

Aufgabe B0105

Arithmetische Reihen

Berechnen Sie die Summe der geraden natürlichen Zahlen $k \in \mathbb{N}$ mit $|153 - k| < 18$.

Aufgabe B0105 (Lösungshinweise)

Zunächst muss die Betragsungleichung vereinfacht werden. Hierfür sind gemäß der Betragsdefinition zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} 153 - k &< 18 && \text{(Fall 1)} \\ -(153 - k) &< 18 && \text{(Fall 2)} \end{aligned}$$

Die Umstellung der ersten Ungleichung durch Addition von k und Subtraktion von 18 führt zu:

$$153 - 18 < k$$

Die zweite Ungleichung muss wie folgt umgestellt werden:

$$\begin{aligned} -(153 - k) &< 18 && | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow 153 - k &> -18 && | + k + 18 \\ \Leftrightarrow 153 + 18 &> k \end{aligned}$$

Die Zusammenführung beider Ungleichungen liefert:

$$135 < k < 171$$

Daraus sind $a_1 = 136$ und $a_n = 170$ zu entnehmen. Die Anzahl n ist mit Hilfe folgender Formel zu ermitteln:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot 2 \\ \Rightarrow 170 &= 136 + (n - 1) \cdot 2 && | - 136 \\ \Leftrightarrow 34 &= (n - 1) \cdot 2 && | : 2 \\ \Leftrightarrow 17 &= n - 1 && | + 1 \\ \Leftrightarrow n &= 18 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Summe der geraden natürlichen Zahlen $s_{18} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{136 + 170}{2} \cdot 18 = 2754$.