

Aufgabe B0512

Lineare Optimierung

Ein Unternehmen fertigt in zwei Produktionsstufen aus vier Rohstoffen R_1, \dots, R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 . Aus den Zwischenprodukten werden zwei Endprodukte P_1, P_2 hergestellt.

Tabelle 1 zeigt die ME der Rohstoffe zur Herstellung von 1 ME der Zwischenprodukte und in Tabelle 2 sind die ME der Zwischenprodukte zur Herstellung von 1 ME der Endprodukte dargestellt.

Tabelle 1 Rohstoff je Zwischenprodukt

Rohstoffe	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	4	1
R_2	5	8	0
R_3	1	3	2
R_4	4	1	2

Tabelle 2 Zwischenprodukt je Endprodukt

Zwischenprodukte	P_1	P_2
Z_1	2	1
Z_2	3	2
Z_3	1	1

- Stellen Sie die Matrizen zur Herstellung von 1 ME der Zwischenprodukte und zur Herstellung von 1 ME der Endprodukte auf.
- Wie viele ME der Rohstoffe müssen jeweils für 1 ME der Endprodukte eingesetzt werden?
- Wie viele ME von R_1, R_2, R_3 und R_4 werden zur Herstellung von 20 ME von P_1 und 50 ME von P_2 benötigt?
- Die Herstellung der Zwischenprodukte und der Endprodukte erfolgt in zwei verschiedenen Werken. Der Transport der Zwischenprodukte in das Werk zur Herstellung der Endprodukte verursacht Transportkosten. Es fallen folgende Kosten an:
 Für 1 ME Z_1 : 0,35 €.
 Für 1 ME Z_2 : 0,50 €.
 Für 1 ME Z_3 : 0,25 €.

Wie hoch sind die Transportkosten, wenn von P_1 20 ME und von P_2 50 ME herge-

stellt werden?

- e) Zusätzlich sollen zur Herstellung von $P_1 = 20$ ME und $P_2 = 50$ ME die Zwischenprodukte Z_1 und Z_3 verkauft werden. Von Z_1 werden 30 ME und von Z_3 10 ME abgenommen. Berechnen Sie die insgesamt benötigte Anzahl der Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 .

Aufgabe B0512 (Lösungshinweise)

- a) Die Matrix zur Herstellung von 1 ME der Zwischenprodukte lässt sich aus Tabelle 1 ablesen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix zur Herstellung von 1 ME der Endprodukte lässt sich aus Tabelle 2 ablesen.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Um die eingesetzten Rohstoffe je Endprodukt zu berechnen, müssen die aus Aufgabenteil a) aufgestellten Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} multipliziert werden

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 34 & 21 \\ 13 & 9 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$$

Für 1 ME von P_1 müssen 17 ME von R_1 , 34 ME von R_2 , 13 ME von R_3 und 13 ME von R_4 eingesetzt werden, für 1 ME von P_2 demnach 11 ME von R_1 , 21 ME von R_2 , 9 ME von R_3 und 8 ME von R_4 .

- c) Zur Berechnung der Herstellung von 20 ME von P_1 und 50 ME von P_2 wird die Matrix \mathbf{C} aus Aufgabenteil b) mit den herzustellenden ME als Spaltenvektor multi-

pliziert.

$$D = C \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 34 & 21 \\ 13 & 9 \\ 13 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 890 \\ 1730 \\ 710 \\ 660 \end{pmatrix}$$

Es werden insgesamt zur Herstellung von $P_1 = 20$ ME und $P_2 = 50$ ME 890 ME von R_1 , 1730 ME von R_2 , 710 ME von R_3 und 660 ME von R_4 benötigt.

- d) Zunächst muss die Anzahl der benötigten Zwischenprodukte für die Herstellung von 1 ME der Endprodukte P_1 und P_2 bestimmt werden. Dazu wird die Matrix B mit der Anzahl der herzustellenden ME von $P_1 = 20$ ME und von $P_2 = 50$ ME multipliziert.

$$F = B \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 160 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Nun werden die Transportkosten in €/ME mit dem Vektor F multipliziert.

$$(0,35 \ 0,5 \ 0,25) \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 160 \\ 70 \end{pmatrix} = 129$$

Zur Herstellung von $P_1 = 20$ ME und $P_2 = 50$ ME fallen Transportkosten in Höhe von 129 € an.

- e) Die benötigte Anzahl der Rohstoffe zur Herstellung von $P_1 = 20$ ME und $P_2 = 50$ ME wurde bereits in Aufgabenteil c) berechnet:

$$D = \begin{pmatrix} 890 \\ 1730 \\ 710 \\ 660 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt wird die Anzahl der benötigten Rohstoffe für die zusätzliche Her-

stellung von $Z_1 = 30$ ME und $Z_3 = 10$ ME bestimmt.

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 150 \\ 50 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Um die insgesamt herzustellende Menge der Rohstoffe zu bestimmen werden die beiden Matrizen \mathbf{F} und \mathbf{G} addiert.

$$\mathbf{D} + \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 890 \\ 1730 \\ 710 \\ 660 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 \\ 150 \\ 50 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 \\ 1880 \\ 760 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Es werden insgesamt 960 ME von R_1 , 1880 ME von R_2 , 760 ME von R_3 und 800 ME von R_4 benötigt.