Aufgabe 2-7-7

An den Produktionsstätten in Berlin (B), Cottbus (C) und Dortmund (D) wird das gleiche Produkt (ein homogenes Gut) in den Mengen 130, 154 und 116 Tonnen pro Periode hergestellt. Zu beliefern sind vier Großhändler in München (M), Nürnberg (N), Rostock (R) und Stuttgart (S); sie benötigen pro Periode 76, 122, 94 und 108 Tonnen dieser Ware. Die Transportkosten in € je beförderter Tonne sind Tabelle 1 zu entnehmen. Die Produktion selbst erfolgt an den drei Standorten mit unterschiedlichen Fertigungskosten, die natürlich beim Transport hinzugerechnet werden müssen. Sie betragen in Berlin 23 €/t, in Cottbus 27 €/t und in Dortmund 20 €/t.

Tabelle 1: Transportkostenmatrix

nach von	M 1’	N 2’	R 3’	S 4’
B 1	58	43	23	63
C 2	56	40	38	61
D 3	61	43	53	42

Ihre Aufgabe ist es, einen kostenminimalen Produktions- und Transportplan zu ermitteln.

a) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Produktions- und Transportkosten mit Hilfe der Matrix-Minimum-Methode eine Ausgangslösung.

b) Ausgehend von der in a) ermittelten Lösung bestimmen Sie mittels der Stepping-Stone-Methode den kostenoptimalen Transportplan.

Lösungshinweise

---

a) Da alle Kosten pro Tonne angegeben sind, können die Produktions- jeweils zu den Transportkosten addiert werden, und es ergibt sich die in Tabelle 2 notierte erweiterte Kostenmatrix.

Tabelle 2: Erweiterte Kostenmatrix

nach von	M 1’	N 2’	R 3’	S 4’	a_i
B 1	81	66	46	86	130
C 2	83	67	65	88	154
D 3	81	63	73	62	116
b_j	76	122	94	108	400

Bei der Matrix-Minimum-Methode wird zuerst das Feld mit dem absolut kleinsten Kostenkoeffizienten ermittelt, und der zugehörigen Verbindung wird die maximal mögliche Transportmenge zugeordnet. In dieser Aufgabe ist der Transport von Berlin nach Rostock am günstigsten; verladen werden 94 t. Die Reihenfolge der Auswahl ist in Tabelle 3 wie in der Legende angegeben notiert; die Transportmenge entspricht dem Wert x_{ij}.

Tabelle 3: Anwendung der Matrix-Minimum-Methode

j i	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	a_i	o
1	81	66 36 ④	46 94 ①	86	130 36	4.
2	83 76 ⑥	67 78 ⑤	65	88	154 76	6.
3	81	63 8 ③	73	62 108 ②	116 8	3.
b_j	76	122 114 78	94	108		
o	6.	5.	1.	2.		c_{ij} x_{ij} ⓚ

In der Ausgangslösung werden somit folgende Transporte realisiert:

B → N: 36t B → R: 94t C → M: 76t

C → N: 78t D → N: 8t D → S: 108t

Die zur Ausgangslösung gehörenden Gesamtkosten werden berechnet, indem für alle realisierten Verbindungen die Kosten pro Tonne mit der zu

transportierenden Menge multipliziert werden. Es ergibt sich:
$(66 \cdot 36) + (46 \cdot 94) + (83 \cdot 76) + (67 \cdot 78) + (63 \cdot 8) + (62 \cdot 108) = 2376 + 4324 + 6308 + 5226 + 504 + 6696 = 25434$€.

b) Um festzustellen, ob die berechneten Kosten noch reduziert werden können, müssen in einem ersten Schritt die sogenannten Knotenpotentiale u_i und u_j bestimmt werden. Auf allen Feldern, denen eine Transportmenge zugeordnet wurde, muss $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j = 0$ gelten, d.h. die reduzierten Kosten haben dort den Wert 0. In dieser Aufgabe wurde $u_1 := 0$ gesetzt; die übrigen Werte konnten damit berechnet werden und sind in Tabelle 4 eingetragen.
Im nächsten Schritt können nun auch für alle nicht genutzten Verbindungen, in deren Felder also keine Transportmenge eingetragen wurde, die reduzierten Kosten $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j$ berechnet werden. Gemäß Legende sind diese ebenfalls in Tabelle 4 notiert.

Tabelle 4: Transporttableau mit Transportmengen, Knotenpotentialen und reduzierten Kosten

j i	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	u_i	Δu_i
1	81 -1 ⊕	66 36 ⊖	46 94	86 21	0	+(-1)
2	83 76 ⊖	67 78 ⊕	65 18	88 22	1	
3	81 2	63 8	73 30	62 108	-3	
u_j	-82	-66	-46	-65		
Δu_j			+(-1)			

c_{ij}	x_{ij}
$\bar{c}_{ij}$	

Solange in der Lösung negativ reduzierte Kosten auftreten, besteht die Aussicht auf eine Lösungsverbesserung, wenn man diesen Verbindungen Transportmengen zuordnet. In dieser Aufgabe ist $\bar{c}_{11} = -1$ der kleinste Kostenkoeffizient und entsprechend ist das Feld (1, 1') mit ⊕ markiert. Um einen Ausgleich zu schaffen, müssen die Felder (1, 2') sowie (2, 1') mit ⊖ und schließlich (2, 2') mit ⊕ gemarkert werden.
Über die Verbindung Berlin → München sollte also ein Transport erfolgen. Die zugehörige Schleife läuft läuft von (B, M) ⊕ über (B, N) ⊖, (C, N) ⊕ und (C, M) ⊖. Der Änderungswert ist 36.

Um auf dem neuen Feld (B, M), also (1, 1'), die reduzierten Kosten 0 zu erhalten, müssen gemäß den in Abschnitt 7.1.7 beschriebenen Regeln die

reduzierten Kosten $\bar{c}_{11} = -1$ entweder zu allen Potentialen addiert werden, deren Knoten den Teilbaum T_1 bilden ($\{1, 3'\}$), oder von den Potentialen des Teilbaums $T_{1'}$ subtrahiert werden ($\{2, 3, 1', 2', 4'\}$). In Tabelle 4 wurden in die Spalten $\Delta u_i/u_j$ die Werte für die Potentiale von T_1 eingetragen.
Es fehlt nun noch die Korrektur der reduzierten Kosten. Dies gilt für alle Verbindungen, bei denen **entweder** u_i in der Zeile **oder** u_j in der Spalte verändert wurde. Der Wert von $\bar{c}_{13}$ bleibt bestehen; hier wurden sowohl u_1 als auch $u_{3'}$ korrigiert. Tabelle 5 zeigt das resultierende Tableau, in dem alle reduzierten Kosten größer oder gleich 0 sind und somit keine Verbesserung mehr möglich ist.

Tabelle 5: Transporttableau nach Verbesserung

j i	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	u_i	Δu_i
1	81 36	66 1	46 94	86 22	-1	
2	83 40	67 114	65 17	88 22	1	
3	81 2	63 8	73 29	62 108	-3	
u_j	-82	-66	-47	-65		
Δu_j						

c_{ij} x_{ij}
$\bar{c}_{ij}$

Die optimale Lösung besteht aus folgenden Transporten:
B → M: 36t B → R: 94t C → M: 40t
C → N: 114t D → N: 8t D → S: 108t

Die Gesamtkosten betragen nun 25398€.