

---

**Aufgabe 2-9-1**

---

Das Schwimmteam der FernUniversität Hagen bereitet sich auf die alljährlich stattfindenden nationalen Hochschulmeisterschaften vor. In der Gruppe der Frauen haben sich fünf Schwimmerinnen auf die 200 Meter Distanzen in den Disziplinen »Freistil«, »Brust«, »Rücken« und »Schmetterling« spezialisiert. Aus dem Training der letzten 3 Monate wurden folgende mittlere Zeiten ermittelt.

Tabelle 1: Schwimmzeiten je Schwimmerin und Disziplin

| Name          | Annika  | Bella   | Christine | Daniela | Erica   |
|---------------|---------|---------|-----------|---------|---------|
| Freistil      | 1:58.42 | 1:58.14 | 1:58.46   | 1:58.35 | 1:58.61 |
| Brust         | 2:28.84 | 2:28.41 | 2:28.72   | 2:28.57 | 2:28.68 |
| Rücken        | 2:12.42 | 2:12.34 | 2:12.43   | 2:12.75 | 2:12.59 |
| Schmetterling | 2:13.15 | 2:12.67 | 2:13.71   | 2:12.86 | 2:13.18 |

Da eine Schwimmerin jeweils nur in einem Wettkampf starten darf, möchte der Trainer die beste Zuordnung vornehmen, d.h. die Summe der zugehörigen Zeiten minimieren.

Helfen Sie dem Trainer, und lösen Sie das obige Problem mit Hilfe der Ungarischen Methode in Tableauform. Notieren Sie das Ergebnis der Zwischenschritte des Algorithmus insbesondere nach Schritt 2 sowie nach den Schritten 4 und 5. Führen Sie mindestens zweimal eine Korrektur der Menge unabhängiger Nullen durch.

*Hinweis: Zur vollständigen Lösung der Aufgabe sind mehrere Iterationen des Algorithmus erforderlich. Damit kann also gut die Anwendung der Ungarischen Methode eingeübt werden. In der nachfolgenden Musterlösung sind alle Lösungsschritte dargestellt; diese Ausführlichkeit wird in Klausuren auf keinen Fall verlangt werden.*

---

## Lösungshinweise

Da in dieser Aufgabe die 5 Schwimmerinnen 4 Wettkämpfen zuzuordnen sind, ergänzt man die Tabelle zunächst um die Disziplin »Tribüne«. Danach werden alle Zeiten auf 100stel Sekunden transformiert, wobei die Minuten vernachlässigt werden, da diese Werte in einer Zeile jeweils gleich sind. Für die Tribüne erhalten alle Sportlerinnen die Zeit »60 Sekunden«; das Ergebnis der Erweiterung und der Umrechnung steht in [Tabelle 2](#).

Tabelle 2: Zeiten in 100stel Sekunden je Schwimmerin und Disziplin

| Name<br>Stilart | Annika | Bella | Christine | Daniela | Erica |
|-----------------|--------|-------|-----------|---------|-------|
| Freistil        | 5842   | 5814  | 5846      | 5835    | 5861  |
| Brust           | 2884   | 2841  | 2872      | 2857    | 2868  |
| Rücken          | 1242   | 1234  | 1243      | 1275    | 1259  |
| Schmetterling   | 1315   | 1267  | 1371      | 1286    | 1318  |
| Tribüne         | 6000   | 6000  | 6000      | 6000    | 6000  |

Für die so ermittelte Ausgangsmatrix werden die jeweiligen Zeilenminima bestimmt und anschließend die Werte der Matrix zeilenweise um das jeweilige Zeilenminimum reduziert.

Bei der Bestimmung der Spaltenminima ist im vorliegenden Fall überall der Wert Null einzutragen. Eine weitere Reduktion ist somit nicht erforderlich, und die sogenannte reduzierte Matrix ist bestimmt, Schritt 1 des Algorithmus also abgeschlossen.

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
 5842 & 5814 & 5846 & 5835 & 5861 & 5814 & 28 & 0 & 32 & 21 & 47 \\
 2884 & 2841 & 2872 & 2857 & 2868 & 2841 & 43 & 0 & 31 & 16 & 27 \\
 1242 & 1234 & 1243 & 1275 & 1259 & 1234 & 8 & 0 & 9 & 41 & 25 \\
 1315 & 1267 & 1371 & 1286 & 1318 & 1267 & 48 & 0 & 104 & 19 & 51 \\
 6000 & 6000 & 6000 & 6000 & 6000 & 6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \hline
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 28 & 0 & 32 & 21 & 47 \\ 43 & 0 & 31 & 16 & 27 \\ 8 & 0 & 9 & 41 & 25 \\ 48 & 0 & 104 & 19 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2 der Ungarischen Methode liefert außer den in [Tabelle 3](#) angegebenen Werten der Matrix  $\bar{C}$  sowie den Knotenpotentialen  $u_i$  und  $u_j$  eine Menge unabhängiger Nullen, deren Elemente mit »▷« markiert sind.

Tabelle 3: Schritt 2, Schritt 3 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |          |          |          | $u_i$ | Marken     |
|--------|--------------------|--------------------|----------|----------|----------|-------|------------|
|        | AN<br>1'           | BE<br>2'           | CH<br>3' | DA<br>4' | ER<br>5' |       |            |
| FR 1   | 28                 | $\triangleright 0$ | 32       | 21       | 47       | 5814  | (2')       |
| BR 2   | 43                 | 0                  | 31       | 16       | 27       | 2841  | (-)        |
| RÜ 3   | 8                  | 0                  | 9        | 41       | 25       | 1234  | (-)        |
| SCH 4  | 48                 | 0                  | 104      | 19       | 51       | 1267  | (-)        |
| TR 5   | $\triangleright 0$ | 0                  | 0        | 0        | 0        | 6000  |            |
| $u_j$  | 0                  | 0                  | 0        | 0        | 0        |       |            |
| Marken |                    | (2)                |          |          |          |       | $\eta = 8$ |

Die Zeilen 2, 3 und 4 enthalten keine unabhängige Null und werden mit (-) markiert. Eine Überprüfung der Zeile 2 führt zur Markierung der Spalte 2' mit (2), eine weitere Markierung gemäß des Zeilenkriteriums ist nicht möglich (Teilschritt M1). Damit geht man über zur Untersuchung der markierten aber noch nicht geprüften Spalten (Teilschritt M2). In Spalte 2' befindet sich eine unabhängige Null in Zeile 1; Zeile 1 wird deshalb mit (2') markiert. Diese Zeile enthält keine weitere Null, und damit kann der Markierungsprozess nicht fortgesetzt werden. Es folgt die Korrektur der Dualvariablen sowie der Matrix  $\bar{C}$ , dessen Ergebnis in der [Tabelle 4](#) festgehalten ist.

Tabelle 4: Schritt 5 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |          |          |          | $u_i$ | Marken |
|--------|--------------------|--------------------|----------|----------|----------|-------|--------|
|        | AN<br>1'           | BE<br>2'           | CH<br>3' | DA<br>4' | ER<br>5' |       |        |
| FR 1   | 20                 | $\triangleright 0$ | 24       | 13       | 39       | 5822  |        |
| BR 2   | 35                 | 0                  | 23       | 8        | 19       | 2849  |        |
| RÜ 3   | 0                  | 0                  | 1        | 33       | 17       | 1242  |        |
| SCH 4  | 40                 | 0                  | 96       | 11       | 43       | 1275  |        |
| TR 5   | $\triangleright 0$ | 8                  | 0        | 0        | 0        | 6000  |        |
| $u_j$  | 0                  | 8                  | 0        | 0        | 0        |       |        |
| Marken |                    |                    |          |          |          |       |        |

Alle Marken wurden gelöscht und der Markierungsprozess beginnt von vorn.

Es kommt zum Durchbruch in Spalte 3'; die alternierende Kette enthält die Elemente  $(\bar{c}_{53}, \bar{c}_{51}, \bar{c}_{31})$  (siehe [Tabelle 5](#)).

Tabelle 5: Schritt 3, Schritt 4 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |             |          |          | $u_i$ | Marken |
|--------|--------------------|--------------------|-------------|----------|----------|-------|--------|
|        | AN<br>1'           | BE<br>2'           | CH<br>3'    | DA<br>4' | ER<br>5' |       |        |
| FR 1   | 20                 | $\triangleright 0$ | 24          | 13       | 39       | 5822  | (2')   |
| BR 2   | 35                 | 0                  | 23          | 8        | 19       | 2849  | (-)    |
| RÜ 3   | $\bullet 0$        | 0                  | 1           | 33       | 17       | 1242  | (-)    |
| SCH 4  | 40                 | 0                  | 96          | 11       | 43       | 1275  | (-)    |
| TR 5   | $\triangleright 0$ | 8                  | $\bullet 0$ | 0        | 0        | 6000  | (1')   |
| $u_j$  | 0                  | 8                  | 0           | 0        | 0        |       |        |
| Marken | (3)                | (2)                | (5)         |          |          |       |        |

Mit der veränderten Menge  $UN$  beginnt der Markierungsprozess erneut, und man erhält das in [Tabelle 6](#) dargestellte Ergebnis.

Tabelle 6: Schritt 3 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |                    |          |          | $u_i$ | Marken     |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|----------|-------|------------|
|        | AN<br>1'           | BE<br>2'           | CH<br>3'           | DA<br>4' | ER<br>5' |       |            |
| FR 1   | 20                 | $\triangleright 0$ | 24                 | 13       | 39       | 5822  | (2')       |
| BR 2   | 35                 | 0                  | 23                 | 8        | 19       | 2849  | (-)        |
| RÜ 3   | $\triangleright 0$ | 0                  | 1                  | 33       | 17       | 1242  |            |
| SCH 4  | 40                 | 0                  | 96                 | 11       | 43       | 1275  | (-)        |
| TR 5   | 0                  | 8                  | $\triangleright 0$ | 0        | 0        | 6000  |            |
| $u_j$  | 0                  | 8                  | 0                  | 0        | 0        |       |            |
| Marken |                    | (2)                |                    |          |          |       | $\eta = 8$ |

Da keine weitere Markierung möglich ist, sind entsprechend wieder die Potentiale sowie die Matrix  $\bar{C}$  zu korrigieren. Das Ergebnis sehen Sie in [Tabelle 7](#).

Tabelle 7: Schritt 5 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |                    |          |          | $u_i$ | Marken |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|----------|-------|--------|
|        | AN<br>1'           | BE<br>2'           | CH<br>3'           | DA<br>4' | ER<br>5' |       |        |
| FR 1   | 12                 | $\triangleright 0$ | 16                 | 5        | 31       | 5830  |        |
| BR 2   | 27                 | 0                  | 15                 | 0        | 11       | 2857  |        |
| RÜ 3   | $\triangleright 0$ | 8                  | 1                  | 33       | 17       | 1242  |        |
| SCH 4  | 32                 | 0                  | 88                 | 3        | 35       | 1283  |        |
| TR 5   | 0                  | 16                 | $\triangleright 0$ | 0        | 0        | 6000  |        |
| $u_j$  | 0                  | 16                 | 0                  | 0        | 0        |       |        |
| Marken |                    |                    |                    |          |          |       |        |

Alle Marken werden gelöscht, und es wird erneut mit der Markierung begonnen. Die Markierungen sind in [Tabelle 8](#) eingetragen.

Tabelle 8: Schritt 3, Schritt 4 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |                    |          |          | $u_i$ | Marken |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|----------|-------|--------|
|        | AN<br>1'           | BE<br>2'           | CH<br>3'           | DA<br>4' | ER<br>5' |       |        |
| FR 1   | 12                 | $\triangleright 0$ | 16                 | 5        | 31       | 5830  | (2')   |
| BR 2   | 27                 | 0                  | 15                 | • 0      | 11       | 2857  | (-)    |
| RÜ 3   | $\triangleright 0$ | 8                  | 1                  | 33       | 17       | 1242  |        |
| SCH 4  | 32                 | 0                  | 88                 | 3        | 35       | 1283  | (-)    |
| TR 5   | 0                  | 16                 | $\triangleright 0$ | 0        | 0        | 6000  |        |
| $u_j$  | 0                  | 16                 | 0                  | 0        | 0        |       |        |
| Marken |                    | (2)                |                    | (2)      |          |       |        |

Der Durchbruch gelingt in Spalte 4'; die alternierende Kette enthält nur das Element  $(\bar{c}_{24})$ , und diese Null kann somit zu  $UN$  hinzu genommen werden. Der nächste Markierungsprozess kann begonnen werden; das Ergebnis zeigt [Tabelle 9](#).

Tabelle 9: Schritt 3, Schritt 4 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |                    |                    |    | $u_i$ | Marken     |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----|-------|------------|
|        | AN                 | BE                 | CH                 | DA                 | ER |       |            |
|        | 1'                 | 2'                 | 3'                 | 4'                 | 5' |       |            |
| FR 1   | 12                 | $\triangleright 0$ | 16                 | 5                  | 31 | 5830  | (2')       |
| BR 2   | 27                 | 0                  | 15                 | $\triangleright 0$ | 11 | 2857  |            |
| RÜ 3   | $\triangleright 0$ | 8                  | 1                  | 33                 | 17 | 1242  |            |
| SCH 4  | 32                 | 0                  | 88                 | 3                  | 35 | 1283  | (-)        |
| TR 5   | 0                  | 16                 | $\triangleright 0$ | 0                  | 0  | 6000  |            |
| $u_j$  | 0                  | 16                 | 0                  | 0                  | 0  |       |            |
| Marken |                    | (4)                |                    |                    |    |       | $\eta = 3$ |

Es kann kein Durchbruch erreicht werden; auf Basis der vorgenommenen Markierungen werden Potentiale sowie die Matrix  $\bar{C}$  verändert. Danach werden die Markierungen gelöscht und ein neuer Durchgang beginnt; er ist in [Tabelle 10](#) dokumentiert.

Tabelle 10: Schritt 5, Schritt 3 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |                    |                    |    | $u_i$ | Marken     |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----|-------|------------|
|        | AN                 | BE                 | CH                 | DA                 | ER |       |            |
|        | 1'                 | 2'                 | 3'                 | 4'                 | 5' |       |            |
| FR 1   | 9                  | $\triangleright 0$ | 13                 | 2                  | 28 | 5833  | (2')       |
| BR 2   | 27                 | 3                  | 15                 | $\triangleright 0$ | 11 | 2857  | (4')       |
| RÜ 3   | $\triangleright 0$ | 11                 | 1                  | 33                 | 17 | 1242  |            |
| SCH 4  | 29                 | 0                  | 85                 | 0                  | 32 | 1286  | (-)        |
| TR 5   | 0                  | 19                 | $\triangleright 0$ | 0                  | 0  | 6000  |            |
| $u_j$  | 0                  | 19                 | 0                  | 0                  | 0  |       |            |
| Marken |                    | (4)                |                    | (4)                |    |       | $\eta = 9$ |

Auch die veränderte Matrix  $\bar{C}$  enthält keine alternierende Kette abhängiger und unabhängiger Nullen. Es muss eine erneute Korrektur der Potentiale sowie die Matrix  $\bar{C}$  vorgenommen werden, um danach wieder mit der Markierung zu beginnen. Sehen Sie hierzu [Tabelle 11](#).

Tabelle 11: Schritt 5, Schritt 3 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |                    |                    |          | $u_i$ | Marken     |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|-------|------------|
|        | AN<br>1'           | BE<br>2'           | CH<br>3'           | DA<br>4'           | ER<br>5' |       |            |
| FR 1   | 0                  | $\triangleright 0$ | 4                  | 2                  | 19       | 5842  | (2')       |
| BR 2   | 18                 | 3                  | 6                  | $\triangleright 0$ | 2        | 2866  | (4')       |
| RÜ 3   | $\triangleright 0$ | 20                 | 1                  | 42                 | 17       | 1242  | (1')       |
| SCH 4  | 20                 | 0                  | 76                 | 0                  | 23       | 1295  | (-)        |
| TR 5   | 0                  | 28                 | $\triangleright 0$ | 9                  | 0        | 6000  |            |
| $u_j$  | 0                  | 28                 | 0                  | 9                  | 0        |       |            |
| Marken | (1)                | (4)                |                    | (4)                |          |       | $\eta = 1$ |

Es kann kein Durchbruch erreicht werden; auf Basis der vorgenommenen Markierungen werden Potentiale sowie die Matrix  $\bar{C}$  verändert. Danach werden die Markierungen gelöscht und ein neuer Durchgang beginnt (siehe [Tabelle 12](#)).

Tabelle 12: Schritt 5, Schritt 3, Schritt 4 des Algorithmus 9.2

| Stil   | Name               |                    |                    |                    |             | $u_i$ | Marken |
|--------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|-------|--------|
|        | AN<br>1'           | BE<br>2'           | CH<br>3'           | DA<br>4'           | ER<br>5'    |       |        |
| FR 1   | $\bullet 0$        | $\triangleright 0$ | 3                  | 2                  | 18          | 5843  | (2')   |
| BR 2   | 18                 | 3                  | 5                  | $\triangleright 0$ | 1           | 2867  | (4')   |
| RÜ 3   | $\triangleright 0$ | 20                 | $\bullet 0$        | 42                 | 16          | 1243  | (1')   |
| SCH 4  | 20                 | $\bullet 0$        | 75                 | 0                  | 22          | 1296  | (-)    |
| TR 5   | 1                  | 29                 | $\triangleright 0$ | 10                 | $\bullet 0$ | 6000  |        |
| $u_j$  | 1                  | 29                 | 0                  | 10                 | 0           |       |        |
| Marken | (1)                | (4)                | (3)                | (4)                | (5)         |       |        |

Der Durchbruch gelingt in Spalte 5'; die alternierende Kette enthält die Elemente  $(\bar{c}_{55}, \bar{c}_{53}, \bar{c}_{33}, \bar{c}_{31}, \bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \bar{c}_{42})$  und die Menge  $UN$  enthält nun die erforderliche Anzahl von 5 unabhängigen Nullen.

Tabelle 13: Optimale Zuordnung von Schwimmerinnen zu Wettkämpfen

| Stil  | Name               |                    |                    |                    |                    |
|-------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|       | AN                 | BE                 | CH                 | DA                 | ER                 |
|       | 1'                 | 2'                 | 3'                 | 4'                 | 5'                 |
| FR 1  | $\triangleright 0$ | 0                  | 3                  | 2                  | 18                 |
| BR 2  | 18                 | 3                  | 5                  | $\triangleright 0$ | 1                  |
| RÜ 3  | 0                  | 20                 | $\triangleright 0$ | 42                 | 16                 |
| SCH 4 | 20                 | $\triangleright 0$ | 75                 | 0                  | 22                 |
| TR 5  | 1                  | 29                 | 0                  | 10                 | $\triangleright 0$ |

Der Zielfunktionswert  $z_{\min}$  der Lösung wird durch die durch die Menge der unabhängigen Nullen ( $UN$ ) bestimmt und berechnet sich zu  $z_{\min} = c_{11} + c_{24} + c_{33} + c_{42} + c_{55}$ . Mit den Werten aus [Tabelle 2](#) ergibt sich:  $5842 + 2857 + 1243 + 1267 + 6000 = 17209$ . Für in Einheit 2 des Moduls dargestellte sogenannte duale Lösung werden die Potentiale, also die Werte der Dualvariablen benötigt.  $w_{\max} = (u_1 - u_{1'}) + (u_2 - u_{4'}) + (u_3 - u_{3'}) + (u_4 - u_{2'}) + (u_5 - u_{5'}) = (5843 - 1) + (2867 - 10) + (1243 - 0) + (1296 - 29) + (6000 - 0) = 17209$ . Die Werte der primalen und der dualen Lösung stimmen überein.

Die ausgewählten Trainingsbestzeiten lauten somit:

|                  |           |             |
|------------------|-----------|-------------|
| Freistil:        | Annika    | mit 1:58.42 |
| Brustschwimmen:  | Daniela   | mit 2:28.57 |
| Rückenschwimmen: | Christine | mit 2:12.43 |
| Schmetterling:   | Bella     | mit 2:12.67 |

Erica schaut von der Tribüne aus den Wettkämpfen zu.