

**Aufgabe B0308**

Multivariate Optimierung

Ein Unternehmen stellt ein Produkt her, dessen vorgeschriebenes Produktionsniveau bei 500 ME liegen soll. Es werden zur Produktion die beiden beliebig teilbaren Inputfaktoren, deren Einsatzmengen mit  $r_1$  und  $r_2$  bezeichnet werden, benötigt. Die Faktorgesamtkostenfunktion lautet:  $K(r_1, r_2) = 8r_1 + 2r_2 + 5r_1r_2$ ,  $r_i > 0; i = 1, 2$ . Die Produktionsfunktion ist gegeben durch  $x(r_1, r_2) = 40r_1^{0,5}r_2^{0,5}$ ,  $r_i > 0, i = 1, 2$ .

Berechnen Sie die Minimalkostenkombination mit der Lagrange-Methode. Wie verhalten sich die Kosten in der Umgebung der optimalen Kombination der Inputfaktoren?

**Aufgabe B0308 (Lösungshinweise)**

$$\min \left\{ 8r_1 + 2r_2 + 5r_1r_2 \left| \begin{array}{l} 500 - 40r_1^{0,5}r_2^{0,5} = 0 \\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \end{array} \right. \right\}$$

$$g(r_1, r_2) = c - x(r_1, r_2) = 500 - 40r_1^{0,5}r_2^{0,5}$$

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \lambda) = 8r_1 + 2r_2 + 5r_1r_2 + \lambda(500 - 40r_1^{0,5}r_2^{0,5})$$

$$\text{I. } \mathcal{L}_{r_1}(r_1, r_2, \lambda) = 8 + 5r_2 - \frac{20\lambda r_2^{0,5}}{r_1^{0,5}} = 0$$

$$\text{II. } \mathcal{L}_{r_2}(r_1, r_2, \lambda) = 2 + 5r_1 - \frac{20\lambda r_1^{0,5}}{r_2^{0,5}} = 0$$

$$\text{III. } \mathcal{L}_{\lambda}(r_1, r_2, \lambda) = 500 - 40r_1^{0,5}r_2^{0,5} = 0$$

Eliminierung von  $\lambda$  in I. und II. und Umstellen nach  $r_2$

$$\text{I. } 8 + 5r_2 - \frac{20\lambda r_2^{0,5}}{r_1^{0,5}} = 0 \quad | - 8 - 5r_2$$

$$\text{II. } 2 + 5r_1 - \frac{20\lambda r_1^{0,5}}{r_2^{0,5}} = 0 \quad | - 2 - 5r_1$$

$$\text{I. } -\frac{20\lambda r_2^{0,5}}{r_1^{0,5}} = -8 - 5r_2 \quad | \cdot r_1^{0,5} / r_2^{0,5}$$

$$\text{II. } -\frac{20\lambda r_1^{0,5}}{r_2^{0,5}} = -2 - 5r_1 \quad | \cdot r_2^{0,5} / r_1^{0,5}$$

$$\text{I. } -20\lambda = \frac{(-8 - 5r_2) \cdot r_1^{0,5}}{r_2^{0,5}}$$

$$\text{II. } -20\lambda = \frac{(-2 - 5r_1) \cdot r_2^{0,5}}{r_1^{0,5}}$$

Gleichsetzen II. = I.:

$$\frac{(-2 - 5r_1) \cdot r_2^{0,5}}{r_1^{0,5}} = \frac{(-8 - 5r_2) \cdot r_1^{0,5}}{r_2^{0,5}} \quad | \cdot r_1^{0,5} \quad | \cdot r_2^{0,5}$$

$$(-2 - 5r_1) \cdot r_2^{0,5} \cdot r_2^{0,5} = (-8 - 5r_2) \cdot r_1^{0,5} \cdot r_1^{0,5}$$

$$-2r_2 - 5r_1r_2 = -8r_1 - 5r_1r_2 \quad | + 5r_1r_2$$

$$-2r_2 = -8r_1 \quad | : (-2)$$

$$r_2 = 4r_1$$

Berechnen von  $r_1$  und  $r_2$  durch Einsetzen von  $r_2 = 4r_1$  in die Produktionsfunktion:

$$500 = 40r_1^{0,5} \cdot (4r_1)^{0,5}$$

$$12,5 = r_1^{0,5} \cdot (4r_1)^{0,5}$$

$$6,25 = r_1$$

$$r_2 = 4 \cdot 6,25$$

$$r_2 = 25$$

Einsetzen von  $r_1 = 6,25$  und  $r_2 = 25$  in transformierte I.:

$$-20\lambda = \frac{(-8 - 5r_2) \cdot r_1^{0,5}}{r_2^{0,5}} = \frac{(-8 - 5 \cdot 25) \cdot 6,25^{0,5}}{25^{0,5}} = -66,5$$

$$\lambda = 3,325$$

Es entstehen Kosten in Höhe von  $8 \cdot 6,25 + 2 \cdot 25 + 5 \cdot 6,25 \cdot 25 = 881,25$  GE. Wird die Produktion  $c = 500$  um eine ME auf 501 erhöht, steigen die Kosten ungefähr um 3,325 GE.

Zulässige Kombinationen der Inputfaktoren in der Umgebung der optimalen Lösung führen zu höheren Kosten. Für z.B. die zulässige Kombination von  $r_1 = 6$  und  $r_2 = 26,041\bar{6}$ , d.h.  $500 = 40\sqrt{6 \cdot 26,041\bar{6}}$ , ergeben sich höhere Kosten von  $K(6, 26,041\bar{6}) = 881,3$ .

Hinweis: Hinreichende Bedingung im Kurs durch Eliminationsmethode überprüfbar.