Fernuniversität Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik
Lehrgebiet Analysis

Der Satz von Dvoretzky

Bachelor-Arbeit

Marco Krull
Matrikelnummer: 8499101

Erstgutachter: Prof. Dr. Delio Mugnolo
Zweitgutachter: Jun.-Prof. Dr. Michael Hartz

22. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Kreis und Quadrat sind zwei elementare geometrische Objekte, die Gelehrte seit der Antike beschäftigen. Über Jahrhunderte versuchte man mittels elementarer Geometrie und Arithmetik die Quadratur des Kreises, die, wie wir heute wissen, zum Scheitern verurteilt war; es sind aus Sicht der Geometrie schlicht zwei unterschiedliche Objekte. Betrachtet man die beiden Objekte in der modernen Sprache der normierten Räume, so ist der Kreis gerade die Einheitskugel des ℓ_2^2 und das Quadrat die Einheitskugel des ℓ_2^∞. Allerdings sind die beiden Einheitskugeln, wie auch in der Geometrie, keine äquivalenten Objekte: einen isometrischen Isomorphismus, der die beiden zweidimensionalen Einheitskugeln miteinander identifiziert, kann es nicht geben. Wir wollen nun beide Objekte mit funktionalanalytischen Werkzeugen behandeln. Dadurch sind wir nicht mehr auf zwei oder endlich viele Dimensionen beschränkt. Betrachten wir den Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ und seine zweidimensionalen Unterräume, so kann keiner dieser Unterräume isometrisch isomorph zu ℓ_2^2 sein. Aber gibt es möglicherweise einen Unterraum, dessen Einheitskugel nahezu „kreisförmig“ ist? Oder um es in die exakte Sprache der Mathematik zu überführen: existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein zweidimensionaler Unterraum $A \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ und ein Isomorphismus $T\colon A \mapsto \ell_2^2$, sodass

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\|x\|_\infty \leq \|Tx\|_2 \leq \sqrt{1+\varepsilon}\|x\|_\infty \qquad \forall x \in A$$

zutrifft? Später in dieser Arbeit wird gezeigt, dass diese Ungleichungskette äquivalent zur Existenz eines Isomorphismus $T\colon A \mapsto \ell_2^2$ ist, sodass

$$\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$$

gilt. Betrachtet man das Infimum über alle T, so führt dies auf die Definition des Banach-Mazur-Abstands.

Definition 1.1 (Banach-Mazur-Abstand)**.** *Seien X und Y isomorphe normierte Räume. Dann definieren wir den Abstand $\Delta(X,Y)$ als*

$$\Delta(X,Y) := \inf_T\{\|T\|\|T^{-1}\| \mid T\colon X \mapsto Y,\, T \textit{ ist ein Isomorphismus}\}.$$

Obige Frage können wir damit auch äquivalent formulieren als: gibt es einen Unterraum $A \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ für den $\Delta(A, \ell_2^2) \leq 1 + \varepsilon$ zutrifft? Die Antwort auf diese Frage ist positiv und folgt aus dem Satz von Dvoretzky, benannt nach dem Mathematiker Aryeh Dvoretzky, der ihn 1961 bewies [1].

Satz 1.2 (Satz von Dvoretzky). *Für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden unendlichdimensionalen Banachraum $(B, \|\cdot\|)$ existiert eine Folge von n-dimensionalen Unterräumen $(B_n, \|\cdot\|)$, sodass $\Delta(B_n, \ell_n^2) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Wir stellen fest, dass der Satz von Dvoretzky sogar eine viel weitreichendere Aussage trifft: wir sind weder beschränkt in der Dimension n des euklidischen Raums, noch spielt der Banachraum $(B, \|\cdot\|)$ eine Rolle, dessen Unterräume wir betrachten. Ziel dieser Arbeit ist es, diesen Satz zu beweisen. Da diese Arbeit im Zuge eines Bachelorstudiums entstanden ist, sind in den folgenden Kapiteln zunächst wichtige Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Analysis zusammengetragen. Als bekannt vorausgesetzt werden grundlegende Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie und Funktionalanalysis, wie sie in einer diesbezüglichen Vorlesung eines Mathematikstudiums dargestellt werden. Im Anschluss an die Grundlagen wird der Beweis geführt. Der Beweisgang folgt hierbei Gilles Pisier [2, 3] und nutzt wahrscheinlichkeitstheoretische Argumente. Dies stellt den Hauptteil dieser Arbeit dar. Um schließlich die Bedeutung des Satzes herauszuheben, wird am Ende noch eine Anwendung präsentiert.

2 Grundlagen

In der gesamten Arbeit bezeichnen Normen von Operatoren stets die kanonische Operatornorm. Zudem beschränken sich die Betrachtungen ausschließlich auf reelle Vektorräume.

2.1 Wahrscheinlichkeitstheorie

Standardnormalverteilte Zufallsvariablen spielen für den Beweis des Satzes eine zentrale Rolle. Daher werden im Folgenden Aussagen zusammengetragen und bewiesen, die entweder zentral in den Beweis eingehen oder aus einführenden Veranstaltungen zur Stochastik oder Wahrscheinlichkeitstheorie nicht unbedingt bekannt sind.

Sei g_i eine unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Diese hat die Verteilungsfunktion:

$$\mathbb{P}(g_i \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

Das durch die standardnormalverteilte Zufallsvariable auf dem Bildraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnen wir mit γ:

$$\gamma(A) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega,\ g_i(\omega) \in A,\ A \in \mathcal{B}).$$

Wir notieren die folgende elementare Abschätzung [3, 4]:

Proposition 2.1. *Seien $(g_i)_1^n$ stochastisch unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann existiert eine positive Konstante c derart, dass*

$$\mathbb{E} \max_{i \leq n} |g_i| \geq c\sqrt{\ln n}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Abschätzung:

$$\sqrt{2\pi}\mathbb{P}\left(|g_i| > \sqrt{\ln n}\right) \geq \frac{1}{n}$$

für alle n. Wir können $n > 2$ annehmen, denn konkrete Berechnung der Wahrscheinlichkeit bestätigt die Richtigkeit für $n = 1, 2$. Mit der Symmetrie der Normalverteilung gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\mathbb{P}\left(|g_i| > \sqrt{\ln n}\right) &= 2 \int_{\sqrt{\ln n}}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\
&\geq \int_{\sqrt{\ln n}}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \qquad \left(\text{da } 1 + \frac{1}{t^2} \leq 2\right) \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\ln n}\right)^2}{2}\right)}{\sqrt{\ln n}} \\
&= \left(\frac{1}{(\ln n)n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise halten wir fest, dass eine positive Konstante $c' < 1$ existiert mit:

$$\mathbb{P}\left(|g_i| > \sqrt{\ln n}\right) \geq \frac{c'}{n}.$$

Wir betrachten nun den Erwartungswert und wenden das Layer-Cake-Theorem an:

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n}|g_i| = \int_{\Omega} \max_{i\leq n}|g_i|\, d\mathbb{P} = \int_0^\infty \mathbb{P}\{\max_{i\leq n}|g_i| > t\}\, dt.$$

Unter Ausnutzung der identischen Verteilung der g_i, der stochastischen Unabhängigkeit sowie der Monotonie des Integrals können wir weiter umformen:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbb{P}\{\max_{i\leq n}|g_i| > t\}\, dt &= \int_0^\infty 1 - \mathbb{P}\{|g_1| < t, \dots, |g_n| < t\}\, dt \\
&= \int_0^\infty 1 - (1 - \mathbb{P}\{|g_1| > t\})^n\, dt \\
&\geq \int_0^{\sqrt{\ln n}} 1 - (1 - \mathbb{P}\{|g_1| > t\})^n\, dt \\
&\geq \int_0^{\sqrt{\ln n}} 1 - (1 - \mathbb{P}\{|g_1| > \sqrt{\ln n}\})^n\, dt \\
&= \sqrt{\ln n}\left(1 - \left(1 - \mathbb{P}\{|g_1| > \sqrt{\ln n}\}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Wir fassen die bisherigen Abschätzungen zusammen und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\max_{i\leq n}|g_i| &\geq \sqrt{\ln n}\left(1 - \left(1 - \mathbb{P}\{|g_1| > \sqrt{\ln n}\}\right)^n\right) \\
&\geq \sqrt{\ln n}\left(1 - \left(1 - \frac{c'}{n}\right)^n\right) \\
&\geq c\sqrt{\ln n}
\end{aligned}$$

für eine positive Konstante c. Im letzten Schritt beachte man die Konvergenz der monoton steigenden Folge $\left(1 - \frac{c'}{n}\right)^n$. □

Folgende Abschätzung wird sich später noch als nützlich erweisen [3]:

Proposition 2.2. *Sei g eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Dann gilt für ein $K > 0$ und alle $p \geq 1$:*

$$(\mathbb{E}|g|^p)^{\frac{1}{p}} \leq K p^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Wir wenden zunächst die Definition des Erwartungswertes an und substituieren mit

$$u(x) = \frac{x^{p+1}}{2^{\frac{p+1}{2}}}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|g|^p &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{p+1} \int_0^{\infty} \exp\left(-u^{\frac{2}{p+1}}\right)\, du.\end{aligned}$$

Wir substituieren erneut mit $u = f^{\frac{p+1}{2}}$ und schließen auf das Integral:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{p+1} \int_0^{\infty} \exp\left(-u^{\frac{2}{p+1}}\right)\, du &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{p+1} \frac{p+1}{2} \int_0^{\infty} f^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-f}\, df \\ &= \frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Nun müssen wir die Gammafunktion geeignet abschätzen. Wir nutzen die Rekursion $\Gamma(\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha-1)$ für $\alpha > 0$ und schlussfolgern damit:

$$\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \overbrace{\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)\cdots\left(\frac{p+1-2\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor-1\right)}{2}\right)}^{\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor \text{ Faktoren}} \Gamma\left(\frac{p+1-2\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}{2}\right).$$

Ist nun $\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor \geq 2$, so können wir folgendermaßen abschätzen:

$$\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \leq \left(\frac{p}{2}\right)^{\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor} \Gamma\left(\frac{p+1-2\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}{2}\right) \leq \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1-2\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}{2}\right).$$

In den Fällen, in denen $1 \leq p < 4$ ist, können wir ebenso eine Konstante $\tilde{c} > 0$ wählen, sodass

$$\left(\frac{p+1}{2}\right) \leq \tilde{c}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}$$

für alle diese p gilt. Das Argument der Gammafunktion liegt stets im Intervall $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, sodass wir mit der Stetigkeit der Gammafunktion bei echt positiven Argumenten diese auch gegen eine Konstante $\widehat{c} > 0$ mit

$$\widehat{c} \geq \Gamma\left(\frac{p+1-2\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}{2}\right)$$

abschätzen können. Wir fassen alle Abschätzungen zusammen und erhalten eine

Konstante $\overline{c} > 0$, sodass für alle $p \geq 1$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \leq \overline{c}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{2}$$

Wir verbinden nun (1) und (2) und erhalten für $(\mathbb{E}|g|^p)^{\frac{1}{p}}$:

$$(\mathbb{E}|g|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}}\overline{c}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq Kp^{\frac{1}{2}}$$

die zu zeigende Abschätzung mit einer Konstante K. □

Die aus dem eindimensionalen Fall bekannte Definition der Standardnormalverteilung soll auf den n- dimensionalen erweitert werden [5].

Definition 2.3. *Seien $(g_i)_i^n$ stochastistisch unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann bezeichnen wir den Vektor $(g_1, \ldots, g_n)^T$ als standardnormalverteilten Zufallsvektor.*

Ein standardnormalverteilter Zufallsvektor ist somit eine Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ in den Messraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ und induziert dort das Gauß'sche Maß γ_n:

$$\gamma_n(A) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A,\ A \in \mathcal{B}^n).$$

Aus der stochastischen Unabhängigkeit der g_i ergibt sich als Dichte f des Zufallsvektors X als Produkt der Dichten der g_i:

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$. Standardnormalverteilte Zufallsvektoren haben die besondere Eigenschaft, dass sie invariant unter Rotation sind. Drehungen werden gemäß Linearer Algebra durch orthogonale Matrizen vermittelt. Damit ergibt sich folgender relevanter Satz [5]:

Satz 2.4. *Sei X ein standardnormalverteilter Zufallsvektor mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und A eine orthogonale $n \times n$-Matrix. Dann ist der Zufallsvektor $Y = AX$ ebenfalls standardnormalverteilt.*

Beweis. Wir verwenden den Transformationssatz für Dichten im Spezialfall einer linearen Transformation bezüglich des Lebesguemaßes sowie die Eigenschaft, dass die Determinanten orthogonaler Matrizen stets betragsmäßig gleich Eins sind. Die Dichte g von Y ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} g(y) &= f(A^{-1}y)\,|\det A|^{-1} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle A^{-1}(y), A^{-1}(y)\right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, x\rangle\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

Dieser Satz impliziert insbesondere, dass Y und X das gleiche Wahrscheinlichkeitsmaß γ_n induzieren.

Die Berechnung des folgenden Integrals werden wir später noch benötigen [3, 4]:

Proposition 2.5. *Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\langle x, t\rangle\right)\, d\gamma_n(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\|x\|_2^2\right).$$

Beweis. Wir wenden die Definitionen an:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\langle x, t\rangle\right)\, d\gamma_n(t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i t_i\right)\, d\gamma_n(t) \\ &= \prod_{i=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(x_i t_i\right)\, d\gamma(t_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(x_i t_i\right) \exp\left(-\frac{t_i^2}{2}\right)\, dt_i. \end{aligned}$$

An dieser Stelle hatten wir das Gaußmaß durch das zugehörige Integral bezüglich des Lebesguemaßes ersetzt. Der Rest sind elementare Umformungen:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\langle x,t\rangle\right)\, d\gamma_n(t) &= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x_i^2 - (x_i - t_i)^2}{2}\right)\, dt_i \\
&= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{x_i^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_i - t_i)^2}{2}\right)\, dt_i \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{x_i^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\|x\|_2^2\right).
\end{aligned}
$$

□

Da der Satz von Dvoretzky allgemein für Banachräume definiert ist, müssen wir die Definition der Normalverteilung auf allgemeine Banachräume übertragen [6, 7].

Definition 2.6 (Gauß'scher Zufallsvektor mit Werten in E)**.** *Sei E ein Banachraum und $(E, \mathcal{E})$ ein Messraum, auf dem alle stetigen Funktionale messbar sind. Dann heißt eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierte Zufallsvariable*

$$X : \Omega \mapsto E$$

ein Gauß'scher Zufallsvektor mit Werten in E, wenn für alle Funktionale $\zeta \in E^*$ gilt, dass $\zeta(X) \sim N(a, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Hierbei lassen wir die Null als degenerierte Normalverteilung zu.

Dass diese Definition sinnvoll ist und eine so konstruierte Zufallsvariable Eigenschaften trägt, die wir von einer Normalverteilung „erwarten“ würden, ist zunächst nicht ersichtlich. Für solche Betrachtungen muss auf weiterführende Literatur verwiesen werden [6, 7].

Wichtige Kennziffer von Gauß'schen Zufallsvektoren ist ihre Dimension.

Definition 2.7. *Sei X ein Gauß'scher Zufallsvektor mit Werten im Banachraum E. Sei dann außerdem das zweite schwache Moment σ von X definiert als:*

$$\sigma := \sigma(X) := \sup\left\{ \left(\mathbb{E}\left(\zeta(X)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \zeta \in E^*,\ \|\zeta\| = 1 \right\}.$$

Dann heißt

$$d(X) = \left(\frac{\mathbb{E}\|X\|}{\sigma(X)}\right)^2$$

die Dimension von X.

Die Definition der Dimension eines Zufallsvektors darf nicht mit der Dimension eines Vektorraums verwechselt werden. Die Dimension von X muss nicht einmal eine natürliche Zahl sein. An dieser Stelle wird auch deutlich, dass $d(X)$ von der konkreten Norm des Banachraums E abhängt.
Wir könnten den Beweis des Satzes von Dvoretzky auch mit dieser allgemeinen Definitionen führen. Allerdings werden wir im Beweis nur endlichdimensionalen Banachräumen begegnen. Darüberhinaus können wir uns in der Wahl unseres Gauß'schen Zufallsvektors noch weiter einschränken: wir werden ausschließlich jenen Fall betrachten, in dem X die Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i \tag{3}$$

mit linear unabhängigen Elementen $e_i \in E$ und stochastisch unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen g_i besitzt. Wir prüfen kurz, dass dieser Vektor die Definition 2.6 erfüllt.

Lemma 2.8. *Sei E ein endlichdimensionaler Banachraum. Dann ist $X = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i$ ein Gauß'scher Zufallsvektor mit Werten in E.*

Beweis. Sei also X wie in (3) Wir können annehmen, dass E ein n-dimensionaler Raum ist, ansonsten betrachten wir einfach den von den e_i aufgespannten Unterraum. Sei weiter $\zeta \in E^*$ beliebiges Funktional. Aus dem Dualraum E^* wählen wir die Funktionale $(\zeta_k)_1^n$ biorthogonal zu den e_i, also in der Form:

$$\zeta_k(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit bilden die $(\zeta_k)_1^n$ eine Basis von E^* und es folgt mit $c_k \in \mathbb{R}$:

$$\zeta(X) = \zeta\left(\sum_{i=1}^{n} g_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_k \zeta_k(g_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$$

In dieser Summe ist jedes $c_i g_i$ normalverteilt. Da die endliche Addition normalverteilter Zufallsgrößen wieder eine solche ergibt [5,8], ist die Definition 2.6 erfüllt. □

Somit ist Definition 2.6 auch verträglich mit der Definition des uns bekannten standardnormalverteilten Zufallsvektor im $\mathbb{R}^n$. Dieser ist im Sinne obiger Definition natürlich ebenso ein Gauß'scher Zufallsvektor.

Da wir in dieser Arbeit ausschließlich Gauß'sche Zufallsvektoren der Form (3) betrachten werden, führen wir zum Zwecke der sprachlichen Vereinfachung folgende Vereinbarung ein.

Vereinbarung 1. *In dieser Arbeit bezeichnen wir einen Zufallsvektor X genau dann als Gauß'schen Zufallsvektor mit Werten im endlichdimensionalen Banachraum E, wenn dieser die Gestalt $X = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i$ mit linear unabhängigen Elementen e_i und stochastisch unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsgrößen g_i hat. Ist eindeutig, um welchen Banachraum es sich handelt, wird dieser nicht explizit genannt.*

Mit dieser Vereinbarung lässt sich auch die Definition von σ aus Definition 2.7 wie folgt vereinfachen:

Satz 2.9. *Sei X ein Gauß'scher Zufallsvektor wie in Vereinbarung 1. Dann hat dieser das zweite schwache Moment*

$$\sigma(X) = \sup_{\|\zeta=1\|} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |\zeta(e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \zeta \in E^*,\ \|\zeta\| = 1 \right\}$$

Beweis. Unter Beachtung, dass in Folge der stochastischen Unabhängigkeit für $i \neq j$

$$\mathbb{E} g_i g_j = \mathbb{E} g_i \mathbb{E} g_j = 0$$

und in Folge der Standardnormalverteilung $\mathbb{E} g_i^2 = 1$ für alle i gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sigma(X) &= \sup \left\{ \left(\mathbb{E} \left(\zeta \left(\sum_{i=1}^{n} g_i e_i \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \zeta \in E^*,\ \|\zeta\| = 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2 \zeta(e_i)^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} g_i g_j \zeta(e_i) \zeta(e_j) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \zeta \in E^*,\ \|\zeta\| = 1 \right\} \\
&= \sup_{\|\zeta=1\|} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |\zeta(e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \zeta \in E^*,\ \|\zeta\| = 1 \right\}.
\end{aligned}$$

□

Wir machen uns deutlich, dass $d(X)$ für alle hier betrachteten Gauß'schen Zufallsvektoren endlich ist. Es lässt sich sogar zeigen, dass

$$d(X) \leq n = \dim E,$$

aber das benötigen wir hier nicht.

Folgende Eigenschaft der n-dimensionalen Normalverteilung stellt eine Verallgemeinerung des eindimensionalen Falls dar.

Proposition 2.10. *Seien $(X_i)_1^m$ identische, stochastisch unabhängige Kopien eines Gauß'schen Zufallsvektors mit Werten im endlichdimensionalen Banachraum E und weiterhin gelte $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$ mit $a_i \in \mathbb{R}$. Dann ist $X = \sum_{i=1}^m a_i X_i$ ein Gauß'scher Zufallsvektor.*

Beweis. Für stochastisch unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen f_i mit Erwartungswert 0 und Varianz σ_i^2 gilt mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz, dass

$$a_i f_i \sim N(0, a_i^2 \sigma_i^2)$$

ist. Somit erhalten wir für die Summe der Zufallsvariablen (siehe auch [5]):

$$\sum_{i=1}^m a_i f_i \sim N\left(0, \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2 \sigma_i^2}\right).$$

Angewendet auf die stochastisch unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen g_i und a_i wie in der Voraussetzung führt dies auf:

$$\sum_{i=1}^m a_i g_i \sim N\left(0, \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2 \cdot 1}\right) = N(0,1).$$

Für den Zufallsvektor X folgt damit:

$$X = \sum_{i=1}^m a_i X_i = \sum_{i=1}^m a_i \sum_{k=1}^n g_{ik} e_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (a_i g_{ik}) e_k.$$

Da für jedes k die Summe $\sum_{i=1}^m (a_i g_{ik})$ eine standardnormalverteilte Zufallsgröße ist, ist X ein Gauß'scher Zufallsvektor. □

Folgende Ungleichung ist im Allgemeinen bekannt, wir notieren sie dennoch mit dem kurzen Beweis [8]:

Satz 2.11 (Markov-Ungleichung)**.** *Es seien $\Phi\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ eine monoton wachsende Funktion und X eine reelle Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}$. Dann gilt für jedes $t > 0$ mit $\Phi(t) > 0$:*

$$\mathbb{P}(|X| > t) \leq \frac{\mathbb{E}\Phi(|X|)}{\Phi(t)}.$$

Beweis. Im Folgenden bezeichne $\mathbb{1}$ die charakteristische Funktion. Da Φ monoton wachsend ist, ist die Funktion borelmessbar. Die Betragsfunktion ist als stetige Funktion ebenfalls borelmessbar und die reelle Zufallsvariable ist dies per Definition. Damit ist die Verkettung der drei Abbildungen $\Phi(|X|)$ eine messbare Abbildung. Zudem ist $\Phi(|X|)$ positiv, woraus wir

$$\int_{\Omega} -\min\bigl(\Phi(|X|), 0\bigr)\, d\mathbb{P} = 0$$

schließen. Damit ist $\Phi(|X|)$ quasiintegrierbar, sodass der Erwartungswert stets definiert ist. Dann folgt mit Definition und Monotonie des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(|X|)] &\geq \mathbb{E}[\Phi(|X|)\mathbb{1}_{\Phi(|X|)\geq\Phi(t)}] \geq \mathbb{E}[\Phi(t)\mathbb{1}_{\Phi(|X|)\geq\Phi(t)}] \\ &= \Phi(t)\int \mathbb{1}_{\Phi(|X|)\geq\Phi(t)}\, d\mathbb{P} \geq \Phi(t)\int \mathbb{1}_{|X|\geq t}\, d\mathbb{P} = \Phi(t)\mathbb{P}(|X| \geq t) \end{aligned}$$

In den vorletzten Schritt ging entscheidend das monotone Wachstum der Funktion Φ ein. □

2.2 Analysis

In diesem Abschnitt werden einige Sätze vorgestellt, die wir als Hilfsmittel in den späteren Beweisen benötigen. Der erste Satz ist die sogenannte Ungleichung von Jensen (Beweis folgt [9]):

Satz 2.12 (Ungleichung von Jensen)**.** *Es seien $(A, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon A \mapsto I$ μ-integrierbar und $\Phi\colon I \mapsto \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar. Dann gilt*

$$\Phi\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A f\, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(A)}\int_A \Phi\circ f\, d\mu. \tag{4}$$

Beweis. Zuerst muss gezeigt werden, dass die linke Seite von (4) wohldefiniert ist, also dass $\frac{1}{\mu(A)}\int_A f\, d\mu$ in I liegt. Seien also $\frac{1}{\mu(A)}\int_A f\, d\mu = m$ und $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ der linke und rechte Randpunkt des Intervalls I. Aus $a \leq f \leq b$ folgt mit der Monotonie des Integrals für den rechten Randpunkt:

$$\frac{1}{\mu(A)}\int_A f\, d\mu \leq \frac{1}{\mu(A)}\int_A b\, d\mu = b.$$

Analoge Argumentation für die linke Seite zeigt, dass $a \leq m \leq b$ ist. Wenn a, b zum

Intervall gehören, ist die Wohldefiniertheit damit gezeigt. Sei nun $a \notin I$ (z. B. I ist ein offenes Intervall), dann ist $0 < f(x) - a$ für alle $x \in A$ und damit $a < m$. Mittels analoger Argumentation für den rechten Randpunkt, folgt $m \in I$.
Um die Korrektheit der Ungleichung zu zeigen, unterscheiden wir zwei Fälle. Als erstes sei m ein Randpunkt des Intervalls. Analog der vorherigen Argumentation folgt $f(x) = m$ für fast alle $x \in A$, also $\Phi(f(x)) = \Phi(m)$ fast überall. Damit ist dann:

$$\frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A \Phi \circ f \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A \Phi(m) \, d\mu = \Phi(m) = \Phi\left(\frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A f \, d\mu\right).$$

Sei nun m ein innerer Punkt von I , also $m \in \mathring{I}$. Allgemein gilt für alle $x, y \in \mathring{I}$:

$$\Phi(x) \geq \Phi(y) + \Phi'(y)(x - y). \tag{5}$$

Betrachten wir nämlich die Funktion

$$\vartheta(t) = t\Phi(x) + (1 - t)\Phi(y) - \Phi(tx + (1 - t)y),$$

so ist Φ genau dann konvex, wenn $\vartheta(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, 1]$ ist. Differenzieren ergibt

$$\vartheta'(t) = \Phi(x) - \Phi(y) - \Phi'(tx + (1 - t)y)(x - y).$$

Da ϑ für $t = 0$ ein Minimum annimmt, muss gelten:

$$0 \leq \vartheta'(0) = \Phi(x) - \Phi(y) - \Phi'(y)(x - y),$$

woraus (5) folgt. Speziell für m, t gilt natürlich:

$$\Phi(t) \geq \Phi(m) + \Phi'(m)(t - m)$$

und mit $t = f(x)$ ergibt sich die Korrektheit der Ungleichung (4):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A \Phi \circ f \, d\mu &\geq \frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A \Phi(m) \, d\mu + \frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A \Phi'(m)(f(x) - m) \, d\mu \\ &= \Phi(m) + m\Phi'(m) - m\Phi'(m) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A f \, d\mu\right).\end{aligned}$$

$\square$

Die Ungleichung von Jensen lässt sich auch ohne die Forderung der Differenzierbarkeit von Φ mit geringem Mehraufwand beweisen. Uns genügt aber die schwächere Formulierung.

Der folgende Satz wird uns als wichtiges Hilfsmittel dienen. Den ursprünglichen Beweis findet man in [10], mittlerweile gibt es aber auch alternative Beweise [11,12]:

Satz 2.13 (Satz von Rademacher)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: U \to \mathbb{R}^m$ lipschitzstetig. Dann ist f bis auf eine Lebesgue-Nullmenge differenzierbar.*

Der sogenannte Satz von Lewis spielt eine wichtige Rolle in der Geometrie von Ellipsoiden. Damit bezeichnet man allgemein die Bilder der euklidischen Einheitskugel unter linearen Isomorphismen. Wir benötigen den Satz als Hilfsmittel für den Beweis des Lemmas von Dvoretzky-Rogers. Zuvor führen wir noch die Bezeichnungsweise einer dualen Norm ein [3]:

Definition 2.14. *Sei E ein n- dimensionaler Banachraum und $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$ der Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach E und α eine Norm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$. Dann definieren wir die zu α duale Norm α^* auf dem Raum $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ als*

$$\alpha^*(v) := \sup_T \{\mathrm{Spur}(vT) \,|\, T: \mathbb{R}^n \mapsto E \quad \alpha(T) \leq 1\} \qquad \forall v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n).$$

Mit dieser Definition können wir den Satz von Lewis formulieren [3]:

Satz 2.15 (Satz von Lewis)**.** *Sei E ein n-dimensionaler Banachraum und α eine Norm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$. Dann existiert ein Isomorphismus $u: \mathbb{R}^n \mapsto E$, sodass*

$$\alpha(u) = 1 \qquad \textit{und} \qquad \alpha^*(u^{-1}) = n$$

ist.

Beweis. Wir wählen eine beliebige Basis von E und betrachten die Determinantenfunktion einer linearen Abbildung T als $T \mapsto \det T$. Sei dann weiter

$$K := \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E) \,|\, \alpha(u) \leq 1\}.$$

Die Menge K ist kompakt, da $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$ endlichdimensional ist. Da die Determinantenfunktion als Polynomfunktion stetig ist, nimmt diese auf K ihr Maximum an. Das bedeutet, es gibt ein u in K, sodass

$$|\det(u)| = \sup\{|\det(v)| \,|\, v \in K\}$$

zutrifft. Dies impliziert dann für alle $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$:

$$\left|\det\left(\frac{u+T}{\alpha(u+T)}\right)\right| \leq \det(u)$$

gemäß der Wahl von u und $\frac{u+T}{\alpha(u+T)} \in K$. Mit den Rechenregeln für Determinanten ist dies äquivalent zu:

$$|\det(u+T)| \leq (\alpha(u+T))^n |\det(u)|.$$

Da K auch Isomorphismen enthält, ist $|\det(u)| \neq 0$. Wir dividieren durch $|\det(u)|$ und erhalten unter Beachtung von $\frac{1}{\det(u)} = \det(u^{-1})$:

$$|\det(I_n + u^{-1}T)| \leq (\alpha(u+T))^n \leq (1+\alpha(T))^n.$$

In die letzte Abschätzung ging die Dreiecksungleichung ein. Da T beliebig war, gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ natürlich ebenso

$$|\det(I_n + \varepsilon u^{-1}T)| \leq (1+\varepsilon\alpha(T))^n.$$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten 1, dividieren durch $\varepsilon > 0$ und beschränken uns fortan auf die Abschätzung ohne Betrag:

$$\frac{\det(I_n + \varepsilon u^{-1}T) - 1}{\varepsilon} \leq \frac{|\det(I_n + \varepsilon u^{-1}T)| - 1}{\varepsilon} \leq \frac{(1+\varepsilon\alpha(T))^n - 1}{\varepsilon}. \tag{6}$$

Wir interessieren uns für den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$. Für die rechte Seite sehen wir unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes, dass der Grenzwert existiert und für $\varepsilon \to 0$ folgt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon\alpha(T))^n - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i (\varepsilon\alpha(T))^{n-i} - 1}{\varepsilon} = n\alpha(T).$$

Für die linke Seite ist die Berechnung schwieriger. Wir behaupten:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\det(I_n + \varepsilon u^{-1}T) - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\det(I_n + \varepsilon X) - \det(I_n)}{\varepsilon} = \operatorname{Spur} X.$$

Die Behauptung wird mit Induktion bewiesen. Für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\det(I_2 + \varepsilon X) - \det(I_2)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon x_{11})(1+\varepsilon x_{22}) - \varepsilon^2 x_{12}x_{21} - 1}{\varepsilon} \\
&= x_{11} + x_{22} \\
&= \operatorname{Spur} X.
\end{aligned}$$

Sei die Behauptung nun für alle $k \leq n-1$ gültig. Dann folgt für $n = k$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\det(I_n + \varepsilon X) - \det(I_n)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n}(\delta_{i,n} + \varepsilon x_{i,n})A_{i,n}(\varepsilon) - 1}{\varepsilon}.$$

Hier wurde der Laplace'sche Entwicklungssatz angewandt. Es bezeichnet $\delta_{i,n}$ das Kronecker-Delta. Es bezeichne außerdem $M_{i,n}$ die Matrix, bei der die i-te Zeile und n-te Spalte aus $I_n + \varepsilon X$ gestrichen wurden. Dann ist also

$$A_{i,n}(\varepsilon) = (-1)^{i+n} \det M_{i,n}.$$

Wir formen weiter um:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n}(\delta_{i,n} + \varepsilon x_{i,n})A_{i,n}(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,n} A_{i,n}(\varepsilon) - 1 + \varepsilon x_{i,n} A_{i,n}(\varepsilon)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A_{n,n}(\varepsilon) - 1 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon x_{i,n} A_{i,n}(\varepsilon)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A_{n,n}(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon x_{i,n} A_{i,n}(\varepsilon)}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung war gestattet, da beide Grenzwerte existieren: der erste Summand gemäß Induktionsvoraussetzung, der zweite, da ε in Zähler und Nenner linear auftaucht. Wir überlegen uns noch, dass $A_{i,n}(0) = 1$ für $i = n$ und 0 für $i \neq n$ ist. Damit erhalten wir:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A_{n,n}(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon x_{i,n} A_{i,n}(\varepsilon)}{\varepsilon} = \operatorname{Spur} X_{n,n} + x_{n,n} = \operatorname{Spur} X$$

die Behauptung. Damit können wir zu unserer Ausgangsungleichung (6) zurückkommen und stellen für den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ fest:

$$\operatorname{Spur}(u^{-1}T) \leq n\alpha(T)$$

für alle $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$. Damit gilt für $T = u$:

$$n = \operatorname{Spur}(u^{-1}u) \leq n\alpha(u)$$

und da $u \in K$ folglich $\alpha(u) = 1$. Da außerdem $\mathrm{Spur}\,(u^{-1}T) \leq n$ für alle $T \in K$ ist auch $\alpha^*(u^{-1}) \leq n$. Da für $T = u$ aber $\alpha^*(u^{-1}) \geq n$ folgt, haben wir insgesamt $\alpha^*(u^{-1}) = n$ und damit den Beweis abgeschlossen. □

3 Beweis des Satzes von Dvoretzky

3.1 Beweisidee

Wir werden in dieser Arbeit sogar folgende, stärkere Variante des Satzes von Dvoretzky beweisen [2, 3].

Satz 3.1. *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine nur von ε abhängige Zahl $\eta(\varepsilon) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Sei E ein endlichdimensionaler Banachraum mit der Dimension N. Dann enthält E einen Unterraum F der Dimension $n = \lfloor \eta(\varepsilon) \ln N \rfloor$, sodass $\Delta(F, \ell_n^2) \leq 1 + \varepsilon$ gilt.*

In dem Satz wird a priori nichts über die konkrete Größe von $\eta(\varepsilon)$ ausgesagt. Für die qualitative Aussage im Fall $N \to \infty$ ist diese natürlich ohnehin uninteressant. Damit der Satz aber für bestimmte kleine N nicht impliziert, dass ein Unterraum F mit einer Dimension $n > N$ existiert, darf $\eta(\varepsilon)$ nicht beliebig groß sein. Wie man $\eta(\varepsilon)$ optimal, das heißt also möglichst groß wählt, ist aber nicht Bestandteil dieser Arbeit. Uns genügt, dass ein solches $\eta(\varepsilon)$ existiert.

Die Ausführungen und Beweise im gesamten Kapitel der Argumentation von Gilles Pisier in [2, 3], wenn nicht anders genannt. In der Formulierung von Satz 1.2 ist der Banachraum B unendlichdimensional. Wir können uns bei gegebenem ε daher einen Unterraum $E \subset B$ mit beliebig großer Dimension N wählen, sodass ein Unterraum F der Dimension $n = \lfloor \eta(\varepsilon) \ln N \rfloor$ existiert, für den $\Delta(F, \ell_n^2) \leq 1 + \varepsilon$ gilt. Damit impliziert Satz 3.1 den Satz von Dvoretzky. Um den Satz 3.1 beweisen zu können, zeigen wir noch eine Formulierung des Banach-Mazur-Abstandes, die sich als besser handhabbar für den konkreten Beweis erweist:

Lemma 3.2. *Sei $\varepsilon > 0$ und $(F, \|\cdot\|)$ ein n-dimensionaler Banachraum. Existiert ein Isomorphismus $T\colon \ell_2^n \mapsto F$, sodass für alle $x \in \ell_n^2$ gilt:*

$$\left(\sqrt{(1+\varepsilon)}\right)^{-1} \|x\|_2 \leq \|Tx\| \leq \sqrt{(1+\varepsilon)}\|x\|_2,$$

dann ist $\Delta(\ell_n^2, F) \leq 1 + \varepsilon$.

Beweis. Für jedes $x \in \ell_n^2$ mit $\|x\|_2 = 1$ gilt nach der Voraussetzung:

$$\|Tx\| \leq \sqrt{(1+\varepsilon)}\|x\|_2 = \sqrt{(1+\varepsilon)}$$

und damit $\|T\| \leq \sqrt{(1+\varepsilon)}$. Für ein beliebiges $y \in F$ mit $\|y\| = 1$ gilt außerdem:

$$\left(\sqrt{(1+\varepsilon)}\right)^{-1} \|T^{-1}y\|_2 \leq \|TT^{-1}y\| = 1.$$

Also ist auch $\|T^{-1}\| \leq \sqrt{1+\varepsilon}$ und somit $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1+\varepsilon$. $\square$

In unserem Beweis wählen wir in ℓ_n^2 die kanonische Basis $(e_1, \ldots, e_n)$. Damit reduziert sich der Beweis auf die Aufgabe, einen Unterraum F mit der Basis $(x_1, \ldots, x_n)$ zu finden, sodass für alle $a_i \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\sqrt{(1+\varepsilon)}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \sqrt{(1+\varepsilon)} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

An dieser Stelle kommt die Wahrscheinlichkeitstheorie ins Spiel: sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und X ein Gauß'scher Zufallsvektor (siehe Vereinbarung (1)) auf dem Banachraum E:

$$X : \Omega \mapsto E.$$

Wir betrachten n stochastisch unabhängige Kopien $(X_1, \ldots, X_n)$ von X. Sei dann $\Omega(n, \varepsilon)$ die Menge aller $\omega \in \Omega$, sodass für alle $a_i \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\sqrt{(1+\varepsilon)}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i(\omega)\right\| \leq \sqrt{(1+\varepsilon)} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir werden zeigen, dass für alle $n \leq \eta(\varepsilon) \ln N$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\Omega(n, \varepsilon))$ echt größer als Null ist. Das bedeutet nämlich, dass ein $\omega \in \Omega$ existiert, sodass $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ eine Basis unseres gesuchten Unterraums F bildet und wir haben den Satz bewiesen. Um dies beweisen zu können, benötigen wir im Wesentlichen drei Sätze, die für sich genommen auch relevante Resultate sind: das Concentration of Measure Theorem, das Lemma von Dvoretzky-Rogers sowie die Ungleichung von Levy. Das Concentration of Measure Theorem wird uns bereits die Existenz eines Unterraums F mit $\Delta(F, \ell_n^2) \leq 1+\varepsilon$ garantieren, allerdings hängt die Abschätzung der Dimension n noch von der Dimension $d(X)$ des Zufallsvektors X ab. Dieses wiederum ist von der Wahl des Banachraums E abhängig (siehe Bemerkung nach

Satz 2.9). Erst das Lemma von Dvoretzky-Rogers als auch die Ungleichung von Levy ermöglichen uns die Abschätzung gegen $\ln N$ mit N als der Dimension des Banachraums E. Darüber hinaus werden wir zwei Lemmata aus der Geometrie benötigen dank derer wir uns auf die Betrachtung der Sphäre der Einheitskugel zurückziehen dürfen. Im Folgenden werden als Erstes die relevanten Sätze für den Beweis zusammengetragen bevor dann der Beweis von Satz 3.1 geführt wird.

3.2 Concentration of Measure

Das Concentration of Measure Theorem bildet den Kern unseres Beweises. Es wurde initial von Paul Levy bewiesen und von Vitali Milmann im Jahre 1970 aufgegriffen, um einen alternativen Beweis des Satzes von Dvoretzky zu geben [13]. Der Beweis verwendet Aussagen über Haar'sche Maße. Wir kommen allerdings ohne explizite Kenntnis der Haar'schen Maße aus, da es ein Analogon zu dem Concentration of Measure Theorem für Gauß'sche Zufallsvektoren gibt:

Satz 3.3 (Concentration of Measure Theorem). *Sei $X = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i$ ein Gauß'scher Zufallsvektor mit Werten im endlichdimensionalen Banachraum E. Dann gilt für jedes $t > 0$:*

$$\mathbb{P}\{\|X\| - \mathbb{E}\|X\| > t\} \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{\pi^2\sigma(X)^2}\right). \tag{8}$$

Der Beweis ist umfangreich. Wir werden zunächst einige Umformungen vornehmen und benötigte Abbildungen einführen. Danach erfolgen zahlreiche Integralabschätzungen. Wir erinnern uns noch daran, dass in Vereinbarung 1 die e_i als linear unabhängig vorausgesetzt wurden.

Beweis. Wir definieren den linearen Operator $T\colon \ell_n^2 \mapsto E$ durch:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Wir können annehmen, dass $\dim E = n$, andernfalls betrachten wir einfach den durch $(e_i)_{i=1}^n$ aufgespannten Unterraum. Wir wählen Funktionale $(\zeta_k)_1^n$ aus dem Dualraum E^*, sodass

$$\zeta_k(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit bilden die $(\zeta_k)_1^n$ eine Basis von E^* und es folgt mit $c_k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sigma(X) = \sup_{\|\zeta=1\|} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\zeta(e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} &= \sup_{\|\zeta=1\|} \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n c_k \zeta_k(e_i) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{\|\zeta=1\|} \left(\sum_{i=1}^n |c_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{\|\zeta=1\|} \|T^*\zeta\|_2 \\ &= \|T^*\| \\ &= \|T\|. \end{aligned} \tag{9}$$

Hier bezeichnet $T^*\colon E^* \to \ell_n^2$ den zu T dualen Operator. Für beschränkte Operatoren gilt bekanntlich $\|T^*\| = \|T\|$.

Wir können nun (8) unter Verwendung des Operators T äquivalent umformen:

$$\gamma_n \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \left| \|Tx\| - \int \|Ty\| d\gamma_n(y) \right| > t \right\} \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\pi^2 \|T\|^2} \right). \tag{10}$$

Wir setzen die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ als

$$F(x) := \|Tx\|.$$

Dann gilt:

$$|F(x) - F(y)| = |\|Tx\| - \|Ty\|| \leq |T(x-y)| \leq \|T\| \|x-y\|_2. \tag{11}$$

Also ist F lipschitzstetig und mit dem Satz von Rademacher (siehe Satz 2.13) fast überall differenzierbar bezüglich des Lebesguemaßes. Sei x ein Punkt, in dem F differenzierbar ist. Dann können wir, da $F'(x)$ existiert und ein Zeilenvektor ist, die Ungleichung äquivalent umformen zu:

$$|F(x) - F(y)| = |\langle F'(x), y - x \rangle + r(y-x)| \leq \|T\| \|x-y\|_2.$$

Formal müssten wir $F'(x)^T$ schreiben, da es sich im Skalarprodukt ja um den transponierten Vektor handelt. Im Folgenden ist aber offensichtlich, ob es sich um einen Zeilen- oder Spaltenvektor handelt, sodass wir auf die formale Unterscheidung verzichten und nur $F'(x)$ notieren. In der Formel ist r der Fehlerterm, für den

$$\lim_{y\to x} \frac{r(y-x)}{\|x-y\|_2} = 0$$

ist. Wir formen um und erhalten die Ungleichung:

$$\left| \frac{\langle F'(x), y-x\rangle}{\|x-y\|_2} + \frac{r(y-x)}{\|x-y\|_2} \right| \leq \|T\|.$$

Für y wählen wir $y = x + hF'(x)$ mit $h \in \mathbb{R}$. Dann können wir den Spezialfall der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung anwenden, in dem beide Vektoren linear abhängig sind und erhalten:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\langle F'(x), hF'(x)\rangle}{\|hF'(x)\|_2} + \frac{r(hF'(x))}{\|hF'(x)\|_2} \right| &= \left| \frac{\|F'(x)\|_2 \|hF'(x)\|_2}{\|hF'(x)\|_2} + \frac{r(hF'(x))}{\|hF'(x)\|_2} \right| \\
&= \left| \|F'(x)\|_2 + \frac{r(hF'(x))}{\|hF'(x)\|_2} \right| \\
&\leq \|T\|.
\end{aligned}$$

Lassen wir nun $h \to 0$ gehen, so erhalten wir den Zusammenhang:

$$\|F'(x)\|_2 \leq \|T\|. \tag{12}$$

Die Abschätzung (12) werden wir später noch benötigen. Zunächst betrachten wir (10) und ersetzen hier $\|Tx\|$ durch $F(x)$ und erhalten:

$$\gamma_n \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \left| F(x) - \int F(y) d\gamma_n(y) \right| > t \right\} \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\pi^2 \|T\|^2} \right). \tag{13}$$

Wir beweisen die Richtigkeit dieser Abschätzung für alle $x \in \mathbb{R}^n$, auf denen F differenzierbar ist und haben damit ebenso (10) gezeigt.

Als nächstes benötigen wir eine Abbildung, die eine Rotation eines Punktes (x, y) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ beschreibt. Wir definieren die Abbildung $A\colon [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A(\theta) := \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A(\theta)$ ist eine orthogonale Matrix, wie man anhand der Beziehung $A(\theta)^T A(\theta) = I_2$ leicht ablesen kann und beschreibt damit eine Rotation. Wir betrachten jetzt den Punkt (x, y) als (2×1) Blockmatrix. Dann können wir diesen sinnvoll mit $A(\theta)$

multiplizieren und erhalten:

$$A(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sin\theta + y\cos\theta \\ x\cos\theta - y\sin\theta \end{pmatrix}$$

Somit beschreibt die Multiplikation mit $A(\theta)$ eine Rotation des als Blockmatrix aufgefassten Punktes (x, y) aus $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Wir können die Rotation in Abhängigkeit von θ damit auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ y(\theta) = x'(\theta) &= x\cos\theta - y\sin\theta, \end{aligned} \tag{14}$$

was uns im Beweis hilfreich sein wird.

Nun haben wir die Vorbereitungen abgeschlossen und können mit dem eigentlichen Beweis beginnen. Wir verwenden die mehrdimensionale Kettenregel für folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= F\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - F(x(0)) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\theta} F(x(\theta))\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F'(x(\theta)) \cdot x'(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Wir halten fest, dass $F'(x(\theta))$ für fast alle θ existiert. Für eine reelle Zahl $\tau > 0$ sei die Funktion $\Phi_\tau \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiert als:

$$\Phi_\tau(t) := \exp(\tau t).$$

Dann ist Φ_τ konvex und differenzierbar. Damit folgt mit der Ungleichung von Jensen

(Satz 2.12):

$$\Phi_\tau[F(x)-F(y)] = \Phi_\tau\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} F'(x(\theta))\cdot x'(\theta)\,d\theta\right] \tag{15}$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\tau\left[\frac{\pi}{2}F'(x(\theta))\cdot x'(\theta)\right]\,d\theta. \tag{16}$$

Wir integrieren (15,16) über alle (x,y) bezüglich des Gaußmaßes $\gamma_n \times \gamma_n$. Da es sich bei Φ_τ um eine positive Funktion handelt, dürfen wir gleichzeitig den Satz von Fubini anwenden und erhalten:

$$\iint \Phi_\tau[F(x)-F(y)]\,d\gamma_n(x)d\gamma_n(y) \tag{17}$$

$$\leq \iint \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\tau\left[\frac{\pi}{2}F'(x(\theta))\cdot x'(\theta)\right]\,d\theta d\gamma_n(x)d\gamma_n(y).$$

An dieser Stelle kommt die zentrale Überlegung des Beweises. Wir haben im Satz 2.4 gezeigt, dass das Gaußmaß invariant unter Rotation ist. Die Abbildung

$$(x,y)\mapsto (x(\theta),x'(\theta))$$

wie in (14) beschreibt nun gerade eine Rotation des Punktes (x,y). Wir können daher in (17) $F'(x(\theta))\cdot x'(\theta)$ durch $F'(x)\cdot y$ ersetzen und das Maß, sprich das Integral ändert sich nicht! Wir formen (17) um und integrieren anschließend gemäß dem Satz von Fubini über θ:

$$\begin{aligned}\iint \Phi_\tau[F(x)-F(y)]\,d\gamma_n(x)d\gamma_n(y) &\leq \iint \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_\tau\left[\frac{\pi}{2}F'(x)\cdot y\right]\,d\theta d\gamma_n(x)d\gamma_n(y)\\ &= \frac{\pi}{2}\iint \frac{2}{\pi}\Phi_\tau\left[\frac{\pi}{2}F'(x)\cdot y\right]\,d\gamma_n(x)d\gamma_n(y) \qquad (18)\\ &= \iint \Phi_\tau\left[\frac{\pi}{2}F'(x)\cdot y\right]\,d\gamma_n(x)d\gamma_n(y).\end{aligned}$$

Wir benötigen noch einmal die Ungleichung von Jensen, um die linke Seite von (17) nach unten abzuschätzen:

$$\begin{aligned}\int \Phi_\tau \left(F(x) - \int F(y)\, d\gamma_n(y) \right)\, d\gamma_n(x) &= \int \Phi_\tau \left(\int F(x) - F(y)\, d\gamma_n(y) \right)\, d\gamma_n(x) \\ &\le \iint \Phi_\tau \left(F(x) - F(y) \right)\, d\gamma_n(y)\, d\gamma_n(x).\end{aligned} \tag{19}$$

Wir wenden die Proposition 2.5 auf (18) an und erhalten:

$$\iint \Phi_\tau \left[\frac{\pi}{2} F'(x) \cdot y \right]\, d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) = \int \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau^2 \|F'(x)\|_2^2 \right) d\gamma_n(x).$$

Mit (12) können wir weiter vereinfachen:

$$\int \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau^2 \|F'(x)\|_2^2 \right) d\gamma_n(x) \le \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau^2 \|T\|^2 \right). \tag{20}$$

Damit ist der größte Teil des Beweises geschafft. Wir fassen die gefundene Abschätzung (19), (20) noch einmal zusammen:

$$\int \Phi_\tau \left(F(x) - \int F(y)\, d\gamma_n(y) \right)\, d\gamma_n(x) \le \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau^2 \|T\|^2 \right). \tag{21}$$

Wir wenden nun die Markov-Ungleichung 2.11 auf (13) an und schätzen mit (21) ab. Dabei wählen wir $\Phi(t) = \exp(\tau t)$ und

$$f(x) = F(x) - \int F(y)\, d\gamma_n(y).$$

Wir betrachten als erstes nur diejenigen x mit $f(x) \ge 0$, sodass der Betrag in (13) entfallen kann. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\gamma_n \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| F(x) - \int F(y) d\gamma_n(y) > t \right\} &\le \frac{\int \Phi_\tau \left(F(x) - \int F(y)\, d\gamma_n(y) \right)\, d\gamma_n(x)}{\Phi_\tau(t)} \\ &\le \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau^2 \|T\|^2 - \tau t \right).\end{aligned}$$

Analog ergibt sich für alle x mit $f(x) \le 0$ für $-f$:

$$\gamma_n \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| -\left(F(x) - \int F(y) d\gamma_n(y) \right) > t \right\} \le \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau^2 \|T\|^2 - \tau t \right)$$

und damit insgesamt für den Betrag:

$$\gamma_n \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \left| F(x) - \int F(y) d\gamma_n(y) \right| > t \right\} \leq 2 \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \tau^2 \|T\|^2 - \tau t \right).$$

Wir setzten nun noch $\tau = \left(\frac{\pi}{2} \|T\| \right)^{-2} t$ und erhalten die abschließende Abschätzung:

$$\gamma_n \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \left| F(x) - \int F(x) d\gamma_n \right| > t \right\} \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{\pi^2 \|T\|^2} \right),$$

die gültig ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da mit (9) zudem $\|T\| = \sigma(X)$ ist dies, wie oben ausgeführt äquivalent zur Ungleichung (8). Damit ist das Concentration of Measure Theorem bewiesen. □

3.3 Die Ungleichung von Levy

Die Ungleichung von Levy gibt es in vielen verschiedenen Versionen. Wir beschränken auf die folgende. Der Beweis ist adaptiert von [14].

Satz 3.4 (Ungleichung von Levy)**.** *Seien $(X_i), 1 \leq i \leq n$ symmetrische, unabhängige Zufallsvektoren in einem Banachraum E und sei $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt für jedes $t > 0$:*

$$2\mathbb{P}\{\|S\| > t\} \geq \mathbb{P}\{\max_{i \leq n} \|X_i\| > t\}.$$

Beweis. Sei $A \subset \Omega$ die Menge, für die $\max_{i \leq n} \|X_i\| > t$ gilt und $B \subset \Omega$ diejenige, für die $\|\sum_{i=1}^n X_i\| > t$ zutrifft. Wir partitionieren die Menge A wie folgt:

$$\begin{aligned}
&A_1 \colon \omega \in A && \|X_1\| > t \\
&A_2 \colon \omega \in A && \|X_1\| \leq t,\ \|X_2\| > t \\
&\vdots \\
&A_m \colon \omega \in A && \|X_1\| \leq t,\ \|X_2\| \leq t, \ldots, \|X_m\| > t \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ist nun $\omega \in A_m$, so liegt mindestens einer der beiden Vektoren

$$Y = X_m(\omega) + \sum_{i=1, i \neq m}^{n} X_i(\omega)$$

$$Y' = X_m(\omega) - \sum_{i=1, i \neq m}^{n} X_i(\omega)$$

außerhalb der abgeschlossenen Kugel mit dem Radius t, da ansonsten:

$$\begin{aligned}2t < 2\|X_m(\omega)\| &= \|X_m(\omega) + X_m(\omega)\| \\ &= \|X_m(\omega) + \sum_{i=1, i\neq m}^{n} X_i(\omega) - \sum_{i=1, i\neq m}^{n} X_i(\omega) + X_m(\omega)\| \\ &\leq \|Y(\omega)\| + \|Y'(\omega)\| \leq 2t\end{aligned}$$

einen Widerspruch ergäbe. Da die X_i symmetrisch sind, haben nun sowohl $Y(\omega)$ als auch $Y'(\omega)$ die gleiche Wahrscheinlichkeit, außerhalb der abgeschlossenen Kugel zu liegen. Oder formal ausgedrückt: ist $A_m^1 \subset A_m$ diejenige Teilmenge, sodass $\|Y\| > t$ für $\omega \in A_m^1$ und A_m^2 die zugehörige Teilmenge für $\|Y'\| > t$, dann ist:

$$\mathbb{P}(B \cap A_m) = \mathbb{P}(A_m^1) = \mathbb{P}(A_m^2).$$

Da zudem aber $A_m = A_m^1 \cup A_m^2$, folgt mit der Subadditivität des Maßes:

$$\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(A_m^1 \cup A_m^2) \leq \mathbb{P}(A_m^1) + \mathbb{P}(A_m^2) = 2\mathbb{P}(B \cap A_m).$$

Da nun alle A_m disjunkt sind und $\bigcup_1^n A_m = A$ ist, ergibt sich mit der Additivität des Maßes

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_1^n A_m\right) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(A_m) &\leq \sum_{m=1}^{n} 2\mathbb{P}(A_m \cap B) \\ &= 2\mathbb{P}\left(\bigcup_1^n A_m \cap B\right) \\ &= 2\mathbb{P}(A \cap B) \leq 2\mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

die Behauptung. □

3.4 Das Lemma von Dvoretzky-Rogers

Ziel dieses Kapitels ist es, folgenden Satz zu beweisen, der uns im Beweis eine wichtige Abschätzung ermöglichen wird.

Satz 3.5 (Das Lemma von Dvoretzky-Rogers)**.** *Sei E ein N-dimensionaler normierter Raum und $\overline{N} = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Dann gibt es Elemente $(e_i), 1 \leq i \leq \overline{N}$ in E, sodass* *alle* $\|e_i\| \geq \frac{1}{2}$ *sind und für alle* $a_i \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{\overline{N}} a_i e_i \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\overline{N}} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Vor dem eigentlichen Beweis stellen wir folgendes Lemma aus Gründen der Übersichtlichkeit voran:

Lemma 3.6. *Sei* $T\colon H \mapsto X$ *ein linearer Operator zwischem einem* n*-dimensionalen Hilbertraum* $(H, |\cdot|)$ *und einem Banachraum* $(X, \|\cdot\|_X)$*. Dann existiert eine Folge orthonormaler Vektoren* $(f_i)_1^n \in H$*, sodass*

$$\|Tf_n\|_X \geq \inf\{\|T - S\| \mid S\colon H \mapsto X, \operatorname{Rang}(S) < n\} := \chi_n(T).$$

Beweis. Die Folge der f_n wird rekursiv konstruiert. Wir stellen zunächst fest, dass

$$\chi_1(T) = \|T\| = \sup_{|v|=1} \|Tv\|_X$$

gilt. Da H endlichdimensional und damit die Einheitskugel kompakt ist, existiert das Maximum für ein $f_1 \in H$ mit $|f_1| = 1$, das heißt also:

$$\sup_{|v|=1} \|Tv\|_X = \max_{|v|=1} \|Tv\|_X = \|Tf_1\|_X.$$

Sei nun $S_1 = [f_1]^\perp$ das orthogonale Komplement zu $\operatorname{span}\{f_1\}$. Mit der Abbildung $S\colon H \to X$:

$$Sv = \begin{cases} Tv & v \in \operatorname{span} f_1 \\ 0 & v \in S_1 \end{cases}$$

lässt sich die Einschränkung von T auf den Unterraum S_1 schreiben als:

$$T_{|S_1} = T - S.$$

Da S offensichtlich maximal den Rang 1 hat, gilt:

$$\|T_{|S_1}\| = \|T - S\| \geq \chi_2(T).$$

Mit der analogen Argumentation zur Kompaktheit existiert damit ein $f_2 \in S_1$ mit $|f_2| = 1$ und

$$\|T\| = \|Tf_1\|_X \geq \|Tf_2\|_X = \|T_{|S_1} f_2\|_X = \|T_{|S_1}\| \geq \chi_2(T).$$

Wir nehmen damit f_2 als weiteren Vektor hinzu und fahren fort bis wir n Vektoren generiert haben. $\square$

Beweis von Satz 3.5. Wir bezeichnen mit α die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\ell_N^2, E)$. Dann existiert nach dem Satz von Lewis (siehe Satz 2.15) ein Isomorphismus T mit

$$\alpha(T) = \|T\| = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha^*(T^{-1}) = N.$$

Gemäß dem vorangestellten Lemma können wir eine orthonormale Folge von Vektoren $(f_i)_1^N$ in ℓ_N^2 finden, sodass

$$\|Tf_k\| \geq \chi_k(T)$$

für alle $k \leq N$ ist. Wir zeigen nun, dass $\chi_k(T) \geq 1 - \frac{k}{N}$ für alle $k \leq N$ zutrifft.

Dazu sei P eine orthogonale Projektion auf ℓ_N^2 mit $\operatorname{Rang} P < k$. Dann ist auch $I_N - P$ eine orthogonale Projektion. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass diese ähnlich zu einer Diagonalmatrix D mit den Eigenwerten 1 und 0 ist, wobei die Vielfachheit des Eigenwerts 0 der Dimension des Kerns von $I_N - P$ entspricht. Da für die Diagonalmatrix D offenbar $\operatorname{Rang}(D) = \operatorname{Spur}(D)$ gilt und ähnliche Matrizen gleichen Rang und gleiche Spur haben, ist auch $\operatorname{Rang}(I_N - P) = \operatorname{Spur}(I - P)$. Wir können daher abschätzen:

$$\begin{aligned} N - k < \operatorname{Rang}(I_N - P) &= \operatorname{Spur}(I_N - P) \\ &= \operatorname{Spur}(T^{-1}T(I_N - P)) \\ &\leq \alpha^*(T^{-1})\|T(I_N - P)\| \\ &= N\|T - TP\|. \end{aligned}$$

Damit haben wir:

$$\|T - TP\| > 1 - \frac{k}{N}$$

und nach der Definition von χ_k insgesamt:

$$\|Tf_k\| \geq \chi_k(T) \geq 1 - \frac{k}{N}.$$

Wir wählen die Elemente e_i durch $Tf_i = e_i$ und für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}^N$ mit $a = \sum_{i=}^N a_i f_i$ gilt

$$Ta = T\left(\sum_{i=}^N a_i f_i\right) = \sum_{i=1}^N a_i e_i.$$

Da zusätzlich $\|Ta\| \leq \|T\|\|a\|_2 = \|a\|_2$ folgt die Abschätzung:

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i e_i\right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $a \in \mathbb{R}^N$ und damit insbesondere die Ungleichung (22). Für $k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ sind dann auch alle $\|e_i\| \geq \frac{1}{2}$ für $i \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ und das Lemma bewiesen. □

3.5 Zwei geometrische Lemmata

Die beiden folgenden Lemmata benötigen wir, um uns in unseren Abschätzungen im Beweis auf eine endliche Menge an Punkten zurückziehen zu dürfen. Diese Punkte werden dabei auf der Sphäre der Einheitskugel liegen. Dem ersten Lemma muss noch die Definition eines δ-Netzes vorangestellt werden.

Definition 3.7. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge auf dem Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Sei weiter $\delta > 0$. Dann heißt eine Menge $A \subset X$ ein δ-Netz von X, wenn für alle $x \in X$ ein $a \in A$ existiert, sodass $\|x - a\| < \delta$ ist.*

Das erste Lemma erlaubt uns die Mächtigkeit eines δ-Netzes der Einheitssphäre abzuschätzen. Wir erinnern vorher noch an einen aus der Integrationstheorie bekannten Satz über das Volumen von n-dimensionalen Kugeln mit dem Radius r. Für eine nur von der Dimension abhängige Konstante β_n und das Lebesguemaß λ^n gilt:

$$\lambda^n (B_r) = \beta_n r^n = \lambda^n(B_1) \cdot r^n.$$

Lemma 3.8. *Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und bezeichne S die Einheitssphäre. Sei $\delta > 0$. Dann existiert ein δ-Netz $A \subset S$ mit der Mächtigkeit*

$$|A| \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^n.$$

Beweis. Wir wählen $A = (y_i)_1^m$ als eine maximale Teilmenge von S, sodass

$$\|y_i - y_j\| \geq \delta \qquad \text{für alle} \quad i \neq j$$

gilt. Maximal bedeutet hier, dass es bei Hinzufügen eines weiteren Elementes $p \in S \backslash A$, automatisch $\|p - y_i\| < \delta$ für ein $i \in \mathbb{N}_m$ folgt. Damit ist einleuchtend, dass A ein δ-Netz in S ist. Wir betrachten nun die (offenen) Kugeln $B_{\frac{\delta}{2}}(y_i)$ mit dem Radius $\frac{\delta}{2}$ um y_i. Diese sind nach Konstruktion paarweise disjunkt, aber in der Kugel

$B_{1+\frac{\delta}{2}}(0)$ enthalten. Dann folgt für das Volumen:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^n \left(B_{\frac{\delta}{2}}(y_i)\right) \leq \lambda^n \left(B_{1+\frac{\delta}{2}}(0)\right) = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^n \lambda^n \left(B_1(0)\right)$$

und so schließlich:

$$m\left(\frac{\delta}{2}\right)^n \lambda^n \left(B_1(0)\right) \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^n \lambda^n \left(B_1(0)\right).$$

Nach Division erhalten wir die gewünschte Abschätzung:

$$|A| = m \leq \left(1+\frac{2}{\delta}\right)^n.$$

□

Das folgende Lemma ist fundamental wichtig für den Beweis. In Kapitel 3.1 haben wir in (7) eine alternative Formulierung des Banach-Mazur-Abstandes gegeben, der für unsere Zwecke besser handhabbar ist. Hier besteht allerdings der Nachteil, dass die Abschätzung für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gelten muss. Das folgende Lemma gestattet uns, lediglich ein geeignetes δ-Netz zu betrachten:

Lemma 3.9. *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ mit $0 < \delta < 1$ und folgender Eigenschaft: sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und S die Einheitssphäre. Sei weiterhin A ein δ-Netz in S und seien $(x_1, \ldots, x_n)$ beliebige Elemente aus einem Banachraum $(F, \|\cdot\|_F)$. Wenn für jedes $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ gilt:*

$$1-\delta \leq \left\|\sum_{1}^{n} a_i x_i\right\|_F \leq 1+\delta, \tag{23}$$

dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\sqrt{(1+\varepsilon)}\right)^{-1} \|a\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|_F \leq \sqrt{(1+\varepsilon)}\|a\|.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst $\|a\| = 1$ an. Dann können wir ein y^0 aus A wählen, sodass $\|a - y^0\| \leq \delta$. Damit können wir a auch schreiben als:

$$a = y^0 + \lambda_1 a'$$

mit $|\lambda_1| \leq \delta$ und $a' = \frac{a-y^0}{\lambda_1} \in S$. Nun lässt sich mit gleichem Argument a' wiederum schreiben als:

$$a' = y^1 + \lambda_2 a'' \quad a'' \in S, |\lambda_2| \leq \delta.$$

Dies setzen wir induktiv fort und erhalten:

$$a = y^0 + \lambda_1(y^1 + \lambda_2(y^2 + \lambda_3(\ldots)))$$

mit $y^j \in A$ und $|\lambda_j| \leq \delta$. Wir multiplizieren aus und nennen die entstehenden Skalare wieder λ_j:

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j y^j.$$

Hier ist $\lambda_0 = 1$. Dann gilt wegen$|\lambda_j| \leq \delta^j$:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j y_i^j x_i \right\|_F &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} y_i^j x_i \right) \right\|_F \qquad (24) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i^j x_i \right\|_F \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i^j x_i \right\|_F \\
&\leq \frac{1+\delta}{1-\delta}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Für die Abschätzung (25) haben wir zum einen die geometrische Reihe als auch die Voraussetzung (23) genutzt. Dabei beachte man, dass $y^j \in A$ nach Konstruktion. Wir benötigen noch die Abschätzung nach unten. Wir beginnen an der Gleichung (24):

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_F = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} y_i^j x_i \right) \right\|_F &= \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i^0 x_i + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} y_i^j x_i \right) \right\|_F \\
&\geq \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i^0 x_i \right\|_F - \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} y_i^j x_i \right) \right\|_F \\
&\geq \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i^0 x_i \right\|_F - \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^j x_i \right) \right\|_F.
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun wieder Voraussetzung (23) und anschließend die geometrische

Reihe:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_F \geq 1 - \delta - \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j (1+\delta) = 1 - \delta - \frac{\delta}{1-\delta}(1+\delta) = \frac{1-3\delta}{1-\delta}.$$

Für ein gegebenes ε wählen wir nun δ so klein, dass

$$\frac{1-3\delta}{1-\delta} \geq \sqrt{(1+\varepsilon)}^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{1+\delta}{1-\delta} \leq \sqrt{(1+\varepsilon)} \tag{26}$$

ist. Damit gilt dann Lemma (3.9) für alle $a \in S$. Betrachtet man nun beliebiges a so folgt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_F = \|a\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|a\|} a_i x_i \right\|_F .$$

Da $\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|a\|} a_i \right\| = 1$ ist, folgt die Gültigkeit für alle $a \in \mathbb{R}^n$. □

Für den nun folgenden Beweis sei noch einmal herausgehoben, dass wir δ nur in Abhängigkeit von ε wählen. Die Dimension n spielt keine Rolle.

3.6 Der Beweis

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieser Arbeit, dem Beweis von Satz 3.1. Dabei gehen wir in zwei Schritten vor. Im ersten werden wir die Richtigkeit des Satzes zeigen, allerdings nur für alle $n \leq \eta'(\varepsilon) d(X)$, wobei $\eta'(\varepsilon)$ eine Konstante ist, die nur von ε abhängt. Hierfür benötigen wir das Concentration of Measure Theorem, die beiden vorangehenden geometrischen Lemmata und Proposition 2.10. Der Nachteil dieser Abschätzung liegt auf der Hand: wir haben keine gute Kenntnis über die Größe von $d(X)$. Diese ist sogar vom konkreten Banachraum E abhängig. Wir wissen a priori nicht einmal, ob n überhaupt größer als Null, dem trivialen Fall, ist. Daher werden wir im zweiten Schritt n gegen $\ln N$ mit N als der Dimension des Banachraums E abschätzen. Hierfür benötigen wir das Lemma von Dvoretzky-Rogers, die Ungleichung von Levy und Proposition 2.1.

Beweis des Satzes von Dvoretzky. Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige Kopien des Gauß'schen Zufallsvektors $X = \sum_{k=1}^{N} g_k e_k$ mit Werten im N-dimensionalen Banachraum E. Die Größe von n schätzen wir später ab. Sei außerdem $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = 1$ ein Element aus der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$. Dann sind mit Proposition 2.10 $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ und X identisch verteilt. Dies impliziert:

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right\| = \mathbb{E}\|X\|.$$

Wir wenden das Concentration of Measure Theorem (Satz 3.3) an und erhalten für alle $\delta > 0$:

$$\mathbb{P}\left\{\left|\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right\| - \mathbb{E}\|X\|\right| > \delta\mathbb{E}\|X\|\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{2\delta^2(\mathbb{E}\|X\|)^2}{\pi^2\sigma(X)^2}\right).$$

Wir formen unter Beachtung der Definition von $d(X)$ um:

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{\mathbb{E}\|X\|}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right\| - 1\right| > \delta\right\} \leq 2\exp\left(-\frac{2\delta^2 d(X)}{\pi^2}\right). \tag{27}$$

Nun wählen wir ein δ-Netz A wie in Lemma 3.8. Dieses enthält höchstens $\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^n$ Elemente. Wir können daher für jedes Element $a \in A$ die Abschätzung (27) vornehmen und alle Wahrscheinlichkeiten aufaddieren. Dann erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\exists a \in A \left|\frac{1}{\mathbb{E}\|X\|}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right\| - 1\right| > \delta\right\} &\leq 2|A|\exp\left(-\frac{2\delta^2 d(X)}{\pi^2}\right) \\
&\leq 2\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^n \exp\left(-\frac{2\delta^2 d(X)}{\pi^2}\right) \\
&\leq 2\exp\left(\frac{2n}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{2\delta^2 d(X)}{\pi^2}\right) \\
&= 2\exp\left(\frac{2n}{\delta} - \frac{2\delta^2 d(X)}{\pi^2}\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

Die Abschätzung in der vorletzten Zeile folgt, da $\ln(1+x) - x \leq 0$ für alle $x > 0$. An diesem Punkt nehmen wir die konkrete Wahl unseres δ in Abhängigkeit von dem im Satz vorgegebenen ε vor: wir wählen $\delta(\varepsilon)$ wie in Lemma 3.9 vorgegeben. Betrachten wir nun die Wahrscheinlichkeit in (28). Ist

$$n \leq \frac{1}{4}\frac{2\delta(\varepsilon)^3 d(X)}{\pi^2} := \eta'(\varepsilon)d(X),$$

dann folgt unmittelbar:

$$2\exp\left(\frac{2n}{\delta(\varepsilon)} - \frac{2\delta(\varepsilon)^2 d(X)}{\pi^2}\right) \leq 2\exp(-1) < 1.$$

Damit gilt dann für das Komplementärereignis in (28):

$$\mathbb{P}\left\{\forall a \in A \left|\frac{1}{\mathbb{E}\|X\|}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right\| - 1\right| \leq \delta(\varepsilon)\right\} > 0.$$

Das bedeutet, es gibt im Wahrscheinlichkeitsraum Ω mindestens ein Ereignis $\omega \in \Omega$, sodass für die konkrete Realisation $X_i(\omega) = x_i$ und alle $a \in A$ gilt:

$$1 - \delta(\varepsilon) \leq \frac{1}{\mathbb{E}\|X\|} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq 1 + \delta(\varepsilon)$$

Wir ziehen gemäß der Homogenität der Norm die Konstante $\frac{1}{\mathbb{E}\|X\|}$ in die Norm. Die neuen Vektoren (nach skalarer Multiplikation) bezeichnen wir wieder mit x_i. Mit Lemma 3.9 können wir dann schlussfolgern, dass für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\left(\sqrt{(1+\varepsilon)}\right)^{-1} \|a\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \sqrt{(1+\varepsilon)} \|a\|_2.$$

Wir wählen nun die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ als Basis des Unterraums F und mit der Bemerkung (7) nach dem Lemma 3.2 haben wir gezeigt, dass für diesen n-dimensionalen Unterraum F gilt:

$$\Delta(F, \ell_n^2) \leq 1 + \varepsilon \qquad \text{mit} \qquad n = \lfloor \eta'(\varepsilon) d(X) \rfloor .$$

Damit haben wir den ersten Schritt geschafft. Um nun die gewünschte Abschätzung $n = \lfloor \eta(\varepsilon) \ln N \rfloor$ zu erreichen, müssen wir unseren initial völlig beliebig gewählten Zufallsvektor $X = \sum_{k=1}^{N} g_k e_k$ so wählen, dass

$$d(X) \geq C \ln N \tag{29}$$

für eine Konstante $C > 0$ ist. Dann ist der Beweis vollständig.

Unseren Zufallsvektor X manipulieren wir, indem wir die e_k nicht beliebig, sondern wie im Lemma von Dvoretzky-Rogers (Satz 3.5) auswählen. Dann haben wir für alle $a \in \mathbb{R}^{\overline{N}}$ und $k \leq \overline{N} = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$:

$$X = \sum_{k=1}^{\overline{N}} g_k e_k, \qquad \|e_k\| \geq \frac{1}{2}, \qquad \left\| \sum_{k=1}^{\overline{N}} a_k e_k \right\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\overline{N}} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Wir erinnern uns an die Abschätzung in (9), in welcher wir $\sigma(X) = \|T\|$ für den Operator $T\colon \ell_n^2 \mapsto E$ mit:

$$\forall a \in \mathbb{R}^n \qquad T(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

nachgewiesen haben. Dies wenden wir auf den $\overline{N}$-dimensionalen Unterraum von E an. Wir erhalten so für alle $a \in \mathbb{R}^{\overline{N}}$ mit (30):

$$\sigma(X) = \|T\| = \sup_{\|a\|_2=1} \left\| \sum_{i=k}^{\overline{N}} a_k e_k \right\| \leq \sup_{\|a\|_2=1} \left(\sum_{k=1}^{\overline{N}} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Nun untersuchen wir den Erwartungswert von $\|X\|$. Mit der Ungleichung von Levy (Satz 3.4) haben wir angewendet auf $X = \sum_{i=1}^{\overline{N}} g_k e_k$:

$$\mathbb{P}\{\|X\| > t\} \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}\{\max_{k \leq \overline{N}} \|g_k e_k\| > t\}.$$

Wir wenden das Layer-Cake-Theorem an und erhalten unter Beachtung der Monotonie des Integrals:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|X\| = \int_\Omega \|X\| \, d\mathbb{P} &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{\|X\| > t\} \, dt \geq \int_0^\infty \frac{1}{2}\mathbb{P}\{\max_{k \leq \overline{N}} \|g_k e_k\| > t\} \, dt \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2} \max_{k \leq \overline{N}} \|g_k e_k\| \, d\mathbb{P} = \frac{1}{2}\mathbb{E} \max_{k \leq \overline{N}} \|g_k e_k\| \\
&= \frac{1}{2} \max_{k \leq \overline{N}} \|e_k\| \cdot \mathbb{E} \max_{k \leq \overline{N}} |g_k|.
\end{aligned}$$

Dieses Resultat können wir mit Proposition 2.1 gegen $\overline{N}$ abschätzen. Außerdem stört noch, dass eine Abhängigkeit von den Vektoren e_k und der Norm des Raums E besteht. Da wir aber nach unten abschätzen wollen, nutzen wir, dass die Vektoren e_k mit (30) jeweils mindestens die Norm von $\frac{1}{2}$ haben. Es gilt also mit einer positiven Konstanten $\widehat{c}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|X\| \geq \frac{1}{2} \max_{k \leq \overline{N}} \|e_k\| \cdot \mathbb{E} \max_{k \leq \overline{N}} |g_k| &\geq \frac{1}{2} \min_{k \leq \overline{N}} \|e_k\| \mathbb{E} \max_{k \leq \overline{N}} |g_k| \\
&\geq \frac{1}{4} \widehat{c} \sqrt{\ln \overline{N}} \\
&\geq \frac{1}{4} \widehat{c} \sqrt{\ln N}.
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir für $d(X)$ in der Zusammenfassung:

$$d(X) = \left(\frac{\mathbb{E}\|X\|}{\sigma(X)} \right)^2 \geq (\mathbb{E}\|X\|)^2 \geq \left(\frac{1}{4} \widehat{c} \sqrt{\ln N} \right)^2 = C \ln N$$

für eine positive Konstante C. Damit haben wir (29) gezeigt und somit die Existenz eines Unterraums $F \subset E$ mit der Dimension

$$n = \lfloor \eta(\varepsilon) \ln N \rfloor \qquad \text{und der Eigenschaft} \qquad \Delta(F, \ell_n^2) \leq 1 + \varepsilon$$

bewiesen. □

3.7 Güte der Abschätzung

Es stellt sich die Frage, ob unser Zugang im Beweis des Satzes von Dvoretzky optimal war, in dem Sinne, dass im Allgemeinen keine Abschätzung existiert, sodass

$$n = \lfloor \eta(\varepsilon) f(N) \rfloor$$

mit einer Funktion f, die schneller wächst als der Logarithmus. Oder formal ausgedrückt: können wir die Abschätzung gegen $\ln N$ durch eine Funktion f ersetzen, für die:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\ln N}{f(N)} = 0$$

gilt? Wir werden zeigen, dass dies nicht der Fall ist. Den (uninteressanten) Fall $N \leq 2$ schließen wir im Folgenden aus. Wir bezeichnen dazu mit $n_\varepsilon(E)$ das größtmögliche n, sodass ein Unterraum $F \subset E$ existiert, für den $\Delta(F, \ell_n^2) \leq 1 + \varepsilon$ gilt. Zudem sei $\sup d(X)$ das Supremum über alle Gauß'schen Zufallsvektoren mit Werten in E. Im ersten Schritt von Beweis Satz 3.1 hatten wir gezeigt, dass

$$n_\varepsilon(E) \geq \lfloor \eta'(\varepsilon) \sup d(X) \rfloor \tag{31}$$

gilt. Im folgenden Satz zeigen wir ein umgekehrtes Resultat.

Proposition 3.10. *Es sei E ein N-dimensionaler Banachraum und $\varepsilon > 0$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\sup d(X) \frac{\pi}{2} (1 + \varepsilon)^2 \geq n_\varepsilon(E).$$

Dieser Satz bedeutet also, dass die Abschätzung von $n_\varepsilon(E)$ gegen die Dimension $d(X)$ nicht wesentlich verbessert werden kann.

Beweis. Sei $F \subset E$ ein Unterraum mit $\Delta(F, \ell_n^2) \leq 1 + \varepsilon$. Dann existiert also ein Operator $T \colon \ell_n^2 \mapsto F$ mit

$$\|T\| \|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Wir wählen den Gauß'schen Zufallsvektor X als:

$$X = \sum_{i=1}^{n} g_i T(e_i),$$

wobei e_i die kanonischen Basisvektoren von ℓ_n^2 bezeichne. Wir erhalten neben dem bekannten Zusammenhang $\sigma(X) = \|T\|$ für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\|T^{-1}\|\mathbb{E}\|X\| \geq \mathbb{E}\|T^{-1}X\|_2 &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}|g_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}|g_i|\right) = (n(\mathbb{E}|g_1|)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}|g_i|)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}n}.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt das für $d(X)$:

$$d(X) \geq \frac{2n}{\pi}\left(\|T\|\|T^{-1}\|\right)^{-2} \geq n\frac{2}{\pi}(1+\varepsilon)^{-2}.$$

Damit ist (31) gezeigt. □

Im zweiten Schritt werden wir einen N-dimensionalen Banachraum E so wählen, dass in diesem $\sup d(X) \leq c \ln N$ für eine Konstante $c > 0$ gilt.

Proposition 3.11. *Im Banachraum $E = \ell_N^\infty$ gilt für eine Konstante $c > 0$ die Abschätzung*

$$\sup d(X) \leq c \ln N,$$

wobei unter $\sup d(X)$ wieder das Supremum über alle Gauß'schen Zufallsvektoren mit Werten in E zu verstehen ist.

Beweis. Sei als Banachraum $E = \ell_N^\infty$ gewählt. Es sei weiter $X = \sum_{i=1}^{N} g_i x_i$ ein beliebiger Gauß'scher Zufallsvektor in ℓ_N^∞ mit einer beliebigen Basis $(x_i)_1^N$. Dann können wir X auch als Linearkombination der kanonischen Basis $(e_i)_1^N$ schreiben. Somit erhalten wir die Darstellung von X als:

$$X = \sum_{i=1}^{N} g_i(b_i e_i)$$

mit $b_i \in \mathbb{R}$. Weiter sei wie im Beweis des Satzes von Dvoretzky der Operator T

definiert durch

$$\forall a \in \mathbb{R}^N \qquad T(a) = \sum_{i=1}^{N} a_i(b_i e_i).$$

Wir schätzen die Größe von $d(X)$ ab. Für $\sigma(X)$ erhalten wir zunächst:

$$\sigma(X) = \|T\| = \sup_{\|a\|_2=1} \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i b_i e_i \right\|_\infty = \sup_{\|a\|_2=1} |a_i| \max_{1\leq i\leq N} |b_i| = \max_{1\leq i\leq N} |b_i|.$$

Wir benötigen nun eine Abschätzung für p-Normen mit $1 \leq p < \infty$. Wir führen folgende Notation ein:

$$\varpi(p) = \left(\mathbb{E}|g_1|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dann erhalten wir für $\|X\|_p$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|X\|_p = \mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{N} g_i(b_i e_i) \right\|_p &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} |b_i g_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}|b_i g_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (32) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{N} \max_{1\leq i\leq N} |b_i|^p \mathbb{E}|g_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \varpi(p) N^{\frac{1}{p}} \max_{1\leq i\leq N} |b_i|.
\end{aligned}$$

In (32) wurde die umgekehrte Jensen-Ungleichung auf die konkave Funktion $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ mit $x \in \mathbb{R}_+$ angewendet. Die vorherige Abschätzung impliziert dann insbesondere weiter:

$$\mathbb{E}\|X\|_\infty \leq \mathbb{E}\|X\|_p \leq \varpi(p) N^{\frac{1}{p}} \max_{1\leq i\leq N} |b_i| \leq K p^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{p}} \max_{1\leq i\leq N} |b_i|.$$

Dabei wurde Proposition 2.2 genutzt: $\varpi(p) \leq K p^{\frac{1}{2}}$ für eine Konstante K. Wählen wir nun $p = \ln N$, so erhalten wir:

$$\mathbb{E}\|X\|_\infty \leq c' \sqrt{\ln N} \max_{1\leq i\leq N} |b_i|$$

für ein $c' > 0$. An dieser Stelle ging auch die Bedingung $N > 2$ ein. Damit gilt zusammengefasst:

$$d(X) = \left(\frac{\mathbb{E}\|X\|_\infty}{\sigma(X)}\right)^2 \le \left(\frac{c'\sqrt{\ln N}\max_{1\le i\le N}|b_i|}{\max_{1\le i\le N}|b_i|}\right)^2 \le c\ln N$$

für eine Konstante $c > 0$. Da X beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

In der Zusammenfassung beider Propositionen können wir nun die obige Aussage zur Güte unserer Abschätzung beweisen:

Satz 3.12. *Die Abschätzung von $n = \lfloor \eta(\varepsilon)\ln N\rfloor$ gegen den natürlichen Logarithmus von N im Satz 3.1 kann nicht durch eine reelle Funktion $f(N)$ ersetzt werden, für die*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\ln N}{f(N)} = 0$$

gilt.

Beweis. Für den Banachraum $E = \ell_N^\infty$ gilt in der Zusammenfassung von Propositionen 3.10 und 3.11 und den gleichen Bezeichnungen:

$$n_\varepsilon(\ell_N^\infty) \le \sup d(X)\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)^2 \le \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)^2 c\ln N \le \widetilde{\eta}(\varepsilon)\ln N$$

mit einer nur von ε abhängigen Konstante $\widetilde{\eta}$. Somit kann für den Banachraum E in der Abschätzung von Satz 3.1 im Allgemeinen keine Funktion $f(N)$ gefunden werden, die schneller wächst als der Logarithmus. □

Dieser Beweis sagt natürlich nichts darüber aus, dass es Banachräume geben kann (und auch gibt), für die die Abschätzung gegen den Logarithmus verbessert werden kann. Nur für den allgemeinen Fall ist dies nicht möglich. Damit kann es auch keinen anderen Zugangsweg zum Beweis des Satzes von Dvoretzky geben, der diese Abschätzung in Abhängigkeit von der Dimension verbessert. Für eine Analyse der Abhängigkeit der Konstante $\eta(\varepsilon)$ von ε wird an dieser Stelle nur auf entsprechende Literatur verwiesen [15].

4 Ein Isomorphiekriterium für Hilberträume

An dieser Stelle soll an einem Beispiel dargestellt werden, welche Konsequenzen der Satz von Dvoretzky mit sich bringt. Dazu ist ein Beispiel gewählt, das sich mit Grundkenntnissen aus der Funktionalanalysis gut nachvollziehen lässt. Bereits in einer einführenden Vorlesung in diesem Gebiet wird man beweisen, dass es zu einem abgeschlossenen Unterraum A eines Hilbertraums H stets einen abgeschlossenen

Komplementärraum B gibt, das heißt also $A \cap B = \{0\}$ und $H = A + B$. Dies ergibt sich über die orthogonale Projektion. Mit Hilfe des Satzes von Dvoretzky können wir eine Umkehrung dieses Prinzips zeigen [16]:

Satz 4.1. *Sei X ein Banachraum, für den jeder abgeschlossene Unterraum einen abgeschlossenen Komplementärraum hat. Dann ist X isomorph zu einem Hilbertraum.*

Das bedeutet also, wir können einen solchen Banachraum X äquivalent normieren, sodass die neue Norm ein inneres Produkt ist! Diese Aussage wurde 1970 von Lindenstrauss und Tzafiri gezeigt. Wir benötigen neben dem Satz von Dvoretzky zwei weitere Propositionen, die wir nur zitieren :

Proposition 4.2. *[17] Sei X ein Banachraum, bei dem jeder abgeschlossene Unterraum einen abgeschlossenen Komplementärraum hat. Dann existiert ein $1 \leq v < \infty$, sodass jeder endlichdimensionale Unterraum B von X das Bild einer Projektion mit einer Norm kleiner als v ist.*

Proposition 4.3. *[18–20] Sei X ein Banachraum, für den eine Konstante $\beta < \infty$ existiert, sodass für jeden endlichdimensionale Unterraum B von X gilt:*

$$\Delta(B, \ell_n^2) \leq \beta \quad \textit{mit } n = \dim B.$$

Dann ist X isomorph zu einem Hilbertraum.

Beweis von Satz 4.1. Wir können X als unendlichdimensional unterstellen. Dann sei v die nach Proposition 4.2 existierende Konstante. Wir betrachten nun einen endlichdimensionalen Unterraum B von X und definieren α als

$$\alpha = \Delta(B, \ell_n^2) \tag{33}$$

mit $n = \dim B$. Wir werden zeigen, dass wir α nach oben durch die Konstante v abschätzen können. Diese ist unabhängig von dem Unterraum B, sodass die Voraussetzungen von Proposition 4.3 vorliegen. Damit ist der Beweis erbracht.

Sei Q eine Projektion von X auf B mit $\|Q\| \leq v$. Nun kommt bereits der Satz von Dvoretzky ins Spiel. Dieser garantiert uns nämlich die Existenz eines Unterraums C von $(I - Q)X$, sodass

$$\Delta(C, \ell_n^2) \leq 2 \tag{34}$$

gilt. Damit ist also

$$\Delta(B,C) \leq 2\alpha,$$

sodass wir einen linearen Operator $T\colon B \mapsto C$ finden können, für den

$$\frac{1}{2\alpha}\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|x\| \qquad \text{für alle } x \in B \tag{35}$$

zutrifft. Diese Aussage lässt sich einfach aus Umkehrung des Lemmas 3.2 schlussfolgern.
Die folgenden Ausführungen sind etwas technisch: Sei nun weiter P die Projektion der Norm kleiner υ von X auf den Unterraum

$$D := \{x + \mu Tx \mid x \in B\}$$

mit $\mu = 2^6\upsilon^2$. Definiert man weiter den Operator $V\colon B \mapsto B$ aus

$$PTx = Vx + \mu TVx \qquad \text{für alle } x \in B,$$

dann ist $Vx = QPTx$, was dann wiederum impliziert:

$$\|Vx\| \leq \upsilon^2\|Tx\|. \tag{36}$$

Da außerdem für $x \in B$

$$\begin{aligned} Px &= P(x+\mu Tx) - \mu PTx = x + \mu Tx - \mu(Vx + \mu TVx) \\ &= [x - \mu Vx] + \mu[Tx - \mu TVx] \end{aligned}$$

ist, gilt auch :

$$(I-Q)P = \mu[Tx - \mu TVx]. \tag{37}$$

Fasst man nun (35), (36) und (37) zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \|(I-Q)Px\| = \mu\|T(x-\mu Vx)\| &\geq \frac{\mu}{2\alpha}\|x - \mu Vx\| \\ &\geq \frac{\mu}{2\alpha}\left(\|x\| - \mu\|Vx\|\right) \\ &\geq \frac{\mu}{2\alpha}\left(\|x\| - \mu\upsilon^2\|Tx\|\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Wiederum mit (34), also letztlich dem Satz von Dvoretzky, folgt die Existenz eines

Operators $U\colon C \mapsto \ell_n^2$, sodass:

$$\frac{1}{2}\|y\| \leq \|Uy\| \leq \|y\| \qquad \text{für } y \in C. \tag{39}$$

Sei nun wiederum $\tilde{T}\colon B \mapsto \ell_n^2 \oplus \ell_n^2$ ein linearer Operator, der definiert wird durch

$$\tilde{T}x = \left(\frac{1}{2}UTx, \frac{1}{4\upsilon^2}U(I-Q)PX\right). \tag{40}$$

Dann schätzen wir die Norm ab:

$$\upsilon(\upsilon+1)\|x\| \leq \|x\|. \tag{41}$$

An diese Stelle ging unter anderem ein, dass $1 \leq \upsilon$ nach Proposition 4.2. Auf der anderen Seite gilt mit (38),(39) und (40):

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}x\| &\geq \max\left(\frac{1}{2}\|UTx\|, \frac{1}{4\upsilon^2}\|U(I-Q)PX\|\right) \\
&\geq \max\left(\frac{1}{4}\|Tx\|, \frac{1}{8\upsilon^2}\|(I-Q)PX\|\right) \\
&\geq \max\left(\frac{1}{4}\|Tx\|, \frac{\mu}{16\upsilon^2\alpha}(\|x\| - \mu\upsilon^2\|Tx\|)\right).
\end{aligned}$$

Wir benötigen nun noch eine Fallunterscheidung. Angenommen, es wäre

$$\upsilon^4 2^7\|Tx\| \geq \|x\|,$$

dann wäre auch:

$$\|\tilde{T}x\| \geq \frac{1}{4}\|Tx\| \geq \frac{\upsilon^4}{2^9}\|x\|.$$

Im anderen Fall, also $\upsilon^4 2^7\|Tx\| < \|x\|$, erhalten wir mit der Wahl von $\mu = 2^6\upsilon^2$:

$$\|\tilde{T}x\| \geq \frac{\mu}{16\upsilon^2\alpha}(\|x\| - \mu\upsilon^2\|Tx\|) \geq \frac{\mu}{2^5\upsilon^2\alpha}\|x\| = \frac{2}{\alpha}\|x\|.$$

Damit gilt in jedem Fall:

$$\|\tilde{T}x\| \geq \|x\| \min\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\upsilon^4}{2^9}\right) \qquad \text{für } x \in B. \tag{42}$$

Dies können wir somit (41), (42) zusammengefasst schreiben als:

$$\|x\| \min\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{\upsilon^4}{2^9}\right) \leq \|\tilde{T}x\| \leq \|x\|.$$

Dies bedeutet zum Einen, dass wir $\tilde{T}$ auch als einen Isomorphismus von B nach ℓ_n^2 betrachten können. Zum anderen muss dann $\alpha \leq v^4 2^9$ sein, da α nach Definition (siehe (33)) des Banach-Mazur-Abstandes minimal ist. Damit liegen also die Voraussetzungen von Proposition 4.3 vor und wir schlussfolgern, dass X isomorph zu einem Hilbertraum ist.

$\square$

5 Zusammenfassung und Ausblick

Hauptanliegen dieser Arbeit war es, einen Beweis des Satzes von Dvoretzky zu geben, der mit dem Wissen aus einem Bachelorstudium der Mathematik in jedem Detail nachvollzogen werden kann. Besonders interessant an dem vorliegend dargestellten Beweis ist die Verknüpfung zwei verschiedener Gebiete der Mathematik: eine Fragestellung aus der Theorie der Banachräume wurde wesentlich mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie beantwortet. Statt nämlich direkt zu versuchen, die Existenz eines geeigneten Unterraums nachzuweisen, der nahezu euklidisch ist, haben wir bewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass geschickt gewählte Gauß'sche Zufallsvektoren einen solchen bilden, immer echt größer als Null ist. Dies war dann äquivalent zu dem Existenzbeweis. Darüber hinaus konnte am Beispiel des ℓ_N^∞ gezeigt werden, dass unser Zugang zum Beweis des Satzes optimal war: die logarithmische Abschätzung der maximalen Dimension n eines solchen Unterraums $A \subset \ell_N^\infty$ ist scharf. Dies gilt aber nicht für alle Räume. So lässt sich für ℓ_N^1 beispielsweise die Abschätzung von $\ln N$ auf N verbessern, der Raum liegt sozusagen „näher“ am euklidischen Raum.

Die ganze Bedeutung des Satzes von Dvoretzky konnte in dieser Arbeit nicht herausgearbeitet werden. Exemplarisch wurde mit dessen Hilfe ein Isomorphiekriterium für Hilberträume bewiesen. Darüber hinaus kann mit Hilfe des Satzes von Dvoretzky beispielsweise auch gezeigt werden, dass zentrale konvexe symmetrische Polytope im n-dimensionalen Raum stets eine gewissen Zahl von Ecken und Facetten nicht unterschreiten können [21]. Andere Mathematiker gestehen dem Satz sogar philosophischen Charakter zu, nämlich warum wir in Physik und Technik mit Modellen erfolgreich sind, die zahlreiche Variablen, quasi Dimensionen, außer Acht lassen. Schließlich existiert in dem höherdimensionalen Raum stets ein Unterraum, der dem von uns betrachteten sehr nahe kommt [22]. Fernab solcher philosophischen Betrachtungen entfaltet der Satz sicher seine größte Wirkung in der lokalen Theorie der Banachräume, die sich mit Strukturen der endlichdimensionalen Unterräume von unendlichdimensionalen Banachräumen beschäftigt, wenn deren Dimension gegen unendlich geht. Schließlich lässt sich aus dem Satz schlussfolgern, dass jeder unendlichdimensionale Banachraum einen nahezu euklidischen Unterraum beliebiger Dimension besitzt. Eine Vertiefung der lokalen Banachraumtheorie und die Relevanz des Satzes von Dvoretzky in dieser, böte sicher noch zahlreiche Möglichkeiten für weitere Analysen und Arbeiten.

Notation

$\lVert\cdot\rVert_\infty$	Supremumsnorm
$\lVert\cdot\rVert_2$	Euklidische Norm
ℓ_n^2	n-dimensionaler reeller Raum mit der euklidischen Norm
ℓ_n^∞	n-dimensionaler reeller Raum mit der Supremumsnorm
$\ell^\infty(\mathbb{N})$	Raum der beschränkten reellen Folgen mit der Supremumsnorm
$\forall, \exists$	Quantoren: für alle bzw. es existiert ein
Δ	Banach-Mazur-Abstand
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{R}$	Relle Zahlen
$(\mathbb{R}, \mathcal{B})$	Borel-Messraum
$\mathbb{P}$	Wahrscheinlichkeitsmaß
γ, γ_n	(n)-dimensionales Gaußmaß
$N(a,b)$	Normalverteilung mit Erwartungswert a und Varianz b
$\mathbb{E}$	Erwartungswert
$\mathbb{1}$	Charakteristische Funktion
Γ	Gammafunktion
$\lfloor\cdot\rfloor$	Abrundungsfunktion
x^T	zu x transponierter Vektor
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Standardskalarpodukt
E^*, T^*, α^*	Dualraum bzw. dualer Operator bzw. duale Norm
$d(X)$	Dimension des Zufallsvektors X
$\sigma(X)$	zweites schwaches Moment des Zufallsvektors X
$\circ$	Verknüpfung zweier Abbildungen
$\mathcal{L}(F,E)$	Raum der linearen Abbildungen von F nach E
det	Determinante
dim	Vektorraumdimension
ln	natürlicher Logarithmus
span	lineare Hülle

Literatur

[1] Aryeh Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. *Proc. Symp. on Linear Spaces*, pages 123–160, 1961.

[2] Gilles Pisier. *Probabilistic Methods in the Geometry of Banach Spaces In: Letta G., Pratelli M. (eds) Probability and Analysis. Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1986.

[3] Gilles Pisier. *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] Ivan Matsak and Anatolij Plichko. Dvoretzky's theorem by Gaussian method. http://aplichko.orgfree.com/pdf/92.pdf. Eingesehen am 03.11.2018.

[5] Otto Moeschlin. *Wahrscheinlichkeitstheorie 1.* Fernuniversität Hagen, Hagen, 2003.

[6] Mikhail Anatolevich Lifshits. *Lectures on Gaussian processes.* Springer, 2012.

[7] Nikolaj Vachanija, Cobanjan Sergej, and Tarieladze Vaza. *Probability distributions on Banach spaces.* Reidel, 1987.

[8] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2013.

[9] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2011.

[10] Hans Rademacher. *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale*, volume 79. Mathematische Annalen, 1919.

[11] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2014.

[12] Ales Nekvinda and Ludek Zajicek. A simple proof of the Rademacher theorem. *Casopis pro pestování matematiky*, 113(4):337–341, 1988.

[13] Vitali Davidovich Milman. *A new proof of the theorem of A. Dvoretzky on sections of convex bodies*, volume 5. Func. Anal. Appl., 1971.

[14] Jean-Pierre Kahane. *Some Random Series of Functions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[15] Yehoram Gordon. Some inequalities for Gaussian processes and applications. *Israel Journal of Mathematics*, 50(4):265–289, Dec 1985.

[16] Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri. On the complemented subspaces problem. *Israel Journal of Mathematics*, 9(2):263–269, Mar 1971.

[17] William J. Davis, David W Dean, and Ivan Singer. Complemented subspaces and λ systems in Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 6(3):303–309, Jul 1968.

[18] Aryeh Dvoretzky. A characterization of Banach spaces isomorphic to inner product spaces. *Proc. Coll. Convexity*, pages 61–66, 1966.

[19] James Joichi. Normed linear spaces equivalent to inner product spaces. *Proc. Amer. Math. Soc*, 17:423–426, 1966.

[20] Joram Lindenstrauss. On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces. *Michigan Math. J.*, 10(3):241–252, 08 1963.

[21] Tadeusz Figiel, Joram Lindenstrauss, and Vitali Davidovich Milman. The dimension of almost spherical sections of convex bodies. *Acta Math.*, 139:53–94, 1977.

[22] Karen Villaverde, Olga Kosheleva, and Martine Ceberio. *Why Ellipsoid Constraints, Ellipsoid Clusters, and Riemannian Space-Time: Dvoretzky's Theorem Revisited*, pages 203–207. Springer International Publishing, Cham, 2014.

Erklärung

Name:	Marco Krull
Matrikel-Nr.:	8499101
Fach:	Mathematik
Modul:	Bachelorarbeit

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Thema

Der Satz von Dvoretzky

selbstständig und ohne unzulässige Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich habe dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und die aus diesen wörtlich, inhaltlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechend kenntlich gemacht. Die Versicherung selbstständiger Arbeit gilt auch für Zeichnungen, Skizzen oder graphische Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder derselben noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Mit der Abgabe der elektronischen Fassung der endgültigen Version der Arbeit nehme ich zur Kenntnis, dass diese mit Hilfe eines Plagiatserkennungsdienstes auf enthaltene Plagiate überprüft und ausschließlich für Prüfungszwecke gespeichert wird.

Datum: Unterschrift: