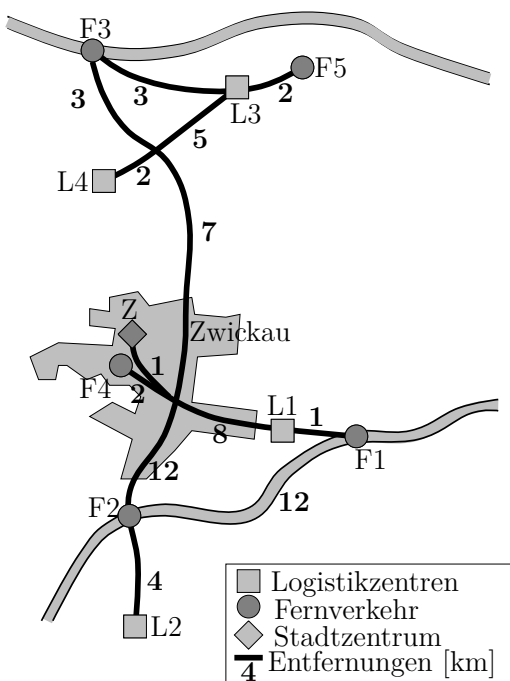


Aufgabe 2-8-2

Der Güterverkehr in der Stadt Zwickau soll durch die Einrichtung von Logistikzentren optimiert werden. Ziel ist es, eine Reduzierung des Wirtschaftsverkehrs in der Innenstadt durch eine bessere Auslastung der Fahrzeuge zu erreichen.

Betrachtet wird folgende (vereinfachte) Ausgangssituation: Die zu beliefernenden Kunden (Einzelhändler, Handelszentren, Industrie- und Gewerbebetriebe) sind innerhalb des Stadtgebietes angesiedelt, und ihre Standorte werden formal durch eine geographische Position repräsentiert. Die Lieferungen ins Stadtzentrum Z erfolgen per Bahn oder LKW über Bahnhöfe oder Autobahnanschlussstellen, hier die ausgezeichneten Punkte F1 bis F5. Die Belieferung erfolgt nicht direkt, sondern die Waren müssen in Logistikzentren (mögliche Standorte L1 bis L4) umgeladen werden. Dabei geht man davon aus, dass die Angebotsmengen als Prozentsatz von der Gesamtnachfrage der Stadt (100%) gegeben sind. Das Verkehrsaufkommen wird gemessen an den insgesamt für den Transport zurückgelegten Kilometer.



Der Kartenausschnitt in [Abbildung 1](#) zeigt die Situation für die Stadt Zwickau mit zwei Bahnhöfen, drei Autobahnanschlussstellen und vier möglichen Standorten für Logistikzentren. Gegeben sind folgende Angebots- / Nachfragemengen in Prozent:

F1	Abzweig Zwickau Ost	15%
F2	Abzweig Zwickau West	25%
F3	Abzweig Meerane	50%
F4	Bahnhof Zwickau West	5%
F5	Bahnhof Glauchau	5%
Z	Stadtzentrum	100%

Abbildung 1: Kartenausschnitt des Transportnetzes um Zwickau

- a) In welche Klasse ist das beschriebene Problem einzuordnen? Zeichnen Sie einen Graphen, der die spezielle Situation der Stadt Zwickau repräsentiert. Entnehmen Sie bitte alle notwendigen Angaben dem Kartenausschnitt in [Abbildung 1](#), insbesondere mögliche Kantenbewertungen. Bei der Modellierung sind Kapazitätsbeschränkungen, wenn auch hier nicht explizit vorgegeben, prinzipiell zu berücksichtigen.

**Hinweis:** Da das Ziel in der Verkehrsentslastung der Stadt Zwickau besteht, können Touren, die eine Durchquerung der Stadt beinhalten, von vorneherein vernachlässigt werden.

- b) Stellen Sie ein lineares Optimierungsmodell auf, mit dem die Stadt Zwickau explizit den Transport zu ihren Logistikzentren und von dort ins Stadtgebiet lösen kann. Kapazitätsbeschränkungen sind dabei nicht zu berücksichtigen. Fügen Sie zusätzliche Variable und Restriktionen ein, die garantieren, dass nicht mehr als drei Standorte für Logistikzentren in der optimalen Lösung enthalten sind.
-

Lösungshinweise

a) Das beschriebene Problem gehört zur Kategorie »Umladeprobleme« und wird durch die Graphen in [Abbildung 2](#) repräsentiert.

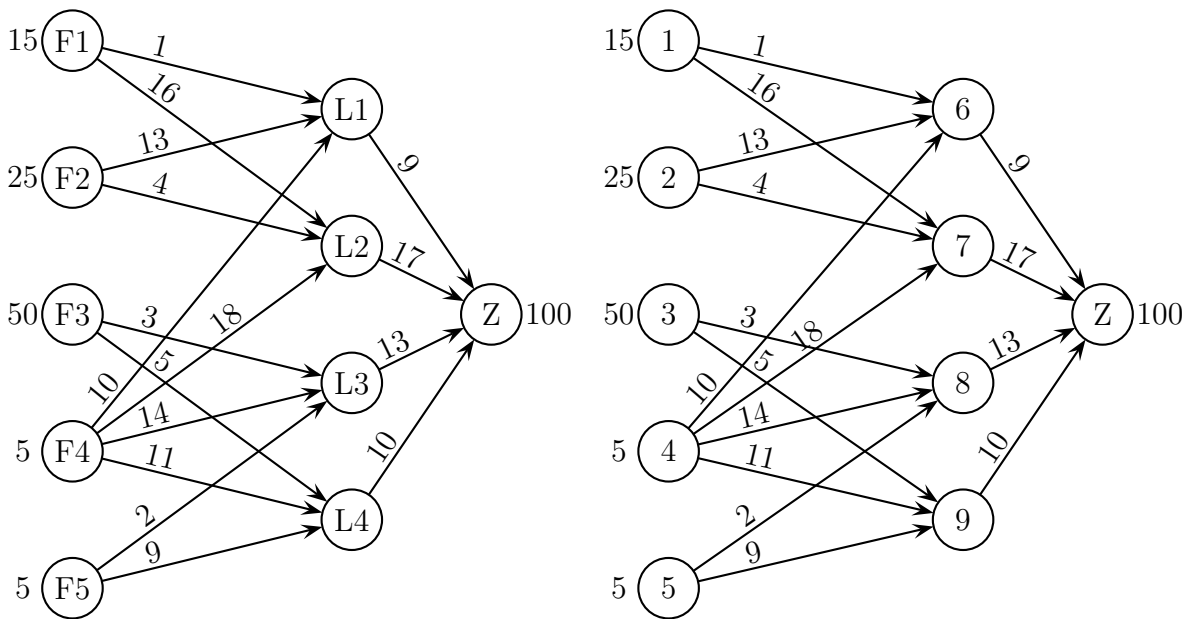
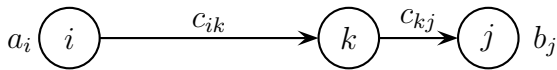


Abbildung 2: Graphen des Transportnetzes um Zwickau

Weiterführende Erläuterungen:

Sind untere und obere Kapazitätsgrenzen ( $\lambda_{ij}$  und  $\kappa_{ij}$ ) gegeben, so sind diese entsprechend an den Pfeilen zu ergänzen. Wird das Transportnetzwerk zu einem Flussnetzwerk erweitert, kommt ein Knoten  $r$  als Quelle hinzu. Dieser ist mit allen Angebotsknoten (F1 bis F5 bzw. 1 bis 5) zu verbinden. Die entsprechenden Kapazitätsbeschränkungen ergeben sich aus den jeweiligen Angebotsmengen (siehe auch Unterkapitel 8.2 in Einheit 2 des Moduls 31801).

$$\text{b) } \min z = x_{1,6} + 16x_{1,7} + 13x_{2,6} + 4x_{2,7} + 3x_{3,8} + 5x_{3,9} + 10x_{4,6} + 18x_{4,7} + 14x_{4,8} + 11x_{4,9} + 2x_{5,8} + 9x_{5,9} + 9x_{6,10} + 17x_{7,10} + 13x_{8,10} + 10x_{9,10}$$

u. d. N.:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_{1,6} & +x_{1,7} & & & & & \leq 15 \\ x_{2,6} & +x_{2,7} & & & & & \leq 25 \\ x_{3,8} & +x_{3,9} & & & & & \leq 50 \\ x_{4,6} & +x_{4,7} & +x_{4,8} & +x_{4,9} & & & \leq 5 \\ x_{5,8} & +x_{5,9} & & & & & \leq 5 \\ x_{6,10} & +x_{7,10} & +x_{8,10} & +x_{9,10} & & & = 100 \\ x_{1,6} & +x_{2,6} & +x_{4,6} & -x_{6,10} & & & = 0 \\ x_{1,7} & +x_{2,7} & +x_{4,7} & -x_{7,10} & & & = 0 \\ x_{3,8} & +x_{4,8} & +x_{5,8} & -x_{8,10} & & & = 0 \\ x_{3,9} & +x_{4,9} & +x_{5,9} & -x_{9,10} & & & = 0 \\ \text{für alle } \langle i,j \rangle \in E & & & & x_{ij} & \geq 0 \end{array}$$

Die geforderte Einschränkung auf maximal drei Standorte kann durch Verwendung binärer Variabler  $y_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) erreicht werden.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Standort } L_i \text{ wird eingerichtet} \\ 0 & \text{Standort } L_i \text{ wird nicht eingerichtet} \end{cases}$$

Die Einhaltung der Forderung nach einer Maximalzahl von Logistikzentren wird dann durch folgende Restriktionen garantiert:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_{6,10} & \leq & 100y_1 & & & & \\ x_{7,10} & \leq & 100y_2 & & & & \\ x_{8,10} & \leq & 100y_3 & & & & \\ x_{9,10} & \leq & 100y_4 & & & & \\ y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & \leq & 3 & \end{array}$$