

Aufgabe B0115

Tilgung eines Kredits

Gegeben seien die Werte der folgenden 4 Investitionsvorhaben:

| | Barwert | Endwert | Annuität | Aufzinsungsfaktor | Laufzeit |
|----|---------|---------|----------|-------------------|----------|
| 1) | | 2 197,0 | | 1,30 | 3 |
| 2) | 5 000 | | 5 750 | | 1 |
| 3) | 1 500 | | | 1,10 | 4 |
| 4) | 2 000 | 2 247,2 | | 1,06 | |

Berechnen Sie die fehlenden Werte mit Hilfe der Ihnen bekannten Formeln aus dem Kontext zur Tilgung eines Kredits.

Aufgabe B0115 (Lösungshinweise)

Die Formel für den Barwert B_0 lautet

$$B_0 = K_n \cdot q^{-n},$$

wobei K_n den Endwert bezeichnet, q den Aufzinsungsfaktor und n die Laufzeit in Jahren. Die verbleibende Größe ist die Annuität a , die sich wie folgt berechnen lässt:

$$a = \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1}.$$

Mit diesen Formeln lassen sich die fehlenden Werte der 4 Kreditvarianten berechnen:

$$\begin{aligned}
 1) \quad B_0 &= K_n \cdot q^{-n} = 2.197 \cdot 1,3^{-3} = 1.000 \\
 a &= \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1} = \frac{1.000 \cdot 1,3^3 \cdot (1,3 - 1)}{1,3^3 - 1} = \frac{2.197 \cdot 0,3}{1,197} \\
 &= 550,63
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad a &= \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1} \\
 \implies 5750 &= \frac{5000 \cdot q^1 \cdot (q - 1)}{q^1 - 1} = \frac{5000 \cdot q \cdot (q - 1)}{(q - 1)} \\
 \iff 5750 &= 5000 \cdot q \\
 \iff q &= \frac{5750}{5000} = 1,15
 \end{aligned}$$

$$K_n = K_0 \cdot q^n = 5000 \cdot 1,15 = 5750 \quad \stackrel{(n=1)}{=} a$$

$$3) \quad K_n = K_0 \cdot q^n = 1500 \cdot 1,1^4 = 2196,15$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1} = \frac{2196,15 \cdot (1,1 - 1)}{1,1^4 - 1} = \frac{2196,15 \cdot 0,1}{0,4641} \\
 &= 473,21
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad B_0 &= K_n \cdot q^{-n} \\
 \implies 2000 &= 2247,2 \cdot 1,06^{-n} \\
 \iff \frac{2000}{2247,2} &= 1,06^{-n} \\
 \iff \ln\left(\frac{2000}{2247,2}\right) &= -n \cdot \ln(1,06) \\
 \iff n &= -\frac{\ln\left(\frac{2000}{2247,2}\right)}{\ln(1,06)} \\
 \iff n &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1} = \frac{2247,2 \cdot (1,06 - 1)}{1,06^2 - 1} \\
 &= \frac{2247,2 \cdot 0,06}{0,1236} = 1090,87
 \end{aligned}$$

Abschließend ergibt sich mit den fehlenden Werten das folgende Tableau:

| | Barwert | Endwert | Annuität | Aufzinsungsfaktor | Laufzeit |
|----|---------|----------|----------|-------------------|----------|
| 1) | 1 000 | 2 197,00 | 550,63 | 1,30 | 3 |
| 2) | 5 000 | 5 750,00 | 5 750,00 | 1,15 | 1 |
| 3) | 1 500 | 2 196,15 | 473,21 | 1,10 | 4 |
| 4) | 2 000 | 2 247,20 | 1 090,87 | 1,06 | 2 |