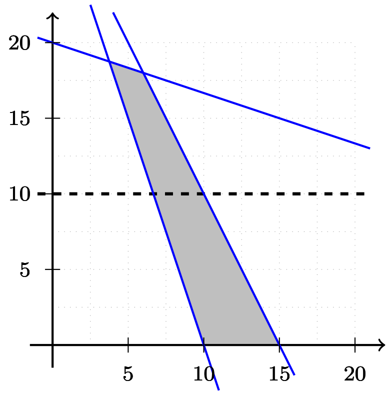
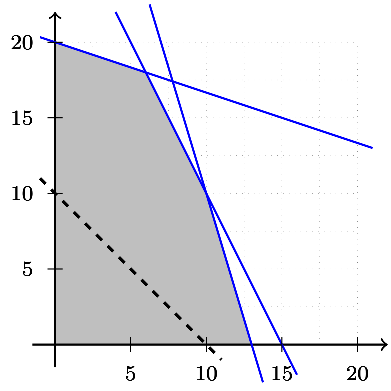
Aufgabe B0509 Lineare Optimierung

Ein Unternehmen fertigt zwei Produkte, die beide zum gleichen Verkaufspreis verkauft werden. Gegeben sei die Rohstoffverbrauchsmatrix $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\mathbf{v}_{max} = (v_2, v_3)^T = (120, 180)^T$, der maximal zur Verfügung stehenden Rohstoffmengen. Bei Rohstoff v_1 handelt es sich um ein Recyclingmaterial, von dem mindestens 30 Mengeneinheiten verbraucht werden sollen. Bestimmen Sie die Grafiken, die das Optimierungsproblem darstellen können, wenn der Erlös maximiert werden soll. *(Hinweis: Die Zielfunktion ist gestrichelt dargestellt.)*

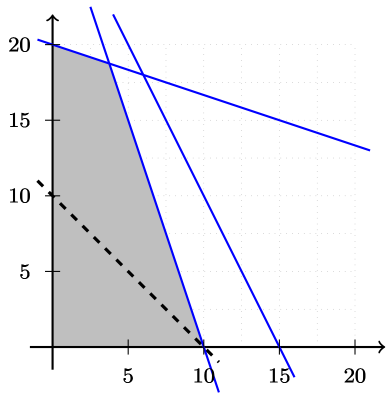
A)



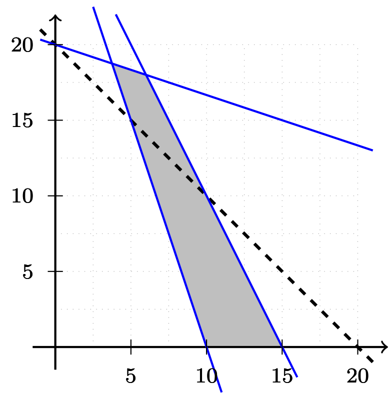
B)



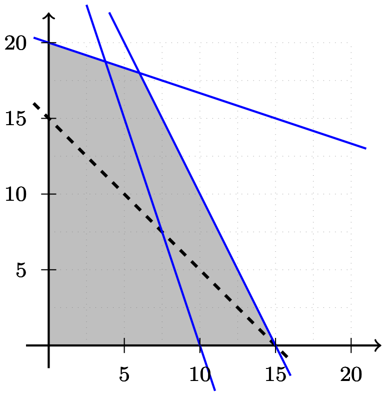
C)



D)



E)



Aufgabe B0509 (Lösungshinweise)

Es gilt:

x_1 = Produkt 1, x_2 = Produkt 2

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_{max} = (v_2, v_3)^T = (120, 180)^T$

v_1 = mindestens 30 ME.

Die Verkaufspreise der beiden Produkte x_1 und x_2 sind gleich und die Erlöse sollen maximiert werden: $E = p \cdot x = p \cdot (x_1 + x_2)$. Daraus ergibt sich folgende Zielfunktion: $\max p \cdot (x_1 + x_2)$.

Aus der Multiplikation der beiden Produkte mit der Rohstoffverbrauchsmatrix ergibt sich für die jeweiligen Rohstoffe:

$$(x_1 \; x_2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 & x_2 \\ 8x_1 & 4x_2 \\ 3x_1 & 9x_2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 3x_1 + x_2$$

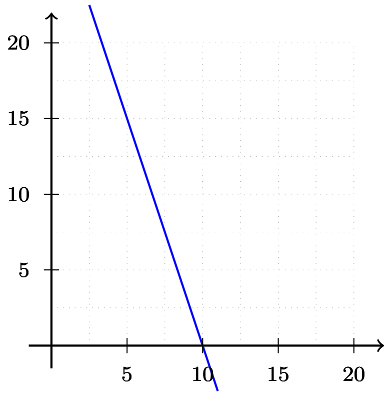
$$v_2 = 8x_1 + 4x_2$$

$$v_3 = 3x_1 + 9x_2$$

Von v_1 sollen mindestens 30 ME, von v_2 maximal 120 ME und von v_3 maximal 180 ME verbraucht werden. Aus diesen Komponenten lässt sich das LP aufstellen:

$$\begin{array}{llllllll}
\max & p & \cdot & (x_1 & + & x_2) & \text{(Zielfunktion)} \\
\text{u.d.N.} & 3x_1 & + & x_2 & \geq & 30 & (v_1) \\
 & 8x_1 & + & 4x_2 & \leq & 120 & (v_2) \\
 & 3x_1 & + & 9x_2 & \leq & 180 & (v_3) \\
 & x_i & \geq & 0,\ i & = & 1{,}2{,}3 & \text{(NNB)}
\end{array}$$

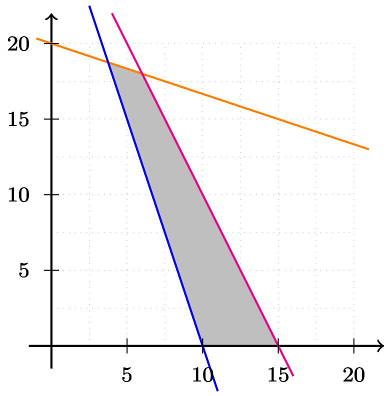
Dieses LP lässt sich in ein Koordinatensystem übertragen:



Rohstoff v_1:

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &\geq 30 \\
3x_1 &\geq 30 - x_2 \quad |:3 \\
x_1 &\geq 10 - \frac{1}{3}x_2 \\
x_2 &\geq 30 - 3x_1
\end{aligned}$$

Der Bereich, der rechts von der Geraden liegt, ist im Lösungsraum.



Rohstoff v_2:

$$8x_1 + 4x_2 \leq 120$$
$$x_1 \leq 15 - 0{,}5x_2$$
$$x_2 \leq 30 - 2x_1$$

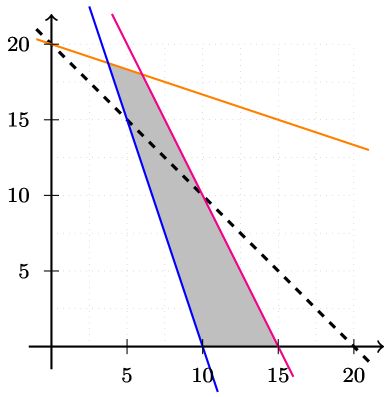
Rohstoff v_3:

$$3x_1 + 9x_2 \leq 180$$
$$x_1 \leq 60 - 3x_2$$
$$x_2 \leq 20 - \frac{1}{3}x_1$$

Der Bereich unter der Geraden stellt den Lösungsraum dar.

Zielfunktion:

$$p(x_1 + x_2) = px_1 + px_2$$



Die Aussagen A), B), C) und E) sind nicht wahr.

Die Aussage D) ist wahr.