Aufgabe 2-7-4

In vier Betrieben (abgekürzt mit K_1 bis K_4) wird ein Gut hergestellt, welches zu drei Verkaufsstellen (abgekürzt mit B_1 bis B_3) transportiert werden soll. Die Kapazitäten der Betriebe stehen in Tabelle 1, die Bedarfe der Verkaufsstellen in Tabelle 2.

Tabelle 1: Kapazitäten

[10 T.Stck]	K_1	K_2	K_3	K_4
Kapazität	10	19	11	9

Tabelle 2: Bedarf in den Verkaufsstellen

[10 T.Stck]	B_1	B_2	B_3
Bedarf	13	12	17

Außerdem ist in Tabelle 3 die Entfernungstabelle gegeben; die Kosten sind proportional zu den Entfernungen.

Tabelle 3: Entfernungen Betrieb - Verkaufsstelle (in 10 km)

[10 km] nach von	B_1	B_2	B_3
K_1	8	9	12
K_2	4	8	5
K_3	5	9	7
K_4	1	2	6

Bestimmen Sie das bei minimalen Kosten optimale Transportprogramm, weisen Sie die Optimalität nach und begründen Sie Ihre Antwort. Wählen Sie geeignete Verfahren. Notieren Sie die Reihenfolge, in der gemäß Algorithmus die Streichung der Zeilen und Spalten vorgenommen wird. Geben Sie zusätzlich die Transportkosten für jede realisierte Verbindung an, und notieren Sie die Gesamtsumme der Transportkosten.

Lösungshinweise

In den Betrieben wird derzeit mehr produziert als in den Verkaufsstellen nachgefragt wird. Es ist $\sum a_i = 49 \neq \sum b_j = 42$; somit muss in Vorbereitung auf die Anwendung von Vogels-Approximations-Methode eine fiktive Verkaufsstelle B_F eingerichtet werden. Ihr wird ein Bedarf von 7 ME zugeordnet; in der Entfernungstabelle ist eine Spalte jeweils mit Einträgen Wert 0 zu ergänzen.

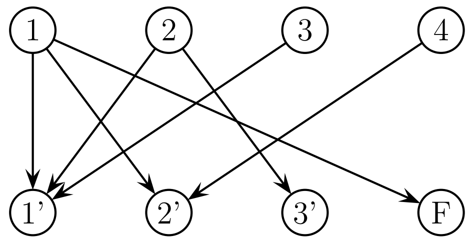
Tabelle 4: Lösung mit Vogels-Approximations-Methode (Schritt 1)

$i \backslash j$	B_1	B_2	B_3	B_F	a_i	Δc			o
K_1	8 0 6	9 3 7	12	0 7 1	~~10~~ 3	**8**	1	1	
K_2	4 2 5	8	5 17 4	0	~~19~~ 2	4	1	**4**	**5.**
K_3	5 11 3	9	7	0	11	5	**2**		3.
K_4	1	2 9 2	6	0	9	1	1		**2.**
b_j	~~13~~ ~~2~~ 0	~~12~~ 3	17	7	49				
Δc	3	**6**	1	0					
	1	1	2						
	4	1	7						
o	**6.**	**7.**	**4.**	**1.**					

c_{ij} x_{ij} k

In dem in Tabelle 4 angegebenen Tableau sind sowohl die Kosten = Entfernungen wie auch die ermittelten Transporteinheiten eingetragen. In der Spalte a_i wie auch in der Zeile b_j sind die im Laufe des Verfahrens korrigierten Gesamtmengen notiert. Die Spalten / Zeilen Δc enthalten die Kostendifferenzen; o gibt noch die Reihenfolge der Zeilen- bzw. Spaltenstreichungen an. Zu beachten ist dabei, dass auch bei gleichzeitiger Erschöpfung des Angebots und Erfüllung der Nachfrage nur die Zeile gestrichen wird, und die Spalte mit Nachfrage 0 weitergeführt wird. Dadurch wird insbesondere im Hinblick auf eine spätere Optimierung erreicht, dass genau $(m+n-1)$ Verbindungen zustande kommen, d.h. hier 7 Basisvariable bestimmt werden.

Die mit der Vogel-Approximation ermittelte Ausgangslösung lautet also (Angaben in 10.000 Stück):
$x_{11} = 0$; $x_{12} = 3$; $x_{1\mathrm{F}} = 7$; $x_{21} = 2$; $x_{23} = 17$; $x_{31} = 11$; $x_{42} = 9$.
Der sich aus den Entfernungen ergebende Zielfunktionswert berechnet sich zu:
$0 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 17 \cdot 5 + 11 \cdot 5 + 9 \cdot 2 = 193.$



Um zu prüfen, ob die gefundene Lösung bereits optimal ist, werden zunächst die Potentiale (mit $u_1 := 0$) berechnet sowie die reduzierten Kosten $\bar{c}_{ij}$ ($\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j$); die Werte wurden gemäß Legende in die Tabelle eingetragen.

Tabelle 5: Stepping-Stone (Schritt 2)

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	c_{ij}=8, x_{ij}=0, $\bar{c}_{ij}$=0	c_{ij}=9, x_{ij}=3, $\bar{c}_{ij}$=0	c_{ij}=12, $\bar{c}_{ij}$=3	c_{ij}=0, x_{ij}=7, $\bar{c}_{ij}$=0	0
A_2	c_{ij}=4, x_{ij}=2, $\bar{c}_{ij}$=0	c_{ij}=8, $\bar{c}_{ij}$=3	c_{ij}=5, x_{ij}=17, $\bar{c}_{ij}$=0	c_{ij}=0, $\bar{c}_{ij}$=4	-4
A_3	c_{ij}=5, x_{ij}=11, $\bar{c}_{ij}$=0	c_{ij}=9, $\bar{c}_{ij}$=3	c_{ij}=7, $\bar{c}_{ij}$=1	c_{ij}=0, $\bar{c}_{ij}$=3	-3
A_4	c_{ij}=1, x_{ij}=10, $\bar{c}_{ij}$=0	c_{ij}=2, x_{ij}=9, $\bar{c}_{ij}$=0	c_{ij}=6, $\bar{c}_{ij}$=4	c_{ij}=0, $\bar{c}_{ij}$=7	-7
u_j	-8	-9	-9	0	

Legende: c_{ij} x_{ij} $\bar{c}_{ij}$

Da die Werte $\bar{c}_{ij}$ für alle Nichtbasisvariable positiv sind, ist die mit der Vogel'schen Approximationsmethode ermittelte Lösung bereits optimal für das gegebene Transportproblem.

