

Aufgabe B0403

Integrationsregeln

Berechnen Sie Integrale mit Hilfe der Integrationsregeln.

a) $\int e^{-x} dx$

b) $\int 2x \cdot e^x dx$

c) $\int \frac{5x - 2}{x - 1} dx, x \neq 1$

d) $\int x \cdot \ln(x) dx, x > 0$

Aufgabe B0403 (Lösungshinweise)

a) $\int e^{-x} dx = - \int e^{-x} \cdot (-1) dx = - \int e^{g(x)} \cdot g'(x) dx$

Substitution mit $u = g(x) = -x$ und $g'(x) = -1$ sowie $du = -1 dx$

$$= - \int e^u du = -e^u + c$$
$$= -e^{-x} + c$$

b) $\int 2x \cdot e^x dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx$

partielle Integration mit $f(x) = 2x$ und $f'(x) = 2$ sowie $g'(x) = e^x$ und $g(x) = e^x$

$$= 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x dx$$
$$= 2x \cdot e^x - (2e^x + c) = 2(x - 1)e^x - c$$

c) $\int \frac{5x - 2}{x - 1} dx = \int \frac{5 \cdot (x - 1) + 3}{x - 1} \cdot 1 dx$

Substitution mit $u = g(x) = x - 1$ und $g'(x) = 1$ sowie $du = 1 dx$

$$= \int \frac{5u + 3}{u} du = \int \frac{5u}{u} + \frac{3}{u} du = \int 5 + \frac{3}{u} du = 5u + 3 \ln |u| + c$$
$$= 5 \cdot (x - 1) + 3 \ln |x - 1| + c = 5x - 5 + 3 \cdot \ln |x - 1| + c$$

$$d) \int x \cdot \ln(x) \, dx = \int \ln(x) \cdot x \, dx = \int f(x) \cdot g'(x)$$

partielle Integration mit $f(x) = \ln(x)$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$ sowie $g'(x) = x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$= \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x \, dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + c \right) = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln(x) \cdot x^2 - \frac{1}{2}x^2 - c \right)$$