. Das Minimum der für eine zulässige Färbung von G erforderlichen Farben heißt die chromatische Zahl $\chi(G)$. Es existieren zahlreiche Verfahren zur Abschätzung der minimal benötigten Farben.

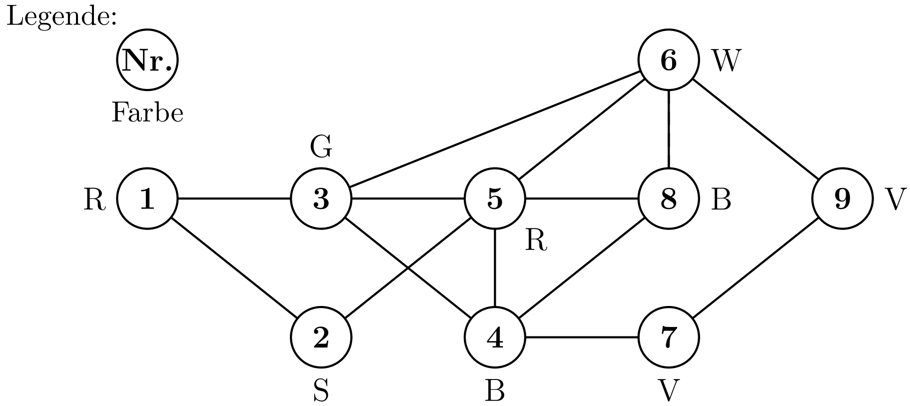

Abbildung 1: Konfliktgraph mit Einfärbung

In der obigen Abbildung 1 soll das Färbungsproblem mittels genetischem Algorithmus bei vorgegebener Farbenanzahl gelöst werden; eine Ausgangsfärbung mit den Farben *rot* (R), *schwarz* (S), *gelb* (G), *blau* (B), *weiß* (W), *violett* (V) ist darin bereits vorgegeben.

a) Geben Sie eine mögliche Binärkodierung zur Färbung des obigen Abbildung 1 an. Wie lautet der zugehörige String?
Färben Sie im obigen Abbildung 1 die Knoten 1, 6 und 7 mit G und erzeugen so ein zweites Individuum.

b) Bewerten Sie die Einfärbung eines Graphen mit einer geeigneten Fitnessfunktion, und berechnen Sie den Fitnesswert für die in a) generierten Individuen.

c) Geben Sie einen Crossover-Operator an und machen Sie Angaben über die Zulässigkeit von entstehenden Lösungen. Demonstrieren Sie das Crossover mit den in a) erzeugten Individuen am konkreten, nicht trivialen Beispiel.

d) Wie sieht ein möglicher Mutations-Operator aus? Geben Sie auch hier ein Beispiel an.

Lösungshinweise

---

a) Insgesamt ist der Graph in der Aufgabenstellung mit den sechs Farben R, S, G, B, W, V gefärbt. Zunächst ist eine Binärkodierung dieser Farben zu erzeugen, wobei drei Bit ausreichend sind und zwei Strings dabei zunächst keiner Farbe entsprechen. Beispielsweise ergibt sich die in Tabelle 1 angegebene Zuordnung.

$000 \leftrightarrow R$	$100 \leftrightarrow W$
$001 \leftrightarrow S$	$101 \leftrightarrow V$
$010 \leftrightarrow G$	$110 \leftrightarrow -$
$011 \leftrightarrow B$	$111 \leftrightarrow -$

Tabelle 1: Zuordnung von dreistelligen Binärzahlen zu Farben

Legt man die gegebene Nummerierung der Knoten zugrunde, ergibt sich für den gezeigten Graph folgender String:
000 001 010 011 000 100 101 011 101
Erhalten die Knoten 1, 6 und 7 die Farbe G,
ergibt sich folgende Zeichenkette:
010 001 010 011 000 010 010 011 101

b) Die Mengen von Knoten gleicher Farbe in einem Graphen bilden eine Partition der Gesamtknotenmenge. Die Färbung eines Graphen ist genau dann zulässig, wenn zwei durch eine Kante verbundene Knoten nicht dieselbe Farbe tragen, also nicht in der selben „Farbmenge“ sind. Für den obigen Graph mit der gegebenen sowie der veränderten Färbung ergeben sich folgende Partitionen:

{1,5}	R	{4,8}	B
{2}	S	{6}	W
{3}	G	{7,9}	V

{5}	R	{4,8}	B
{2}	S	{}	W
{1,3,6,7}	G	{9}	V

Im ersten Fall sind sowohl die Knoten 4 und 8 als auch 7 und 9 jeweils durch eine Kante verbunden. Die zweite Färbung besitzt „unzulässige Kanten“ zwischen 1 und 3, 3 und 6 sowie 4 und 8. Ein Individuum ist umso schlechter zu bewerten, desto mehr solcher Kanten existieren. Diese Anzahl ist also eine geeignete Bewertung, wobei der Wert 0 einem (lokalen) Optimum entspricht. Die Fitnesswerte zu den obigen Strings sind somit 2 und 3.

c) Operiert man auf den binär kodierten Individuen, so ist beispielsweise ein Ein-Punkt-Crossover möglich; die Lösungsstruktur wird dabei allerdings vollkommen verändert.

Ein neu entstandenes Individuum stellt bei beliebiger Crossposition nur dann stets eine Einfärbung des Graphen dar, wenn genau 2^k $(k > 0)$ Farben verwendet werden, d.h. eine eindeutige Dekodierung möglich ist. Die Zulässigkeit muss für jedes Individuum geprüft werden; der Grad der Verletzung geht wie beschrieben in die Zielfunktion ein.

Bei sechs möglichen Farben sind den Kombinationen 110 und 111 keine Farben zugeordnet. Bei Kreuzungsposition 17 ergeben sich mit den angegebenen Individuen

000 001 010 011 000 10$\underline{0\ 010\ 011\ 101}$ ∞ 010 001 010 011 000 01$\underline{0\ 101\ 011\ 101}$

folgende Nachkommen

000 001 010 011 000 10$\underline{0\ 010\ 011\ 101}$ 010 001 010 011 000 01$\underline{0\ 101\ 011\ 101}$.

Die Fitnesswerte der neuen Individuen sind 1 und 4.

d) Ein Mutationsoperator ist beispielsweise die Änderung eines Bits an einer zufällig ausgewählten Position von 0 auf 1 bzw. umgekehrt. Auch hierbei ist von einer eineindeutigen Zuordnung von Farben zu Strings auszugehen. Bei der Mutation kann alternativ aber auch gefordert werden, dass sie nur realisiert wird, wenn der betroffene Teilstring auch einer Farbe entspricht.

000 001 010 011 000 100 10$\underline{1}$ 011 101

000 001 010 011 000 100 10$\underline{0}$ 011 101.

Der Fitnesswert des neuen Individuums beträgt 1.