Aufgabe B0504 Matrizen

a) Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie x!

b1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b2)

$$\begin{pmatrix} a & c & x \\ b & d & f \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4/3 \\ 1 & 3/4 \\ 4/5 & 4 \end{pmatrix}^T.$$

b3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4/7 \\ 1/2 & 0{,}75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ -0{,}125 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe B0504 (Lösungshinweise)

a) Es kann folgendes Gleichungssystem aufgestellt werden

$$\begin{array}{llcccccccl} I. & \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 & & | \cdot (-2) \\ II. & 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0 & & \hookleftarrow + \\ III. & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcccccl} I. & \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 & \\ II. & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & | : (-2) \\ III. & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{llcccccc} I. & \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ II. & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ III. & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar, z.B. für $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ oder $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 3$.

Es gilt allgemein folgende Beziehung: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$.

Die drei Vektoren sind linear abhängig. Damit ergibt sich für den Rang der Matrix $\boldsymbol{A} : rg(\boldsymbol{A}) = 2$, was durch die analoge Rangbestimmung direkt erkennbar ist:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

<u>Ergebnis:</u> 2

b1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufstellung eines linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llcccccc} I. & w & & + & y & = & 0 \\ II. & & x & - & y & = & 0 \\ III. & & x & + & y & = & 4 \end{array}$$

Umstellen der Gleichung II.

$$\begin{array}{llcccccc} I. & w & & + & y & = & 0 \\ II. & & x & & & = & y \\ III. & & x & + & y & = & 4 \end{array}$$

Einsetzen von II. in Gleichung III. ergibt:

$x + x = 4 \Rightarrow x = 2$

<u>Ergebnis:</u> 2

b2)

$$\begin{pmatrix} a & c & x \\ b & d & f \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4/5 \\ 4/3 & 3/4 & 4 \end{pmatrix}$$

x berechnet sich durch $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Ergebnis: $0{,}2$

b3) Aus der Matrizengleichung können die beiden linearen Gleichungen aufgestellt werden:

I. $\quad w + \frac{4}{7}x = -\frac{5}{7}$

II. $\quad \frac{1}{2}w + 0{,}75x = -0{,}125$

$$\begin{array}{cc|cl}
w & x & RHS & \\
\hline
1 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \mid \cdot (-\frac{1}{2}) \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \leftarrow + \\
\hline
1 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & \\
0 & \frac{13}{28} & \frac{13}{56} & \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{13}{28}x = \frac{13}{56} \qquad \Big| : \frac{13}{28}$$

$$x = \frac{13}{56} \cdot \frac{28}{13} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ergebnis: $0{,}5$