Aufgabe B0203 — Reelle Funktionen

Geben Sie die Umkehrfunktion, falls diese existiert, sowie den Definitions- und Wertebereich zu folgenden Funktionen und Umkehrfunktionen an.

a) $f(x) = e^x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 5$

c) $f(x) = 5 \cdot \sqrt{x} + 7$

Aufgabe B0203 (Lösungshinweise)

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + 2 && \text{mit } D_f = \mathbb{R}; W_f = (2;\infty) \\ y &= e^x + 2 && |-2 \\ y-2 &= e^x && |\ln(\cdot) \\ \ln(y-2) &= x && \\ f^{-1}(y) &= \ln(y-2) && \text{mit } D_{f^{-1}} = (2;\infty); W_{f^{-1}} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 5 && \text{mit } D_f = \mathbb{R}; W_f = \mathbb{R} \\ y &= x^3 - 5 && |+5 \\ y+5 &= x^3 && |\sqrt[3]{(\cdot)} \\ \sqrt[3]{y+5} &= x && \\ f^{-1}(y) &= \sqrt[3]{y+5} && \text{mit } D_{f^{-1}} = \mathbb{R}; W_{f^{-1}} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \cdot \sqrt{x} + 7 && \text{mit } D_f = \mathbb{R}_+; W_f = [7;\infty) \\ y &= 5 \cdot \sqrt{x} + 7 && |-7 \\ y-7 &= 5 \cdot \sqrt{x} && |:5 \\ \frac{y-7}{5} &= \sqrt{x} && |(\cdot)^2 \\ \left(\frac{y-7}{5}\right)^2 &= x && \\ f^{-1}(y) &= \left(\frac{y-7}{5}\right)^2 && \text{mit } D_{f^{-1}} = [7;\infty); W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$