Aufgabe 2-7-8

Fünf Sportlern (abgekürzt mit S_1 bis S_5) stehen für einen Nachmittag fünf verschiedene Sportgeräte (abgekürzt mit G_1 bis G_5) zur Verfügung, die jeweils nur von einer Person genutzt werden können. Alle Sportler sollen den gesamten Nachmittag mit jeweils einem Geräte trainieren. Zu optimieren ist die Gesamtfitness aller fünf Sportler.

Welchen Grad an Fitness ein Sportler i beim Training mit Gerät j an einem Nachmittag erreichen kann, steht in Tabelle 1. (Negative Werte bedeuten eine Fitnessverringerung.)

Tabelle 1: Erreichbarer Fitnessgrad von Sportler S_i auf Gerät G_j

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
S_1	78	-16	19	25	83
S_2	99	98	87	16	92
S_3	86	19	39	88	17
S_4	-20	99	88	79	65
S_5	67	98	90	48	60

a) Bestimmen Sie mit Vogels-Approximations-Methode eine zulässige Zuordnung von Sportlern zu Geräten. Überlegen Sie zunächst, wie für diese Aufgabe die entsprechenden Werte a_i und b_j zu wählen sind.

b) Ist eine mit der Vogel-Methode gefundene Lösung in jedem Fall optimal?

c) Was können Sie über die Struktur von Lösungen aussagen, die von Transportalgorithmen erzeugt und die gegebenenfalls mit der Stepping-Stone-Methode optimiert werden. Welche Besonderheiten treten bei der Verwendung dieser Algorithmen für Zuordnungsprobleme auf?

Lösungshinweise

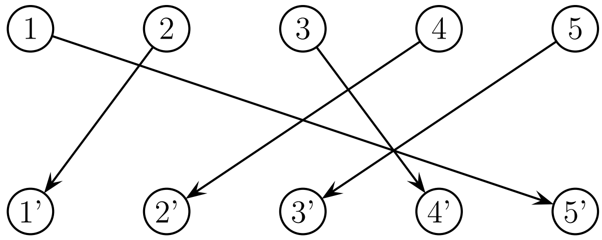
a) In dem in Tabelle 2 angegebenen Tableau können Sie die einzelnen Schritte der Vogel-Approximation nachvollziehen. Als x_{ij} ist für die realisierten Verbindungen jeweils eine 1 eingetragen. In der Spalte a_i wie auch in der Zeile b_j sind jeweils Einsen notiert, da jeder Sportler bzw. jedes Gerät nur einmal zugeordnet werden kann. Die Spalte/Zeile mit Bezeichnung o gibt Auskunft über die Reihenfolge der Zeilen- bzw. Spaltenstreichungen. In den Spalten und Zeilen Δc wurden die jeweils nach Streichung korrigierten Differenzen der Kostenwerte notiert. Die in einer Iteration ausgewählten maximalen Differenzen sind fett gedruckt.

Tabelle 2: Lösung mit Vogels-Approximations-Methode

$i \backslash j$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	a_i	Δc			o
S_1	$\boxed{78}$	$\boxed{-16}$	$\boxed{19}$	$\boxed{25}$	$\boxed{83}$ 1 ②	~~1~~	5			**2.**
S_2	$\boxed{99}$ 1 ①	$\boxed{98}$	$\boxed{87}$	$\boxed{16}$	$\boxed{92}$	~~1~~	1			**1.**
S_3	$\boxed{86}$ 0 ③	$\boxed{19}$	$\boxed{39}$	$\boxed{88}$ 1 ④	$\boxed{17}$	~~1~~	2	**49**		**4.**
S_4	$\boxed{-20}$	$\boxed{99}$ 1 ⑥	$\boxed{88}$	$\boxed{79}$ 0 ⑤	$\boxed{65}$	~~1~~	11	11	**11**	**6.**
S_5	$\boxed{67}$	$\boxed{98}$ 0 ⑦	$\boxed{90}$ 1 ⑦	$\boxed{48}$	$\boxed{60}$ 0 ⑦	1	8	8	8	
b_j	~~1~~ ~~0~~	~~1~~ 0	1	~~1~~ ~~0~~	~~1~~ 0					
Δc	**13**	1	2	9	9					
	8	1	2	9	**18**					
	19	1	2	9	5					
		1	2	**31**	5					
o	**3.**			**5.**						

Legende: $\boxed{c_{ij}}$ x_{ij} ⓚ

Die mit der Vogel-Approximation ermittelte Zuordnung lautet also:
$x_{15} = 1$; $x_{21} = 1$; $x_{34} = 1$; $x_{42} = 1$; $x_{53} = 1$.



b) Vogels-Approximations-Methode liefert eine gute Ausgangslösung, für die es keine Garantie auf Optimalität gibt.

c) Es gibt genau $m + n - 1$ Basisvariable, von denen $n - 1$ den Wert 0 und die übrigen den Wert 1 haben. Um auch die Variablen mit Wert 0 im Eröffnungsverfahren zu ermitteln, dürfen niemals Zeile **und** Spalte gleichzeitig gestrichen werden. Bei der obigen Lösung wurde immer, wenn $a_i = b_j = 1$ sind, zuerst die Zeile gestrichen und b_j mit Wert 0 weitergeführt.
Die vollständige Basislösung mit 9 Variablen lautet also:
$x_{15} = 1$; $x_{21} = 1$; $x_{31} = 0$; $x_{34} = 1$; $x_{42} = 1$; $x_{44} = 0$; $x_{52} = 0$; $x_{53} = 1$; $x_{55} = 0$.
