

---

**Aufgabe 2-7-3**

Ihre Aufgabe ist es, für die Deutsche Bundesbahn eine Leerwagenverschiebung zu planen. Ziele sind die Bahnhöfe in Hagen (HA), Hamburg (HH), Oldenburg (OL) und Rheine (RH); die Waggons befinden sich zur Zeit noch in Dortmund (DO), Castrop-Rauxel (CR), Lippstadt (LIP) und Oberhausen (OH).

In den Empfangsorten werden folgende Leerwaggons (W) benötigt:

HA: 60 W      HH: 130 W      OL: 70 W      RH: 100 W

In den Ausgangsorten stehen zur Zeit:

DO: 120 W      CR: 60 W      LIP: 60 W      OH: 120 W

Die Transportkosten werden im Wesentlichen durch die zurückgelegte Entfernung bestimmt, deshalb sei es Ihr Ziel, die Leerwagen-Kilometer zu minimieren. Legen Sie dabei die in [Tabelle 1](#) gegebenen km-Angaben zugrunde.

Tabelle 1: Entfernungsangaben

[km]	nach	HA	HH	OL	RH
von					
DO		20	315	205	84
CR		27	330	223	92
LIP		68	268	201	102
OH		50	351	220	99

- a) Ihre Aufgabe besteht nun im Einzelnen darin, zunächst mit Hilfe der *Zeilen-Spalten-Minimum-Methode* oder einem anderen Eröffnungsverfahren Ihrer Wahl (Achtung ! im zweiten Fall Punktabzug) einen Ausgangsverschiebeplan zu berechnen, mit dem alle Bedarfe gedeckt werden.
- b) Prüfen Sie, ob Ihr Plan optimal ist. Ist dies Ihrer Meinung nach der Fall, weisen Sie die Optimalität nach. Ansonsten geben Sie eine Verbindung an, durch deren Hinzunahme eine Lösungsverbesserung erzielt werden kann; wie groß ist für diesen Fall der Wert der Zielfunktionsänderung? Beginnen Sie mit der Bestimmung der Knotenpotentiale oder Dualwerte  $u_i$  und  $u_j$ ; notieren Sie anschließend für alle Verbindungen die reduzierten Kosten  $\bar{c}_{ij}$ .
-

## Lösungshinweise

- a) Die Reihenfolge, in der die Verbindungen zugeordnet wurden, entspricht der Nummerierung (Nr.) in [Tabelle 2](#).

Tabelle 2: Anwendung der Zeilen-Spalten-Minimum-Methode

	HA	HH	OL	RH	$a_i$
DO	20 <b>1.</b> 60	315	205	84 <b>2.</b> 60	120
CR	27	330	223 <b>4.</b> 20	92 <b>3.</b> 40	60
LIP	68	268 <b>6.</b> 10	201 <b>5.</b> 50	102	60
OH	50	351 <b>6.</b> 120	220	99	120
$b_j$	60	130	70	100	

Legende:

$c_{ij}$
<b>Nr.</b> $x_{ij}$

Die mit der *Zeilen-Spalten-Minimum-Methode* bestimmte Ausgangslösung lautet also (Angaben in Leerwagen):  $x_{DO/HA} = 60$ ,  $x_{DO/RH} = 60$ ,  $x_{CR/RH} = 40$ ,  $x_{CR/OL} = 20$ ,  $x_{LIP/OL} = 50$ ,  $x_{LIP/HH} = 10$ ,  $x_{OH/HH} = 120$ . Als Berechnungsgrundlage für die Transportkosten ergeben sich  $20 \cdot 60 + 84 \cdot 60 + 92 \cdot 40 + 223 \cdot 20 + 201 \cdot 50 + 268 \cdot 10 + 351 \cdot 120 = 69.230$  Leerwagen-Kilometer.

- b)

Tabelle 3: Berechnung der Knotenpotentiale

	HA	HH	OL	RH	$u_i$
DO	20 0 60			84 0 60	$:= 0$
CR			223 0 20	92 0 40	8
LIP		268 0 10	201 0 50		-14
OH		351 0 120			69
$u_j$	-20	-282	-215	-84	

Legende:

$c_{ij}$
$\bar{c}_{ij}$ $x_{ij}$

Wie in Einheit 2, Abschnitt 7.2.2 nachzulesen ist, werden »die Knotenpotentiale oder Dualwerte  $u_i$  und  $u_j$  [...] so bestimmt, dass auf allen Feldern

der Kostenmatrix, denen eine Transportmenge zugeordnet wurde, den sogenannten Basisfeldern, die reduzierten Kosten  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + u_j = 0$  werden.« Wir setzen  $u_1 := 0$  und berechnen dann die übrigen Werte. In [Tabelle 3](#) sind die erforderlichen Angaben und die Ergebnisse eingetragen.

Nun lassen sich auch für die übrigen Verbindungen die reduzierten Kosten berechnen. [Tabelle 4](#) enthält auch diese Kostenwerte.

Tabelle 4: Berechnung der reduzierten Kosten

	HA	HH	OL	RH	$u_i$
DO	20 0 60	315 33	205 -10	84 0 60	$:= 0$
CR	27 -1	330 40	223 0 20	92 0 40	8
LIP	68 62	268 0 10	201 0 50	102 32	-14
OH	50 -39	351 0 120	220 -64	99 -54	69
$u_j$	-20	-282	-215	-84	

**Legende:**

$c_{ij}$	
$\bar{c}_{ij}$	$x_{ij}$

Sind alle  $\bar{c}_{ij} > 0$ , ist die gefundene Lösung optimal. Diese Bedingung ist in [Tabelle 4](#) nicht erfüllt; es könnte eine Verbesserung von 64 km pro Waggon, der auf der Strecke  $\langle \text{OH}, \text{OL} \rangle$  zusätzlich verschoben würde, erzielt werden.