

FERNUNIVERSITÄT HAGEN

Fakultät für Mathematik und Informatik

Lehrgebiet Analysis

**Spektrale Abschätzungen des Laplace-Operators auf  
Quantengraphen**

MASTER-ARBEIT

Marco Düfel

Matrikelnummer: 8499101

Erstgutachter: Prof. Dr. Delio Mugnolo

Zweitgutachter: Marvin Plümer

28. März 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Präliminarien</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Quantengraphen</b>	<b>9</b>
3.1	Metrische Graphen . . . . .	9
3.2	Der Laplace-Operator auf Quantengraphen . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Quadratische Formen</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Selbstadjungierte Erweiterungen von <math>\mathcal{H}_0</math></b>	<b>32</b>
5.1	Die Friedrich'sche und Neumann'sche Erweiterung . . . . .	32
5.2	Das Spektrum auf Graphen im Fall endlicher Länge . . . . .	40
5.3	Das Spektrum auf Graphen im Fall unendlicher Länge . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Spektrale Abschätzungen</b>	<b>45</b>
6.1	Spektralabschätzungen für die Neumann'sche Erweiterung . . . . .	46
6.1.1	Spektralabschätzung von unten in Abhängigkeit von der Länge . . . . .	46
6.1.2	Spektralabschätzung von unten in Abhängigkeit von Durchmesser und Länge . . . . .	54
6.1.3	Spektralabschätzung von oben in Abhängigkeit von Durchmesser und Länge . . . . .	56
6.2	Spektrale Abschätzungen für die Friedrich'sche Erweiterung . . . . .	60
6.2.1	Spektrale Abschätzung von unten . . . . .	60
6.2.2	Spektrale Abschätzungen von oben . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>62</b>
<b>8</b>	<b>Notation</b>	<b>63</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>64</b>

## 1 Einleitung

„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“, so poetisch soll der Gelehrte Galileo Galilei die Tatsache zum Ausdruck gebracht haben, dass sich zahlreiche Probleme der Physik mit Hilfe mathematischer Theorien beschreiben und lösen lassen. Während Galilei sich zu seiner Zeit vornehmlich auf Aspekte der heutigen klassischen Newton’schen Physik bezogen haben muss, so bleibt der Ausspruch auch für die moderne Physik nicht weniger wahr. Die Quantenmechanik untersucht beispielsweise die physikalischen Zustände im subatomaren Bereich. Die Sprache der Mathematik, die hier Verwendung findet, benutzt vielfach Grammatik und Vokabular, welche die Funktionalanalysis und die Theorie der Differentialgleichungen bereitstellen. Ein Beispiel ist der sogenannte Schrödinger-Operator  $\mathcal{S}$ , der zur Beschreibung der Bewegung eines Teilchens in einem Potential dient und dessen Eigenwerte bestimmte Zustände von Teilchen repräsentieren. Eine mögliche formale Darstellung lautet [1]

$$\mathcal{S} = -\frac{\hbar^2}{2m}\mathcal{H} + V.$$

In dieser Formel stehen die Konstanten  $\hbar, m$  für das reduzierte Planck’sche Wirkungsquantum beziehungsweise eine Masse. Der Ausdruck  $\mathcal{H}$  bezeichnet den Laplace-Operator und  $V$  symbolisiert ein Skalarpotential. Ohne die Physik hinter diese Formel weiter erläutern zu wollen, sei der Blick auf den Laplace-Operator  $\mathcal{H}$  gelenkt, der als Operator der zweiten Ableitung fungiert. Dieser lässt sich auf verschiedenen Bereichen definieren und hinsichtlich seiner Eigenschaften und insbesondere auch Eigenwerte untersuchen. Klassischerweise handelt es sich bei dem Definitionsbereich um Sobolevräume der Art  $H^2(\Omega)$  mit einer Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Diese Grundmenge lässt sich verallgemeinern, sodass der Operator  $\mathcal{H}$  mit einem Definitionsbereich im Funktionenraum  $L^2(\mathcal{G})$  auf einem Graphen  $\mathcal{G}$  definiert werden kann. Einen solchen Differentialoperator auf einem Graphen bezeichnet man dann als Quantengraphen. Die physikalische Interpretation eines solchen Quantengraphen könnte beispielsweise ein Molekül sein und der Schrödinger-Operator beziehungsweise der Laplace-Operator dienen der Beschreibung der Elektronen und ihrer Zustände in diesem Molekül. Daher liegt es nicht nur im intrinsischen Interesse der Mathematik, sondern möglicherweise auch in dem der Physik, den Laplace-Operator auf Graphen zu studieren, um in obiger Metapher bleibend ein paar weitere mathematische Worte dem Buch der Natur hinzuzufügen zu können.

Für endliche Graphen und den zugehörigen Funktionenraum  $L^2(\mathcal{G})$  sind zahlreiche nichttriviale Aussagen über den Laplace-Operator auf einem solchen Graphen bekannt. Unter bestimmten „Standardannahmen“ ist der Operator  $\mathcal{H}$  auf endlichen Graphen selbstadjungiert und besitzt ein rein diskretes Spektrum. In der Folge kann zum Beispiel geschlossen werden, welche unteren Grenzen für die Eigenwerte des Laplace-Operators in Abhängigkeit von der Länge  $L(\mathcal{G})$  des Graphen gelten. Eine der bekanntesten Abschätzungen ist die von

Nicaise [2] im Jahr 1987 gefundene und von Friedlander 2005 [3] verbesserte Abschätzung der unteren Grenzen der Eigenwerte  $\lambda_k$  des Laplace-Operators  $\mathcal{H}$  als

$$\lambda_k(\mathcal{H}) \geq \frac{(k+1)^2\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \quad k \geq 1.$$

In der Veröffentlichung von Kennedy im Jahr 2016 [4] wurden weitere Abschätzungen für den endlichen Fall bewiesen, beispielsweise in Abhängigkeit von Länge und Durchmesser des Graphen oder von der Anzahl der Knoten und Kanten. Möchte man nun analoge Aussagen für Graphen mit unendlich vielen Knoten und Kanten finden, so ist das erste Problem, dass der Laplace-Operator unter den „Standardbedingungen“ im Allgemeinen nicht mehr selbstadjungiert ist. Diese Problematik wird in der Veröffentlichung von Kostenko aus 2019 [5] dargestellt und es werden verschiedene Wege aufgezeigt, auf welchen Definitionsbereichen der Laplace-Operator auf einem unendlichen Graphen selbstadjungiert ist. In der vorliegenden Arbeit wird der Laplace-Operator auf unendlichen Graphen hinsichtlich seines Spektrums untersucht. Dabei werden in Kapitel 2 als Erstes einige funktionalanalytischen Präliminarien dargestellt. Das sich anschließende dritte Kapitel widmet sich den grundlegenden Definitionen von metrischen Graphen sowie den funktionalanalytischen Strukturen, die auf metrischen Graphen definiert werden können. Außerdem werden der maximale und der minimale Laplace-Operator auf unendlichen Graphen eingeführt. Beide Operatoren werden sich als im Allgemeinen nicht selbstadjungiert erweisen. Das Kapitel beruht im Wesentlichen auf der Veröffentlichung [5]. Im vierten Kapitel folgt als Exkurs ein kurzer Abschnitt über die Theorie quadratischer Formen. Diese werden ein essentielles Hilfsmittel zum Auffinden selbstadjungierter Realisationen des Laplace-Operators auf unendlichen Graphen sein. Einige dieser selbstadjungierten Erweiterungen werden im fünften Kapitel eingeführt, wobei die Friedrich'sche Erweiterung  $\mathcal{H}_F$  und die Neumann'sche Erweiterung  $\mathcal{H}_N$  von besonderem Interesse sein werden. Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir in Kapitel 5 als erstes Resultat, dass im Falle endlicher Länge des unendlichen Graphen sowohl  $\mathcal{H}_F$  als auch  $\mathcal{H}_N$  ein rein diskretes Spektrum haben (Korollar 5.17). Darauf aufbauend analysieren wir im Kapitel 6.1 die Eigenwerte der Neumann'schen Erweiterung für den Fall endlicher Länge genauer. Das Hauptergebnis (Satz 6.2) wird sein, dass sich die Abschätzung aus dem endlichen Fall vollständig überträgt. Es gilt für den  $k$ -ten Eigenwert  $\lambda_k$  der Neumann'schen Erweiterung

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \frac{(k+1)^2\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \quad k \geq 1.$$

Des Weiteren können wir für die Neumann'sche Erweiterung zwei Sätze aus der Veröffentlichung [4], welche Abschätzungen in Abhängigkeit von Durchmesser und Länge geben, teilweise auf den unendlichen Fall übertragen. Im Spezialfall, dass der Graph ein Baum ist, erhalten wir eine weitere Abschätzung, wie sie für den endlichen Fall von Rohleder [6] bewiesen wurde. Das Kapitel 6.2 beschäftigt sich mit Spektralabschätzungen für die Fried-

rich'sche Erweiterung. Für diese können wir auch die Spektrallücke im Falle Graphen endlicher Länge mit

$$\lambda_1(\mathcal{H}_F) \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2}$$

als bestmögliche Abschätzung beweisen. Was Graphen unendlicher Länge angeht, so werden in dieser Arbeit keine Antworten zum Fragen des Spektrums des Laplace-Operators zu finden sein. Dies liegt daran, dass bestimmte Kompaktheitsvoraussetzungen bei unendlicher Länge des Graphen nicht mehr gelten. Diese werden aber nicht nur für den Beweis benötigt, dass die betrachteten Laplace-Operatoren ein diskretes Spektrum haben, sondern auch für die Untersuchung des Spektrums selbst wird dies immer wieder benötigt: die meisten Beweise beruhen auf der Möglichkeit, einen unendlichen Graphen endlicher Länge durch endliche Graphen zu approximieren. Dieses Argument kann bei unendlicher Länger in dieser Form aber nicht mehr angewandt werden.

## 2 Präliminarien

In diesem Kapitel werden im Wesentlichen bekannte, aber wichtige Resultate aus der Analysis zusammengestellt. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Tatsachen über Hilberträume. Der zu Grunde liegende Skalarkörper  $\mathbb{K}$  kann hier entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  sein [7, Satz 1.2.15].

**Satz 2.1.** *Sei  $I$  eine abzählbare Menge und für jedes  $i \in I$  sei  $(X_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i)$  ein Hilbertraum. Sei*

$$X := \left\{ f := (f_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} X_i : \sum_{i \in I} \|f_i\|_i^2 < \infty \right\}$$

und die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i \in I} \langle f_i, g_i \rangle_i \quad \text{für } f = (f_i)_{i \in I}, \quad g = (g_i)_{i \in I} \in X$$

Dann ist  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum.

Zwischen einem Hilbertraum  $X$  und seinem Dualraum  $X'$  besteht folgender fundamentaler Zusammenhang [8, Satz 6.3.9].

**Satz 2.2** (Riesz'scher Darstellungssatz). *Sei  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und  $x' \in X'$  ein lineares stetiges Funktional. Dann existiert genau ein  $h \in X$ , sodass*

$$x'(x) = \langle x, h \rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Elemente eines Banachraumes  $X$  lassen sich häufig auch als Elemente eines anderen Raumes  $Y$  auffassen. Ist die Abbildung  $\mathcal{I} : X \rightarrow Y$  zudem stetig, spricht man davon, dass  $X$  stetig in  $Y$  eingebettet ist, symbolisch mit  $X \hookrightarrow Y$  ausgedrückt. Darauf baut die folgende Definition einer kompakten Einbettung auf.

**Definition 2.3** (Kompakte Einbettung). *Seien  $X, Y$  Banachräume, für die eine stetige Einbettung  $X \hookrightarrow Y$  existiert. Wir nennen  $X$  kompakt in  $Y$  eingebettet, wenn die Einheitskugel  $B \subset X$  eine präkompakte Menge in  $Y$  ist.*

Für ein offenes Intervall  $(a, b)$  bezeichne  $L^2((a, b))$  den Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Funktionen; die Sobolevräume  $H^1((a, b))$  bzw.  $H^2((a, b))$  erhalten wir mit  $f'$  als schwacher Ableitung analog als

$$H^1((a, b)) = \{f \in AC((a, b)) \mid f' \in L^2((a, b))\} \quad H^2((a, b)) = \{f \in H^1((a, b)) \mid f' \in H^1((a, b))\}$$

wobei  $AC((a, b))$  den Raum der absolutstetigen Funktionen auf  $(a, b)$  bezeichnet. Des Weiteren definieren wir wie üblich die Räume  $H_0^1((a, b))$  und  $H_0^2((a, b))$  als die Abschlüsse des Raums  $C_c^\infty((a, b))$  der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger bezüglich der Normen  $\|\cdot\|_{H^1((a, b))}$  beziehungsweise  $\|\cdot\|_{H^2((a, b))}$ . Eine detaillierte Darstellung,

auch zu den zugehörigen Normen der Banachräume, findet sich in Kapitel 5 von [8].

Für die Sobolevräume lassen sich verschiedene Einbettungssätze formulieren. Folgende Formulierung des Einbettungssatz werden wir benötigen [8, Satz 5.3.25], [9].

**Satz 2.4** (Sobolev'scher Einbettungssatz). *Sei  $(a, b)$  ein reelles Intervall und  $H^1((a, b))$  der erste Sobolevraum. Dann existiert eine nur von der Länge  $L$  des Intervalls abhängige Konstante  $C_L$ , sodass für alle  $f \in H^1((a, b))$*

$$\|f\|_\infty \leq C_L \|f\|_{H^1((a, b))}$$

*gilt. Für die Konstante  $C_L$  gilt die Abschätzung*

$$C_L \leq \sqrt{\coth(L)}.$$

Dabei bezeichnet die  $\|\cdot\|_\infty$  die Supremumsnorm, das heißt also im obigen Satz

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in (a, b)} |f(x)|.$$

Relevant im späteren Verlauf ist weniger die genaue Abschätzung der Konstante, sondern, dass  $L > L'$  auch  $C_L < C_{L'}$  impliziert. Bei der Untersuchung von linearen Operatoren auf einem Hilbertraum stellt sich häufig die Frage, ob der Operator selbstadjungiert ist. Folgendes Kriterium werden wir später benötigen [7, Satz 2.5.16].

**Proposition 2.5.** *Sei  $A$  ein im Hilbertraum  $X$  dicht definierter linearer Operator. Ist  $A$  symmetrisch und surjektiv, dann ist  $A$  selbstadjungiert.*

Selbstadjungierte Operatoren in Hilberträumen lassen sich mit Hilfe des Spektralsatzes als Spektralintegral darstellen. Wir formulieren den Spektralsatz mit Hilfe von Spektralscharen. Dazu benötigen wir folgende Definitionen vorab [7, Definition 2.5.5].

**Definition 2.6.** *Seien  $A, B$  symmetrische und nach unten beschränkte Operatoren im Hilbertraum  $X$ . Mit  $\text{dom}(A) \subset X$  beziehungsweise  $\text{dom}(B) \subset X$  bezeichnen wir die Definitionsbereiche der Operatoren. Es heißt  $A$  kleiner oder gleich  $B$  (Bezeichnung  $A \leq B$ ), wenn*

$$\text{dom}(B) \subset \text{dom}(A) \quad \text{und} \quad \langle Af, f \rangle \leq \langle Bf, f \rangle \quad \text{für jedes } f \in \text{dom}(B)$$

*ist.*

Ist ein Operator größer oder gleich dem Nulloperator, so erhält dieser Operator eine separate Bezeichnung.

**Definition 2.7.** *Sei  $A$  ein symmetrischer Operator in einem Hilbertraum  $X$  mit  $\text{dom}(A) \subset X$ . Dann heißt  $A$  positiv, wenn*

$$\langle Af, f \rangle \geq 0$$

für alle  $f \in \text{dom}(A)$ .

Da orthogonale Projektionen in einem Hilbertraum stets beschränkt und symmetrisch sind, können wir folgendermaßen Spektralscharen definieren [7, Definition 3.3.1].

**Definition 2.8** (Spektralschar). *Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(X)$  eine beschränkte Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $E(\lambda)$  ist eine orthogonale Projektion für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- (ii) für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  folgt  $E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$ ,
- (iii) für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  und alle  $f \in X$  gilt  $E(\lambda + \varepsilon)f \rightarrow E(\lambda)f$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\varepsilon > 0$ ,
- (iv) es gilt für  $\lambda \rightarrow -\infty$   $E(\lambda)f \rightarrow 0$  für alle  $f \in X$  und für  $\lambda \rightarrow \infty$   $E(\lambda)f \rightarrow f$  für alle  $f \in X$ .

Mit Hilfe der Spektralscharen lässt sich das so genannte  $E$ -Integral für Treppenfunktionen erklären und schließlich approximativ für alle  $E$ -messbaren Funktionen definieren. Der Spektralsatz stellt einen eindeutigen Zusammenhang zwischen einem selbstadjungierten Operator und einer Spektralschar her [7, Satz 3.4.1].

**Satz 2.9** (Spektralsatz). *Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $A$  ein selbstadjungierter Operator in  $X$ . Dann gibt es genau eine Spektralschar  $E$  in  $X$ , sodass*

$$A = \int \lambda dE(\lambda).$$

Mit Hilfe des Spektralsatzes lässt sich das Spektrum anhand der eindeutig zum Operator gehörenden Spektralschar untersuchen. Die folgende Unterteilung in das wesentliche und diskrete Spektrum ist von besonderem Interesse [7, Definition 3.5.4].

**Definition 2.10** (Wesentliches und diskretes Spektrum). *Sei  $X$  ein Hilbertraum und*

$$A: \text{dom}(A) \subset X \rightarrow X$$

*ein selbstadjungierter Operator in diesem mit dem Spektrum  $\sigma(A)$ . Dann ist das wesentliche Spektrum  $\sigma_e(A)$  definiert als die Menge aller Punkte des Spektrums  $\sigma$  von  $A$ , die entweder Häufungspunkte von  $\sigma(A)$  oder isolierte Eigenwerte unendlicher Vielfachheit von  $A$  sind. Das diskrete Spektrum  $\sigma_d(A)$  ist definiert als  $\sigma_d(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$ . Ist  $\sigma_d(A) = \sigma(A)$  so hat  $A$  ein rein diskretes Spektrum.*

Das folgende Kriterium erlaubt uns durch Bestimmung einer Resolvente  $R(\lambda, A)$  für ein  $\lambda$  in der Resolventenmenge  $\rho(A)$  von  $A$  den Schluss auf ein rein diskretes Spektrum von  $A$  [7, Satz 3.2.4].

**Satz 2.11.** *Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $A$  ein selbstadjungierter Operator in  $X$ . Es gebe ein  $\lambda$  in der Resolventenmenge  $\rho(A)$  derart, dass die Resolvente  $R(\lambda, A)$  kompakt ist. Dann hat  $A$  ein rein diskretes Spektrum.*



Hat ein halbbeschränkter selbstadjungierter Operator ein rein diskretes Spektrum, so kann man mit Hilfe des Rayleigh- und des Min-Max-Prinzips die Eigenwerte bestimmen [7, Satz 3.5.7, Satz 3.5.8].

**Satz 2.12** (Rayleigh'sches Prinzip). *Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $A$  ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator mit rein diskretem Spektrum  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_n \leq \dots$ , wobei jeder Eigenwert so oft in dieser Folge auftritt, wie es seiner Vielfachheit entspricht. Sei  $\{f_n\}$  das Orthonormalsystem der zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt*

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle} : 0 \neq f \in \text{dom}(A) \right\}$$

und

$$\lambda_k = \min \left\{ \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle} : 0 \neq f \in \text{dom}(A), f \perp \{f_1, \dots, f_{k-1}\} \right\}$$

für  $k = 2, 3, \dots$

**Satz 2.13** (Min-Max-Prinzip). *Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $A$  ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator mit rein diskretem Spektrum  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_n \leq \dots$ , wobei jeder Eigenwert so oft in dieser Folge auftritt, wie es seiner Vielfachheit entspricht. Außerdem stehe  $M_k$  für einen Teilraum von  $\text{dom}(A)$  der Dimension  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Dann gilt*

$$\lambda_k = \min_{M_k \subset \text{dom}(A)} \max_{0 \neq f \in M_k} \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle}.$$

### 3 Quantengraphen

Im Rahmen des Studiums sind Graphen in der Regel aus der kombinatorischen Graphentheorie bekannt als höchstens abzählbare Menge von Kanten  $E$  und Knoten  $V$ . Solchen Graphen fehlen noch zusätzliche mathematische Strukturen, um sie als Objekte der Funktionalanalysis erkennen zu können. Um dies zu erreichen, erweitern wir als Erstes den Begriff des kombinatorischen Graphen zu dem eines metrischen Graphen. Im Anschluss führen wir Funktionenräume auf den Kanten des metrischen Graphen ein. Mit diesen Grundlagen können wir schließlich einen Differentialoperator, in dieser Arbeit den Operator der negativen zweiten Ableitung, auf dem Graphen definieren, sodass wir den „eigentlichen“ Quantengraphen erhalten.

#### 3.1 Metrische Graphen

Wir beginnen mit einer grundlegenden Definition [10, A.14].

**Definition 3.1** (Metrischer Graph). *Sei  $G = (V, E)$  ein kombinatorischer, ungerichteter Graph mit der Kantenmenge  $E$  und der Knotenmenge  $V$ . Ein metrischer Graph  $\mathcal{G}$  ist ein Tripel  $\mathcal{G} = (V, E, \lambda)$  mit einer Funktion  $\lambda$ , die  $\lambda: E \rightarrow (0, \infty)$  für alle  $e \in E$  erfüllt. Das Volumen oder die Länge eines Graphen definieren wir als*

$$L(\mathcal{G}) = \sum_{e \in E} \lambda(e),$$

wobei wir  $L(\mathcal{G}) = \infty$  als Graphen unendlicher Länge zulassen.

Im Falle eines metrischen Graphen identifizieren wir die Kanten  $e \in E$  als offene Intervalle  $e = (0, \lambda(e))$  und die Knoten  $v, w$  der Kante  $e = (v, w)$  als Randpunkte des Intervalls. Wenn wir von einem Punkt  $x \in \mathcal{G}$  sprechen, handelt es sich entweder um einen Knoten oder einen Punkt  $x \in e$ . Für zwei Punkte  $x, y \in e$  definieren wir den Abstand  $d(x, y) := |x - y|$  als den euklidischen Abstand zwischen diesen Punkten. Da wir eine Kante  $e = (v, w)$  als Intervall mit den Randpunkten  $\{0, \lambda(e)\}$  auffassen, verstehen wir unter dem Abstand von  $x \in e$  zu einem Knotenpunkt dann  $d(x, v) = |x - 0|$  bzw.  $d(x, w) = |x - \lambda(e)|$ . Um einen metrischen Graphen als metrischen Raum auffassen zu können, müssen wir eine Metrik auf dem gesamten Graphen definieren können. Dazu führen wir die Definition von Pfaden ein. Dafür benötigen wir die Notation von benachbarten Knoten. Zwei Knoten  $v_i, v_j \in V$  eines Graphen  $\mathcal{G} = (V, E, \lambda)$  heißen benachbart, symbolisch  $v_i \sim v_j$ , wenn  $(v_i, v_j) \in E$ , die beiden Knoten also eine Kante in dem Graphen  $\mathcal{G}$  bilden.

**Definition 3.2** (Pfad). *Sei  $\mathcal{G}$  ein metrischer Graph mit der Kantenmenge  $E$  und der Knotenmenge  $V$ . Dann heißt eine Folge von Knoten  $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in V$  mit  $v_{k-1} \sim v_k$  für alle  $1 \leq k \leq n$  und  $n \geq 1$  ein Pfad  $P$  in  $\mathcal{G}$ .*

*Ein Pfad  $P_{x,y}$  zwischen zwei beliebigen Punkten  $x, y \in \mathcal{G}$  ist ein Pfad  $P = (x, v_0, v_1, \dots, v_n, y)$ . Gilt zudem  $x \neq v_i \neq v_j \neq y$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ , so heißt  $P_{x,y}$  Weg.*

Mit Hilfe der Pfaddefinition können wir erklären, wann wir einen metrischen Graphen als zusammenhängend betrachten.

**Definition 3.3.** *Ein metrischer Graph  $\mathcal{G}$  heißt zusammenhängend, wenn für alle  $x, y \in \mathcal{G}$  ein Pfad existiert, der  $x$  und  $y$  verbindet.*

Entscheidend an dieser Definition ist, dass  $P$  nach der Definition 3.2 stets eine endliche Folge ist. Dadurch können wir im Folgenden den Abstand zwischen zwei Punkten  $x, y \in \mathcal{G}$  definieren.

Für die Länge eines Pfades  $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  wählen wir die intuitive Definition der Länge als

$$L(P) := \sum_{e \in P} \lambda(e)$$

und somit der Summe der Kantenlängen entlang des Pfades. Besteht der Pfad nur aus einem Knoten, so setzen wir  $L(P) = 0$ . Die Länge eines Pfades  $P_{x,y} = (x, v_0, v_1, \dots, v_n, y)$  ergibt sich dann nahelegend als

$$L(P_{x,y}) = |x - v_0| + |y - v_n| + \sum_{e \in P} \lambda(e).$$

Die obige Definition 3.1 eines Graphen ist noch zu allgemein, um auf diesen sinnvoll weitere Strukturen definieren zu können. Zum Beispiel ist noch nicht ausgeschlossen, dass ein Knoten unendlich viele benachbarte Knoten haben könnte. Zudem sind für uns nur zusammenhängende Graphen von Interesse. Wir vereinbaren daher in dieser Arbeit folgende Standardannahmen.

**Vereinbarung 1.** *Der Graph  $\mathcal{G}$  ist zusammenhängend und lokal endlich, das heißt jeder Knoten hat höchstens endliche viele Nachbarknoten.*

Auf einem solchen lokal endlichen Graphen lassen sich verschiedene Metriken definieren, als die natürliche betrachtet man häufig die Metrik des kürzesten Pfades.

**Definition 3.4.** *Für zwei beliebige Punkte  $x, y \in \mathcal{G}$  mit  $x \in e_x$  oder  $x \in V$  und  $y \in e_y$  oder  $y \in V$  definieren wir die Abbildung*

$$d: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \quad d(x, y) := \begin{cases} |x - y| & e_x = e_y \\ \inf_{P \in \mathcal{P}(x,y)} L(P) & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $\mathcal{P}(x, y)$  als der Menge aller Pfade von  $x$  nach  $y$ . Wir bezeichnen  $d$  als Metrik des kürzesten Pfades.

Dass  $d$  tatsächlich eine Metrik ist, lässt sich einfach überprüfen.

**Lemma 3.5.** *Die Abbildung  $d$  aus Definition 3.4 ist eine Metrik.*

*Beweis.* Da nur ungerichtete Graphen betrachtet werden, ist zunächst die Symmetrie von  $d$  gegeben.

Ist  $x = y$  so folgt für  $x, y \in V$ , dass  $L(P) = 0$ , da es sich um einen Pfad handelt, der nur aus einem Knoten besteht. Sind  $x, y \in e$ , so ergibt sich  $d(x, y) = 0$  aus den Eigenschaften der euklidischen Metrik.

Sei nun  $d(x, y) = 0$ . Angenommen, es ist  $x \neq y$ . Liegt  $x$  im Inneren der Kante  $e_x$  so folgt aus den Eigenschaften der euklidischen Metrik, dass  $y$  nicht in  $e_x$  liegen kann. Dann sind aber  $x, y$  über einen Pfad verbunden und wir erhalten

$$d(x, y) = \inf_{P \in \mathcal{P}(x, y)} L(P) \geq \min\{|x|, |x - \lambda(e_x)|\} > 0.$$

Wenn nun  $x, y \in V$  mit  $x \neq y$  sind, so ist  $\inf_{P \in \mathcal{P}(x, y)} L(P) \geq \inf_{v_i \sim x} \lambda(x, v_i)$ . Da der Graph lokal endlich ist, ist das Infimum ein Minimum und damit  $\min_{v_i \sim x} \lambda(x, v_i) > 0$ . Also ist  $d$  positiv definit. Ist  $P_1$  ein Pfad von  $x$  nach  $z$  und  $P_2$  ein Pfad von  $z$  nach  $y$ , so ist die Zusammensetzung am artifiziiellen Knoten  $z$  ein Pfad von  $x$  nach  $y$  und da das Infimum betrachtet wird, folgt mit  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  die Dreiecksungleichung für  $d$ . □

Mit Hilfe der Metrik können wir nun auch erklären, was wir unter dem Durchmesser eines metrischem Graphen verstehen.

**Definition 3.6** (Durchmesser eines Graphen). *Sei  $\mathcal{G}$  ein metrischer Graph und  $d$  die Metrik des kürzesten Pfades. Dann heißt*

$$D(\mathcal{G}) := \sup_{x, y \in \mathcal{G}} d(x, y)$$

*der Durchmesser des Graphen.*

In den folgenden Ausführungen werden sowohl endliche als auch unendliche Graphen betrachtet. In den Fällen, in denen wir endliche Graphen betrachten, wird dies explizit genannt. Viele Definitionen, die für unendliche Graphen eingeführt werden, sind im endlichen Fall nicht sinnvoll. Daher gilt in dieser Arbeit folgende Vereinbarung:

**Vereinbarung 2.** *Der Graph  $\mathcal{G}$  hat unendlich viele Knoten. Sofern es sich (auch) um einen endlichen Graphen handeln kann oder soll, wird dies explizit genannt.*

Mit diesen Voraussetzungen können wir funktionalanalytischen Strukturen definieren. Für eine Kante  $e$  bezeichne  $L^2(e)$  den Hilbertraum der auf dem offenen Intervall  $(0, \lambda(e))$  quadratisch integrierbaren Funktionen; die Sobolevräume  $H^1(e)$  bzw.  $H^2(e)$  auf den Kanten erhalten wir analog als

$$H^1(e) = \{f \in AC(e) \mid f' \in L^2(e)\} \quad H^2(e) = \{f \in H^1(e) \mid f' \in H^1(e)\},$$

wobei  $AC(e)$  den Raum der absolutstetigen Funktionen auf  $e$  bezeichnet. Dann definieren wir [5, 2.3]:

**Definition 3.7.** Für einen metrischen Graphen  $\mathcal{G}$  bezeichnen wir mit  $(L^2(\mathcal{G}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{G})})$  den definierten Hilbertraum

$$L^2(\mathcal{G}) := \bigoplus_{e \in E} L^2(e) = \left\{ f = \{f_e\}_{e \in E} \mid f_e \in L^2(e), \sum_{e \in E} \|f_e\|_{L^2(e)}^2 < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} := \sum_{e \in E} \langle f_e, g_e \rangle_{L^2(e)} \quad \text{für } f, g \in L^2(\mathcal{G}).$$

Analog definieren wir den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf  $\mathcal{G}$  als

$$L_c^2(\mathcal{G}) = \{f \in L^2(\mathcal{G}) \mid f \neq 0 \text{ auf höchstens endlichen vielen Kanten } e \in E\}.$$

Bei  $L^2(\mathcal{G})$  handelt es sich somit um den Produktraum aus den abzählbar vielen Räumen  $L^2(e)$ . Der Raum ist wohldefiniert und ein Hilbertraum, was eine Folgerung aus Satz 2.1 ist. Es wäre nun naheliegend, den Sobolevraum  $H^1(e)$  auf den Kanten ebenso durch Produktbildung auf dem Graphen zum Raum  $H^1(\mathcal{G})$  zu verallgemeinern. Eines der Merkmale des Raumes  $H^1((a, b))$  auf einem Intervall  $(a, b)$  ist, dass in Folge des Sobolev'schen Einbettungssatz (siehe 2.4)  $H^1((a, b)) \subset C([a, b])$  gilt. Daher sollte eine Funktion des Raumes  $H^1(\mathcal{G})$  auch auf dem Graphen stetig sein. Daher müssen wir klären, wann eine Funktion  $f$  auf einem Graphen  $\mathcal{G}$  stetig ist.

**Definition 3.8.** Sei  $f$  eine Funktion auf dem metrischen Graphen  $\mathcal{G} = (V, E, \lambda)$ . Dann heißt  $f$  stetig auf  $\mathcal{G}$ , wenn

1.  $f$  auf jeder Kante  $e \in E$  als Funktion auf dem offenen Intervall  $(0, \lambda(e))$  stetig ist und
2. für jeden Knoten  $v$  mit  $\{e_{v_1}, \dots, e_{v_n}\}$  als Menge der zu  $v$  inzidenten Kanten gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow v \\ x \in e_{v_i}}} f(x) = f(v) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Den Raum der auf dem Graphen  $\mathcal{G}$  stetigen Funktionen bezeichnen wir mit  $C(\mathcal{G})$ .

Den Raum  $H^1(\mathcal{G})$  definieren wir nun folgendermaßen [5, 3.1].

**Definition 3.9.** Für einen metrischen Graphen  $\mathcal{G}$  bezeichnen wir mit  $(H^1(\mathcal{G}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\mathcal{G})})$  den Vektorraum

$$H^1(\mathcal{G}) := \left\{ f \in L^2(\mathcal{G}) \cap C(\mathcal{G}) \mid f_e \in H^1(e) \forall e \in E, \sum_{e \in E} \|f_e\|_{H^1(e)}^2 < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\mathcal{G})} := \sum_{e \in E} \langle f_e, g_e \rangle_{H^1(e)} \text{ für } f, g \in H^1(\mathcal{G}).$$

Wir müssen zeigen, dass der so definierte Raum  $(H^1(\mathcal{G}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\mathcal{G})})$  ein Hilbertraum ist. In diesem Fall folgt das nicht unmittelbar aus Satz 2.1, da es sich nicht um den Produktraum  $\bigoplus_{e \in E} H^1(e)$  handelt.

**Proposition 3.10.** *Der Raum  $(H^1(\mathcal{G}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\mathcal{G})})$  aus Definition 3.9 ist ein Hilbertraum.*

Vor dem Beweis stellen wir das folgende Lemma voran. Aus diesem geht hervor, dass alle Funktionen  $f \in H^1(\mathcal{G})$  beschränkt sind [5, Lemma 3.2].

**Lemma 3.11.** *Sei  $f \in H^1(\mathcal{G})$ . Dann ist  $f$  beschränkt und es existiert eine Konstante  $C_{\mathcal{G}}$ , sodass*

$$\sup_{x \in \mathcal{G}} |f(x)| \leq C_{\mathcal{G}} \|f\|_{H^1(\mathcal{G})}$$

für alle  $f \in H^1(\mathcal{G})$  gilt.

*Beweis.* Wir wählen einen Weg auf  $\mathcal{G}$ , also einen Pfad  $P = (v_0, \dots, v_n)$ , der sich in keinem Knoten schneidet. Sei nun  $x \in P$  ein Punkt auf diesem Pfad und  $f \in H^1(\mathcal{G})$  eine beliebige Funktion. Die Einschränkung von  $f$  auf den Pfad  $P$  können wir mit einer Funktion  $\tilde{f}$  auf dem Intervall  $I_P = (0, L(P))$  identifizieren, für die  $\tilde{f} \in H^1(I_P)$  und

$$\tilde{f} = f|_P \quad \tilde{f}' = f'|_P$$

gilt. Für das Intervall mit der Länge  $\frac{L(P)}{2}$  garantiert der Sobolev'sche Einbettungssatz 2.4 die Existenz einer Konstante  $C_{\frac{L(P)}{2}}$ , sodass für alle  $\tilde{f} \in H^1(I_P)$  und somit auch für alle  $f \in H^1(\mathcal{G})$

$$|f(x)| \leq C_{\frac{L(P)}{2}} \|f\|_{H^1(I_{P/2})} \leq C_{\frac{L(P)}{2}} \|f\|_{H^1(I_P)} \leq C_{\frac{L(P)}{2}} \|f\|_{H^1(\mathcal{G})}$$

gilt. Sei nun  $x \in \mathcal{G} \setminus P$ . Dann verbinden wir  $x$  mit  $v_0$  oder  $v_n$ , sodass ein Pfad  $P_x$  ohne Schnittpunkte entsteht, für den  $L(P_x) \geq \frac{L(P)}{2}$  gilt. Mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz folgt die Existenz einer Sobolevkonstante  $C_{P_x} \leq C_{\frac{L(P)}{2}}$ , sodass die Abschätzung

$$|f(x)| \leq C_{P_x} \|f\|_{H^1(I_{P_x})} \leq C_{\frac{L(P)}{2}} \|f\|_{H^1(I_{P_x})} \leq C_{\frac{L(P)}{2}} \|f\|_{H^1(\mathcal{G})}$$

für alle  $f \in H^1(\mathcal{G})$  erfüllt ist. Da  $x \in \mathcal{G}$  beliebig war, erhalten wir insgesamt, dass für alle  $f \in H^1(\mathcal{G})$

$$\sup_{x \in \mathcal{G}} |f(x)| \leq C_{\frac{L(P)}{2}} \|f\|_{H^1(\mathcal{G})}$$

zutritt und damit alle Funktionen aus  $H^1(\mathcal{G})$  beschränkt sind.  $\square$

Mit Hilfe des Lemmas folgt der Beweis von Proposition 3.10.

*Beweis von Proposition 3.10.* Der Raum  $H^1(\mathcal{G})$  unterscheidet sich vom Raum  $\bigoplus_{e \in E} H^1(e)$  dadurch, dass eine Funktion  $f \in H^1(\mathcal{G})$  auf den abzählbar vielen Knoten stetig sein muss. Da für zwei Funktionen  $f, g \in H^1(\mathcal{G})$  auch die Funktion  $a(f + g)$  mit einem  $a \in \mathbb{K}$  stetig ist, ist der Raum  $H^1(\mathcal{G})$  ein Vektorraum. Jede Funktion  $f \in H^1(\mathcal{G})$  kann als Funktion in  $\bigoplus_{e \in E} H^1(e)$  aufgefasst werden und es gilt

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\mathcal{G})} = \langle f, g \rangle_{\bigoplus_{e \in E} H^1(e)} \quad \text{für alle } f, g \in H^1(\mathcal{G}).$$

Da  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\bigoplus_{e \in E} H^1(e)}$  mit Satz 2.1 ein Skalarprodukt ist, folgt dies ebenso für  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\mathcal{G})}$ . Damit ist  $H^1(\mathcal{G})$  ein Prähilbertraum. Wir müssen nur noch die Vollständigkeit beweisen. Sei dazu  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $H^1(\mathcal{G})$ . Mit Lemma 3.11 erhalten wir

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq C_{\mathcal{G}} \|f_n - f_m\|_{H^1(\mathcal{G})}$$

Also ist  $(f_n)$  auch bezüglich der Supremumsnorm eine Cauchyfolge und konvergiert somit gegen eine eindeutig bestimmte Funktion  $g \in C(\mathcal{G})$ . Die Einschränkung eines Folgengliedes  $f_n$  auf eine Kante  $e$  bezeichnen wir mit  $f_{n,e}$ . Auf jeder Kante  $e$  konvergiert die Folge  $(f_{n,e})$  gegen eine stetige Funktion  $f_e \in H^1(e)$ . Auf jeder Kante stimmt diese aufgrund des Sobolev'schen Einbettungssatzes 2.4 mit  $g$  überein, also  $g|_e = f_e$  für alle  $e \in E$ . Damit konvergiert  $(f_n)$  aber auch bezüglich der Norm  $H^1(\mathcal{G})$  gegen  $g$  und  $g$  liegt damit in  $H^1(\mathcal{G})$ .  $\square$

Ein Merkmal von Funktionen aus Sobolevräumen der Art  $H^1((a, b))$  ist, dass eine sinnvolle Fortsetzung auf die Randpunkte definiert werden kann. Um dies auch für Funktionen aus dem Raum  $H^1(\mathcal{G})$  erklären zu können, müssen wir ausführen, was wir unter den Enden eines unendlichen Graphen verstehen. Zu diesem Zweck führen wir zwei verschiedene Definitionen von Graphenenden ein [5, Definition 2.2 und 2.3].

**Definition 3.12** (Graphenende). *Eine Folge von paarweise unterschiedlichen Knoten  $(v_n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir als Strahl  $\mathcal{R}$ , wenn  $v_n \sim v_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zwei Strahlen  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  heißen äquivalent, wenn ein dritter Strahl existiert, der unendlich viele Knoten von  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  enthält. Eine Äquivalenzklasse von Strahlen bezeichnen wir als Graphenende  $\omega$  und die Menge alle Äquivalenzklassen von  $\mathcal{G}$  mit  $\Omega(\mathcal{G})$ . Zwei Strahlen  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  aus unterschiedlichen Äquivalenzklassen, die den gleichen Startknoten  $v_0$  besitzen, lassen sich an diesem Knoten verschmelzen. Wir bezeichnen dies als Doppelstrahl.*

Wir überprüfen kurz, dass es sich in der Definition tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt. Ein Strahl  $\mathcal{R}$  enthält unendlich viele Knoten von sich selbst, also ist er zu sich selbst äquivalent. Ist der Strahl  $\mathcal{R}_1$  äquivalent zu  $\mathcal{R}_2$ , so existiert ein dritter Strahl  $\mathcal{R}_3$ , der unendlich viele Knoten von  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  enthält. Also ist auch  $\mathcal{R}_2$  äquivalent zu  $\mathcal{R}_1$ . Ist außerdem  $\mathcal{R}_1$  äquivalent zu  $\mathcal{R}_2$  und  $\mathcal{R}_2$  äquivalent zu  $\mathcal{R}_3$ , so existiert ein Strahl, der

unendlich viele Knoten von  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  als auch  $\mathcal{R}_2$  und  $\mathcal{R}_3$  enthält. Also sind auch  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_3$  äquivalent.

**Definition 3.13** (Topologisches Ende). *Sei  $\mathcal{U} = (U_n)$  eine Folge nicht leerer zusammenhängender Komponenten von  $\mathcal{G}$  mit kompakten Rändern, sodass  $U_{n+1} \subset U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = \emptyset$  gilt. Zwei solcher Folgen  $\mathcal{U} = (U_n)$  und  $\mathcal{U}' = (U'_n)$  heißen äquivalent, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  Indizes  $j, k$  existieren, sodass  $U'_j \subset U_n$  und  $U_k \subset U'_n$ . Eine Äquivalenzklasse  $\gamma$  von Folgen nennen wir topologisches Ende von  $\mathcal{G}$ . Die Menge aller topologischen Enden bezeichnen wir mit  $\mathfrak{E}(\mathcal{G})$ .*

Auch für diese Definition überprüfen wir zunächst die Äquivalenzrelation. Eine Folge  $\mathcal{U} = (U_n)$  aus der Definition ist offenbar zu sich selbst äquivalent. Aus der Äquivalenz von  $\mathcal{U} = (U_n)$  zu  $\mathcal{U}' = (U'_n)$  ergibt sich die Äquivalenz von  $\mathcal{U}'$  zu  $\mathcal{U}$  unmittelbar aus der Definition. Ist  $\mathcal{U}$  äquivalent zu  $\mathcal{U}'$  und  $\mathcal{U}'$  äquivalent zu  $\mathcal{U}''$ , so gibt es auf Grund der Definition Indizes  $i, j, k, l$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$U''_i \subset U'_j \subset U_n \quad \text{und} \quad U_k \subset U'_l \subset U''_n$$

gilt. Also ist auch  $\mathcal{U}$  äquivalent zu  $\mathcal{U}''$  und alle Bedingungen einer Äquivalenzrelation sind erfüllt.

Wenn wir über die Länge eines Strahls  $\mathcal{R}$  sprechen, verstehen wir darunter die Summe der zum Strahl gehörenden Kanten

$$L(\mathcal{R}) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda((v_i, v_{i+1})).$$

Analog betrachten wir für ein  $U_n$  aus Definition den Graphen  $\overline{U_n}$  und setzen  $L(U_n) := L(\overline{U_n})$ . Es stellt sich die Frage, wie die beiden Definitionen 3.12 und 3.13 zusammenhängen. Im Fall lokal endlicher Graphen besteht eine Bijektion zwischen  $\mathfrak{E}(\mathcal{G})$  und  $\Omega(\mathcal{G})$ . Es gilt aber sogar mehr, wie folgender Satz zeigt [5, Satz 2.3].

**Satz 3.14.** *Für jedes topologische Ende  $\gamma \in \mathfrak{E}(\mathcal{G})$  eines lokal endlichen metrischen Graphen  $\mathcal{G}$  existiert ein eindeutiges Graphenende  $\omega_\gamma \in \Omega(\mathcal{G})$ , sodass für jede Folge  $\mathcal{U} = (U_n)$ , die  $\gamma$  repräsentiert, jedes  $U_n$  einen Strahl  $\mathcal{R}$  aus  $\omega_\gamma$  enthält. Die Zuordnung  $\gamma \mapsto \omega_\gamma$  definiert eine bijektive Abbildung zwischen  $\mathfrak{E}(\mathcal{G})$  und  $\Omega(\mathcal{G})$ .*

Auf den Beweis wird wegen seiner rein graphentheoretischen Natur verzichtet, Details finden sich zum Beispiel in [11]. Im Folgenden werden wir zwischen beiden Definitionen nicht mehr unterscheiden und je nach Beweis die eine oder andere verwenden. Analog den Pfaden in Definition 3.2 erweitern wir die Definition eines Strahls auf den Fall, dass der Startpunkt kein Knoten ist [5, S.7].



**Definition 3.15.** Sei  $\mathcal{R}$  ein Strahl in  $\mathcal{G}$  und  $x \in e \in E_{v_0}$  mit  $e \neq (v_0, v_1)$ . Dann definieren wir die Folge  $(x, v_0, v_1, \dots)$  als Strahl  $\mathcal{R}_x$ . Die Menge aller Strahlen von  $\mathcal{G}$ , die nicht an einem Knoten starten, bezeichnen wir mit  $\mathfrak{R}(\mathcal{G})$ .

In diesen Zusammenhang führen wir noch den häufig benötigten Begriff einer kompakten Ausschöpfung eines Graphen ein [5, S. 8].

**Definition 3.16.** Sei  $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von zusammenhängenden Teilgraphen von  $\mathcal{G}$ , sodass jedes  $\mathcal{G}_n$  endlich viele Knoten und Kanten enthält,  $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$  gilt. Dann heißt  $(\mathcal{G}_n)$  eine kompakte Ausschöpfung von  $\mathcal{G}$ .

Des Weiteren werden wir im Folgenden Funktionen über einem Graphen oder einem Teilgraphen integrieren. Ein Integral über den Graphen  $\mathcal{G} = (V, E)$  ist hierbei kantenweise zu verstehen, also im Falle einer integrierbaren Funktion  $f$  heißt dies

$$\int_{\mathcal{G}} f := \sum_{e \in E} \int_e f.$$

Wir wollen nun den Wert einer Funktion auf dem Graphenende definieren. Hierfür müssen wir an  $f \in L^2(\mathcal{G})$  zusätzliche Voraussetzungen formulieren, damit eine Fortsetzung auf das Graphenende auch wohldefiniert ist [5, Definition 3.3].

**Lemma 3.17.** Sei  $f \in H^1(\mathcal{G})$  und  $\omega \in \Omega(\mathcal{G})$  ein Graphenende. Für einen beliebigen Strahl  $\mathcal{R} \in \omega$  existiert der Grenzwert

$$f(\mathcal{R}) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n).$$

Ist  $\tilde{\mathcal{R}}$  ein weiter Strahl aus der gleichen Äquivalenzklasse wie  $\mathcal{R}$ , so gilt zudem  $f(\mathcal{R}) = f(\tilde{\mathcal{R}})$ .

*Beweis.* Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Wir nehmen zunächst an, dass das Graphenende endliche Länge hat. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen ein  $N$  so groß, dass für alle Knoten  $\{v_n, v_m\}$  aus dem Strahl mit  $n, m > N$  die Abschätzung  $L(P_{n,m}) = d(v_n, v_m) < \varepsilon$  zutrifft. Auf dem Pfad  $P_{n,m}$  können wir die Einschränkung der Funktion  $f \in H^1(\mathcal{G})$  auf  $P_{n,m}$  mit einer Funktion  $\tilde{f} \in H^1([0, L(P_{n,m})])$  identifizieren. Daraus schlussfolgern wir mit der Dreiecksungleichung sowie der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(v_n) - f(v_m)| &= |\tilde{f}(0) - \tilde{f}(L(P_{n,m}))| \\ &= \left| \int_0^{L(P_{n,m})} \tilde{f}'(x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon \|\tilde{f}'\|_{L^2([0, L(P_{n,m})])}. \end{aligned}$$

Da  $\|\tilde{f}'\|_{L^2([0, L(P_{n,m})])}$  durch  $\|f\|_{H^1(\mathcal{G})}$  beschränkt ist, impliziert dies, dass die Folge  $(f(v_n))$  eine Cauchyfolge ist und damit gegen einen eindeutig bestimmten Grenzwert konvergiert.

Habe das Graphenende nun unendliche Länge. Dann können wir die Einschränkung der Funktion  $f$  auf  $\mathcal{R}$  mit einer Funktion  $\tilde{f} \in H^1([0, \infty))$  identifizieren, wobei die Folge der Knoten  $(v_n)$  des Strahls  $\mathcal{R}$  einer reellen Folge  $(a_n)$  im Intervall  $[0, \infty)$  mit  $a_n \rightarrow \infty$  entspricht. Wir müssen also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n)$$

bestimmen. Mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz können wir für jedes Teilintervall  $[a_n, \infty)$  die Abschätzung

$$\|\tilde{f}|_{[a_n, \infty)}\|_\infty \leq C \|\tilde{f}\|_{H^1([a_n, \infty))}$$

schlussfolgern. Da jedes Intervall unendliche Länge hat, ist das gewählte  $C$  unabhängig vom Laufindex  $n$ . Da nach Voraussetzung an  $\tilde{f}$  die rechte Seite für  $a_n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, impliziert dies  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(a_n) = 0$  und auch die Konvergenz von  $f(v_n)$  gegen Null. Also existiert auch in diesem Fall der Grenzwert.

Wir zeigen noch die Eindeutigkeit. Betrachtet man zwei Strahlen  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ , die zur gleichen Äquivalenzklasse  $\omega \in \Omega(\mathcal{G})$  gehören, so existiert ein dritter Strahl  $\mathcal{R}_3$ , welcher unendlich viele Knoten der Strahlen  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  enthält. Daraus folgt unmittelbar  $f(\mathcal{R}_1) = f(\mathcal{R}_3) = f(\mathcal{R}_2)$ .

□

Wir benötigen nun noch eine Formulierung für die topologischen Graphenenden. Wir fassen dies in der folgenden Definition zusammen [5, Definition 3.3].

**Definition 3.18.** Sei  $f \in H^1(\mathcal{G})$  und  $\omega \in \Omega(\mathcal{G})$  ein Graphenende. Für einen beliebigen Strahl  $\mathcal{R} \in \omega$  definieren wir

$$f(\mathcal{R}) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n)$$

Für das zu  $\omega$  gehörige Graphenende  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$  definieren wir

$$f(\gamma) := f(\mathcal{R}).$$

Dass diese Definition auch für  $\gamma$  sinnvoll ist und der Grenzwert existiert, ist eine Konsequenz aus dem nachfolgenden Lemma [5, Lemma 3.4].

**Lemma 3.19.** Sei  $\mathcal{G}$  ein metrischer Graph und  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$ . Ist  $f \in H^1(\mathcal{G})$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_n} |f(x) - f(\gamma)| = 0$$

für jede Folge  $(U_n)$ , die  $\gamma$  repräsentiert.

*Beweis.* Sei  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$  und  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge, welche  $\gamma$  repräsentiert. Mit

$$\mathfrak{R}_n := \{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}(\mathcal{G}) \mid \mathcal{R} \subset U_n\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Strahlen, die in  $U_n$  liegen und nicht an einem Knoten beginnen. Angenommen, wir können  $n$  so groß wählen, dass  $L(\mathcal{R}) \leq 1$  für alle  $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_n$ . Für beliebiges  $x \in U_n$  können wir dann mit Satz 3.14 ein  $(x, v_0, \dots) = \mathcal{R}_x \in \mathfrak{R}_n$  wählen, sodass  $\mathcal{R} = (v_0, v_1, \dots) \in \omega_\gamma$  ein zu  $\gamma$  gehöriger Strahl ist. Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(\gamma) - f(x)| &= |f(\mathcal{R}) - f(x)| \\ &= \left| \int_{\mathcal{R}_x} f'(y) dy \right| \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f'\|_{L^2(\mathcal{R}_x)} \\ &\leq \|f'\|_{L^2(U_n)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Anwendbarkeit des Hauptsatzes der Integralrechnung in (1) folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , die Abschätzung (2) folgt aus der Hölder-Ungleichung. Da  $x$  beliebig gewählt war, impliziert dies

$$\sup_{x \in U_n} |f(\gamma) - f(x)| \leq \|f'\|_{L^2(U_n)}.$$

Da aus Definition 3.13  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = \emptyset$  gilt, folgt  $L(U_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Damit erhalten wir  $\|f'\|_{L^2(U_n)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und so die zu beweisende Abschätzung.

Angenommen wir können  $n$  nicht wie im ersten Teil wählen. Dann existiert für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein Strahl  $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}_n$  mit  $L(\mathcal{R}) > 1$ . Wir wählen ein beliebiges  $n$  und ein  $x \in U_n$ . Dann können wir einen Weg  $\mathcal{P}_x \subset U_n$  mit  $L(\mathcal{P}_x) = \frac{1}{2}$  wählen. Daraus folgt mit Lemma 3.11

$$|f(x)| \leq \sup_{y \in \mathcal{P}_x} |f(y)| \leq C_{\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}} \|f\|_{H^1(\mathcal{P}_x)} \leq C_{\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}} \|f\|_{H^1(U_n)}.$$

Da  $x \in U_n$  beliebig war folgt somit

$$\sup_{x \in U_n} |f(x)| \leq C_{\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}} \|f\|_{H^1(U_n)}.$$

Da wiederum  $\bigcap_n \overline{U_n} = \emptyset$  muss

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_n} |f(x)| = 0$$

gelten. Es bleibt noch zu zeigen, dass außerdem  $f(\gamma) = 0$  gilt. Wir betrachten einen zu  $\gamma$  gehörigen Strahl  $\mathcal{R}_n$  mit  $\mathcal{R}_n \subset U_n$ . Dann folgt aus Satz 3.14

$$|f(\gamma)| = |f(\mathcal{R}_n)| \leq \sup_{x \in U_n} |f(x)|$$

und damit  $f(\gamma) = 0$ . □

Aus dem Lemma 3.19 folgt zusammen mit Lemma 3.17 unmittelbar, dass der Grenzwert für

jedes topologische Graphenende existiert und mit demjenigen für das Graphenende übereinstimmt. Diese Definitionen erlauben es uns künftig, Randbedingungen zu formulieren, wenn wir Funktionen  $f \in H^1(\mathcal{G})$  untersuchen, was für das Spektrum des Laplace-Operators auf einem Graphen wesentlich ist. Dieser wird im folgenden Kapitel eingeführt.

### 3.2 Der Laplace-Operator auf Quantengraphen

Da der Laplace-Operator  $\mathcal{H}$  Gegenstand der weiteren Betrachtungen sein soll, wird dieser auf einem Graphen definiert.

**Definition 3.20.** *Auf einer Kante  $e$  bezeichnen wir mit*

$$\mathcal{H}_{e,\max} = -\frac{d^2}{dx_e^2} \quad \text{dom}(\mathcal{H}_{e,\max}) = H^2(e)$$

den negativen Laplace-Operator mit dem maximalen Definitionsbereich  $H^2(e)$  und den zugehörigen Produktoperator mit

$$\mathcal{H}_{\max} = \bigoplus_{e \in E} \mathcal{H}_{e,\max}.$$

Man könnte den Laplace-Operator  $\mathcal{H}$  nun auf dem Produktraum  $\bigoplus_{e \in E} H^2(e)$  als Definitionsbereich  $\text{dom}(\mathcal{H})$  betrachten. Allerdings berücksichtigt man auf diese Weise nicht die spezielle Struktur des Graphen. Daher fordert man zunächst, dass für  $f$  aus  $\text{dom}(\mathcal{H})$  auch  $f$  in  $C(\mathcal{G})$  liegt. Damit muss  $f$  nicht nur auf den Kanten stetig sein, sondern auch auf allen Knoten  $v$ . Zusätzlich fordern wir, dass  $f$  die sogenannte Kirchhoffbedingung erfüllt. Da  $f'$  ein Element von  $AC(e)$  ist, können wir  $f'$  auf den zu einer Kante  $e$  gehörigen Knoten  $v$  stetig fortsetzen. Da der betrachtete Graph ungerichtet ist, kann ein Knoten  $v$ , der zu der Kante  $e$  gehört, als ein Anfangsknoten oder Endknoten betrachtet werden. Bezeichnet  $\nu_e$  den Einheitsvektor, der vom Knoten  $v$  in die Kante  $e$  weist, dann bezeichnen wir die Ableitung in Richtung des Normalenvektors  $\nu_e$  mit  $\frac{\partial}{\partial \nu_e} f(v)$ . Bezeichnet nun  $E_v$  die Menge der zu  $v$  inzidenten Kanten, so lautet die Kirchhoffbedingung

$$\sum_{e \in E_v} \frac{\partial}{\partial \nu_e} f(v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Das bedeutet also äquivalent, dass sich alle Ableitungen in Richtung des Knotens  $v$  zu Null aufsummieren. Mit diesen Standardbedingungen definieren wir den Laplaceoperator [5, 2.3].

**Definition 3.21.** *Auf einem Graphen  $\mathcal{G}$  sei der Operator  $\mathcal{H}$  definiert als*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\max} \downarrow \text{dom}(\mathcal{H})$$

$$\text{dom}(\mathcal{H}) = \left\{ f \in \text{dom}(\mathcal{H}_{\max}) \cap L^2(\mathcal{G}) \mid f \in C(\mathcal{G}), \sum_{e \in E_v} \frac{\partial}{\partial \nu_e} f(v) = 0 \quad \forall v \in V \right\}.$$

Dann heißt  $\mathcal{H}$  maximaler Kirchhoff'scher Laplace-Operator auf  $\mathcal{G}$ .

Von besonderem Interesse sind Operatoren, die ein rein reelles Spektrum haben, also gerade die selbstadjungierten Operatoren. Für diese sind weitreichende Aussagen, wie der Spektralsatz 2.9 bekannt, die zur Untersuchung der Operatoren genutzt werden können. Der oben definierte Operator  $\mathcal{H}$  ist im Allgemeinen allerdings nicht selbstadjungiert, was die Aussage folgenden Lemmas ist. An dieser Stelle sei noch einmal auf die Vereinbarung hingewiesen, dass wir nur unendliche Graphen betrachten, wenn es nicht explizit anders genannt ist.

**Lemma 3.22.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein metrischer Graph mit endlicher Länge. Dann ist  $\mathcal{H}$  nicht selbstadjungiert.*

Für den Beweis benötigen wir noch einige Voraussetzungen, dieser folgt daher weiter unten. Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit soll sich mit spektralen Abschätzungen für einen selbstadjungierten Laplace-Operator auf Graphen endlichen Volumens beschäftigen. Daher müssen wir einen Definitionsbereich finden, auf welchem die Einschränkung des Operators  $\mathcal{H}_{\max}$  im Falle Graphen endlichen Volumens selbstadjungiert ist. Um einen solchen Definitionsbereich zu finden, schränken wir den Bereich  $\text{dom}(\mathcal{H}_{\max})$  so ein, dass dieser in  $L_c^2(\mathcal{G})$  enthalten ist. Im nächsten Schritt erweitern wir diesen  $\text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$  genannten Bereich wieder, sodass die Einschränkung von  $\mathcal{H}_{\max}$  darauf selbstadjungiert ist. Wir definieren zunächst  $\mathcal{H}_0^0$  [5, 2.3].

**Definition 3.23.** *Auf einem Graphen  $\mathcal{G}$  sei der Operator  $\mathcal{H}_0^0$  definiert als*

$$\mathcal{H}_0^0 := \mathcal{H}_{\max} \downarrow \text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$$

$$\text{dom}(\mathcal{H}_0^0) := \left\{ f \in \text{dom}(\mathcal{H}_{\max}) \cap L_c^2(\mathcal{G}) \mid f \in C(\mathcal{G}), \sum_{e \in E_v} \frac{\partial}{\partial \nu_e} f(v) = 0 \quad \forall v \in V \right\}.$$

Dann heißt

$$\mathcal{H}_0 := \overline{\mathcal{H}_0^0}^{L^2(\mathcal{G})}$$

minimaler Kirchhoff'scher Laplace-Operator, wobei der Abschluss bezüglich  $L^2(\mathcal{G})$  erfolgt.

**Bemerkung 3.24.** *An dieser Stelle wird deutlich, warum wir uns nur auf unendliche Graphen beziehen. Im endlichen Fall fallen die Räume  $L^2(\mathcal{G})$  und  $L_c^2(\mathcal{G})$  zusammen, sodass sich identische Operatoren ergeben.*

Folgende Proposition fasst zwei wichtige Eigenschaften von  $\mathcal{H}_0^0$  zusammen.

**Proposition 3.25.** *Der Operator  $\mathcal{H}_0^0$  aus Definition 3.23 ist positiv und symmetrisch.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Symmetrie. Es bezeichne  $E_c$  die endliche Menge an Kanten

für die  $f$  ungleich Null ist. Wir erhalten dann für  $f, g \in \text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$ :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{H}_0^0 f, g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} &= - \int_{\mathcal{G}} f''(x) \cdot \overline{g(x)} dx \\
&= - \sum_{e \in E_c} \int_e f_e''(x) \cdot \overline{g_e(x)} dx \\
&= - \sum_{e \in E_c} f_e'(x) \cdot \overline{g_e(x)} \Big|_{v_{e,i}}^{v_{e,t}} + \sum_{e \in E_c} \int_e f_e'(x) \cdot \overline{g_e'(x)} dx \\
&= \int_{\mathcal{G}} f'(x) \cdot \overline{g'(x)} dx \tag{3}
\end{aligned}$$

$$= \langle f, \mathcal{H}_0^0 g \rangle_{L^2(\mathcal{G})}. \tag{4}$$

Die Gleichheit von Zeile (3) und (4) folgt hierbei wieder mittels partieller Integration und Ausnutzung der Standardbedingungen an  $f, g$ . Die Positivität von  $\mathcal{H}_0^0$  ist einsichtig, wenn in Zeile (3)  $g$  durch  $f$  ersetzt wird.  $\square$

Damit ist  $\mathcal{H}_0$  als Abschluss von  $\mathcal{H}_0^0$  ebenfalls symmetrisch und positiv. Allerdings ist  $\mathcal{H}_0$  im Allgemeinen nicht selbstadjungiert, wie folgendes Lemma zeigt [5, Lemma 2.7].

**Lemma 3.26.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein metrischer Graph. Dann ist*

$$\mathcal{H}_0^* = \mathcal{H}.$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit stellen wir folgendes Lemma voran [12, 1.4]. Dabei sind im Folgenden alle Ableitungen im schwachen Sinne zu verstehen.

**Lemma 3.27.** *Sei  $\mathcal{H}$  der im Hilbertraum  $L^2((a, b))$  definierte Operator der negativen zweiten Ableitung:*

$$\mathcal{H}f := -f'' \quad \text{für alle } f \in \text{dom}(\mathcal{H}) = H_0^2((a, b)).$$

*Dann gilt für den zu  $\mathcal{H}$  adjungierte Operator  $\mathcal{H}^*$ :*

$$\mathcal{H}^* f = -f'' \quad \text{für alle } f \in \text{dom}(\mathcal{H}^*) = H^2((a, b)).$$

*Beweis.* Wir zeigen als Erstes die Beziehung  $\text{ran}(\mathcal{H})^\perp \subset \mathbb{C}1 + \mathbb{C}x$ , wobei hier 1 und  $x$  die Funktionen  $f_1(x) = 1$  und  $f_2(x) = x$  für alle  $x \in (a, b)$  bezeichnen. Dafür genügt es zu beweisen, dass  $(\mathbb{C}1 + \mathbb{C}x)^\perp \subset \text{ran}(\mathcal{H})$  gilt. Sei also  $h \in (\mathbb{C}1 + \mathbb{C}x)^\perp$ . Auf dem Intervall  $(a, b)$  definieren wir

$$k(x) := \int_a^x \left( \int_a^t h(s) ds \right) dt. \tag{5}$$

Mit  $h \in L^2((a, b)) \subset L^1((a, b))$  können wir  $k \in H^2((a, b))$  sowie  $k''(x) = h(x)$  und

$$k'(x) := \int_a^x h(t) dt$$

für  $x \in (a, b)$  schlussfolgern. Es gilt außerdem  $k(a) = k'(a) = 0$ . Des Weiteren erhalten wir

$$k'(b) = \int_a^b h(t) dt = \langle h, 1 \rangle_{L^2((a, b))} = 0$$

nach Voraussetzung an  $h$ . Daraus schlussfolgern wir über partielle Integration

$$k(b) = \int_a^b k'(t) dt = - \int_a^b k''(t) t dt = - \langle k'', x \rangle_{L^2((a, b))} = - \langle h, x \rangle_{L^2((a, b))} = 0.$$

Also liegt  $k \in H_0^2((a, b))$  und somit  $-h = \mathcal{H}k$  im Bild von  $\mathcal{H}$ .

Sei nun  $g \in H^2((a, b))$ . Mittels partieller Integration erhalten wir dann für  $f \in H_0^2((a, b))$  unter Beachtung der Nullrandbedingungen

$$\langle \mathcal{H}f, g \rangle_{L^2((a, b))} = - \int_a^b f''(t) \overline{g(t)} dt = \int_a^b f'(t) \overline{g'(t)} dt = - \int_a^b f(t) \overline{g''(t)} dt = \langle f, g'' \rangle_{L^2((a, b))}.$$

Damit ist  $H^2((a, b)) \subset \text{dom}(\mathcal{H}^*)$  und  $\mathcal{H}^*g = -g''$  für alle  $g \in H^2((a, b))$ .

Sei nun  $g \in \text{dom}(\mathcal{H}^*)$ . Wir definieren  $h := \mathcal{H}^*g$  und  $k$  wie in (5). Mit dem bereits Bewiesenen folgt  $k'' = h$  und  $k \in H^2((a, b))$ . Für  $f \in H_0^2((a, b))$  erhalten wir dann unter Beachtung der Nullrandbedingungen und partieller Integration

$$\langle f'', k \rangle_{L^2((a, b))} = \langle f, k'' \rangle_{L^2((a, b))} = \langle f, \mathcal{H}^*g \rangle_{L^2((a, b))} = \langle \mathcal{H}f, g \rangle_{L^2((a, b))} = \langle -f'', g \rangle_{L^2((a, b))}.$$

Das impliziert dann  $\langle f'', k + g \rangle_{L^2((a, b))} = 0$ , also  $k + g \in \text{ran}(\mathcal{H})^\perp \subset \mathbb{C}1 + \mathbb{C}x$ . Da die Funktionen  $k, 1$  und  $x$  Elemente aus  $H^2((a, b))$  sind, muss auch  $g$  in  $H^2((a, b))$  liegen. Also gilt zusammengefasst

$$\mathcal{H}^*f := -f'' \quad \text{für alle } f \in H^2((a, b)) = \text{dom}(\mathcal{H}^*)$$

die Behauptung. □

Wir beweisen nun das eigentliche Lemma.

*Beweis von Lemma 3.26.* Wir zeigen zunächst die Inklusion  $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0^*$ . Sei  $f \in \text{dom}(\mathcal{H}_0^*)$  und  $g \in \text{dom}(\mathcal{H})$ . Es bezeichne  $E_c$  die endliche Menge an Kanten für die  $f$  ungleich Null

ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{H}_0^0 f, g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} &= \int_{\mathcal{G}} f'(x) \cdot \overline{g'(x)} dx && \text{siehe (3)} \\
&= \sum_{e \in E_c} f_e(x) \overline{g'_e(x)} \Big|_{v_{e,i}}^{v_{e,t}} - \sum_{e \in E_c} \int_e f_e(x) \overline{g''_e(x)} dx \\
&= - \int_{\mathcal{G}} f(x) \overline{g''(x)} dx \\
&= \langle f, \mathcal{H}g \rangle_{L^2(\mathcal{G})}
\end{aligned}$$

Die Gleichheit folgt hier wiederum unter Anwendung der partiellen Integration und der Bedingungen an  $f, g$ . Damit ist  $g \in \text{dom}((\mathcal{H}_0^0)^*)$  und somit wegen  $(\mathcal{H}_0^0)^* = \mathcal{H}_0^*$  auch  $g \in \text{dom}(\mathcal{H}_0^*)$ .

Für die andere Inklusion wählen wir ein  $g \in \text{dom}(\mathcal{H}_0^*)$  beliebig und betrachten eine Kante  $e \in E$ . Wir wählen eine Funktion  $f \in \text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$  die überall verschwindet außer auf der Kante  $e$ . Damit müssen  $f$  und  $f'$  an den Knoten von  $e$  Nullrandbedingungen erfüllen, das heißt also  $f \in H_0^2(e)$ . Wir können somit Lemma 3.27 verwenden und schlussfolgern, dass  $g|_e$  in  $H^2(e)$  liegt und  $\mathcal{H}_0^*$  auf dieser Kante operiert als Operator der negativen zweiten Ableitung. Das bedeutet also

$$\langle \mathcal{H}_0^0 f, g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} = - \int_e f''(x) \overline{g(x)} dx = \int_e f'(x) \overline{g'(x)} dx = - \int_e f(x) \overline{g''(x)} dx = \langle f, -g'' \rangle_{L^2(\mathcal{G})}$$

Da  $e$  beliebig war, muss  $g$  für alle  $e$  ein Element von  $H^2(e)$  sein und der Operator  $\mathcal{H}_0^*$  ist der negative Ableitungsoperator mit  $\mathcal{H}_0^* g = -g''$ . Damit ist  $g \in \text{dom}(\mathcal{H}_{\max})$  und  $\mathcal{H}_0^* = \mathcal{H}_{\max} \downarrow \text{dom}(\mathcal{H}_0^*)$ . Wir müssen somit als Letztes noch beweisen, dass  $g$  stetig auf dem Graphen ist und die Kirchhoffbedingungen auf allen Knoten erfüllt. Sei dazu  $v$  ein beliebiger Knoten.

Wir betrachten als Erstes den Fall, dass  $v$  nur zu einer Kante  $e = (v, w)$  gehört. In dem Fall ist  $g$  stetig fortsetzbar auf  $v$ . Wir müssen also noch beweisen, dass  $g'(v) = 0$  gilt. Sei dazu  $f$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit  $f(v) = 1$  und  $f'(v) = f'(w) = f(w) = 0$  und  $f \equiv 0$  für alle  $x \in \mathcal{G} \setminus e$ . Dann erhalten wir wegen

$$\langle f'', g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} = \langle \mathcal{H}_0^0 f, g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} = \langle f, \mathcal{H}_0^0 g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} = \langle f, g'' \rangle_{L^2(\mathcal{G})}$$



die Bedingung

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f'', g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} - \langle f, g'' \rangle_{L^2(\mathcal{G})} \\
&= \int_e f''(x) \overline{g(x)} dx - \int_e f(x) \overline{g''(x)} \\
&= f'(w) \overline{g(w)} - f'(v) \overline{g(v)} - \int_e f'(x) \overline{g'(x)} dx - f(w) \overline{g'(w)} + f(v) \overline{g'(v)} + \int_e f'(x) \overline{g'(x)} dx \\
&= f(v) \overline{g'(v)} = \overline{g'(v)}.
\end{aligned}$$

Daher muss  $g'(v) = 0$  gelten und die Bedingung ist erfüllt.

Habe nun der Knoten  $v$  endlich viele Nachbarkanten. Für zwei Kanten  $e_1, e_2 \in E_v$  wählen wir eine Funktion  $f$  mit  $f \equiv 0$  auf  $\mathcal{G} \setminus \{e_1, e_2\}$  und  $f(v) = 0$  sowie  $f'_{e_1}(v) = -f'_{e_2}(v) = 1$ . Dann erhalten wir wieder nach Anwendung partieller Integration

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f'', g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} - \langle f, g'' \rangle_{L^2(\mathcal{G})} \\
&= \sum_{n=1}^2 f'_{e_n}(v) \overline{g_{e_n}(v)} - f_{e_n}(v) \overline{g'_{e_n}(v)} \\
&= \overline{g_{e_1}(v)} - \overline{g_{e_2}(v)}.
\end{aligned}$$

Also ist der Wert  $g(v)$  nicht abhängig von der Kante  $e$ . Das wiederum bedeutet, dass  $g$  auf  $v$  stetig ist. Da  $v$  beliebig war, haben wir  $g \in C(\mathcal{G})$  gezeigt.

Wir müssen nun noch zeigen, dass  $g$  auf  $v$  die Kirchhoffbedingung erfüllt. Dazu betrachten wir eine Funktion  $f \in \text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$  mit  $f \equiv 0$  auf  $\mathcal{G} \setminus E_v$  und  $f(x_e) = 1$  wenn  $d(v, x_e) < \frac{|e|}{4}$  und  $f(x_e) = 0$  wenn  $d(v, x_e) > \frac{|e|}{2}$ . Dann ist insbesondere  $f'(v) = 0$  und damit

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f'', g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} - \langle f, g'' \rangle_{L^2(\mathcal{G})} \\
&= \sum_{e \in E_v} f'_e(v) \overline{g_e(v)} - f_e(v) \overline{g'_e(v)} \\
&= \sum_{e \in E_v} g'_e(v).
\end{aligned}$$

Also ist  $g \in \text{dom}(\mathcal{H})$  und der Beweis vollständig.  $\square$

Zusammen mit Lemma 3.22 folgt damit, dass im Fall von Graphen endlichen Volumens  $\mathcal{H}_0$  nicht selbstadjungiert ist. Um nun geeignete Erweiterungen von  $\mathcal{H}_0$  zu finden, benötigen wir als Werkzeug die Theorie der quadratischen Formen. Dabei ist der Weg folgendermaßen: statt der Operatoren betrachten wir sogenannte quadratische Formen auf Funktionenräumen wie zum Beispiel  $H^1(\mathcal{G})$ . Wir werden feststellen, dass wir diese Formen eindeutig mit einem selbstadjungierten Operator assoziieren können, dessen Definitionsbereich dicht im Bereich der Form liegt. Über die Betrachtung geeigneter Formen erhalten wir dann die ge-

suchten Erweiterungen von  $\mathcal{H}_0$ . Im Zuge dessen werden wir auf den Raum  $H_0^1(\mathcal{G})$  stoßen, den wir in folgender Proposition einführen [5, Satz 3.11].

**Proposition 3.28.** *Es bezeichne  $H_0^1(\mathcal{G})$  den Abschluss von  $\text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{G})}$*

$$H_0^1(\mathcal{G}) := \overline{\text{dom}(\mathcal{H}_0^0)}^{H^1(\mathcal{G})}.$$

*Dann ist für alle  $f \in H_0^1(\mathcal{G})$  und alle  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$*

$$f(\gamma) = 0.$$

*Beweis.* Sei  $f \in H_0^1(\mathcal{G})$  und  $\gamma$  ein Graphenende,  $(U_n)$  eine Folge, die  $\gamma$  repräsentiert und  $(f_m)$  eine Folge aus  $\text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$  die bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{G})}$  gegen  $f$  konvergiert. Dann folgt mit Lemma 3.11 für ein  $n$  und ein geeignetes  $C$

$$\|f - f_m\|_\infty \leq C\|f - f_m\|_{H^1(U_n)}.$$

Für  $m \rightarrow \infty$  wird die rechte Seite der Ungleichung beliebig klein. Da zudem  $f_m(\gamma) = 0$  für alle  $m$  folgt direkt, dass auch  $f(\gamma) = 0$  gelten muss.

□

Wir haben nun fast alle Voraussetzungen, um das Lemma 3.22 zu beweisen. Wir müssten dazu nur noch wissen, dass  $\text{dom}(\mathcal{H}_0) \subset H_0^1(\mathcal{G})$  ist. Dies wird eine unmittelbare Folgerung aus Proposition 5.1 sein. Um das Lemma in diesem Kapitel thematisch passend zu beweisen, nehmen wir dies als gegeben an und führen den Beweis aus.

*Beweis von Lemma 3.22.* Im Fall endlichen Volumens von  $\mathcal{G}$  liegen die konstanten Funktionen in  $\text{dom}(\mathcal{H})$ , aber nicht in  $\text{dom}(\mathcal{H}_0)$ , was mit Proposition 3.28 und Proposition 5.1 aus  $\text{dom}(\mathcal{H}_0) \subset H_0^1(\mathcal{G})$  folgt. Also ist  $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_0$ , was mit Lemma 3.26 impliziert, dass  $\mathcal{H}$  nicht selbstadjungiert ist. □

## 4 Quadratische Formen

Dieses Kapitel folgt den Erläuterungen aus der Monographie von Schmüdgen [12]. Wir beginnen mit der grundlegenden Definition einer quadratischen Form [12, Definition 10.1]:

**Definition 4.1.** Sei  $t[\cdot, \cdot]$  eine Sesquilinearform auf einem linearen Unterraum  $\text{dom}[t] \subset X$  eines Hilbertraums  $X$ :

$$t[\cdot, \cdot]: \text{dom}[t] \times \text{dom}[t] \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dann bezeichnen wir

$$t: \text{dom}[t] \rightarrow \mathbb{C} \quad t[x] := t[x, x]$$

als quadratische Form auf dem Bereich  $\text{dom}[t]$ .

Für die weiteren Betrachtungen sind vor allem die symmetrischen Formen relevant, da wir aus diesen ein Skalarprodukt ableiten können. Eine quadratische Form nennen wir symmetrisch, wenn  $t[x, y] = \overline{t[y, x]}$  für alle  $x, y \in \text{dom}[t]$  gilt. Die folgenden Ausführungen werden wir nur für positive quadratische Formen entwickeln. Diese Eigenschaft ließe sich auch allgemeiner durch die Halbbeschränktheit nach unten ersetzen. Darauf können wir aber verzichten, da dies für die Untersuchung des Laplace-Operators nicht benötigt wird [12, S. 222].

**Proposition 4.2.** Sei  $t$  eine symmetrische quadratische Form mit dem Bereich  $\text{dom}[t]$  auf dem Hilbertraum  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Sei  $t$  auf diesem Bereich positiv, das heißt nach unten durch ein  $m \geq 0$  beschränkt

$$t[x] \geq m\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in \text{dom}[t].$$

Dann ist

$$\langle x, y \rangle_t := t[x, y] + (1 - m) \langle x, y \rangle$$

ein Skalarprodukt auf  $\text{dom}[t]$ . Des Weiteren gilt für  $t$  bezüglich der vom Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  induzierten Norm  $\|\cdot\|_t$  die Abschätzung

$$|\langle x, y \rangle_t| \leq (1 + m)\|x\|_t\|y\|_t$$

für alle  $x, y \in \text{dom}[t]$ .

*Beweis.* Es ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  als Summe zweier hermit'scher Sesquilinearformen selbst wiederum eine solche. Die Abschätzung

$$\langle x, x \rangle_t = t[x, x] + (1 - m) \langle x, x \rangle \geq m \langle x, x \rangle + (1 - m) \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle = 0$$

zeigt die positive Definitheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ . Damit ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  ein Skalarprodukt. Die induzierte Norm lautet  $\|x\|_t^2 = t[x] + (1 - m)\|x\|^2$ , wobei  $\|\cdot\|$  die vom Skalarprodukt des Raumes  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  induzierte Norm ist. Darüber hinaus erhalten wir aus  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_t$  und der Cauchy-

Schwarz-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|t[x, y]| &= |\langle x, y \rangle_t - (1 - m) \langle x, y \rangle| \\
&\leq |\langle x, y \rangle_t| + (1 + m) |\langle x, y \rangle| \\
&\leq \|x\|_t \|y\|_t + (1 + m) \|x\| \|y\| \\
&\leq (1 + m) \|x\|_t \|y\|_t
\end{aligned}$$

für alle  $x, y \in \text{dom}[t]$  und somit den Abschluss des Beweises.  $\square$

Von besonderem Interesse sind diejenigen Formen, für die der Raum  $(\text{dom}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$  vollständig, also ein Hilbertraum ist. Solche Formen erhalten eine eigene Definition [12, Definition 10.2].

**Definition 4.3.** *Eine positive und symmetrische Form  $t$  heißt abgeschlossen, wenn der Raum  $(\text{dom}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$  ein Hilbertraum ist. Eine positive und symmetrische Form  $t$  heißt abschließbar, wenn eine positive Fortsetzung  $\bar{t}$  von  $t$  existiert, sodass der Raum  $(\text{dom}[\bar{t}], \langle \cdot, \cdot \rangle_{\bar{t}})$  ein Hilbertraum ist.*

Als entscheidend wird sich herausstellen, dass wir positive, abgeschlossene Formen und positive, selbstadjungierte Operatoren miteinander identifizieren können. Im Folgenden definieren wir, wie einem gegebenen positiven, selbstadjungierten Operator eine Form zugeordnet werden kann [12, Definition 10.3].

**Definition 4.4.** *Sei  $A = \int \lambda dE(\lambda)$  ein positiver selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit der Spektralschar  $E$ . Dann nennen wir*

$$t_A[x, y] = \left\langle A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}y \right\rangle$$

mit  $x, y \in \text{dom}[t_A] = \text{dom}(A^{\frac{1}{2}})$  die zu  $A$  assoziierte quadratische Form.

Hier verstehen wir unter  $A^{\frac{1}{2}}$  den eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator

$$A^{\frac{1}{2}} := \int q(\lambda) dE(\lambda)$$

mit

$$q(\lambda) := \begin{cases} 0 & \lambda < 0 \\ \sqrt{\lambda} & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Existenz und Eindeutigkeit ergeben sich aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren (Satz 2.9). Folgendes Resultat fasst wichtige Eigenschaften der in Definition 4.4 definierten quadratischen Form zusammen [12, Proposition 10.5].

**Proposition 4.5.** *Sei  $A$  ein selbstadjungierter positiver Operator im Hilbertraum  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Dann ist  $t_A$  eine symmetrische, positive, abgeschlossene Form und  $\text{dom}(A)$  liegt dicht in  $\text{dom}[t_A]$ .*

*Beweis.* Die Symmetrie von  $t_A$  folgt unmittelbar aus der Definition 4.4. Bezeichnen wir mir  $\|x\|_{A^{\frac{1}{2}}}^2 = \|x\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2$  die Graphennorm des Operators  $A^{\frac{1}{2}}$ , so stellen wir fest, dass die von  $t_A$  induzierte Norm

$$\|x\|_{t_A}^2 = t_A[x] + \|x\|^2 = \langle A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x \rangle + \|x\|^2$$

mit der Graphennorm übereinstimmt. Da  $A^{\frac{1}{2}}$  und  $t_A$  auf dem Definitionsbereich  $\text{dom}(A^{\frac{1}{2}})$  definiert sind, folgt daraus mit der Abgeschlossenheit von  $A^{\frac{1}{2}}$  diejenige von  $t_A$ . Die Positivität von  $t_A$  folgt für alle  $x \in \text{dom}(A)$  aus

$$t_A[x, x] = \langle A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x \rangle = \langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

Da  $\text{dom}(A)$  eine dichte Teilmenge von  $(\text{dom}(A^{\frac{1}{2}}), \|x\|_{A^{\frac{1}{2}}})$  ist, gilt die Abschätzung ebenso für alle  $x \in \text{dom}(A^{\frac{1}{2}})$ . Des Weiteren liegt  $\text{dom}(A)$  wegen der Normgleichheit auch dicht in  $(\text{dom}[t_A], \|x\|_{t_A})$ .  $\square$

Wir können ebenso den umgekehrten Weg gehen und einer quadratischen Form einen selbstadjungierten Operator zuordnen, was wir in der folgenden Definition tun [12, Definition 10.4].

**Definition 4.6.** *Sei  $t$  eine dicht definierte, symmetrische und positive quadratische Form auf dem Hilbertraum  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit dem Bereich  $\text{dom}[t]$ . Wir definieren den zu  $t$  assoziierten Operator  $A_t$  als*

$$\begin{aligned} A_t x &= u_x \quad \forall x \in \text{dom}(A_t) \\ \text{dom}(A_t) &= \{x \in \text{dom}[t] \mid \exists u_x \in X \text{ mit } t[x, y] = \langle u_x, y \rangle \quad \forall y \in \text{dom}[t]\}. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung, dass  $\text{dom}[t]$  dicht in  $X$  liegt, ist wesentlich. Dadurch wird garantiert, dass der Vektor  $u_x$  eindeutig bestimmt ist. Damit ist  $A_t$  linear und wohldefiniert.

Damit kommen wir zu dem entscheidenden Satz über die eindeutige Zuordnung von quadratischen Formen und selbstadjungierten Operatoren. Dieser sagt aus, dass die Zuordnung aus den beiden Definitionen übereinstimmen [12, Satz 10.7].

**Satz 4.7.** *Sei  $t$  eine dicht definierte, abgeschlossene, symmetrische und positive Form auf dem Hilbertraum  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit dem Bereich  $\text{dom}[t]$ . Dann ist der Operator  $A_t$  aus Definition 4.6 selbstadjungiert und  $t$  ist genau die Form  $t_{A_t}$  die zum Operator  $A_t$  assoziiert ist (Definition 4.4).*

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, dass  $t[x] \geq \|x\|^2$  für alle  $x \in \text{dom}[t]$  ist. Dann erfüllt mit Proposition 4.2  $\langle x, y \rangle_t := t[x, y]$  bereits die Eigenschaften eines Skalarprodukts. Wir

beweisen im ersten Schritt die Selbstadjungiertheit von  $A_t$ . Die Symmetrie von  $A_t$  folgt aus

$$t[x, y] = \langle A_t x, y \rangle = \overline{t[y, x]} = \overline{\langle A_t y, x \rangle} = \langle x, A_t y \rangle,$$

sodass mit Proposition 2.5 nur noch die Surjektivität von  $A_t$  gezeigt werden muss. Sei dazu  $u \in X$  beliebig. Wir betrachten das Funktional  $h$

$$h: (\text{dom}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_t) \rightarrow \mathbb{R} \quad h(y) = \langle y, u \rangle.$$

Dieses ist wegen  $|h(y)| \leq \|y\| \|u\| \leq \|u\|_t \|y\|_t$  beschränkt in  $(\text{dom}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$  und damit stetig. Da  $(\text{dom}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$  ein Hilbertraum ist nach Proposition 4.2, folgt mit dem Riesz'schen Darstellungssatz (Satz 2.2) die Existenz eines  $x \in \text{dom}[t]$  mit

$$h(y) = \langle y, u \rangle = \langle y, x \rangle_t = t[y, x] \quad \forall y \in \text{dom}[t].$$

Damit ist aber  $x \in \text{dom}(A_t)$  nach der Definition 4.6 und zudem  $A_t x = u$ . Also ist  $A_t$  surjektiv und damit selbstadjungiert.

Als nächstes zeigen wir, dass  $\text{dom}(A_t)$  eine dichte Teilmenge des Hilbertraums  $(\text{dom}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$  ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es ein  $y \in \text{dom}[t]$ , das orthogonal zu  $\text{dom}(A_t)$  ist. Mit der Surjektivität von  $A_t$  folgt die Existenz eines  $x \in \text{dom}(A_t)$  mit  $A_t x = y$ . Daraus folgt

$$\langle y, y \rangle = \langle A_t x, y \rangle = t[x, y] = \langle x, y \rangle_t = 0$$

und damit  $y = 0$ . Dies wiederum bedeutet, dass nur der Nullvektor orthogonal zu  $\text{dom}(A_t)$  ist. Also ist  $\text{dom}(A_t)$  eine dichte Teilmenge von  $(\text{dom}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$ .

Als letzten Schritt untersuchen wir die zu  $A_t$  assoziierte Form  $s$  und zeigen  $t = s$ . Mit  $t[x, y] = \langle A_t x, y \rangle$  ist auch der Operator  $A_t$  positiv. Da  $A_t^{\frac{1}{2}}$  selbstadjungiert und damit abgeschlossen ist, folgt die Abgeschlossenheit und Positivität von  $s$  aus

$$s[x, y] = \left\langle A_t^{\frac{1}{2}} x, A_t^{\frac{1}{2}} y \right\rangle \quad x, y \in \text{dom}[s] = \text{dom}(A_t^{\frac{1}{2}})$$

und Proposition 4.5. Damit folgt wegen  $\text{dom}(A_t) \subset \text{dom}(A_t^{\frac{1}{2}})$  weiter

$$t[x, y] = \langle A_t x, y \rangle = s[x, y]$$

für alle  $x, y \in \text{dom}(A_t)$  und damit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = \langle \cdot, \cdot \rangle_s$ . Da außerdem  $\text{dom}(A_t)$  mit Proposition 4.5 eine dichte Teilmenge von  $(\text{dom}[s], \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$  ist, haben wir damit  $(\text{dom}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle_t) = (\text{dom}[s], \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$  gezeigt. Das bedeutet aber nicht anderes als  $t = t_{A_t}$  die Behauptung.

Ist nun  $t \geq 0$ , so betrachten wir stattdessen die Form  $(t+1)[x, y] := t[x, y] + \langle x, y \rangle$  mit dem zugehörigen Operator  $A_{t+1} = A_t + I$ . Aus der Selbstadjungiertheit von  $A_{t+1}$  folgt sofort

diejenige von  $A_t$ . Ebenso folgt mit dem Bewiesenen, dass in diesem Fall auch  $t = t_{A_t}$  gilt, sodass der Beweis vollständig ist.  $\square$

Mit diesen Resultaten können wir statt des Operators den Formbereich analysieren, was sich technisch als deutlich einfacher erweisen wird. Ein Operator kann mehrere selbstadjungierte Erweiterungen haben. Über den folgenden Weg findet man die kleinste dieser Erweiterungen [12, Definition 10.6].

**Definition 4.8** (Friedrich'sche Erweiterung). *Sei  $A$  ein positiver, symmetrischer und dicht definierter Operator auf dem Hilbertraum  $X$ . Dann ist die Form*

$$s(x, y) := \langle Ax, y \rangle$$

mit  $x, y \in \text{dom}(A)$  abschließbar mit  $t := \bar{s}$ . Den zu  $t$  assoziierten Operator  $A_t$  bezeichnen wir mit  $A_F := A_t$  als die Friedrich'sche Erweiterung von  $A$ .

Wir müssen zeigen, dass die Definition sinnvoll ist, die Form  $s$  also tatsächlich immer abschließbar ist [12, Lemma 10.16].

*Beweis.* Es bezeichne  $X_s$  die Vervollständigung des Prähilbertraums  $(\text{dom}[s], \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$ . Wir betrachten die Einbettung  $\mathcal{I}: \text{dom}[s] \rightarrow X$ . Diese ist wegen Proposition 4.2 beschränkt und damit stetig. Folglich existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung von  $\mathcal{I}$  auf  $X_s$ , die wir mit  $\mathcal{I}_s$  bezeichnen. Wir zeigen zunächst, dass  $\mathcal{I}_s$  injektiv ist. Sei dazu  $x \in X_s$  mit  $\mathcal{I}_s x = 0$ . Dann existiert eine Folge  $x_n \in \text{dom}[s]$ , die gegen  $x \in X_s$  konvergiert und mit der Stetigkeit von  $\mathcal{I}_s$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_s x_n = \mathcal{I}_s x = 0$$

bezüglich der Norm von  $X$ . Mit der Symmetrie von  $A$  folgt für beliebiges  $y \in \text{dom}(A)$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle_s \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s[x_n, y] + \langle x_n, y \rangle) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle Ax_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle x_n, (A + I)y \rangle) \\ &= \langle 0, (A + I)y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Da  $\text{dom}(A) = \text{dom}[s]$  dicht in  $X_s$  liegt und  $y$  beliebig war, folgt  $x = 0$ . Also ist  $\mathcal{I}_s$  injektiv. Im zweiten Schritt zeigen wir nun, dass hieraus die Abschließbarkeit von  $s$  folgt. Da die Einbettung  $\mathcal{I}_s$  injektiv ist, können wir jedes  $x \in X_s$  mit  $\mathcal{I}_s x \in X$  identifizieren. Also ist  $X_s$  ein Unterraum von  $X$ , der  $\text{dom}[s]$  enthält. Da  $s$  beschränkt und somit stetig auf  $\text{dom}[s]$  ist, können wir  $s$  eindeutig und stetig zu  $\bar{s}$  auf  $X_s$  fortsetzen. Dann sind das Skalarprodukt

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\bar{s}}$  als auch das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_s}$  von  $X_s$  eindeutige stetige Fortsetzungen des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$  und somit identisch. Da  $X_s$  vollständig ist, folgt die Abgeschlossenheit von  $\bar{s}$  und der Beweis ist vollständig. □

Der Operator aus Definition 4.8 hat die gewünschten Eigenschaften [12, Satz 10.17].

**Proposition 4.9.** *Sei  $A$  ein dicht definierter, symmetrischer und positiver Operator auf einem Hilbertraum. Dann gilt:*

1. bei  $A_F$  handelt es sich um einen positiven Operator und
2. für jede andere selbstadjungierte, positive Erweiterung  $B$  von  $A$  gilt

$$\text{dom}[t_A] \subset \text{dom}[t_B].$$

*Beweis.* 1. Da  $A$  ein positiver Operator ist, folgt dies aus der Definition auch für die zugehörige Form  $t_A$  und damit auch für deren Abschluss. Somit ist die Friedrich'sche Erweiterung assoziiert zu einer positiven Form  $t$ . Es folgt mit der Definition 4.8

$$\langle Ax, x \rangle = t[x, x] \geq 0.$$

Also ist  $A_F$  ein positiver Operator.

2. Sei  $B$  eine andere positive, selbstadjungierte Erweiterung von  $A$ . Da  $B$  selbstadjungiert ist, ist  $B_F = B$ , also gilt auch  $t_B = t_{B_F} = \bar{s}_B$  nach Definition der Friedrich'schen Erweiterung. Da  $\text{dom}(A) \subset \text{dom}(B)$ , gilt mit der Bezeichnung aus der Definition 4.8  $\text{dom}[s_A] \subset \text{dom}[s_B]$ , also auch  $\text{dom}[t_A] = \text{dom}[t_{A_F}] \subset \text{dom}[t_{B_F}] = \text{dom}[t_B]$ . □



## 5 Selbstadjungierte Erweiterungen von $\mathcal{H}_0$

### 5.1 Die Friedrich'sche und Neumann'sche Erweiterung

Wir wissen durch Lemma 3.22 und Lemma 3.26, dass bei unendlichen Graphen im Fall endlicher Länge der Operator  $\mathcal{H}_0$  nicht selbstadjungiert ist. Daher werden wir nun mit Hilfe der quadratischen Formen den Operator  $\mathcal{H}_0^0$  nicht nur abschließen, sondern so erweitern, dass wir eine selbstadjungierte Fortsetzung erhalten. Dabei gilt für eine solche Erweiterung, dass diese als Operator der zweiten negativen Ableitung fungiert und der Definitionsbereich in  $\text{dom}(\mathcal{H})$  enthalten ist. Ist nämlich  $\mathcal{H}_M$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $\mathcal{H}_0$ , so folgt aus den Eigenschaften des adjungierten Operators und Lemma 3.26

$$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_M \implies \mathcal{H}_M = \mathcal{H}_M^* \subset \mathcal{H}_0^* = \mathcal{H},$$

wobei für zwei Operatoren  $A, B$  in einem Hilbertraum die Inklusion  $A \subset B$

$$\text{dom}(A) \subset \text{dom}(B) \quad \text{und} \quad Af = Bf \quad \text{für alle} \quad f \in \text{dom}(A)$$

bedeutet.

Die kleinste Erweiterung im Sinne der Proposition 4.9 von  $\mathcal{H}_0$  lässt sich konstruktiv aus der Theorie der quadratischen Formen gewinnen. Hierzu müssen wir nur den Bereich des Abschlusses der Form

$$s[f] = \langle \mathcal{H}_0^0 f, f \rangle = - \int_{\mathcal{G}} f''(x) \overline{f(x)} dx = \int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx$$

für  $\text{dom}[s] := \text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$  bezüglich des von der Form induzierten Skalarproduktes betrachten. Mit der Proposition 4.2 gilt dann für die vom Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$  induzierte Norm

$$\|f\|_s^2 := \|f'\|^2 + \|f\|^2 = \int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx + \int_{\mathcal{G}} |f(x)|^2 dx.$$

Dies ist genau die Norm des Hilbertraums  $H^1(\mathcal{G})$ . Also ist

$$\text{dom}(\bar{s}) = \overline{\text{dom}(\mathcal{H}_0^0)}^{H^1(\mathcal{G})} = H_0^1(\mathcal{G}).$$

Wir halten somit fest [5, Bemerkung 3.1]:

**Proposition 5.1.** *Auf einem Graphen  $\mathcal{G}$  ist der Formbereich der Friedrich'schen Erweiterung  $\mathcal{H}_F$  von  $\mathcal{H}_0^0$  der Raum  $H_0^1(\mathcal{G})$ .*

Hieraus folgt unmittelbar  $\text{dom}(\mathcal{H}_0) \subset \text{dom}(\mathcal{H}_F) \subset H_0^1(\mathcal{G}) \cap \text{dom}(\mathcal{G})$ , was in den Beweis von Lemma 3.22 zunächst ohne Beweis eingegangen war. Wir sind nun an einer weiteren selbstadjungierten Erweiterung interessiert, und zwar betrachten wir die quadratische Form

im Hilbertraum  $L^2(\mathcal{G})$ , die  $H^1(\mathcal{G})$  als Formbereich hat:

$$t_N[f] := \int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx \quad \text{dom}[t_N] = H^1(\mathcal{G}).$$

Dann ist  $t_N$  positiv und abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit ergibt sich aus der Vollständigkeit des von der Form induzierten Prähilbertraums. Gemäß Definition 4.2 induziert  $t_N$  die Norm

$$\|f\|_{t_N}^2 = t_N[f] + \|f\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 = \int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 + \int_{\mathcal{G}} |f(x)|^2 = \|f\|_{H^1(\mathcal{G})}^2.$$

Damit ist  $(\text{dom}[t_N], \|\cdot\|_{t_N}) = (H^1(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{H^1(\mathcal{G})})$  und mit Proposition 3.10 ein Hilbertraum. Also ist  $t_N$  abgeschlossen. Damit können wir mit Satz 4.7 eindeutig den selbstadjungierten Operator  $\mathcal{H}_N$  aus Definition 4.6 zuordnen. Mit dem eingangs Erläuterten folgt hieraus

$$\mathcal{H}_N f = -f'' \quad \text{für alle } f \in \text{dom}(\mathcal{H}_N) \subset H^1(\mathcal{G}) \cap \text{dom}(\mathcal{H}).$$

**Bemerkung 5.2.** *Mit der Theorie der quadratischen Formen sind wir natürlich nicht an die Vereinbarung gebunden, dass  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Graph ist. Der so konstruierte Operator  $\mathcal{H}_N$  wäre auch im Fall eines endlichen Graphen selbstadjungiert. Da im endlichen Fall bereits  $\text{dom}(\mathcal{H}_0) = \text{dom}(\mathcal{H})$  gilt, folgt unmittelbar, dass  $\mathcal{H}$  als der maximale Laplace-Operator im Falle endlicher Graphen selbstadjungiert und zudem der einzige selbstadjungierte Laplace-Operator ist. Daher sprechen wir im endlichen Fall auch einfach vom selbstadjungierten Laplace-Operator  $\mathcal{H}$ .*

**Bemerkung 5.3.** *Die beiden dargestellten Erweiterungen sind nicht zufällig gewählt. Zum einen liegen die Definitionsbereiche von beiden in  $H^1(\mathcal{G})$ . Diese Bedingung wird für die kompakte Einbettung der Definitionsbereiche in  $L^2(\mathcal{G})$  und damit für das Spektrum eine entscheidende Rolle spielen. Zum anderen lässt sich zeigen, dass für alle selbstadjungierten Erweiterungen  $\tilde{\mathcal{H}}$  von  $\mathcal{H}_0$  mit  $\text{dom}(\tilde{\mathcal{H}}) \subset H^1(\mathcal{G})$  für die Definitionsbereiche der zugehörigen quadratischen Formen*

$$\text{dom}[t_{\mathcal{H}_F}] \subset \text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}] \subset \text{dom}[t_{\mathcal{H}_N}]$$

*gilt [5, Satz 5.4].*

Die Erweiterung  $\mathcal{H}_N$  bezeichnen wir als Neumann'sche Erweiterung. Unter einer Neumann'schen Randbedingung versteht man in der Regel, dass die Normalenableitung einer Funktion auf dem Rand des Definitionsbereiches den Wert Null annimmt. Wir wollen zeigen, dass dies unter gewissen Voraussetzungen ebenso für Funktionen aus dem Definitionsbereich des Operators  $\mathcal{H}_N$  gilt. Auf Grund der Kirchhoffbedingungen addieren sich für jede Funktion  $f \in \text{dom}(\mathcal{H}_N)$  die Normalenableitungen in jedem Knoten zu Null auf. Wir betrachten nun zu einem Graphen  $\mathcal{G}$  einen Teilgraphen  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Wir bezeichnen mit  $\text{deg}(v)$

die Anzahl der zu einem Knoten  $v$  inzidenten Kanten. Unter einem Randknoten von  $\tilde{\mathcal{G}}$  verstehen wir dann die Knoten, an denen sich  $\tilde{\mathcal{G}}$  zu  $\mathcal{G}$  fortsetzen lässt, also [5, (6.1)]

$$\partial\tilde{\mathcal{G}} := \{v \in \tilde{V} \mid \deg_{\tilde{\mathcal{G}}}(v) < \deg_{\mathcal{G}}(v)\}.$$

Dann definieren wir die innere Normalenableitung auf einem Knoten folgendermaßen [5, (6.2)].

**Definition 5.4.** Sei  $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  ein Teilgraph von  $\mathcal{G}$  und  $v \in \tilde{V}$  ein Knoten auf dem Rand von  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Für ein beliebiges  $f \in \text{dom}(\mathcal{H})$  definieren wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial n_{\tilde{\mathcal{G}}}}(v) := \sum_{e \in \tilde{E}_v} f'_e(v)$$

die innere Normalenableitung von  $v \in \partial\tilde{\mathcal{G}}$ .

Wir wollen nun diese Definition auf Graphenenden fortsetzen, ähnlich wie wir den Wert einer Funktion auf dem Graphenende definiert haben. Hierfür müssen die Graphenenden eine endliche Länge haben. Dies ist automatisch gegeben, wenn der Graph endliche Länge hat. Da wir die Neumann'sche Erweiterung auch nur auf solchen Graphen weiter untersuchen werden, werden wir die endliche des Graphen im Folgenden stets annehmen.

Wir beginnen mit folgender Proposition [5, Proposition 6.2].

**Proposition 5.5.** Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge, der nur über ein Graphenende  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$  verfügt. Sei  $(\mathcal{G}_k)$  eine kompakte Ausschöpfung von  $\mathcal{G}$ . Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v \in \partial\mathcal{G}_k} \frac{\partial f}{\partial n_{\mathcal{G}_k}}(v)$$

und ist unabhängig von der Wahl der kompakten Ausschöpfung.

Im folgenden Text werden wir häufig Differenzen von Graphen bilden, also für einen Teilgraphen  $\mathcal{G}_k$  des Graphen  $\mathcal{G}$  die Menge  $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_k$  betrachten. In einem solchen Fall können wir den topologischen Abschluss der Menge  $\tilde{\mathcal{G}}$  bezüglich des metrischen Graphen  $\mathcal{G}$  bilden und erhalten somit einen Graphen  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Vereinfacht gesagt werden die Knoten an den entstehenden „losen“ Enden wieder eingefügt. Wir werden die Bildung dieses topologischen Abschlusses nicht explizit erwähnen, sofern keine Missverständnisse zu erwarten sind.

*Beweis von Proposition 5.5.* Wir gehen zunächst davon aus, dass die Graphen  $\mathcal{G}'_k = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  zusammenhängend sind. Wir betrachten nun den Graphen  $\tilde{\mathcal{G}}' = \mathcal{G}'_k \setminus \mathcal{G}'_j$  mit  $k \leq j$ . Wir zeigen, dass in diesem Fall  $\tilde{\mathcal{G}}'$  ein endlicher Graph ist. Wir nehmen zu diesem Zweck an, dass  $\tilde{\mathcal{G}}'$  unendliche viele Kanten hätte. Dann könnten wir eine Folge  $(e_n)$  paarweise unterschiedlicher Kanten und auf jeder Kante einen inneren Punkt  $x_n$  wählen. Wir betrachten nun die Menge  $\mathcal{G} \cup \gamma$ . Als metrischer Raum ist  $\mathcal{G}$  mit der von der

Metrik induzierten Topologie ein nichtkompakter, lokal kompakter T2-Raum. Über die Alexandroff-Kompaktifizierung erhalten wir eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $\mathcal{G} \cup \gamma$ , sodass alle in  $\mathcal{G}$  offenen Mengen auch in  $\mathcal{T}$  enthalten sind, es sich bei  $\mathcal{T}$  aber um einen kompakten topologischen Raum handelt (siehe zum Beispiel [13, Satz 7.3.5]). In  $\mathcal{G} \cup \gamma$  hat die Folge  $(x_n)$  daher einen Häufungspunkt  $x$ . Nach Konstruktion ist  $x \notin \mathcal{G}$  und somit wäre  $x = \gamma$ , denn  $\gamma$  ist ein Element des topologischen Raums  $(\mathcal{G} \cup \gamma, \mathcal{T})$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $x_n \in \mathcal{G}'_0$  für alle  $n$  und  $\tilde{\mathcal{G}}' = \mathcal{G}'_k \setminus \mathcal{G}'_j$ . Also ist  $\tilde{\mathcal{G}}'$  endlich.

Der Rand  $\partial\tilde{\mathcal{G}}'$  besteht nun genau aus der Vereinigung der Randknoten von  $\mathcal{G}'_k$  und  $\mathcal{G}'_j$  und unter Beachtung der Orientierung der inneren Normalenableitung erhalten wir

$$\sum_{v \in \partial\tilde{\mathcal{G}}'} \frac{\partial f}{\partial n_{\tilde{\mathcal{G}}'}}(v) = \sum_{v \in \partial\mathcal{G}'_k} \frac{\partial f}{\partial n_{\mathcal{G}'_k}}(v) - \sum_{v \in \partial\mathcal{G}'_j} \frac{\partial f}{\partial n_{\mathcal{G}'_j}}(v).$$

Über partielle Integration ergibt sich

$$\int_{\tilde{\mathcal{G}}'_k} f''(x) \cdot 1 \, dx = \sum_{v \in \partial\tilde{\mathcal{G}}'_k} \frac{\partial f}{\partial n_{\tilde{\mathcal{G}}'_k}}(v) \quad \text{und} \quad \int_{\tilde{\mathcal{G}}'_j} f''(x) \cdot 1 \, dx = \sum_{v \in \partial\tilde{\mathcal{G}}'_j} \frac{\partial f}{\partial n_{\tilde{\mathcal{G}}'_j}}(v)$$

und so mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left| \sum_{v \in \partial\mathcal{G}'_k} \frac{\partial f}{\partial n_{\mathcal{G}'_k}}(v) - \sum_{v \in \partial\mathcal{G}'_j} \frac{\partial f}{\partial n_{\mathcal{G}'_j}}(v) \right| = \left| \int_{\mathcal{G}'_k \setminus \mathcal{G}'_j} f''(x) \, dx \right| \leq L(\mathcal{G}'_k) \|\mathcal{H}f\|_{L^2(\mathcal{G})}$$

für alle  $k \leq j$ . Da  $L(\mathcal{G}'_k)$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, handelt es sich bei der Folge der inneren Normalableitungen um eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit des zu Grund liegenden Raums gegen einen eindeutigen Grenzwert konvergiert.

Wir müssen nur noch begründen, dass der Grenzwert unabhängig ist von der Wahl der kompakten Ausschöpfung. Zum topologischen Graphenende  $\gamma$  gehört ein eindeutig bestimmtes Graphenende  $\omega$ , welches durch einen Strahl  $\mathcal{R}$  repräsentiert wird. Dann ist  $\mathcal{R} \cap \mathcal{G}'_n$  ebenso ein Strahl für jedes  $n$ . Folglich können wir wiederum eine Folge  $(U_n)$  wählen, die  $\gamma$  repräsentiert und  $U_n \subset \mathcal{G}'_n$  für alle  $n$  erfüllt. Wegen der Bedingung der kompakten Randes für jedes  $U_n$  können wir dann auch zu jedem  $n$  ein  $k$  wählen, sodass  $\mathcal{G}'_k \subset U_n$ . Aus der Inklusion folgt dann die Unabhängigkeit von der Wahl der Ausschöpfung.

Angenommen  $\mathcal{G}'_n = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n$  ist nicht zusammenhängend für alle  $n$ . Dann enthält  $\mathcal{G}'_n$  genau eine Komponente  $\mathcal{G}'_n{}^\gamma$  mit unendlichen vielen Knoten und endlich viele Komponenten mit endlich vielen Knoten. Wir fügen diese zu  $\mathcal{G}_n$  hinzu und erhalten eine kompakte Ausschöpfung  $(\overline{\mathcal{G}}_n)$  mit  $\mathcal{G}'_n{}^\gamma = \mathcal{G} \setminus \overline{\mathcal{G}}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit dem zuvor Bewiesenen existiert auch hier der Grenzwert und ist insbesondere unabhängig von der Wahl der kompakten Ausschöpfung. Damit ist der Beweis vollständig.  $\square$

Wir können diese Proposition sofort auf den Fall verallgemeinern, in dem der Graph  $\mathcal{G}$

endlich viele Enden hat, die sich durch die Entfernung eines endlichen Graphen aus  $\mathcal{G}$  „trennen“ lassen. Solche Graphenenden werden wir im Folgenden als frei bezeichnen [5, Definition 2.4].

**Definition 5.6.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph und sei  $\gamma$  ein topologisches Graphenende. Es existiere ein endlicher Teilgraph  $\mathcal{G}_0$ , sodass für jedes von  $\gamma$  verschiedene Graphenende  $\gamma'$  und den beliebig gewählten Repräsentationen  $(U_n), (U_n)' \subset \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0$  zudem  $U_n \cap U_m' = \emptyset$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt. Dann heißt  $\gamma$  ein freies Graphenende von  $\mathcal{G}$ .*

Diese Definition lässt sich auch äquivalent für das zu  $\gamma$  gehörige Graphenende  $\omega$  formulieren.

Hat ein Graph  $\mathcal{G}$  nur ein Graphenende  $\omega_1$ , so ist dieses stets frei. Fügen wir zu  $\mathcal{G}$  ein weiteres Graphenende  $\omega_2$  hinzu, so können beliebige Repräsentanten  $\mathcal{R}_1$  von  $\omega_1$  und  $\mathcal{R}_2$  von  $\omega_2$  stets nur endlich viele Knoten gemeinsam haben, denn ansonsten würden sie definitionsgemäß der gleichen Äquivalenzklasse angehören. Das impliziert, dass jeder lokal endliche Graph mit endlich vielen Graphenenden, nur freie Graphenenden haben kann. Damit ist für solche Graphen die Wahl eines endlichen Teilgraphen  $\mathcal{G}_0$ , der alle Graphenenden wie in Definition 5.6 voneinander trennt, stets möglich.

In dem Fall, dass  $\mathcal{G}$  nur über endlich viele und damit nur freie Graphenenden verfügt, können wir die Argumentation aus dem Beweis von Proposition 5.5 für jedes Graphenende anwenden und den Grenzwert bilden. Bei einem solchen Graphen erhalten wir durch  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0$  endlich viele Teilgraphen, die jeweils über genau ein Graphenende verfügen. Wir bezeichnen diese Graphen künftig mit  $\mathcal{G}^\gamma$  und analog die Knoten dieser Graphen mit  $V^\gamma$ . Wir kommen somit zu folgender Definition [5, Definition 6.3].

**Definition 5.7.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein metrischer Graph endlicher Länge. Sei  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$  ein freies Graphenende. Sei  $(\mathcal{G}_k)$  mit  $k \geq 1$  eine kompakte Ausschöpfung des Graphen  $\mathcal{G}^\gamma$ . Dann definieren die innere Normalenableitung  $\partial_n f(\gamma)$  für jedes  $f \in \text{dom}(\mathcal{H})$  als*

$$\partial_n f(\gamma) := \frac{\partial f}{\partial n}(\gamma) := - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v \in \partial \mathcal{G}_k} \frac{\partial f}{\partial n_{\mathcal{G}_k}}.$$

Darauf aufbauend können wir nun folgende Proposition formulieren [5, Proposition 6.6].

**Proposition 5.8.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge mit endlich vielen Graphenenden und  $|\mathfrak{C}(\mathcal{G})| = m$ . Für Funktionen  $g \in H^1(\mathcal{G})$  und  $f \in \text{dom}(\mathcal{H}) \cap H^1(\mathcal{G})$  sind*

$$\Gamma_0 g := (g(\gamma))_{\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})} \quad \Gamma_1 f := (\partial_n f(\gamma))_{\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})}$$

Vektoren aus dem endlich-dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{C}^m$ . Bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^m}$  das Standardskalarprodukt, so gilt die folgende Gauß-Green'sche-Formel

$$\langle \mathcal{H}f, g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} = \langle f', g' \rangle_{L^2(\mathcal{G})} - \langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g \rangle_{\mathbb{C}^m}. \quad (6)$$

Vor dem Beweis dieser Proposition stellen wir zwei Lemmata voran [5, Satz 3.9].

**Lemma 5.9.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge. Seien  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  die Graphenenden von  $\mathcal{G}$ . Dann existiert eine Funktion  $f \in \text{dom}(\mathcal{H}) \cap H^1(\mathcal{G})$  mit*

$$f(\gamma_1) = 1 \quad \text{und} \quad f(\gamma_2) = \dots = f(\gamma_m) = 0.$$

*Beweis.* Wir wählen einen endlichen Teilgraphen, der die Graphenenden in  $\mathcal{G}$  trennt. Sei dann  $\mathcal{G}^{\gamma_1}$  der unendliche Teilgraph, der  $\gamma_1$  enthält. Mit  $\varphi \in H^2(0, 1)$  bezeichnen wir eine beliebige Testfunktion, die  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$  und  $\varphi(1) = 1$  erfüllt. Dann definieren wir auf dem Graphen  $\mathcal{G}$  die Funktion  $f$  als

$$f(x_e) = \begin{cases} 1 & x_e \in e = (u, v), \quad u, v \in \mathcal{G}^{\gamma_1} \text{ und } u, v \notin \partial\mathcal{G}^{\gamma_1} \\ \varphi\left(\frac{|x_e - u|}{|e|}\right) & x_e \in e = (u, v) \quad u \in \partial\mathcal{G}^{\gamma_1}, v \in \mathcal{G}^{\gamma_1}, v \notin \partial\mathcal{G}^{\gamma_1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit liegt  $f$  auf jeder Kante in  $H^2(e)$ . Zudem ist  $f$  auf dem gesamten Graphen stetig. Die Normalenableitungen an jedem Knoten sind jeweils Null, also erfüllt  $f$  die Kirchhoffbedingungen. Wegen der endlichen Länge des Graphen folgt unmittelbar  $f \in L^2(\mathcal{G})$  und da die Ableitung von  $f$  nur auf endlich vielen Kanten nicht identisch verschwindet auch  $f \in H^1(\mathcal{G})$ . Also erfüllt  $f$  die Bedingungen des Lemmas.  $\square$

Das zweite Lemma stellt eine Erweiterung von Proposition 3.28 dar [5, Satz 3.11].

**Lemma 5.10.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge mit endlich vielen Graphenenden. Dann gilt*

$$H_0^1(\mathcal{G}) = \{f \in H^1(\mathcal{G}) \mid f(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})\}.$$

*Beweis.* Die erste Inklusion ist eine direkte Folge aus Proposition 3.28.

Für die andere Richtung sei nun  $f \in H^1(\mathcal{G})$  mit  $f(\gamma) = 0$  für alle  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$ . Wir nehmen zunächst an, dass  $f$  reellwertig und positiv ist. Wir konstruieren eine Folge  $(f_n)$  von Funktionen aus  $H^1(\mathcal{G}) \cap L_c^2(\mathcal{G})$ , welche bezüglich der Norm des Raums  $H^1(\mathcal{G})$  gegen  $f$  konvergiert. Daraus folgt dann  $f \in H_0^1(\mathcal{G})$  gemäß der Definition dieses Raums. Wir definieren

$$\varphi_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \varphi_n(s) = \begin{cases} s - \frac{1}{n} & \text{wenn } s \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und bilden die Komposition  $f_n := \varphi_n \circ f$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Aus  $\varphi_n(s) \leq s$  folgt  $|f_n| \leq |f|$ . Zusätzlich impliziert

$$|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| \leq |s - t| \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}^+$$

auch  $|f'_n| \leq |f'|$  für fast alle  $x \in \mathcal{G}$ . Dies impliziert wiederum

$$\|f_n\|_{H^1(\mathcal{G})} \leq \|f\|_{H^1(\mathcal{G})}$$

und somit ist  $(f_n)$  eine Folge in  $H^1(\mathcal{G})$ . Wir müssen zeigen, dass  $f_n$  in  $L^2_c(\mathcal{G})$  liegt. Angenommen, ein Folgenglied  $f_n$  würde auf unendlichen vielen Kanten nicht identisch verschwinden. Gemäß Annahme und Konstruktion erhalten wir dann eine Folge von paarweise verschiedenen Kanten  $(e_k)$ , die jeweils einen Punkt  $x_k$  enthalten, für den  $f(x_k) > \frac{1}{n}$  gilt. Da wir die Graphenenden durch Entfernung eines endlichen Graphen trennen können, können wir ohne Einschränkung eine Teilfolge von  $(x_k)$  wählen, die auf dem Graphen  $\mathcal{G}^{\gamma_1}$  liegt. Die Teilfolge bezeichnen wir wiederum mit  $(x_k)$ . Wir kompaktifizieren  $\mathcal{G}^{\gamma_1}$  mittels der Alexandroff-Kompaktifizierung und erhalten so den Graphen  $\widehat{\mathcal{G}^{\gamma_1}}$ . Auf diesem muss die Folge  $(x_k)$  einen Häufungspunkt  $x$  haben. Da jede Kante aus  $\mathcal{G}$  höchstens ein  $x_k$  enthält, kann der Häufungspunkt nur das Graphenende  $\gamma_1$  sein. Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt dann  $f(x) \geq \frac{1}{n}$ , was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung an  $f$  darstellt. Also liegt  $f_n$  in  $L^2_c(\mathcal{G})$ .

Es bleibt die Konvergenz der Folge  $(f_n)$  bezüglich der  $H^1$ -Norm zu zeigen. Es gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 + \|f' - f'_n\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 &\leq 2(\|f\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 + \|f_n\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 + \|f'\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 + \|f'_n\|_{L^2(\mathcal{G})}^2) \\ &\leq 4\|f\|_{H^1(\mathcal{G})}^2. \end{aligned}$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt damit die Konvergenz bezüglich der  $H^1$ -Norm, sofern wir die punktweise Konvergenz fast überall von  $f_n \rightarrow f$  und von  $f'_n \rightarrow f'$  zeigen können. Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = s$  für alle  $s \in \mathbb{R}^+$  folgt die punktweise Konvergenz von  $f_n$  gegen  $f$ .

Da  $f$  auf jeder Kante absolutstetig ist, ist  $f$  auf jeder Kante fast überall im klassischen Sinn differenzierbar. Sei nun  $x$  ein Punkt auf dem  $f$  differenzierbar ist. Angenommen in diesem Punkt ist  $f > 0$ . Dann existiert in Folge der Stetigkeit von  $f$  eine offene Umgebung von  $x$ , auf der ebenso  $f > 0$  gilt. Damit können wir ein  $N$  so groß wählen, dass  $f_n = f - \frac{1}{n}$  für alle  $n > N$  gilt. Folglich ist  $f_n$  in  $x$  differenzierbar mit  $f'_n(x) = f'(x)$  für alle  $n > N$ .

Angenommen im Punkt  $x$  gilt  $f(x) = 0$ . Dann existiert zu jedem  $n$  eine Umgebung  $U_n$ , sodass  $f < \frac{1}{n}$  auf  $U_n$  gilt. Folglich verschwindet  $f_n$  identisch auf  $U_n$  und ist damit differenzierbar in  $x$  mit  $f'_n(x) = 0$ . Es ist aber auch  $f'(x) = 0$ , da  $f$  in  $x$  ein lokales Minimum hat. Damit ist die punktweise Konvergenz gezeigt.

Sei  $f$  nun eine beliebige Funktion. Dann zerlegen wir  $f$  in Real- und Imaginärteil und diese Teile wiederum jeweils in einen Positiv- und einen Negativteil und argumentieren für jeden Teil wie oben. Damit ist alles gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 5.11.** *Dieses Lemma gilt nicht nur für die hier betrachteten Graphen, sondern für alle lokal endlichen Graphen (siehe [5, Satz 3.11]). Für die allgemeinere Formulie-*

zung ist die hier verwendete Alexandroff-Kompaktifizierung als Argument aber nicht mehr ausreichend.

Wir kommen nun zum Beweis der Proposition 5.8.

*Beweis von Proposition 5.8.* Wir wählen ein Graphenende  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$  und die Funktion  $g$  wie im Lemma 5.9 als Funktion  $g \in \text{dom}(\mathcal{H}) \cap H^1(\mathcal{G})$ , sodass  $g$  nur auf endlichen vielen Kanten nicht konstant ist und zudem

$$g(\gamma) = 1 \quad \text{und} \quad g(\gamma') = 0 \quad \text{für alle} \quad \gamma' \in \mathfrak{C}(\mathcal{G}) \setminus \{\gamma\}$$

erfüllt ist.

Wir wählen eine kompakte Ausschöpfung  $(\mathcal{G}_k)$  und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}f, g \rangle_{L^2(\mathcal{G})} - \langle f', g' \rangle_{L^2(\mathcal{G})} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{H}f, g \rangle_{L^2(\mathcal{G}_k)} - \langle f', g' \rangle_{L^2(\mathcal{G}_k)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} - \int_{\mathcal{G}_k} f''(x) \overline{g(x)} dx - \int_{\mathcal{G}_k} f'(x) \overline{g'(x)} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v \in \partial \mathcal{G}_k} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_k}(v) \overline{g(v)} + \int_{\mathcal{G}_k} f'(x) \overline{g'(x)} dx - \int_{\mathcal{G}_k} f'(x) \overline{g'(x)} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v \in \partial \mathcal{G}_k} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_k}(v) \overline{g(v)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v \in \partial \mathcal{G}_k \cap V^\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_k}(v) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Folge  $\mathcal{G}_k^\gamma := \mathcal{G}_k \cap \mathcal{G}^\gamma$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , so ist dies eine kompakte Ausschöpfung von  $\mathcal{G}^\gamma$ . Dann können wir für aus reichend großes  $n$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_k}(v) = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_k^\gamma}(v) \quad \forall v \in \partial_{\mathcal{G}^\gamma} \mathcal{G}_k^\gamma = \mathcal{G}_k \cap V^\gamma$$

schreiben. Folglich ist dann mit Proposition 5.5

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v \in \partial \mathcal{G}_k \cap V^\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_k}(v) = -\frac{\partial f}{\partial n}(\gamma).$$

Für die so gewählte Funktion  $g$  gilt die Gleichung (6), da

$$\langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g \rangle_{\mathbb{C}^m} = -\frac{\partial f}{\partial n}(\gamma) \cdot 1$$

ist. Die Gleichung trifft außerdem für alle Funktionen  $g \in \text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$  zu, da in diesem Fall der Subtrahend der rechten Seite von (6) Null ist und der Rest aus den Kirchhoffbedingungen an  $f$  sowie der Stetigkeit beider Funktionen folgt. Da das Skalarprodukt eine stetige Abbildung ist, folgt die Gültigkeit der Gleichung dann auch für den Abschluss von  $\text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$



bezüglich der Norm des Raums  $H^1(\mathcal{G})$  und somit für alle  $g \in H_0^1(\mathcal{G})$ . Sei nun  $g \in H^1(\mathcal{G})$  beliebig. Dann betrachten wir

$$\tilde{g} = g - \sum_{\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})} g(\gamma) f_\gamma.$$

Daraus folgt unmittelbar  $\tilde{g}(\gamma) = 0$  für alle  $\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})$ , also  $\tilde{g} \in H_0^1(\mathcal{G})$  gemäß Lemma 5.10. Das impliziert wiederum zusammen mit der Linearität von  $\Gamma_0$

$$\langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 \tilde{g} \rangle = \langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g \rangle + \left\langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 \sum_{\gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{G})} g(\gamma) f_\gamma \right\rangle = \langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g \rangle$$

und damit die Gleichung (6) für alle  $g \in H^1(\mathcal{G})$ .  $\square$

Wir können nun für solche Graphen wie in obigem Beweis genau den Definitionsbereich des Operators  $\mathcal{H}_N$  angeben [5, Korollar 6.7].

**Korollar 5.12.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge und endlichen vielen Graphenenden. Dann gilt für die Neumann'sche Erweiterung des Operators  $\mathcal{H}_0$  auf diesem Graphen*

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H} \downarrow \text{dom}(\mathcal{H}_N) \quad \text{dom}(\mathcal{H}_N) = \{f \in \text{dom}(\mathcal{H}) \cap H^1(\mathcal{G}) \mid \Gamma_1 f = 0\}.$$

*Beweis.* Gemäß der Definition von  $\mathcal{H}_N$  besteht dessen Definitionsbereich genau aus denjenigen Funktionen  $f \in H^1(\mathcal{G})$ , für die eine Funktion  $h \in L^2(\mathcal{G})$  mit

$$\langle f', g' \rangle_{L^2(\mathcal{G})} = \langle f, h \rangle_{L^2(\mathcal{G})}$$

für alle  $g \in H^1(\mathcal{G})$  existiert (siehe Definition 4.6). Aus Proposition 5.8 folgt somit  $\Gamma_1 f = 0$ . Da  $\mathcal{H}_N$  zudem eine Einschränkung des maximalen Laplace-Operators ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Für die beiden angegebenen selbstadjungierten Erweiterungen  $\mathcal{H}_F$  und  $\mathcal{H}_N$  sollen als eigentliches Ziel der Arbeit Spektralabschätzungen gefunden werden. Dazu wird zunächst im folgenden Kapitel die Art des Spektrums der beiden Operatoren weiter untersucht.

## 5.2 Das Spektrum auf Graphen im Fall endlicher Länge

Im Folgenden habe der Graph  $\mathcal{G}$  stets endliche Länge.

Um zu zeigen, dass die beiden definierten Erweiterungen  $\mathcal{H}_F, \mathcal{H}_N$  auf Graphen endlicher Länge ein rein diskretes Spektrum haben, zeigen wir, dass der Raum der hölderstetigen Funktionen  $C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  kompakt in  $L^2(\mathcal{G})$  eingebettet ist. Der Raum  $C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  ist dabei folgendermaßen definiert.

**Definition 5.13.** Für eine Funktion  $f$  auf einem Graphen  $\mathcal{G}$  bezeichne  $M_f$  die Hölderkonstante von  $f$  zum Exponenten  $\frac{1}{2}$ , definiert als

$$M_f := \sup_{x,y \in \mathcal{G}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dann heißt der Raum

$$C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G}) := \{f \in C(\mathcal{G}) \mid M_f < \infty\}$$

Raum der zum Exponenten  $\frac{1}{2}$  hölderstetigen Funktionen. Für diesen Raum definieren wir die Norm  $\|\cdot\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})}$  als

$$\|f\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})} := \|f\|_{\infty} + M_f.$$

Der Raum  $(C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})})$  ist ein Banachraum.

Die Banachraumeigenschaften des Hölderraums gilt für allgemeine metrische Räume (siehe z. B. [14]), sodass an dieser Stelle auf den Beweis verzichtet werden kann. Wesentlich relevanter und interessanter ist an dieser Stelle, dass für  $f \in H^1(\mathcal{G})$  auch  $f \in C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  gilt und die Einbettung  $H^1(\mathcal{G}) \hookrightarrow C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  stetig ist. Dies folgt aus folgender Überlegung. Seien  $x, y \in \mathcal{G}$  und  $\mathcal{P}$  die Menge der Pfade  $P$  von  $x$  nach  $y$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \inf_{P \in \mathcal{P}} \left| \int_P f'(t) dt \right| \\ &\leq \inf_{P \in \mathcal{P}} \int_{\mathcal{G}} |\chi_P(t) f'(t)| dt \\ &\leq \inf_{P \in \mathcal{P}} \left( \int_{\mathcal{G}} |\chi_P(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\mathcal{G}} |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= d(x, y)^{\frac{1}{2}} \|f'\|_{L^2(\mathcal{G})}. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit ist  $M_f \leq \|f'\|_{L^2(\mathcal{G})}$  und somit  $f$  hölderstetig zum Exponenten  $\frac{1}{2}$ . Aus der kompakten Einbettung von  $C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  in  $L^2(\mathcal{G})$  folgt dann die direkt die kompakte Einbettung von  $H^1(\mathcal{G})$  in  $L^2(\mathcal{G})$ . Der Beweis baut auf folgendem Lemma auf [15, Lemma 1]:

**Lemma 5.14.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Angenommen, zu jedem  $\varepsilon > 0$  existieren ein  $\delta > 0$ , ein metrischer Raum  $Y$  und eine Abbildung  $\Phi: X \rightarrow Y$ , sodass  $\Phi(X) \subset Y$  totalbeschränkt ist und, für alle  $x, y \in X$  mit  $d_Y(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta$  auch  $d_X(x, y) < \varepsilon$  gilt. Dann ist  $X$  totalbeschränkt.

*Beweis.* Für  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $\delta, Y$  und die Abbildung  $\Phi$  wie im Lemma gegeben. Nach Voraussetzung ist  $\Phi(X)$  totalbeschränkt, wir können daher eine endliche  $\delta$ -Überdeckung

$\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  mit  $V_i \subset Y$  wählen. Nach den Voraussetzung ist dann aber auch

$$\{\Phi^{-1}(V_1), \Phi^{-1}(V_2), \dots, \Phi^{-1}(V_n)\}$$

eine endliche  $\varepsilon$ -Überdeckung von  $X$ . Damit ist  $X$  totalbeschränkt.  $\square$

Außerdem benötigen wir die Totalbeschränktheit von  $\mathcal{G}$ .

**Lemma 5.15.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge. Dann ist  $\mathcal{G}$  totalbeschränkt.*

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir zeigen, dass  $\mathcal{G}$  totalbeschränkt ist. Wir wählen einen endlichen Teilgraphen  $\mathcal{G}_n$ , sodass  $L(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n) < \varepsilon$ . Da  $\mathcal{G}_n$  endlich ist, existiert eine  $\varepsilon$ -Überdeckung mit den Kugeln  $\{U_\varepsilon(x_1), \dots, U_\varepsilon(x_n)\}$  von  $\mathcal{G}_n$ . Der Graph  $\mathcal{G}_n$  hat endlich viele Knoten  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , an denen sich der Graph zu  $\mathcal{G}$  fortsetzen lässt. Wir wählen dann auf  $\mathcal{G}$  die Kugeln

$$\{U_\varepsilon(x_1), \dots, U_\varepsilon(x_n), U_\varepsilon(v_1), \dots, U_\varepsilon(v_m)\}.$$

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt  $y \in \mathcal{G}$ . Ist  $y \in \mathcal{G}_n$ , so existiert ein  $x_i$  mit  $d(x_i, y) < \varepsilon$ . Ist  $y \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n$ , so ist wegen  $L(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n) < \varepsilon$  auch  $d(v_j, y) < \varepsilon$  für ein  $v_j$ . Folglich können wir  $\mathcal{G}$  mit endlich vielen  $\varepsilon$ -Kugeln überdecken. Also ist  $\mathcal{G}$  totalbeschränkt.  $\square$

Wir formulieren den zentralen Satz dieses Kapitels.

**Satz 5.16.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Graph mit endlicher Länge  $L(\mathcal{G})$ . Dann ist der Raum  $C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  kompakt in  $L^2(\mathcal{G})$  eingebettet.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Graph mit endlicher Länge  $L(\mathcal{G})$ . Sei  $B \subset C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  die Einheitskugel bezüglich der Höldernorm. Dann gilt also für ein  $M \in \mathbb{N}$  und alle  $f \in B$

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)^{\frac{1}{2}} M \quad \forall x, y \in \mathcal{G}.$$

Für  $0 < \varepsilon < L$  überdecken wir nun  $\mathcal{G}$  mit endlich vielen Kugeln  $U_{\frac{\varepsilon^2}{9M^2L^2}}(x_i)$  mit dem Durchmesser  $\frac{\varepsilon^2}{3^2M^2L^2}$  und dem Mittelpunkt  $x_i$ , was wegen der endlichen Länge und Lemma 5.15 möglich ist. Außerdem definieren wir

$$\Phi: B \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \quad \Phi(f) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\Phi$  wegen  $f \in B$  beschränkt. Wählen wir nun  $\delta = \frac{\varepsilon}{3L}$ , so gilt für  $f, g$  mit

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty < \delta$$

und einen beliebigen Punkt  $y \in U_{\frac{\varepsilon^2}{3^2 M^2 L^2}}(x_i)$

$$\begin{aligned}
|f(y) - g(y)| &= |f(y) - f(x_i) + f(x_i) - g(x_i) + g(x_i) - g(y)| \\
&\leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(y)| \\
&< d(x_i, y)^{\frac{1}{2}} M + \frac{\varepsilon}{3L} + d(x_i, y)^{\frac{1}{2}} M \\
&< \frac{\varepsilon}{3ML} M + \frac{\varepsilon}{3L} + \frac{\varepsilon}{3ML} M \\
&= \frac{\varepsilon}{L}.
\end{aligned}$$

Da  $y$  beliebig war, erhalten wir

$$\|f - g\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{L}$$

und somit schließlich

$$\int_{\mathcal{G}} |f - g|^2 \leq \int_{\mathcal{G}} \|f - g\|_{\infty}^2 \leq L \frac{\varepsilon^2}{L^2} < \varepsilon.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas 5.14 erfüllt und  $C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  ist kompakt eingebettet.  $\square$

Wir können nun folgendes Korollar einfach schlussfolgern.

**Korollar 5.17.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Graph mit endlicher Länge  $L$  und  $\mathcal{H}_M$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $\mathcal{H}_0$  mit  $\text{dom}(\mathcal{H}_M) \subset H^1(\mathcal{G})$ . Dann hat  $\mathcal{H}_M$  ein rein diskretes Spektrum.*

*Beweis.* Wegen der Abschätzung (7) ist  $H^1(\mathcal{G})$  in  $C^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G})$  stetig eingebettet. Folglich ist  $H^1(\mathcal{G})$  kompakt in  $L^2(\mathcal{G})$  eingebettet. Ist nun  $\lambda \in \rho(\mathcal{H}_M)$  ein Element aus der Resolventenmenge von  $\mathcal{H}_M$ , so folgt für eine beschränkte Menge  $M \subset L^2(\mathcal{G})$ , dass  $(\mathcal{H}_M - \lambda I)^{-1} M$  eine beschränkte Menge in  $H^1(\mathcal{G})$  ist. Aufgrund der kompakten Einbettung folgt die Präkompaktheit der Menge  $(\mathcal{H}_M - \lambda I)^{-1} M$  in  $L^2(\mathcal{G})$ . Also ist die Resolvente ein kompakter Operator in  $L^2(\mathcal{G})$ . Mit Satz 2.11 hat  $\mathcal{H}_M$  ein rein diskretes Spektrum.  $\square$

### 5.3 Das Spektrum auf Graphen im Fall unendlicher Länge

Im Falle von Graphen mit unendlicher Länge werden die Definitionsbereiche der selbstadjungierten Erweiterungen  $\tilde{\mathcal{H}}$  von  $\mathcal{H}_0^0$  im Allgemeinen nicht kompakt in  $L^2(\mathcal{G})$  haben, nicht einmal in dem Fall, dass der Graph endlichen Durchmesser hat. Sei nämlich  $\mathcal{G}$  der Graph, der von dem Intervall  $[0, 1)$  gebildet wird, wobei wir einen Knoten an jedem Punkt  $1 - \frac{1}{n}$  einfügen und hier eine Kante  $e_n$  der Länge 1 anfügen (siehe Abbildung 1). Dann ist  $D(\mathcal{G}) = 3$  und  $L(\mathcal{G}) = \infty$ . Wir wählen eine beliebige Testfunktion  $\varphi \in C_c^{\infty}(0, 1)$  mit

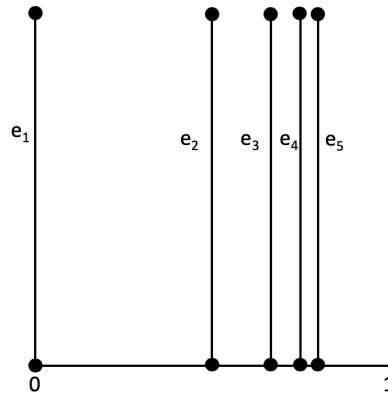


Abbildung 1: Der Graph  $\mathcal{G}$  mit der Darstellung der ersten 5 senkrechten Kanten. Diese Kanten werden jeweils im Abstand von  $1 - \frac{1}{n}$  zum Nullpunkt eingefügt.

$\int_0^1 |\varphi|^2 = 1$ . Wir definieren nun eine Folge von Funktionen  $(f_n)$  mit  $n \geq 1$  :

$$f_n(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in e_n = (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann ist  $f_n \in \text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$  für alle  $n$  und somit auch ein Element des Definitionsbereichs jeder selbstadjungierten Erweiterung  $\tilde{\mathcal{H}}$  von  $\mathcal{H}_0^0$ . Es gilt für die beschränkte Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dieser Testfunktionen

$$\|f_n - f_m\|_{L^2(\mathcal{G})} = 1 \quad \forall n \neq m.$$

Also gibt es keine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist. Damit kann aber  $\text{dom}(\tilde{\mathcal{H}})$  nicht kompakt in  $L^2(\mathcal{G})$  eingebettet sein.

## 6 Spektrale Abschätzungen

Als nächstes sollen verschiedene Abschätzungen für das Spektrum gefunden werden. Aus obigen Beweisen folgend, beschränken wir uns auf Graphen mit endlicher Länge und die beiden Erweiterungen  $\mathcal{H}_F$  und  $\mathcal{H}_N$  von  $\mathcal{H}_0$ . Für die Abschätzungen werden wir das Rayleigh-Prinzip (Satz 2.12) verwenden. Hierbei dürfen wir statt des Definitionsbereichs des Operators den Formbereich der assoziierten quadratischen Form untersuchen, was technisch einfacher ist. Wir formulieren dies als Lemma.

**Lemma 6.1.** *Auf einem Graphen  $\mathcal{G}$  endlicher Länge sei  $\tilde{\mathcal{H}}$  die Neumann'sche oder Friedrich'sche Erweiterung von  $\mathcal{H}_0$ . Bezeichne  $\text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}]$  den Definitionsbereich der assoziierten quadratischen Form. Sei  $\lambda_k$  der  $k$ -te Eigenwert mit der Eigenfunktion  $u_k$ . Dann gilt für  $k = 0$ :*

$$\begin{aligned}\lambda_0(\tilde{\mathcal{H}}) &= \min \left\{ \frac{\int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |u(x)|^2 dx}; 0 \neq u \in \text{dom}(\tilde{\mathcal{H}}); \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\int_{\mathcal{G}} |v'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |v(x)|^2 dx}; 0 \neq v \in \text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}] \right\}\end{aligned}$$

und für  $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\lambda_k(\tilde{\mathcal{H}}) &= \min \left\{ \frac{\int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |u(x)|^2 dx}; 0 \neq u \in \text{dom}(\tilde{\mathcal{H}}); u \perp \{u_0, \dots, u_{k-1}\} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\int_{\mathcal{G}} |v'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |v(x)|^2 dx}; 0 \neq v \in \text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}] \right\}.\end{aligned}$$

*Beweis.* Die erste Gleichheit ist die Formulierung des Rayleigh-Prinzips. Angenommen, es gebe eine Funktion  $v \in \text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}]$ , welche die Bedingungen erfüllt, aber

$$\frac{\int_{\mathcal{G}} |v'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |v(x)|^2 dx} < \lambda_k$$

gilt. Es liegt  $\text{dom}(\tilde{\mathcal{H}})$  dicht in  $\text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}]$  bezüglich der von der quadratischen Form induzierten Norm. Diese ist äquivalent zur Norm  $H^1(\mathcal{G})$ . Somit können wir eine Folge  $u_n \in \text{dom}(\tilde{\mathcal{H}})$  wählen, sodass

$$\| \|u_n\|_{H^1(\mathcal{G})} - \|v\|_{H^1(\mathcal{G})} \| \leq \|u_n - v\|_{H^1(\mathcal{G})} \rightarrow 0$$

und damit auch

$$\frac{\int_{\mathcal{G}} |u_n'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |u_n(x)|^2 dx} \rightarrow \frac{\int_{\mathcal{G}} |v'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |v(x)|^2 dx} < \lambda_k(\tilde{\mathcal{H}})$$

zutritt. Dies ist aber ein Widerspruch zum Rayleigh-Prinzip, also muss auch für  $v \in$

$\text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}]$  im Fall  $k \geq 1$

$$\lambda_k(\tilde{\mathcal{H}}) = \min \left\{ \frac{\int_{\mathcal{G}} |v'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |v(x)|^2 dx}; 0 \neq v \in \text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}] ; v \perp \{u_0, \dots, u_{k-1}\} \right\}$$

und im Fall  $k = 0$

$$\lambda_0(\tilde{\mathcal{H}}) = \min \left\{ \frac{\int_{\mathcal{G}} |v'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |v(x)|^2 dx}; 0 \neq v \in \text{dom}[t_{\tilde{\mathcal{H}}}] \right\}$$

gelten. □

Für die Spektralabschätzungen werden wir für  $\mathcal{H}_F$  und  $\mathcal{H}_N$  zu unterschiedlichen Resultaten gelangen. Wir beginnen mit der Neumann'schen Erweiterung.

## 6.1 Spektralabschätzungen für die Neumann'sche Erweiterung

### 6.1.1 Spektralabschätzung von unten in Abhängigkeit von der Länge

Es ist für  $\mathcal{H}_N$  zunächst  $\lambda_0 = 0$  mit den konstanten Funktionen als Eigenfunktionen. Wir wollen als Hauptresultat dieser Arbeit folgende Abschätzung beweisen.

**Satz 6.2.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Graph mit endlicher Länge  $L(\mathcal{G})$  und  $\mathcal{H}_N$  die Neumann'sche Erweiterung von  $\mathcal{H}_0$  auf diesem. Dann gilt für den  $k$ -ten Eigenwert mit  $k \geq 1$*

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \frac{(k+1)^2 \pi^2}{4L(\mathcal{G})^2}$$

und damit speziell für die Spektrallücke von  $\mathcal{H}_N$

$$\lambda_1(\mathcal{H}_N) \geq \frac{\pi^2}{L(\mathcal{G})^2}.$$

Der erste Beweis für diese Abschätzung folgt der Argumentation von Friedlander [3] und wird mittels der Ausschöpfungsmethode vom Fall endlicher Graphen auf den Fall der unendlichen Graphen erweitert. Wir formulieren ein erstes Lemma aus genannter Veröffentlichung für den dort bewiesenen endlichen Fall [3, Lemma 3]. Der folgende Beweis folgt nicht dem Symmetrisierungsargument von Friedlander, sondern benutzt Eulertouren, was auf Ideen von Nicaise [2] und Kurasov [16] zurückgeht.

**Lemma 6.3.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher, zusammenhängender Graph und  $y \in \mathcal{G}$ . Sei  $H_y^1(\mathcal{G})$  der Raum der Funktionen aus  $H^1(\mathcal{G})$ , die am Punkt  $y$  verschwinden. Dann gilt für alle  $f \in H_y^1(\mathcal{G})$*

$$\int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_{\mathcal{G}} |f(x)|^2 dx.$$

*Beweis.* Für  $f \in H_y^1(\mathcal{G})$  gelte zunächst zusätzlich  $f|_e \in H^2(e)$  für alle  $e \in E$ . Ist  $y$  kein Knoten, so betrachten wir  $y$  als einen artifiziellen Knoten. Sei  $\bar{\mathcal{G}} = (V, \bar{E})$  der Graph der aus  $\mathcal{G} = (V, E)$  entsteht, indem wir alle Kanten von  $\mathcal{G}$  verdoppeln, siehe Abbildung 2. Zu jeder Kante  $e \in E$  erhalten wir das korrespondierende Kantenpaar  $\{e, \bar{e}\}$ , mit  $e, \bar{e} \in \bar{E}$ .

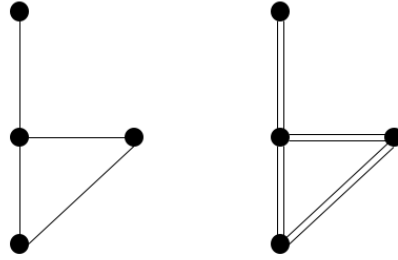


Abbildung 2: Links ein Graph  $\mathcal{G}$  und rechts der zugehörige Graph  $\bar{\mathcal{G}}$  nach Verdopplung aller Kanten. Der rechte Graph ist eulersch.

Der Graph  $\bar{\mathcal{G}}$  ist eulersch, da alle Knoten eine gerade Anzahl inzidenter Kanten haben. Zudem gilt  $L(\bar{\mathcal{G}}) = 2L(\mathcal{G})$ . Wir bezeichnen mit  $\bar{f} \in H_y^1(\bar{\mathcal{G}})$  die zu  $f$  korrespondierende Funktion, das heißt

$$\bar{f}|_{\bar{e}} := \bar{f}|_e := f|_e \quad \text{für alle } e \in E.$$

Wir wählen eine Eulertour in  $\bar{\mathcal{G}}$  mit Anfangs- und Endknoten  $y$ . Dann können wir die Funktion  $\bar{f}$  mit einer Funktion  $\tilde{f}$  auf dem Intervall  $[0, 2L(\mathcal{G})]$  identifizieren. Es folgt

$$\int_{\bar{\mathcal{G}}} |\bar{f}'|^2 = \int_0^{2L(\mathcal{G})} |\tilde{f}'|^2 \quad \text{und} \quad \int_{\bar{\mathcal{G}}} |\bar{f}|^2 = \int_0^{2L(\mathcal{G})} |\tilde{f}|^2.$$

Die Funktion  $\tilde{f}$  erfüllt die Bedingungen  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2L(\mathcal{G})) = 0$ . Folglich stimmt sie fast überall mit einer Funktion  $\hat{f} \in H^2((0, 2L(\mathcal{G}))) \cap H_0^1((0, 2L(\mathcal{G})))$  überein. Der erste echt positive Eigenwert des Laplaceoperators auf diesem Bereich ist  $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2}$  (siehe zum Beispiel Kapitel 7 aus [17]). Wir schlussfolgern mit dem Rayleigh-Prinzip die Abschätzung

$$\int_0^{2L(\mathcal{G})} |\hat{f}'|^2 \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_0^{2L(\mathcal{G})} |\hat{f}|^2.$$



Hieraus können wir gemäß der Konstruktion auch auf

$$\int_0^{2L(\mathcal{G})} |\tilde{f}'|^2 \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_0^{2L(\mathcal{G})} |\tilde{f}|^2$$

und schließlich

$$\int_{\bar{\mathcal{G}}} |\bar{f}|^2 \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_{\bar{\mathcal{G}}} |\bar{f}|^2$$

schließen. Gemäß der Konstruktion von  $\bar{\mathcal{G}}$  als Verdopplung von  $\mathcal{G}$  folgt daraus

$$\int_{\mathcal{G}} |f'|^2 \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_{\mathcal{G}} |f|^2.$$

Da  $H^2(e)$  dicht in  $H^1(e)$  bezüglich der  $H^1$ -Norm liegt, gilt diese Abschätzung für alle  $f \in H_y^1(\mathcal{G})$  und damit die Behauptung. □

Wir verallgemeinern dieses Lemma nun auf den Fall eines unendlichen Graphen endlicher Länge.

**Lemma 6.4.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein zusammenhängender Graph endlicher Länge  $L(\mathcal{G})$  und  $y \in \mathcal{G}$ . Sei  $H_y^1(\mathcal{G})$  der Raum der Funktionen aus  $H^1(\mathcal{G})$ , die am Punkt  $y$  verschwinden. Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_{\mathcal{G}} |f(x)|^2 dx$$

für alle  $f \in H_y^1(\mathcal{G})$ .

*Beweis.* Wir betrachten eine kompakte Ausschöpfung  $(\mathcal{G}_n)$  von  $\mathcal{G}$ . Wir können annehmen, dass  $y$  für alle  $n$  in  $\mathcal{G}_n$  liegt. Wir wählen eine Funktion  $f \in H_y^1(\mathcal{G})$  und definieren

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathcal{G}_n \\ 0 & x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n \end{cases}.$$

Dann liegt  $f_n|_{\mathcal{G}_n} \in H_y^1(\mathcal{G}_n)$ . Mit dem Lemma 6.3 folgt dann

$$\int_{\mathcal{G}} |f_n'|^2 = \int_{\mathcal{G}_n} |f_n'|^2 \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G}_n)^2} \int_{\mathcal{G}_n} |f_n|^2 = \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G}_n)^2} \int_{\mathcal{G}} |f_n|^2$$

und damit erst recht

$$\int_{\mathcal{G}} |f'|^2 \geq \int_{\mathcal{G}} |f_n'|^2 = \int_{\mathcal{G}_n} |f_n'|^2 \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_{\mathcal{G}_n} |f_n|^2 = \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_{\mathcal{G}} |f_n|^2.$$

Es ist  $|f_n|^2$  punktweise konvergent gegen  $|f|^2$  und die Folge wird von  $|f|^2$  majorisiert. Es folgt die Konvergenz von  $\int_{\mathcal{G}} |f_n|^2$  gegen  $\int_{\mathcal{G}} |f|^2$ . Wir erhalten damit insgesamt

$$\int_{\mathcal{G}} |f'|^2 \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_{\mathcal{G}} |f|^2$$

die Behauptung. □

Mit diesem Resultat könnte man als Spektrallücke bereits die Abschätzung

$$\lambda_1(\mathcal{H}_N) \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2}$$

gewinnen. Wir wollen aber eine bessere Abschätzung, wie im eingangs formulierten Satz, erzielen. Hierfür müssen wir als nächstes begründen, dass wir uns für die Abschätzung der Spektrallücke auf Bäume beschränken dürfen. Im Folgenden müssen wir für den Beweis Graphen zerschneiden. Ein Schnitt einer Kante  $e = (v_1, v_2)$  meint hier das Entfernen eines Punktes  $x \in e$  und das Einfügen von zwei Knoten  $v_x^+, v_x^-$  an den beiden entstehenden Schnittenden, sodass die beiden neuen Kanten  $e_1 = (v_1, v_x^+)$  und  $e_2 = (v_x^-, v_2)$  resultieren.

**Lemma 6.5.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge. Dann können wir  $\mathcal{G}$  durch abzählbare viele Kantenschnitte in einen Baum  $\mathcal{G}'$  überführen und es gilt für die Neumann'schen Erweiterungen  $\mathcal{H}_N$  beziehungsweise  $\mathcal{H}'_N$  auf diesen Graphen:*

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \lambda_k(\mathcal{H}'_N).$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst einen endlichen Graphen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}_N$  auf diesem. Zerschneiden wir irgendeine Kante  $e$  und fügen am Ende zwei neue Knoten ein, so erhalten wir den Graphen  $\mathcal{G}'$ . Dabei zerschneiden wir nur solche Kanten  $e$ , sodass der entstehende Graph weiterhin zusammenhängend ist. So erreichen wir durch das Zerschneiden endlich vieler Kanten, dass der entstehende Graph  $\mathcal{G}'$  minimal zusammenhängend wird, das heißt beim Durchtrennen einer weiteren Kante  $e$  wäre der neue Graph unzusammenhängend. Das ist äquivalent dazu, dass der neue entstandene Graph  $\mathcal{G}'$  ein Baum ist. Es gilt dann  $H^1(\mathcal{G}) \subset H^1(\mathcal{G}')$  und mit dem Min-Max-Prinzip (Satz 2.13) folgt zudem  $\lambda_k(\mathcal{H}'_N) \leq \lambda_k(\mathcal{H}_N)$ . Damit dürfen wir uns Falle eines endlichen Graphen für die untere Abschätzung auf Bäume beschränken.

Bei einem unendlichen, lokal endlichen Graphen haben wir abzählbar unendlich viele Kanten. Wir konstruieren daraus induktiv wie folgt einen Baum: wir starten mit einem beliebigen Knoten  $v_0$  und betrachten den Graphen  $\mathcal{G}_1$  der aus den endlich vielen zu  $v_0$  benachbarten Knoten  $\{v_{01}, \dots, v_{0i}, \dots, v_{0k}\}$  besteht mit den zugehörigen Kanten  $\{(v_0, v_{01}), \dots, (v_0, v_{0i}), \dots, (v_0, v_{0l})\}$ . Wir zerschneiden nun endlich viele Kanten derart, dass  $\mathcal{G}'_1$  ein minimal zusammenhängender Graph ist und fügen die neuen Knoten  $v'_{0i}, v''_{0i}$  ein. Den Folgegraphen  $\mathcal{G}_2$  erschaffen wir wiederum, indem wir alle zu den Knoten  $v_{0i}$  be-

nachbarten Knoten  $v_{1i}$  und die zugehörigen Kanten in  $\mathcal{G}$  zu  $\mathcal{G}'_1$  hinzufügen. Dieser Graph ist weiterhin zusammenhängend und kompakt, sodass wir wiederum einen neuen Baum  $\mathcal{G}'_2$  durch Zerschneiden von Kanten erhalten können. Wir setzen diese Methode nun beliebig fort. Dann gilt für alle  $f \in H^1(\mathcal{G})$ , dass  $f$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch in  $H^1(\mathcal{G}'_n)$  liegt. Damit ist dann aber auch

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \lambda_k((\mathcal{H}_N)'_n) \geq \lambda_k((\mathcal{H}_N)'_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Durch das Zerschneiden von höchstens abzählbar vielen Kanten erhalten wir somit einen Graphen  $\mathcal{G}'$ , sodass  $\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \lambda_k(\mathcal{H}'_N)$  gilt.  $\square$

**Bemerkung 6.6.** *Da Bäume minimal zusammenhängend sind, gilt im Fall, dass  $\mathcal{G}$  ein Baum ist  $\lambda_k(\mathcal{H}_N) = \lambda_k(\mathcal{H}'_N)$ , da ein weiteres Zerschneiden von Kanten nicht möglich ist. Also dürfen wir uns auch im Falle unendlicher Graphen bei der Betrachtung der Spektrallücke auf Bäume beschränken.*

Im Folgenden sei  $\mathcal{G}$  ein Baum. Für einen beliebigen Punkt  $x \in \mathcal{G}$  besteht  $\mathcal{G} \setminus \{x\}$  aus  $p_x$  zusammenhängenden Komponenten. Dabei sind es genau zwei Komponenten, wenn  $x \in e$  für eine beliebige Kante oder endlich viele Komponenten, wenn  $x \in V$  ein Knoten ist. Wir bezeichnen die Abschlüsse dieser  $p_x$  Komponenten mit  $\{\mathcal{G}^1(x), \dots, \mathcal{G}^{p_x}(x)\}$ . Diese Graphen sind dann auch wieder Bäume. Induktiv können wir so auch endlich viele Punkte  $\{x_1, \dots, x_n\}$  aus  $\mathcal{G}$  entfernen. Die Menge der dann entstehenden Graphen bezeichnen wir mit  $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$  und eine beliebiges Element dieser Menge mit  $k(x_1, \dots, x_n)$  Elementen mit  $\mathcal{G}^j(x_1, \dots, x_n)$  für  $1 \leq j \leq k(x_1, \dots, x_n)$ .

Um das Ergebnis aus Lemma 6.4 zu verbessern, benötigen wir eine geeignete Zerlegung unseres Baums  $\mathcal{G}$ . Diese garantiert uns das folgende Lemma, welches eine Übertragung von [3, Lemma 2] auf den unendlichen Fall darstellt.

**Lemma 6.7.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Baum endlicher Länge  $L(\mathcal{G})$  und sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Dann existieren  $n - 1$  Punkte  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \in \mathcal{G}$ , sodass für jedes Element der Menge  $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_{n-1})$  gilt*

$$L(\mathcal{G}^j(x_1, \dots, x_{n-1})) \leq \frac{L(\mathcal{G})}{n} \quad 1 \leq j \leq k(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Um dieses Lemma zu beweisen, benötigen wir noch ein weiteres technisches Lemma. Wir formulieren dieses zuerst nur für endliche Bäume [3, Lemma 4].

**Lemma 6.8.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher Baum mit der Länge  $L(\mathcal{G})$ . Für jedes  $0 < l < L(\mathcal{G})$  existiert ein  $x \in \mathcal{G}$ , sodass für die Teilgraphen  $\{\mathcal{G}^1(x), \dots, \mathcal{G}^{p_x}(x)\}$  und eine geeignete Indizierung gilt:*

$$L(\mathcal{G}^1(x)) \leq L - l \quad \text{und} \quad L(\mathcal{G}^i(x)) \leq l \quad \text{für alle} \quad 2 \leq i \leq p_x$$

*Beweis.* Sei  $y_0$  ein beliebiges, aber fest gewähltes Blatt in  $\mathcal{G}$ , das heißt  $y_0$  ist ein Knoten, der nur zu einer Kante gehört. Wir suchen nun einen geeigneten Punkt  $x$ , der die Bedingung

des Lemmas zu gegebenem  $l$  erfüllt. Da  $\mathcal{G}$  nur endlich viele Knoten hat, testen wir zunächst, ob  $\{\mathcal{G}^1(x), \dots, \mathcal{G}^{p_x}(x)\}$  für ein  $x \in V$  das Lemma erfüllt. Falls ja, sind wir fertig. Falls das nicht zutrifft, wählen wir eine Kante  $e$  und ein beliebiges  $x \in e$ . Dann existieren genau zwei Komponenten  $\{\mathcal{G}^1(x), \mathcal{G}^2(x)\}$  und wir bezeichnen mit  $\mathcal{G}_x$ , diejenige, für die  $y_0$  nicht in  $\mathcal{G}_x$  liegt. Dann folgt für eine beliebige Kante  $e$ , dass entweder  $L(\mathcal{G}_x) > l$  für alle  $x \in e$  oder  $L(\mathcal{G}_x) < l$  für alle  $x \in e$ . Falls dies für eine Kante nicht zutreffen sollte, gäbe es auf dieser Kante einen Punkt  $x$  mit  $L(\mathcal{G}_x) = l$  und wir wären fertig. Wir bezeichnen nun die Kanten, für die  $L(\mathcal{G}_x) < l$  gilt, als Kanten erster Art und die, für die  $L(\mathcal{G}_x) > l$  gilt, als Kanten zweiter Art und die Abschlüsse der Vereinigung der Kanten jeweils mit  $\mathcal{G}^A$  und  $\mathcal{G}^B$ . Jede zusammenhängende Komponente ist dann jeweils ein Baum. Des Weiteren ist die Kante, zu der  $y_0$  gehört, eine Kante zweiter Art und sämtliche anderen Kanten, die zu einem anderen Blatt von  $\mathcal{G}$  gehören, sind solche erster Art. Wir wählen nun  $y \neq y_0$  ein beliebiges Blatt einer Komponente von  $\mathcal{G}^B$ . Wir betrachten nun die Teilgraphen  $\{\mathcal{G}^0(y), \dots, \mathcal{G}^{p_y}(y)\}$ , wobei wir mit  $\mathcal{G}^0(y)$  denjenigen bezeichnen, der  $y_0$  enthält. Wir zeigen nun, dass dieses  $y$  die Bedingungen des Lemmas erfüllt. Wir betrachten die Kante  $e_k$  der Komponente  $\mathcal{G}^k(y)$  mit  $1 \leq k \leq p_y$ , die zu  $y$  benachbart ist. Nach Konstruktion ist  $y$  ein Blatt für alle  $\mathcal{G}^k(y)$ . Für  $x \in e_0$  gilt  $L(\mathcal{G}_x) > l$ , da  $e_0$  eine Kante zweiter Art ist und damit

$$L(\mathcal{G}^0(y)) = \lim_{x \rightarrow y} L(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_x) \leq L - l \quad x \in e_0$$

Da  $y$  ein Blatt aus  $\mathcal{G}^B$  ist, gehören alle anderen Kanten  $e_1, \dots, e_{p_y}$  zu  $\mathcal{G}^A$ . Damit folgt

$$L(\mathcal{G}^k(y)) = \lim_{x \rightarrow y} L(\mathcal{G}_x) \leq l \quad x \in e_k, 1 \leq k \leq p_y.$$

□

Wir übertragen dieses Lemma auf den unendlichen Fall.

**Lemma 6.9.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Baum mit der Länge  $L(\mathcal{G}) < \infty$ . Für jedes  $0 < l < L(\mathcal{G})$  existiert ein  $x \in \mathcal{G}$ , sodass für die Teilgraphen  $\{\mathcal{G}^1(x), \dots, \mathcal{G}^{p_x}(x)\}$  und eine geeignete Indizierung gilt*

$$L(\mathcal{G}^1(x)) \leq L(\mathcal{G}) - l \quad \text{und} \quad L(\mathcal{G}^i(x)) \leq l \quad \text{für alle} \quad 2 \leq i \leq p_x.$$

*Beweis.* Wir wählen ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\min(L(\mathcal{G}) - l, l) < L(\mathcal{G}) - \varepsilon$ . Wir betrachten eine kompakte Ausschöpfung  $(\mathcal{G}_n)$  von  $\mathcal{G}$  und wählen ein  $n$  so groß, dass  $L(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n) < \varepsilon$  gilt. Wir betrachten den Graphen  $\mathcal{G}_n$ . Dieser ist endlich und an endlichen vielen Knoten hängen weitere (ggf. unendliche) Graphen  $\overline{\mathcal{G}_k}$  deren addierte Gesamtlängen  $\varepsilon$  nicht überschreiten

$$\sum_{k=1}^m L(\overline{\mathcal{G}_k}) < \varepsilon.$$

Wir ersetzen jeden dieser  $m$  Graphen  $\overline{\mathcal{G}}_k$  durch eine Kante  $\overline{e}_k$ , die genau der Länge  $L(\overline{\mathcal{G}}_k)$  entspricht. Der so entstehende Graph  $\overline{\mathcal{G}}_n$  erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 6.8 (endlicher Baum) und wir wählen den Punkt  $x$  aus diesem Lemma. Der Punkt  $x$  kann dann nicht im Inneren der Kanten  $\overline{e}_k$  liegen, da dann einer der beiden entstehenden Graphen eine Länge von  $L(\mathcal{G}) - \varepsilon$  überschreiten würde. Da  $x$  ebenso kein Knoten ersten Grades sein kann, ist  $x \in \mathcal{G}_n$ . Per Konstruktion erfüllt damit  $x$  auch im Graphen  $\mathcal{G}$  die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

Nun können wir das Ursprungslemma beweisen.

*Beweis von Lemma 6.7.* Wir wählen  $l = \frac{L(\mathcal{G})}{n}$  und wählen mit Lemma 6.9 einen Punkt  $x_1$ , sodass

$$L(\mathcal{G}^1(x_1)) \leq \frac{(n-1)L(\mathcal{G})}{n} \quad \text{und} \quad L(\mathcal{G}^i(x_1)) \leq \frac{L(\mathcal{G})}{n} \quad \text{für alle} \quad 2 \leq i \leq p_{x_1}$$

gilt. Den Teilgraphen  $\mathcal{G}^1(x_1)$  bezeichnen wir nun als  $\mathcal{G}_1$  und wiederholen den Schritt. Wir erhalten einen Punkt  $x_2$ , sodass

$$L(\mathcal{G}_1^1(x_2)) \leq \frac{(n-2)L(\mathcal{G})}{n} \quad \text{und} \quad L(\mathcal{G}_1^i(x_2)) \leq \frac{L(\mathcal{G})}{n} \quad \text{für alle} \quad 2 \leq i \leq p_{x_2}.$$

Nach  $n-1$  Schritten erfüllen dann alle so konstruierten Graphen der Menge  $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_{n-1})$  die Bedingung des Lemmas.  $\square$

Damit haben wir alles zusammen, um den Ursprungssatz zu beweisen.

*Beweis von Satz 6.2.* Wir bezeichnen mit  $\varphi_k$  die zum Eigenwert  $\lambda_k$  mit  $k \geq 0$  gehörige Eigenfunktion. Wir betrachten eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ . Seien  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  die ersten  $n+1$  Eigenfunktionen. Dann gibt es für beliebige Punkte  $\{x_1, \dots, x_n\}$  des Graphen  $\mathcal{G}$  eine nicht-triviale Linearkombination  $\varphi$  der  $n+1$  Eigenfunktionen, sodass  $\varphi(x_i) = 0$  für die Punkte  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Mit dem Rayleigh-Prinzip (Satz 2.12) folgt für die so gewählte Funktion  $\varphi$  dann

$$\int_{\mathcal{G}} |\varphi'(x)|^2 dx \leq \lambda_n \int_{\mathcal{G}} |\varphi(x)|^2 dx.$$

Wir wählen die Punkte  $\{x_1, \dots, x_n\}$  mit Lemma 6.7. Dann gilt für jeden Teilgraphen  $\mathcal{G}^j(x_1, \dots, x_n)$  mit  $1 \leq j \leq k(x_1, \dots, x_n)$  aus der Menge  $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$

$$L(\mathcal{G}^j(x_1, \dots, x_n)) \leq \frac{L(\mathcal{G})}{n+1} \quad 1 \leq j \leq k(x_1, \dots, x_n).$$

Wir wählen dann eine Komponente aus, auf der  $\varphi$  nicht identisch verschwindet und bezeichnen diese folgend mit  $\mathcal{G}^1$ . Eine solche Komponente ist stets wählbar, da  $\varphi$  als nicht-triviale Linearkombination zueinander orthogonaler Funktionen nicht auf dem ganzen Graphen

identisch verschwinden kann. Mit dem Rayleigh-Prinzip folgt dann

$$\int_{\mathcal{G}^1} |\varphi'(x)|^2 dx \leq \lambda_n(\mathcal{H}_N) \int_{\mathcal{G}^1} |\varphi(x)|^2. \quad (8)$$

Da im Graphen  $\mathcal{G}^1$  mindestens einer der Punkte  $\{x_1, \dots, x_n\}$  liegt, hat  $\varphi$  auf  $\mathcal{G}^1$  mindestens eine Nullstelle. Wir können daher Lemma 6.4 anwenden und erhalten

$$\int_{\mathcal{G}^1} |\varphi'(x)|^2 dx \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G}^1)^2} \int_{\mathcal{G}^1} |\varphi(x)|^2. \quad (9)$$

Wenn wir nun die Abschätzung (8) mit der Abschätzung (9) vergleichen, erhalten wir mit

$$\lambda_n(\mathcal{H}_N) \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G}^1)^2} \geq \frac{\pi^2(n+1)^2}{4L(\mathcal{G})^2}$$

die Behauptung. □

Wir wollen einen alternativen Zugang zu der Abschätzung der Spektrallücke geben, dieser folgt approximativ über den Rayleigh-Quotienten. Diese Technik hat den Vorteil, dass wir sie auf weitere Abschätzungen anwenden können.

**Satz 6.10.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Graph mit endlicher Länge  $L(\mathcal{G})$  und  $\mathcal{H}_N$  die Neumann'sche Erweiterung von  $\mathcal{H}_0$ . Dann gilt für die Spektrallücke von  $\mathcal{H}_N$*

$$\lambda_1(\mathcal{H}_N) \geq \frac{\pi^2}{L(\mathcal{G})^2}.$$

*Beweis.* Mit dem Rayleigh-Prinzip existiert  $u \in \text{dom}(\mathcal{H}_N)$  mit  $\int_{\mathcal{G}} u(x) dx = 0$ , welches den Quotienten minimiert, also

$$\frac{\int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}} |u(x)|^2} = \lambda_1(\mathcal{H}_N).$$

Wir bestimmen nun eine untere Schranke für  $\lambda_1(\mathcal{H}_N)$ . Wir wählen eine kompakte Ausschöpfung  $(\mathcal{G}_n)$  von  $\mathcal{G}$ .

Die Funktion  $u$  schränken wir auf die so gewählten  $\mathcal{G}_n$  ein. Dann ist  $u$  auf  $\mathcal{G}_n$  stetig und liegt in  $H^1(\mathcal{G}_n)$ . Auf  $\mathcal{G}_n$  erfüllt  $u$  im Allgemeinen nicht die Orthogonalitätsbedingung. Es gilt

$$\int_{\mathcal{G}_n} u(x) dx = c_n.$$

Nach Voraussetzung an  $u$  ist  $c_n$  eine Nullfolge. Es gilt nämlich

$$0 = \int_{\mathcal{G}} u(x) dx = \int_{\mathcal{G}_n} u(x) dx + \int_{\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n} u(x) dx = c_n + \int_{\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n} u(x) dx.$$

Der zweite Summand rechts konvergiert gegen Null, da  $u$  beschränkt ist und  $L(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n) \rightarrow 0$  gilt.

Wir können also  $u$  orthogonalisieren, indem wir

$$u_n = \begin{cases} u - \frac{c_n}{L(\mathcal{G}_n)} & x \in \mathcal{G}_n \\ 0 & x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n \end{cases}$$

betrachten. Dann ist  $u_n$  eingeschränkt auf  $\mathcal{G}_n$  ebenfalls in  $H^1(\mathcal{G}_n)$  und es gilt  $\int_{\mathcal{G}} u = \int_{\mathcal{G}_n} u_n = 0$ . Es gilt dann mit dem Rayleighprinzip, da  $\mathcal{G}_n$  ein kompakter Graph ist [2, 3]

$$\frac{\int_{\mathcal{G}} |u'_n(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}} |u_n(x)|^2} = \frac{\int_{\mathcal{G}_n} |u'_n(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}_n} |u_n(x)|^2} \geq \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Es sind  $u_n$  beziehungsweise  $u'_n$  punktweise konvergent gegen  $u$  beziehungsweise  $u'$ . Zudem werden die Folgen von  $|u|$  beziehungsweise  $|u'|$  majorisiert. Mit dem Satz der majorisierten Konvergenz folgen wir dann

$$\frac{\pi^2}{L^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathcal{G}} |u'_n(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}} |u_n(x)|^2} = \frac{\int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}} |u(x)|^2} = \lambda_1(\mathcal{H}_N)$$

und somit die Behauptung. □

### 6.1.2 Spektralabschätzung von unten in Abhängigkeit von Durchmesser und Länge

Aus dem endlichen Fall ist folgende Abschätzung in Abhängigkeit von Durchmesser und Länge bekannt [4, Satz 7.2]. Mit Bemerkung 5.2 sprechen wir in diesem Satz nur vom Laplace-Operator  $\mathcal{H}$ .

**Satz 6.11.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher zusammenhängender Graph und  $\mathcal{H}$  der Laplace-Operator auf  $\mathcal{G}$ . Sei  $L(\mathcal{G}) \geq 2D(\mathcal{G})$ , dann folgt*

$$\lambda_1(\mathcal{H}) \geq \frac{1}{2D(\mathcal{G})(L(\mathcal{G}) - D(\mathcal{G}))}.$$

Wir möchten diesen Satz auf unendliche Graphen übertragen. Dabei wollen wir wieder über eine kompakte Ausschöpfung zum Ziel gelangen. Problematisch ist aber, dass für eine kompakte Ausschöpfung  $\mathcal{G}_n$  zwar stets  $L(\mathcal{G}_n)$  gegen  $L(\mathcal{G})$  konvergiert, dies aber nicht für  $D(\mathcal{G}_n)$  gelten muss, insbesondere könnte  $\liminf D(\mathcal{G}_n) > D(\mathcal{G})$  sein, sodass eine Abschätzung der Art

$$\frac{1}{2D(\mathcal{G}_n)(L(\mathcal{G}_n) - D(\mathcal{G}_n))} \geq \frac{1}{2D(\mathcal{G})(L(\mathcal{G}) - D(\mathcal{G}))}$$

gerade nicht erfüllt sein muss. Daher müssen wir eine zusätzliche Bedingung stellen.

**Satz 6.12.** Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph mit endlicher Länge und  $\mathcal{H}_N$  die Neumann'sche Erweiterung von  $\mathcal{H}_0$ . Sei  $L(\mathcal{G}) \geq 2D(\mathcal{G})$ . Es existiere zudem eine kompakte Ausschöpfung  $(\mathcal{G}_n)$  von  $\mathcal{G}$ , sodass  $D(\mathcal{G}_n) \leq D(\mathcal{G})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt

$$\lambda_1(\mathcal{H}_N) \geq \frac{1}{2D(\mathcal{G})(L(\mathcal{G}) - D(\mathcal{G}))}.$$

*Beweis.* Zunächst ist die Bedingung  $L(\mathcal{G}) \geq 2D(\mathcal{G})$  keine Einschränkung, da die Abschätzung für  $L(\mathcal{G}) < 2D(\mathcal{G})$  mit Satz 6.2 auch zutrifft. Wir können also im Folgenden bei der Betrachtung der kompakten Ausschöpfung davon ausgehen, dass für alle  $\mathcal{G}_n$  auch  $L(\mathcal{G}_n) \geq 2D(\mathcal{G}_n)$  ist. Mit dem Rayleigh-Prinzip existiert  $u$  in  $\text{dom}(\mathcal{H}_N)$  mit  $\int_{\mathcal{G}} u(x) dx = 0$ , welches den Quotienten minimiert. Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung  $(\mathcal{G}_n)$  von  $\mathcal{G}$ , für die  $D(\mathcal{G}_n) \leq D(\mathcal{G})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist. Auf  $\mathcal{G}_n$  erfüllt  $u$  nicht unbedingt die Orthogonalitätsbedingung. Es gilt

$$\int_{\mathcal{G}_n} u(x) dx = c_n.$$

Nach Voraussetzung an  $u$  ist  $c_n$  wegen

$$0 = \int_{\mathcal{G}} u(x) dx = \int_{\mathcal{G}_n} u(x) dx + \int_{\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n} u(x) dx = c_n + \int_{\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n} u(x) dx$$

eine Nullfolge. Der zweite Summand rechts konvergiert gegen Null, da  $u$  beschränkt ist und  $L(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n) \rightarrow 0$  gilt.

Wir können also  $u$  orthogonalisieren, indem wir

$$u_n = \begin{cases} u - \frac{c_n}{L(\mathcal{G}_n)} & x \in \mathcal{G}_n \\ 0 & x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n \end{cases}$$

betrachten. Diese Funktion ist dann ebenfalls in  $H^1(\mathcal{G}_n)$  und es folgt  $\int_{\mathcal{G}_n} u_n = 0$ . Das Rayleighprinzip impliziert dann, da  $\mathcal{G}_n$  ein kompakter Graph ist

$$\frac{\int_{\mathcal{G}} |u'_n(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}} |u_n(x)|^2} = \frac{\int_{\mathcal{G}_n} |u'_n(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}_n} |u_n(x)|^2} \geq \frac{1}{2D(\mathcal{G}_n)(L(\mathcal{G}_n) - D(\mathcal{G}_n))}.$$

Es sind  $u_n$  beziehungsweise  $u'_n$  punktweise konvergent gegen  $u$  beziehungsweise  $u'$ . Zudem werden die Folgen von  $|u|$  beziehungsweise  $|u'|$  majorisiert. Mit dem Satz der majorisierten



Konvergenz folgern wir dann

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2D(\mathcal{G})(L(\mathcal{G}) - D(\mathcal{G}))} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2D(\mathcal{G}_n)(L(\mathcal{G}_n) - D(\mathcal{G}_n))} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathcal{G}} |u'_n(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}} |u_n(x)|^2} \\
&= \frac{\int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2}{\int_{\mathcal{G}} |u(x)|^2} \\
&= \lambda_1(\mathcal{H}_N)
\end{aligned}$$

die Behauptung. □

Die Bedingung an die Existenz einer kompakten Ausschöpfung in Satz 6.12 ist natürlich sehr unbefriedigend, da a priori nicht ersichtlich ist, für welche Graphen eine solche Ausschöpfung existiert. Im Folgenden sind zwei Beispiele dargestellt, wann diese Bedingung erfüllen.

**Beispiel 6.13.** 1. Sei  $\mathcal{G}$  ein Baum. Dann gilt wegen des minimalen Zusammenhangs für jeden endlichen zusammenhängenden Teilgraphen  $\mathcal{G}_n$  und zwei Punkte  $x, y \in \mathcal{G}_n$ , dass  $d_{\mathcal{G}_n}(x, y) = d_{\mathcal{G}}(x, y)$  und damit  $D(\mathcal{G}_n) \leq D(\mathcal{G})$ . Dabei bezeichnet  $d_{\mathcal{G}_n}$  den Abstand im Graphen  $\mathcal{G}_n$ . Somit ist die Voraussetzung erfüllt.

2. Sei  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge, der von einem Startknoten ausgehend aus der Aneinanderreihung von Kürbisgraphen entsteht. Dabei ist ein Kürbisgraph ein Paar von Knoten, die durch endlich viele Kanten gleicher Länge verbunden sind. Als Graphen  $\mathcal{G}_1$  wählen wir den ersten Kürbisgraph und fügen für den nachfolgenden Graphen  $\mathcal{G}_2$  den nächsten Kürbisgraphen hinzu. Induktiv erhalten wir eine kompakte Ausschöpfung  $\mathcal{G}_n$ , welche  $D(\mathcal{G}_n) < D(\mathcal{G})$  für alle  $n$  erfüllt.

### 6.1.3 Spektralabschätzung von oben in Abhängigkeit von Durchmesser und Länge

Wir suchen nun eine Abschätzung von oben. Aus dem endlichen Fall ist bekannt, dass diese nicht allein von der Länge oder dem Durchmesser abhängen kann [4, (3.2), Satz 5.10, ]. Dafür ist folgender Satz bekannt [4, Satz 7.1].

**Satz 6.14.** Sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher, zusammenhängender Graph mit Länge  $L(\mathcal{G})$  und Durchmesser  $D(\mathcal{G})$ . Dann gilt für den Laplace-Operator  $\mathcal{H}$

$$\lambda_1(\mathcal{H}) \leq \frac{\pi^2}{D(\mathcal{G})^2} \frac{4L(\mathcal{G}) - 3D(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})}.$$

Diesen Satz wollen wir auf unendliche Graphen übertragen. Zuvor zeigen wir folgenden Zusammenhang, der sich aus dem endlichen Fall überträgt [4, Lemma 2.3]

**Proposition 6.15.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein (unendlicher oder endlicher), lokal endlicher, zusammenhängender Graph mit der endliche Gesamtlänge  $L(\mathcal{G})$ ,  $\tilde{\mathcal{G}}$  derjenige Graph, der entsteht, wenn an einem Knoten  $v$  von  $\mathcal{G}$  ein Graph endlicher Länge angehängt wird und  $\tilde{\mathcal{H}}_N$  die Fortsetzung von  $\mathcal{H}_N$  auf  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Dann gilt*

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \lambda_k(\tilde{\mathcal{H}}_N).$$

*Beweis.* Sei  $M \subset \text{dom}(\mathcal{H}_N)$  ein beliebiger Teilraum der Dimension  $k$ . Da  $\mathcal{H}_N$  ein rein diskretes Spektrum hat, berechnet sich  $\lambda_k(\mathcal{H}_N)$  mittels

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) = \min_{M \subset \text{dom}(\mathcal{H}_N)} \max_{0 \neq f \in M} \frac{\int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |f(x)|^2 dx}.$$

Sei  $M$  ein Teilraum, für den das Minimum angenommen wird. Wir setzen jede Funktion  $f$  aus  $M$  auf  $\tilde{\mathcal{G}}$  fort mit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathcal{G} \\ f(v) & x \in \tilde{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{G} \end{cases}.$$

Dann folgt

$$\frac{\int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |f(x)|^2 dx} \geq \frac{\int_{\tilde{\mathcal{G}}} |\tilde{f}'(x)|^2 dx}{\int_{\tilde{\mathcal{G}}} |\tilde{f}(x)|^2 dx}.$$

und da  $\tilde{M}$  auch die Dimension  $k$  hat, folgt mit dem Min-Max-Prinzip

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \lambda_k(\tilde{\mathcal{H}}_N)$$

□

Wir schlussfolgern folgendes Korollar.

**Korollar 6.16.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher, lokal endlicher, zusammenhängender Graph mit endlicher Gesamtlänge,  $\tilde{\mathcal{G}}$  derjenige Graph, der entsteht, wenn an abzählbar vielen Knoten von  $\mathcal{G}$  Graphen endlicher Länge angehängt werden, sodass  $\tilde{\mathcal{G}}$  weiterhin ein lokal endlicher zusammenhängender Graph endlicher Länge ist. Sei  $\tilde{\mathcal{H}}_N$  die Fortsetzung von  $\mathcal{H}_N$  auf  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Dann gilt*

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \lambda_k(\tilde{\mathcal{H}}_N).$$

*Beweis.* Durch das sukzessive Anhängen der abzählbar vielen Graphen an  $\mathcal{G}$  erhalten wir eine Folge von Graphen  $(\mathcal{G}_n)$ . Bezeichnen wir die Fortsetzungen von  $\mathcal{H}_N$  auf diese Graphen jeweils mit  $\mathcal{H}_N^n$  so folgt aus Proposition 6.15 für den Eigenwert  $\lambda_k$

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N^n) \geq \lambda_k(\mathcal{H}_N^{n+1}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist  $(\lambda_k(\mathcal{H}_N^n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge. Folglich erhalten wir über

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \lambda_k(\mathcal{H}_N^n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(\mathcal{H}_N^n) = \lambda_k(\tilde{\mathcal{H}}_N)$$

die Behauptung.  $\square$

Wir übertragen Satz 6.14 jetzt auf den unendlichen Fall.

**Satz 6.17.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein lokal endlicher, zusammenhängender unendlicher Graph mit der Gesamtlänge  $L(\mathcal{G})$  und Durchmesser  $D(\mathcal{G})$ . Sei  $\mathcal{H}_N$  die Neumann'sche Erweiterung von  $\mathcal{H}_0$ . Dann gilt*

$$\lambda_1(\mathcal{H}_N) \leq \frac{\pi^2}{D(\mathcal{G})^2} \frac{4L(\mathcal{G}) - 3D(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})}.$$

*Beweis.* Im Graphen  $\mathcal{G}$  existiert eine Folge eines Paares von Punkten  $(x_n, y_n)$ , sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\mathcal{G}}(x_n, y_n) = D(\mathcal{G})$$

gilt. Es bezeichnet hier  $d_{\mathcal{G}}(x_n, y_n)$  den Abstand der Punkte im Graphen  $\mathcal{G}$ . Wir können die Folge so wählen, dass  $d_{\mathcal{G}}(x_n, y_n)$  monoton steigend ist. Wir betrachten eine kompakte Ausschöpfung  $(\mathcal{G}_n)$  von  $\mathcal{G}$ , sodass  $x_n, y_n \in \mathcal{G}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $\mathcal{G}_n$  ein endlicher Graph ist, ist das Infimum  $d_{\mathcal{G}_n}(x_n, y_n)$  ein Minimum. Es existiert also ein Pfad mit der Länge  $d_{\mathcal{G}_n}(x_n, y_n)$  in  $\mathcal{G}_n$ . Da dieser Pfad auch in  $\mathcal{G}$  enthalten ist, kann der Abstand der beiden Punkte in diesem Graphen nicht größer sein. Damit gilt für alle  $n$

$$D(\mathcal{G}_n) \geq d_{\mathcal{G}_n}(x_n, y_n) \geq d_{\mathcal{G}}(x_n, y_n). \quad (10)$$

Die Folge  $n \mapsto D(\mathcal{G}_n)$  ist beschränkt. Damit hat sie einen kleinsten Häufungspunkt. Daraus folgt

$$D(\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\mathcal{G}}(x_n, y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D(\mathcal{G}_n).$$

Damit und aus  $L(\mathcal{G}_n) \rightarrow L(\mathcal{G})$  folgt die Existenz eine Nullfolge  $\varepsilon_n$ , sodass

$$\frac{\pi^2}{D(\mathcal{G}_n)^2} \frac{4L(\mathcal{G}_n) - 3D(\mathcal{G}_n)}{D(\mathcal{G}_n)} - \varepsilon_n \leq \frac{\pi^2}{D(\mathcal{G})^2} \frac{4L(\mathcal{G}) - 3D(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})}$$

für alle  $n$  und damit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{D(\mathcal{G}_n)^2} \frac{4L(\mathcal{G}_n) - 3D(\mathcal{G}_n)}{D(\mathcal{G}_n)} \leq \frac{\pi^2}{D(\mathcal{G})^2} \frac{4L(\mathcal{G}) - 3D(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})}$$

zutrifft. Es ist  $\lambda_1(\mathcal{H}_N) \leq \lambda_1(\mathcal{H}_N \downarrow \mathcal{G}_n)$  für alle  $n$ , da  $\mathcal{G}$  aus dem Anhängen endlicher vieler Graphen an  $\mathcal{G}_n$  entsteht. Mit dem Theorem 6.14 folgt dann

$$\lambda_1(\mathcal{H}_N) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(\mathcal{H}_N \downarrow \mathcal{G}_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{D(\mathcal{G}_n)^2} \frac{4L(\mathcal{G}_n) - 3D(\mathcal{G}_n)}{D(\mathcal{G}_n)} \leq \frac{\pi^2}{D(\mathcal{G})^2} \frac{4L(\mathcal{G}) - 3D(\mathcal{G})}{D(\mathcal{G})}$$

die Behauptung. □

Für den Spezialfall, dass  $\mathcal{G}$  ein Baum ist, können wir, analog dem endlichen Fall [6, Satz 3.2], das Ergebnis noch verbessern.

**Proposition 6.18.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher, lokal endlicher, zusammenhängender Baum mit der Gesamtlänge  $L(\mathcal{G})$  und Durchmesser  $D(\mathcal{G})$ . Sei  $\lambda_k$ ,  $k \geq 0$  der  $k$ -te Eigenwert von  $\mathcal{H}_N$ . Dann gilt für alle  $k$*

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \leq \frac{k^2 \pi^2}{D(\mathcal{G})^2}.$$

*Beweis.* Für  $k = 0$  ist die Aussage offensichtlich richtig, wir gehen daher von  $k \geq 1$  aus. Da  $\mathcal{G}$  ein Baum ist, gibt es einen Teilgraphen  $P \subset \mathcal{G}$  mit  $\lambda(P) = D(\mathcal{G})$  und  $P$  ist ein Pfad oder Strahl oder Doppelstrahl in  $\mathcal{G}$ . Wegen der Baumstruktur entsteht  $\mathcal{G}$  aus diesem Teilgraphen, indem an die Knoten von  $P$  abzählbar viele Graphen angehängt werden. Dann folgt für den selbstadjungierten Operator  $\mathcal{H}_N$  mit Korollar 6.16

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \leq \lambda_k(\mathcal{H}_N \downarrow P) = \frac{k^2 \pi^2}{D(\mathcal{G})^2}.$$

Wir müssen noch zeigen, dass für einen Pfad oder Strahl oder Doppelstrahl  $P$  tatsächlich  $\lambda_k(\mathcal{H}_N \downarrow P) = \frac{k^2 \pi^2}{D^2}$  gilt. Im Fall, dass  $P$  ein kompakter Pfad ist, ist dies bekannt. Einen Strahl oder Doppelstrahl der Länge  $D$  eines unendlichen Graphen können wir mit dem Intervall  $[0, D)$  bzw.  $(0, D)$  identifizieren. Wir berechnen die Eigenwerte des Laplace-Operators für die Bedingungen  $u'(0) = 0$  und  $\int_0^D u(x) dx = 0$ , wobei sich die zweite Randbedingung aus dem Rayleigh'schen Prinzip ergibt und der Tatsache, dass die konstanten Funktionen Eigenfunktionen sind. Die Randbedingung  $u'(0) = 0$  ergibt sich aus den Voraussetzungen an die Selbstadjungiertheit des Laplace-Operators im Falle endlicher Intervalle. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $u''(x) = -\lambda u(x)$  mit  $\lambda > 0$  lautet bekanntlich

$$u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Einsetzen der beiden Bedingungen führt auf

$$0 = \frac{A \sin(\sqrt{\lambda}D(\mathcal{G}))}{\sqrt{\lambda}}$$

und damit  $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{D(\mathcal{G})^2}$ . □

## 6.2 Spektrale Abschätzungen für die Friedrich'sche Erweiterung

### 6.2.1 Spektrale Abschätzung von unten

Die gefundenen Abschätzungen der Neumann'schen Erweiterungen lassen sich nicht direkt auf die Friedrich'sche Erweiterung  $\mathcal{H}_F$  übertragen. Dies liegt schon daran, dass die konstanten Funktionen nicht in  $H_0^1(\mathcal{G})$ , also auch nicht in  $\text{dom}(\mathcal{H}_F)$  enthalten sind. Folglich ist  $\lambda_0 = 0$  kein Eigenwert von  $\mathcal{H}_F$ . Damit wird sich im Folgenden auch ergeben, dass die spektrale Lücke kleiner ist als bei der Neumann'schen Erweiterung. Wir zeigen dies zunächst für das offene Intervall  $[0, L)$ . Dabei wählen wir die Knoten jeweils an den Punkten  $L - \frac{L}{n}$  mit  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ . Die Eigenfunktion  $f \in \text{dom}(\mathcal{H}_F) \subset H_0^1(\mathcal{G})$  muss dann die Randbedingungen  $f(L) = 0$  sowie  $f'(0) = 0$  erfüllen. Aus der ersten Randbedingung folgt bereits

$$f(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

und mit der zweiten Randbedingung erhalten wir als ersten Eigenwert schließlich  $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4L^2}$ . Wir zeigen, dass dies auch die allgemeine untere Grenze, also die kleinste spektrale Lücke darstellt.

**Satz 6.19.** *Sei  $\mathcal{G}$  ein unendlicher Graph endlicher Länge und  $\mathcal{H}_F$  die Friedrich'sche Erweiterung. Dann gilt für die Spektrallücke von  $\mathcal{H}_F$ :*

$$\lambda_1(\mathcal{H}_F) \geq \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2}.$$

*Beweis.* Sei  $u \in H_0^1(\mathcal{G})$  eine Funktion, die den Rayleigh-Quotienten minimiert, also

$$\lambda_1(\mathcal{H}_F) = \frac{\int_{\mathcal{G}} |u'(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{G}} |u(x)|^2 dx}.$$

Wir betrachten einen Strahl  $\mathcal{R} = (v_0, v_1, \dots)$  von  $\mathcal{G}$ . Wir kompaktifizieren den Strahl, indem wir dem Strahl beziehungsweise dem Graphen den Endpunkt  $\gamma$  hinzufügen, für den  $u(\gamma) = 0$  nach Voraussetzung an  $u$  gilt. Die Integrale entlang des Strahls ändern sich nicht, da es sich um das Hinzufügen einer Nullmenge handelt. Wir wählen eine kompakte Ausschöpfung  $(\mathcal{G}_n)$  von  $\mathcal{G}$  und betrachten  $\overline{\mathcal{G}_n} = \mathcal{G}_n \cup \mathcal{R} \cup \gamma$ . Wir definieren dann

$$\overline{u}_n(x) := \begin{cases} u(x) & x \in \overline{\mathcal{G}_n} \\ 0 & x \in \mathcal{G} \setminus \overline{\mathcal{G}_n} \end{cases}.$$

Dann können wir  $\overline{u}_n$  als Funktion in  $H_y^1(\overline{\mathcal{G}_n})$  auffassen. Es folgt mit Lemma 6.4

$$\int_{\mathcal{G}} |\overline{u}_n'|^2 = \int_{\overline{\mathcal{G}_n}} |\overline{u}_n'|^2 \geq \frac{\pi^2}{4L(\overline{\mathcal{G}_n})^2} \int_{\overline{\mathcal{G}_n}} |\overline{u}_n|^2 = \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G}_n)^2} \int_{\mathcal{G}} |\overline{u}_n|^2.$$

Wir müssen nun die Konvergenz der Integrale zeigen. Es werden sowohl  $|\overline{u'_n}|$  als auch  $|\overline{u_n}|$  von  $|u'|$  bzw.  $|u|$  majorisiert. Zudem besteht punktweise Konvergenz, also konvergieren die Integrale links und rechts und wir erhalten mit

$$\int_{\mathcal{G}} |u'|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{G}} |\overline{u'_n}|^2 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G}_n)^2} \int_{\mathcal{G}} |\overline{u_n}|^2 = \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2$$

die Behauptung.  $\square$

### 6.2.2 Spektrale Abschätzungen von oben

Im endlichen Fall als auch im Falle der Neumann'schen Erweiterung beruhen die oberen Abschätzung auf der Tatsache, dass das Anhängen zusätzlicher Kanten an einen bestimmten Knoten, die Spektrallücke verkleinert, für einen Graphen  $\mathcal{G}'$ , der durch Anhängen eines Graphen an einen Knoten des Graphen  $\mathcal{G}$  entsteht, gilt für die Neumann'schen Erweiterungen bekanntlich

$$\lambda_k(\mathcal{H}_N) \geq \lambda_k(\mathcal{H}'_N).$$

Dies gilt allerdings im Allgemeinen nicht für die Friedrichs'sche Erweiterung, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

**Beispiel 6.20.** Wir betrachten  $\mathcal{H}_F$  auf dem Graphen  $\mathcal{G}$ , den wir als Intervall  $(0, \frac{3}{4}\pi]$  mit Knoten jeweils an den Punkten  $\frac{1}{n}$  sowie am Punkt  $\frac{3}{4}\pi$  festlegen. Mit der Randbedingung  $f(0) = 0$  für alle  $f \in \text{dom}(\mathcal{H}_F)$  ist

$$\lambda_1(\mathcal{H}_F) = \frac{\pi^2}{4L(\mathcal{G})^2} = \frac{\pi^2}{4(\frac{3}{4}\pi)^2} = \frac{4}{9}$$

der kleinste Eigenwert. Wir hängen an den Randknoten bei  $\frac{3}{4}\pi$  das Intervall  $[\frac{3}{4}\pi, \pi)$  als Graphen an, wobei hier die Knoten an den Punkten  $\pi - \frac{1}{n}$  mit  $n \geq 2$  gesetzt werden. Damit ist der neue Graph  $\mathcal{G}'$  das offene Intervall  $(0, \pi)$  mit den beiden Graphenenden jeweils an den Rändern. Jede Eigenfunktion von  $\mathcal{H}'_F$  muss an beiden Rändern eine Nullrandbedingung  $f(0) = f(\pi) = 0$  erfüllen. Dies ist das klassische Sturm-Liouville Randeigenwertproblem und wir erhalten  $\lambda_1 = 1$  als kleinsten Eigenwert von  $\mathcal{H}'_F$ . Damit ist also

$$\lambda_1(\mathcal{H}'_F) > \lambda_1(\mathcal{H}_F).$$

Wir müssen also eine oder mehrere zusätzliche Bedingung an den angehängten Graphen stellen, um die Beweise analog der Neumann'schen Erweiterungen übertragen zu können. Diese Dinge könnten Gegenstand weiterführender Betrachtungen sein, sollen in dieser Arbeit aber nicht weiter vertieft werden.

## 7 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, die im Fall endlicher Graphen bekannten spektralen Abschätzungen des Laplace-Operators auf unendliche Graphen zu verallgemeinern. Besonders erfolgreich war dies, wenn der unendliche Graph endliche Länge hatte und diejenigen selbstadjungierten Erweiterungen des Laplace-Operators betrachtet wurden, deren Formbereich Teilmenge des Raums  $H^1(\mathcal{G})$  waren. Im Satz 5.16 wurde die kompakte Einbettung des Definitionsbereichs dieser selbstadjungierten Erweiterungen in  $L^2(\mathcal{G})$  gezeigt. Dies implizierte wiederum ein rein diskretes Spektrum des Operators. Für die Neumann'sche Erweiterung  $\mathcal{H}_N$  konnte unter diesen Bedingungen eine untere Abschätzungen für den  $k$ -ten Eigenwert im Satz 6.2 gegeben werden, in voller Analogie zu den im endlichen Fall bekannten Resultaten von Friedlander [3]. Darüber hinaus wurden in den Sätzen 6.12, 6.17, 6.18 einige Resultate in Teilen auf den unendlichen Fall geschlussfolgert, wie sie aus [4] oder [6] bekannt sind. Offen hingegen blieb beispielsweise die Frage, ob die untere Abschätzung der Spektrallücke  $\lambda_k(\mathcal{H}_N) = \frac{\pi^2 k^2}{4L(\mathcal{G})^2}$  genau auf denjenigen Graphen angenommen wird, die ein Strahl oder Doppelstrahl sind. Des Weiteren existieren zum Beispiel für doppelt zusammenhängende Graphen im endlichen Fall stärkere Abschätzungen der Spektrallücke [18], die sich möglicherweise auch auf den in dieser Arbeit untersuchten Fall übertragen lassen. Für die Friedrich'sche Erweiterung konnte im Satz 6.19 eine Abschätzung der Spektrallücke bewiesen werden, welche sich nicht weiter verbessern lässt. Weitere Analysen des Spektrums der Friedrich'schen Erweiterung könnten sich anschließen, insbesondere die Frage für welche Graphen sich auch obere Abschätzungen angeben lassen.

Weitere Anknüpfungspunkte für vertiefende Untersuchungen stellt insbesondere die Analyse des Spektrums von selbstadjungierten Erweiterungen des minimalen Laplaceoperators  $\mathcal{H}_0$  im Falle von Graphen mit unendlicher Länge dar. Naheliegend als Untersuchungsobjekt wären Graphen, welche zwar unendliche Länge haben, aber als metrischer Raum dennoch präkompakt sind, sodass möglicherweise die selbstadjungierte Erweiterung von  $\mathcal{H}_0$  weiter ein rein diskretes Spektrum besitzen. Aber auch im Falle, dass der Laplaceoperator ein essentielles Spektrum besitzt, wäre eine aus mathematischer Sicht interessante Frage, ob auch hier eine Spektrallücke besteht und wie das Spektrum unterteilt ist. Ob dies dann möglicherweise auch Relevanz für das einleitend erwähnte „Buch der Natur“ haben könnte, bleibt abzuwarten.

## 8 Notation

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Natürliche Zahlen, Reelle Zahlen, Komplexe Zahlen
$\mathcal{G}$	Metrischer Graph
$E$	Menge der Kanten eines Graphen
$V$	Menge der Knoten eines Graphen
$v_i \sim v_j$	benachbarte Knoten
$E_{v_i}$	Menge der zum Knoten $v_i$ inzidenten Kanten
$L(\mathcal{G})$	Länge oder Volumen des Graphen $\mathcal{G}$
$P$	Pfad eines Graphen
$\mathcal{R}$	Strahl eines unendlichen Graphen
$\Omega(\mathcal{G})$	Menge der Graphenenden von $\mathcal{G}$
$\mathfrak{E}(\mathcal{G})$	Menge der topologischen Graphenenden von $\mathcal{G}$
$L^2(\cdot)$	Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen über $\cdot$
$H^1(\cdot)$	Erster Sobolevraum über einer Grundmenge
$H^2(\cdot)$	Zweiter Sobolevraum über einer Grundmenge
$H_0^1(\mathcal{G})$	Abschluss von $\mathcal{H}_0^0$ bezüglich der Norm auf $H^1(\mathcal{G})$
$\mathcal{H}_{\max}$	Laplace-Operator auf dem maximalen Definitionsbereich
$\mathcal{H}$	maximaler Kirchhoff'scher Laplace-Operator
$\mathcal{H}_0^0$	Einschränkung von $\mathcal{H}_{\max}$ auf $\text{dom}(\mathcal{H}_0^0)$ , Definition 3.23
$\mathcal{H}_0$	Abschluss von $\mathcal{H}_0^0$ bezüglich $L^2(\mathcal{G})$
$\mathcal{H}_F, \mathcal{H}_N$	Friedrich'sche bzw. Neumann'sche Erweiterung von $\mathcal{H}_0$
$\text{dom}(A)$	Definitionsbereich des Operators $A$
$\text{dom}[t]$	Definitionsbereich der Form $t$
$f _{\cdot}$	Einschränkung einer Funktion $f$ auf $\cdot$
$A \downarrow \cdot$	Einschränkung des Operators $A$ auf $\cdot$
$\oplus$	Produktbildung
$\sigma(A), \sigma_d(A)$	Spektrum bzw. diskretes Spektrum von $A$
$\rho(A)$	Resolventemenge von $A$
$\chi_A$	Charakteristische Funktion auf der Menge $A$
$f \perp g$	$f$ orthogonal zu $g$
$\text{ran}$	Bildbereich
$M^\perp$	Komplement der Menge



## Literatur

- [1] Jean-Pierre Francoise, Tsou Sheung Tsun, and Gregory L. Naber. *Encyclopedia of Mathematical Physics*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [2] Serge Nicaise. *Spectre des réseaux topologiques finis*. Bull. Sci. Math., II. Sér., volume 111: 401 - 413, 1987.
- [3] Leonid Friedlander. *Extremal properties of eigenvalues for a metric graph*. Annales de l'Institut Fourier, volume 55(1): 199 - 211, 2005.
- [4] James B. Kennedy, Pavel Kurasov, Gabriela Malenova, and Delio Mugnolo. *On the Spectral Gap of a Quantum Graph*. Annales Henri Poincaré, volume 17(9): 2439-2473, Springer Science and Business Media LLC, 2016.
- [5] Aleksey Kostenko, Delio Mugnolo, and Noema Nicolussi. *Self-adjoint and Markovian extensions of infinite quantum graphs*. arXiv, 1911.04735, 2019.
- [6] Jonathan Rohleder. *Eigenvalue estimates for the Laplacian on a metric tree*. arXiv, 1602.03864, 2016.
- [7] Gerhard Garske Hansjoerg Linden. *Lineare Operatoren im Hilbertraum*. FernUniversität in Hagen, Hagen, 1994.
- [8] Delio Mugnolo, Joachim Kerner, and Hafida Laasri. *Funktionalanalysis*. FernUniversität in Hagen, Hagen, 2017.
- [9] Jürg Marti. *Evaluation of the Least Constant in Sobolev's Inequality for  $H^1(0,s)$* . SIAM Journal on Numerical Analysis, volume 20(6) : 1239 - 1242, 1983.
- [10] Delio Mugnolo. *Semigroup Methods for Evolution Equations on Networks*. Springer International Publishing, 2014.
- [11] Reinhard Diestel and Daniela Kühn. *Graph-theoretical versus topological ends of graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, volume 87(1): 197 - 206, 2003.
- [12] Konrad Schmüdgen. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1st edition, 2012.
- [13] Horst Herrlich. *Topologische Räume*. FernUniversität in Hagen, Hagen, 2003.
- [14] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [15] Harald Hanche-Olsen and Helge Holden. *The Kolmogorov - Riesz compactness theorem*. Expositiones Mathematicae, volume 28(4): 385 - 394, Elsevier BV, 2010.

- [16] Pavel Kurasov and Sergej Naboko. *Rayleigh estimates for differential operators on graphs*. Journal of Spectral Theory, volume 4: 211-219, 2014.
- [17] Albert Schneider. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. FernUniversität in Hagen, Hagen, 2008.
- [18] Gregory Berkolaiko, James B. Kennedy, Pavel Kurasov, and Delio Mugnolo. *Edge connectivity and the spectral gap of combinatorial and quantum graphs*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, volume 50(36): 365201, 2017.

## Erklärung

Name: Marco Düfel  
Matrikel-Nr.: 8499101  
Fach: Mathematik  
Modul: Masterarbeit

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Thema

### **Spektrale Abschätzungen des Laplace-Operators auf Quantengraphen**

selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich, inhaltlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechend kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate überprüft und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Datum:

Unterschrift: