Aufgabe B0405 Bestimmtes Integral

Berechnen Sie $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x$ und geben Sie das Ergebnis in Dezimaldarstellung an.

Aufgabe B0405 (Lösungshinweise)

Das gegebene Integral lässt sich mit Hilfe der partiellen Integration berechnen:

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x$$

mit $f(x) = x$ und $f'(x) = 1$ sowie $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ und $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+1}$

$$= x \cdot 2 \cdot \sqrt{x+1}\Big|_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{x+1}\, \mathrm{d}x$$

$$= x \cdot 2 \cdot \sqrt{x+1}\Big|_{-1}^{2} - \frac{4 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{3}\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= 2x \cdot \sqrt{x+1} - \frac{4 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{3}\Bigg|_{-1}^{2}$$

Faktorisieren von $2\sqrt{x+1}$ (Potenzgesetze beachten $\sqrt{s^3} = s \cdot \sqrt{s}$)

$$= 2\sqrt{x+1} \cdot \left[x - \frac{2\,(x+1)}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1} \cdot (x-2)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= 0 - 0 = 0$$

Hinweis:

Das bestimmte Integral lässt sich auch direkt durch ein Ersetzen der Variablen lösen. Sei $t = \sqrt{x+1}$, d.h. $x = t^2 - 1$, so ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$, wodurch sich die Integrationsgrenzen zu $a = \sqrt{-1+1} = 0$ und $b = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ ergeben.

Damit folgt:

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t\, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 - 2t\Big|_{0}^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 0 = 0$$

Ergebnis: 0