Aufgabe 2-9-3

In einem Lagerbereich sollen drei Objekte von drei Staplerfahrzeugen aufgenommen werden. Durch die aktuelle Position und die Leistungsfähigkeit der Stapler ergeben sich unterschiedliche Bewertungen der Eignung zur Erledigung der Aufträge; sie sind als Kostenmatrix in Tabelle 1 zusammengestellt.

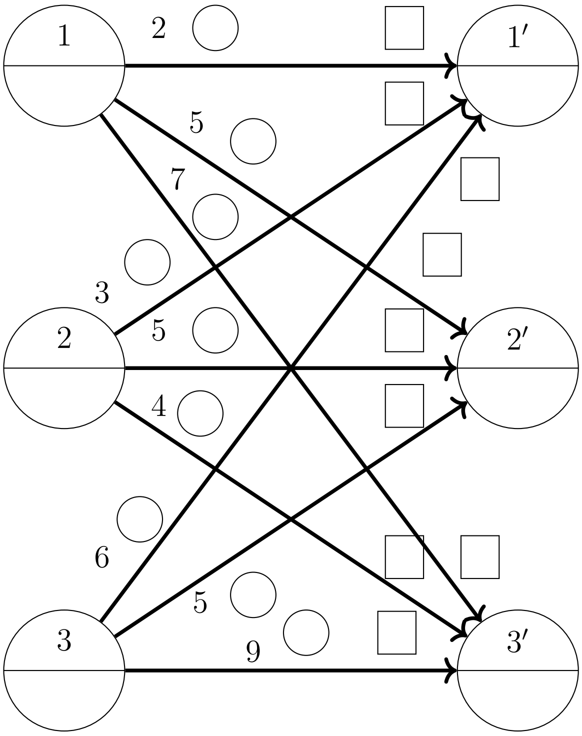
Tabelle 1: Eignung Staplerfahrzeuge i für Objekte j

i \ j	$1'$	$2'$	$3'$
1	2	5	7
2	3	5	4
3	6	5	9

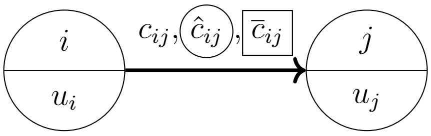
a) Berechnen Sie zur Lösung dieses Zuordnungsproblems zunächst für alle Knoten die Knotenpotentiale. Bestimmen Sie dann die sogenannten reduzierten Kosten und tragen alle Ergebnisse gemäß Legende in das Lösungsschema in Abbildung 1 ein.

b) Welche Knoten können aufgrund der bisherigen Berechnungen zugeordnet werden? Führen Sie den nächsten Schritt der Ungarischen Methode (Algorithmus 9.1) durch. Notieren Sie die Markierungen an den jeweiligen Knoten und geben Sie an, ob ein Breakthrough oder Nonbreakthrough vorliegt.

Abbildung 1: Lösungsschema



Legende:



Lösungshinweise

a) Die Berechnung der Knotenpotentiale u_i bzw. u_j erfolgt gemäß Schritt 1 des Algorithmus. Dazu bestimmt man für jeden Knoten $i = 1, \ldots, 3$ die minimalen Kosten aller ausgehenden Pfeile.

$$u_i := \min_{j \in S(i)} \{c_{ij}\}$$

Die Werte stehen in den Knoten 1 bis 3 in Abbildung 2. Nun werden diese Knotenpotentiale von den Kosten der ausgehenden Pfeile subtrahiert.

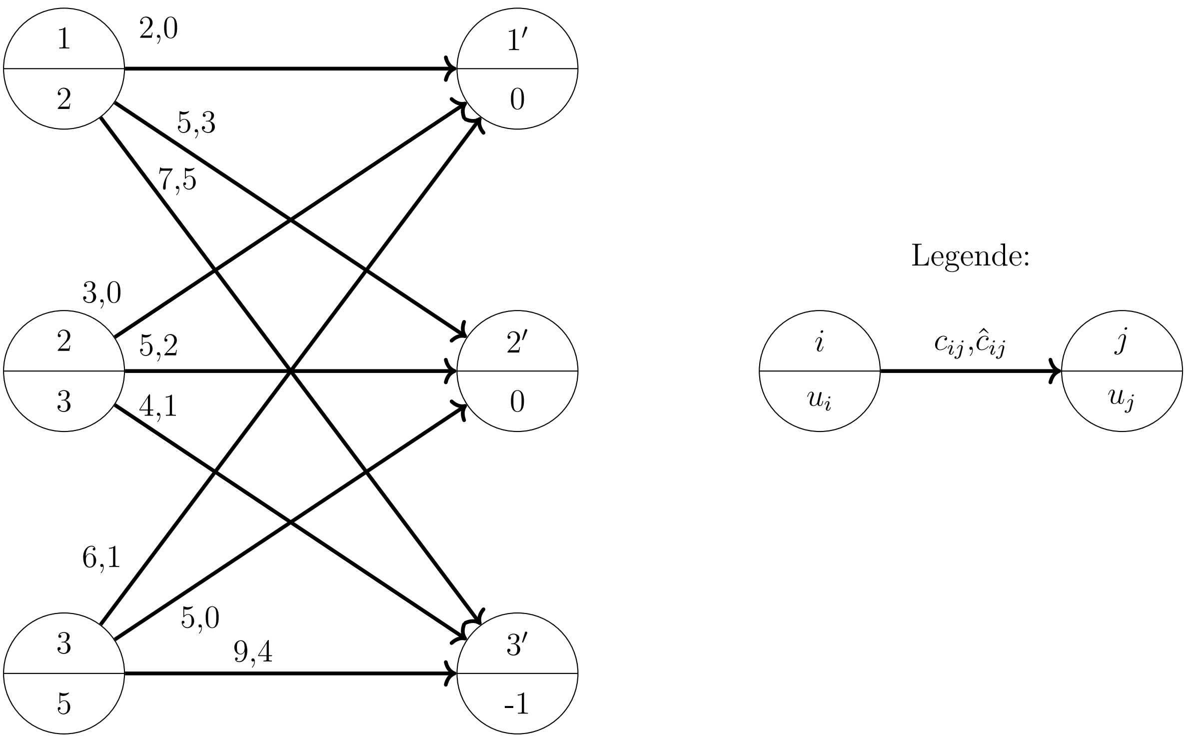
$$\hat{c}_{ij} := c_{ij} - u_i \qquad \text{für alle } \langle i, j \rangle \in E$$

Anschließend lassen sich auch für die Knoten $j = 1', \ldots, 3'$ über alle einmündenden Pfeile die minimalen Restkosten berechnen.

$$u_j := -\left[\min_{i \in P(j)} \{\hat{c}_{ij}\}\right]$$

Das Ergebnis ist in Abbildung 2 in den entsprechenden Knoten notiert.

Abbildung 2: Ergebnisse aus Schritt 1 in Algorithmus 9.1



Es fehlt noch die Bestimmung der reduzierten Kosten $\bar{c}_{ij}$.

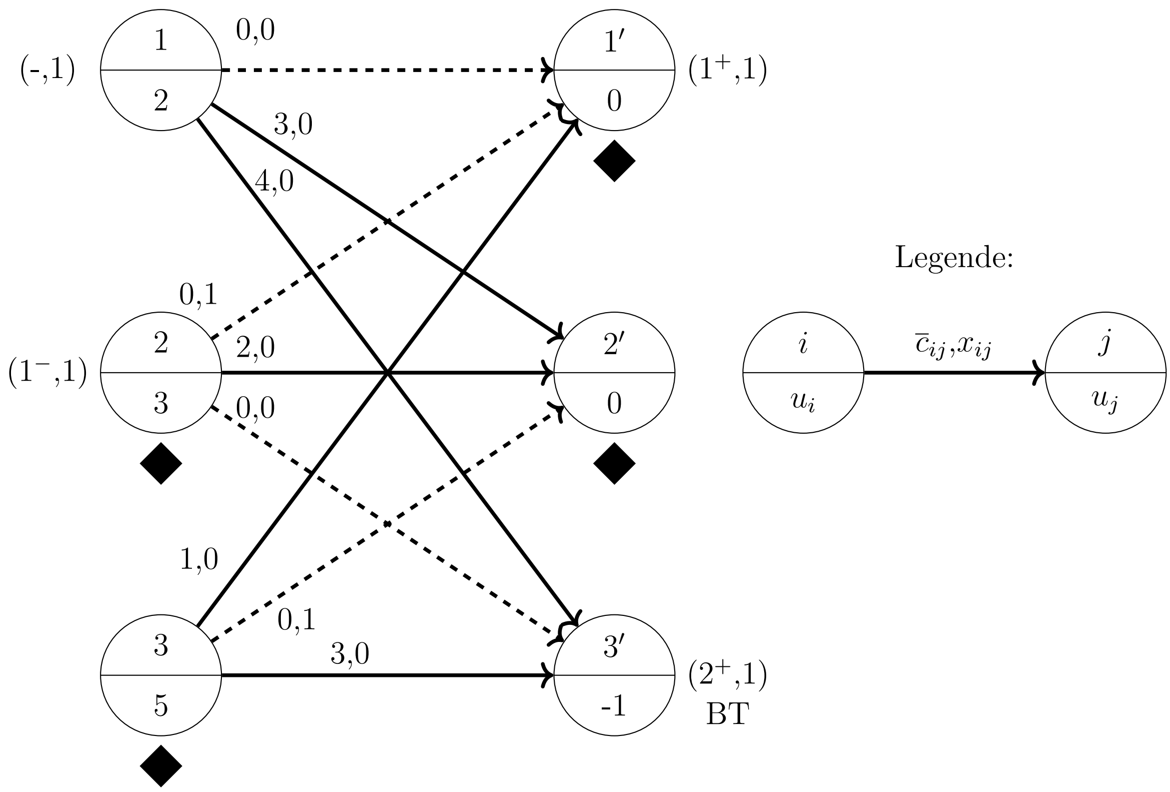
$$\bar{c}_{ij} := \hat{c}_{ij} + u_j$$

Die Werte stehen in Abbildung 3 an den Pfeilen.

b) Außerdem sind in dem Netzwerk alle Pfeile mit $\bar{c}_{ij} = 0$ gestrichelt gezeichnet. Nur auf diesen Pfeilen darf im optimalen Fall $x_{ij} = 1$ sein. Es wurden bereits die Zuordnungen $\langle 2, 1' \rangle$ und $\langle 3, 2' \rangle$ vorgenommen: die entsprechenden Knoten sind mit Rauten markiert, und es ist $x_{21} = x_{32} = 1$.

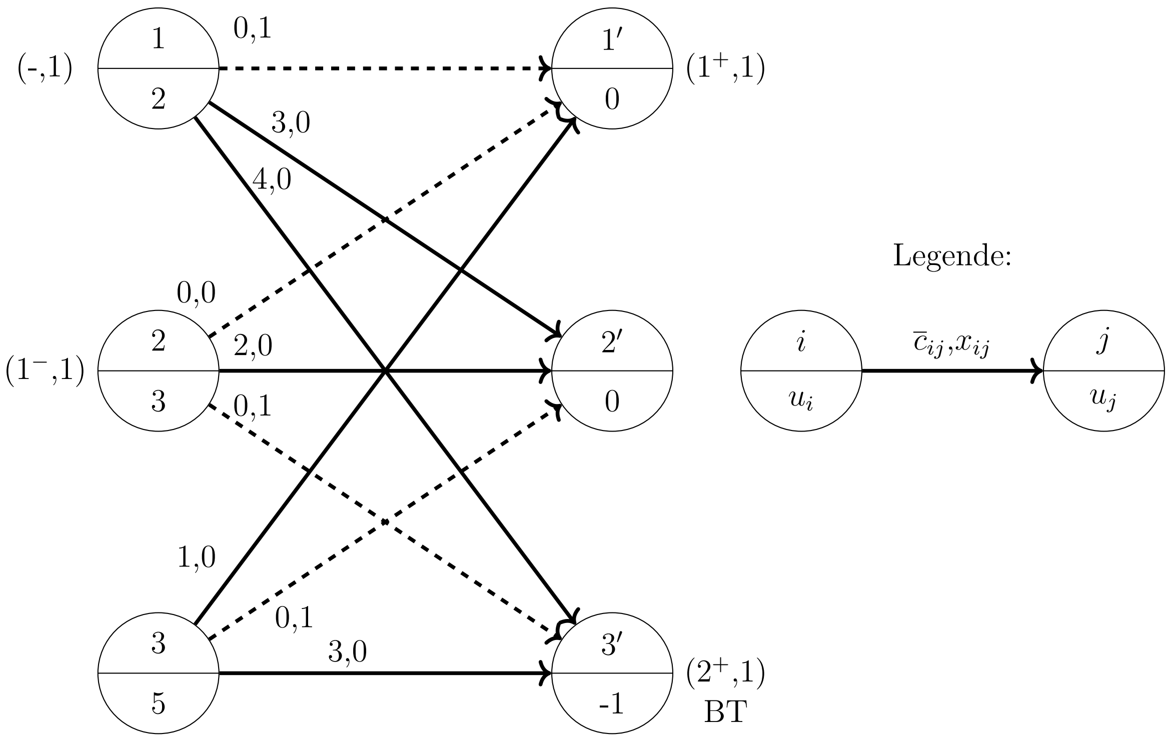
Es beginnt Schritt 2, und der Knoten 1 als ein freier Knoten wird mit $(-, 1)$ markiert. Von dort wird flusserhöhend der Knoten $1'$ mit $(1^+, 1)$ markiert; beachte, es ist $\bar{c}_{11} = 0$. Mit einer Flussrücknahme kann der Knoten 2 mit $(1^-, 1)$ markiert werden. Von da aus kommt es zu einem Breakthrough (BT) in Knoten $3'$ (Markierung $(2^+, 1)$).

Abbildung 3: Ergebnis des Markierungsprozesses in Schritt 2



Der Fluss kann auf Basis der gefundenen Markierung geändert werden; statt $\langle 2, 1' \rangle$ gibt es nun die Zuordnungen $\langle 1, 1' \rangle$ und $\langle 2, 3' \rangle$. Der Gesamtfluss hat die Stärke 3 erreicht, und die Lösung ist somit optimal. In Abbildung 4 sind die entsprechenden Änderungen eingetragen; die Marken sind gelöscht.

Abbildung 4: Ergebnis der Flussänderung in Schritt 2



Es folgt abschließend Schritt 4 des Algorithmus. Die optimale Zuordnung ergibt sich auf den Pfeilen $\langle 1, 1' \rangle$, $\langle 2, 3' \rangle$, $\langle 3, 2' \rangle$ mit dem Fluss $x_{ij} = 1$. Der Wert der primalen Zielfunktion ist $z_{min} = 11$; mit der dualen Zielfunktion ergibt sich $w_{max} = 10 - (-1) = 11$. Im Optimum gilt $z_{min} = w_{max}$.