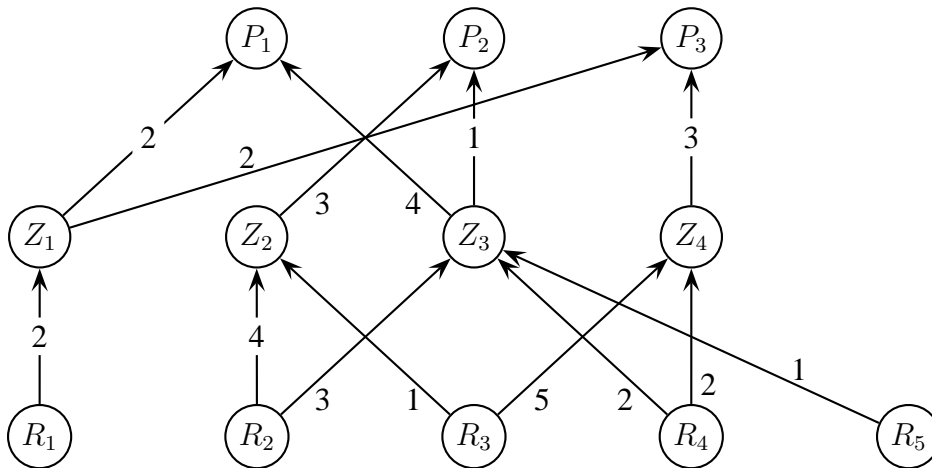


**Aufgabe B0513**

Lineare Optimierung

Ein Unternehmen stellt drei Endprodukte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  her. Die jeweils zur Produktion einer Mengeneinheit des jeweiligen Endproduktes benötigten Mengeneinheiten des Zwischenproduktes sind in dem folgenden Gozintographen dargestellt.



- Stellen Sie die Matrizen der benötigten Rohstoffe  $R_1, \dots, R_5$  zur Herstellung jeweils 1 ME der Zwischenprodukte  $Z_1, \dots, Z_4$  sowie der benötigten Zwischenprodukte zur Herstellung jeweils 1 ME der Endprodukte  $P_1, P_2, P_3$  auf.
- Wie viele ME der Rohstoffe werden jeweils zur Herstellung einer ME der Endprodukte  $P_1, P_2, P_3$  benötigt?
- Wie viele ME der Rohstoffe werden zur Herstellung von 100 ME von  $P_1$ , 250 ME von  $P_2$  und 50 ME von  $P_3$  benötigt?
- Die Rohstoffe kosten je ME für  $R_1$  1,50 €, für  $R_2$  3,00 €, für  $R_3$  2,75 €, für  $R_4$  0,50 € und für  $R_5$  1,25 €. Weiterhin fallen variable Stückkosten für die Zwischenprodukte an:  $Z_1 = 2,00$  €,  $Z_2 = 3,75$  €,  $Z_3 = 4,20$  € und  $Z_4 = 5,00$  €. Die fixen Kosten betragen 15 000 €. Es sollen 100 ME von  $P_1$ , 250 ME von  $P_2$  und 50 ME von  $P_3$  hergestellt werden. Wie hoch sind die Gesamtkosten?
- Berechnen Sie den Gewinn mit den angegebenen Kosten aus Teilaufgabe c), wenn  $P_1$  für 250 €,  $P_2$  für 275 € und  $P_3$  für 512 € verkauft werden.
- Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem zu dem oben dargestellten Gozintographen auf und berechnen Sie die Gesamtbedarfe  $x_i$  für  $i = 1, \dots, 12$ , wenn 100 ME von  $P_1$ , 250 ME von  $P_2$  und 50 ME von  $P_3$  hergestellt werden.

Die zu ermittelnden Gesamtbedarfe werden wie folgt bezeichnet:

- $x_1$  : Gesamtbedarf in ME an  $P_1$
- $x_2$  : Gesamtbedarf in ME an  $P_2$
- $x_3$  : Gesamtbedarf in ME an  $P_3$
- $x_4$  : Gesamtbedarf in ME an  $Z_1$
- $x_5$  : Gesamtbedarf in ME an  $Z_2$
- $x_6$  : Gesamtbedarf in ME an  $Z_3$
- $x_7$  : Gesamtbedarf in ME an  $Z_4$
- $x_8$  : Gesamtbedarf in ME an  $R_1$
- $x_9$  : Gesamtbedarf in ME an  $R_2$
- $x_{10}$  : Gesamtbedarf in ME an  $R_3$
- $x_{11}$  : Gesamtbedarf in ME an  $R_4$
- $x_{12}$  : Gesamtbedarf in ME an  $R_5$

**Aufgabe B0512** (Lösungshinweise)

- a) Um die entsprechenden Matrizen aufzustellen, werden die Informationen aus dem Gozintographen zunächst in eine Tabelle übertragen.

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	
$R_1$	2	0	0	0	$\Rightarrow \mathbf{A} =$
$R_2$	0	4	3	0	
$R_3$	0	1	0	5	
$R_4$	0	0	2	2	
$R_5$	0	0	1	0	

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
$Z_1$	2	0	2	$\Rightarrow \mathbf{B} =$
$Z_2$	0	3	0	
$Z_3$	4	1	0	
$Z_4$	0	0	3	

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Zur Berechnung der benötigten Rohstoffe zur Herstellung von jeweils einer ME der Endprodukte  $P_1, P_2, P_3$  werden die in Teilaufgaben a) aufgestellten Matrizen  $\mathbf{A}$  und

$B$  multipliziert.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 12 & 15 & 0 \\ 0 & 3 & 15 \\ 8 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung einer ME werden von

$P_1$ : 4 ME von  $R_1$ , 12 ME von  $R_2$ , 0 ME von  $R_3$ , 8 ME von  $R_4$ , 4 ME von  $R_5$

$P_2$ : 0 ME von  $R_1$ , 15 ME von  $R_2$ , 3 ME von  $R_3$ , 2 ME von  $R_4$ , 1 ME von  $R_5$

$P_3$ : 4 ME von  $R_1$ , 0 ME von  $R_2$ , 15 ME von  $R_3$ , 6 ME von  $R_4$ , 0 ME von  $R_5$

benötigt.

- c) Um die benötigte Anzahl an Rohstoffen für die Herstellung von  $P_1 = 100$ ,  $P_2 = 250$  und  $P_3 = 50$  zu bestimmen, wird die Matrix  $C$  aus Teilaufgabe b) mit der herzustellenden Menge von  $P_1, P_2, P_3$  multipliziert.

$$D = C \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 12 & 15 & 0 \\ 0 & 3 & 15 \\ 8 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 4950 \\ 1500 \\ 1600 \\ 650 \end{pmatrix}$$

Es werden von  $R_1$  600 ME, von  $R_2$  4950 ME, von  $R_3$  1500 ME, von  $R_4$  1600 ME und von  $R_5$  650 ME benötigt.

- d) Für die Berechnung der Rohstoffkosten wird der Vektor  $D$  aus Aufgabenteil c) mit den entsprechenden Kosten für  $R_1, \dots, R_5$  multipliziert:

$$(1,50, 3,00, 2,75, 0,5, 1,25) \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 4950 \\ 1500 \\ 1600 \\ 650 \end{pmatrix} = 21487,50$$

Die benötigte Anzahl an Zwischenprodukten  $Z_1, \dots, Z_4$  berechnet sich durch die Multiplikation von Matrix  $B$  mit der herzustellenden Menge von  $P_1, P_2, P_3$ .

$$F = B \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 750 \\ 650 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Der Vektor  $F$  wird mit den Stückkosten der jeweiligen Zwischenprodukte multipliziert.

$$(2,00, 3,75, 4,20, 5,00) \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 750 \\ 650 \\ 150 \end{pmatrix} = 6892,50$$

Im letzten Schritt werden die oben berechneten Kosten mit den Fixkosten i.H.v. 15 000 € addiert.

$$21487,50 + 6892,50 + 15000 = 43380 \text{ €}$$

Die Gesamtkosten belaufen sich auf 43 380 €.

e) Der Gewinn berechnet sich durch Erlös minus Kosten

$$G = E - K$$

$$G = (250, 175, 512) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 50 \end{pmatrix} - 43380$$

$$G = 119350 - 43380$$

$$G = 75970$$

Der Gewinn beträgt 75 970 €

f)  $P_1 : x_1 = 100$

$P_2 : x_2 = 250$

$P_3 : x_3 = 50$

$Z_1 : x_4 = 2x_1 + 2x_3$

$Z_2 : x_5 = 3x_2$

$Z_3 : x_6 = 4x_1 + x_2$

$Z_4 : x_7 = 3x_3$

$R_1 : x_8 = 2x_4$

$R_2 : x_9 = 4x_5 + 3x_6$

$$R_3 : x_{10} = x_5 + 5x_7$$

$$R_4 : x_{11} = 2x_6 + 2x_7$$

$$R_5 : x_{12} = x_6$$

$$x_1 = 100$$

$$x_2 = 250$$

$$x_3 = 50$$

$$x_4 = 2 \cdot 100 + 2 \cdot 50 = 300$$

$$x_5 = 3 \cdot 250 = 750$$

$$x_6 = 4 \cdot 100 + 250 = 650$$

$$x_7 = 3 \cdot 50 = 150$$

$$x_8 = 2 \cdot 300 = 600$$

$$x_9 = 4 \cdot 750 + 3 \cdot 650 = 4950$$

$$x_{10} = 750 + 5 \cdot 150 = 1500$$

$$x_{11} = 2 \cdot 650 + 2 \cdot 150 = 1600$$

$$x_{12} = 650$$

Wie zu erkennen ist, handelt es sich bei  $x_1, x_2, x_3$  um die herzustellenden Mengen von  $P_1, P_2, P_3$ . Die Werte von  $x_4$  bis  $x_7$  enthält der Vektor  $F$  und die von  $x_8$  bis  $x_{12}$  der Vektor  $D$ .