1 Lineare Optimierung - Aufgabenstellung und Modellbildung

Übersicht

In diesem Kapitel wollen wir zunächst allgemeine Optimierungsaufgaben und dann die generelle Aufgabenstellung der *Linearen Optimierung*, die auch *Lineare Programmierung* genannt wird, kennen lernen. Nachdem wir eine Beispielaufgabenstellung vorgestellt und als lineare Optimierungsaufgabe, die wir *Lineares Programm (LP)* nennen, modelliert haben, werden wir Techniken einführen, wie man verschiedene Typen von linearen Optimierungsaufgaben ineinander überführen kann.

Ein allgemeines Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \max & c(x) \\ \text{unter} & x \in S \end{array} \tag{1.1}$$

besteht für uns aus einem *zulässigen Bereich* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer *Zielfunktion*

$$c : S \to \mathbb{R}.$$

Ziel ist die Bestimmung des Infimums, des Supremums, des Minimums oder des Maximums von c auf der Menge S. Wir kürzen dies ab mittels

$$\inf_{x \in S} c(x), \quad \sup_{x \in S} c(x), \quad \max_{x \in S} c(x) \quad \text{oder} \quad \min_{x \in S} c(x).$$

In (1.1) haben wir als Beispiel den Fall eines Maximums gewählt.

Im Allgemeinen sind solche Probleme beliebig schwer. Ist etwa die Zielfunktion differenzierbar, so ist es schon schwierig, einen stationären Punkt, also einen Punkt, an dem der Gradient verschwindet, zu bestimmen. Eine Vorstellung von der Schwierigkeit gibt etwa das Resultat, das Yuri Matiyasevich 1970 erzielte, welches besagt, dass das Problem der Existenz einer ganzzahligen Nullstelle eines Polynoms $p(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ unentscheidbar ist (siehe etwa [7]).

Wir beschränken uns deswegen hier auf den Spezialfall der *Linearen Programmierung.*

1.1 Erste Beispiele

1.1.1 Ein Diätproblem

Eine der frühesten Aufgabenstellungen, die mittels linearer Optimierung untersucht wurden, war die Zusammenstellung eines möglichst kostengünstigen Speiseplans für die amerikanischen GIs im 2. Weltkrieg, der eine Versorgung mit den notwendigen Nährstoffen sicher stellen sollte. Die Originalaufgabenstellung umfasste neun Variablen und 77 Ungleichungen, was für unsere Zwecke ein wenig übertrieben ist. Wir befassen uns deswegen im folgenden Beispiel nur mit dem Gehalt an vier Vitaminen.

Beispiel 1.1
Wir ernähren uns ausschließlich von Fertiggerichten, wollen dabei aber darauf achten, dass wir unseren täglichen Bedarf an den Vitaminen A, B_1, B_2 und C im Wochenmittel decken. Da wir etwas geizig sind, soll dies möglichst kostengünstig geschehen. Wir können unter 8 Fertiggerichten wählen. Diese decken den Tagesbedarf an den jeweiligen Vitaminen – wie in der folgenden Tabelle (in Prozent) wiedergegeben – ab.

Fertiggericht	Preis	A	B_1	B_2	C
Rindsrouladen	4,19 €	60	10	15	20
Hühnerfrikassee	3,29 €	8	20	20	0
Schlemmerfilet	3,59 €	8	15	10	10
Kasseler	2,89 €	40	35	10	40
Käsespätzle	2,19 €	15	15	15	35
Frikadelle	2,59 €	70	15	15	30
Spaghetti Bolognese	2,59 €	25	25	15	50
Tiefkühlpizza	2,39 €	60	15	10	20

Gesucht ist nun der günstigste Menüplan für eine Woche, der den Wochenbedarf an den Vitaminen deckt, also insgesamt bei jedem Vitamin mindestens 7*100% erreicht.

Wir wählen Variablen $x_R, x_H, x_{Sch}, x_{Kas}, x_{Kae}, x_F, x_{Spa}$ und x_T für die Anzahl der Packungen des jeweiligen Fertiggerichts, die wir in einer Woche verzehren wollen. Die Kosten die dadurch in Euro entstehen sind also

$$4,19x_R+3,29x_H+3,59x_{Sch}+2,89x_{Kas}+2,19x_{Kae}+2,59x_F+2,59x_{Spa}+2,39x_T. \quad (1.2)$$

Aus dem Bedarf an Vitamin A erhalten wir die Bedingung

$$60x_R + 8x_H + 8x_{Sch} + 40x_{Kas} + 15x_{Kae} + 70x_F + 25x_{Spa} + 60x_T \geq 700, \tag{1.3}$$

und die Bedingungen an die Vitamine B_1, B_2 und C liefern die Nebenbedingungen

$$10x_R + 20x_H + 15x_{Sch} + 35x_{Kas} + 15x_{Kae} + 15x_F + 25x_{Spa} + 15x_T \geq 700, \tag{1.4}$$

$$15x_R + 20x_H + 10x_{Sch} + 10x_{Kas} + 15x_{Kae} + 15x_F + 15x_{Spa} + 10x_T \geq 700, \tag{1.5}$$

$$20x_R + 10x_{Sch} + 40x_{Kas} + 35x_{Kae} + 30x_F + 50x_{Spa} + 20x_T \geq 700. \tag{1.6}$$

Schließlich sollten die Variablen nicht-negativ sein.

$$x_R, x_H, x_{Sch}, x_{Kas}, x_{Kae}, x_F, x_{Spa}, x_T \geq 0. \tag{1.7}$$

Eigentlich müssten wir sogar fordern, dass die Variablen ganzzahlig sind, aber dies macht die Probleme im Normalfall deutlich schwieriger, so dass wir bis auf Weiteres darauf verzichten.

Wir definieren nun einen Kostenvektor c.

$$c = \begin{pmatrix} 4,19 \\ 3,29 \\ 3,59 \\ 2,89 \\ 2,19 \\ 2,59 \\ 2,59 \\ 2,39 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Die Nebenbedingungen stellen ein Ungleichungssystem dar. Wir wollen sie in eine Matrix und eine rechte Seite packen, wie wir es von Gleichungssystemen gewohnt sind. Also sei

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 8 & 8 & 40 & 15 & 70 & 25 & 60 \\ 10 & 20 & 15 & 35 & 15 & 15 & 25 & 15 \\ 15 & 20 & 10 & 10 & 15 & 15 & 15 & 10 \\ 20 & 0 & 10 & 40 & 35 & 30 & 50 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 700 \\ 700 \\ 700 \\ 700 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Schreiben wir nun noch die Variablen in einen Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_R \\ x_H \\ x_{Sch} \\ x_{Kas} \\ x_{Kae} \\ x_F \\ x_{Spa} \\ x_T \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

und treffen die Vereinbarung, dass Vektorungleichungen komponentenweise zu lesen sind, so können wir unser Problem kurz notieren als

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^\top x & & \\ \text{unter den} & Ax & \geq & b \\ \text{Nebenbedingungen} & x & \geq & 0. \end{array} \tag{1.11}$$

■

Die letzte Vereinbarung wollen wir hier festhalten.

Definition 1.1
Wir definieren auf $\mathbb{R}^n$ die Partialordnung (!)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n : (a \leq b :\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n : a_i \leq b_i). \tag{1.12}$$

♦

Der zulässige Bereich S aus (1.1) ist in Beispiel 1.1 also

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid Ax \geq b\}.$$

1.1.2 Gier ist nicht immer gut

Beispiel 1.2
Nach dem Zusammenbruch des Weltfinanzsystems und wegen der Flüchtlingsbewegungen, die durch die Klimakatastrophe und die Ressourcenkriege ausgelöst wurden, haben Sie sich im Jahr 2025 mit 49 Gefährten und 100 Doppelzentner Kartoffeln auf eine einsame Insel gerettet. Sie planen, die nächsten 5 Jahre autark zu überleben. In jedem Jahr müssen Sie überlegen, wie Sie Ihren Kartoffelvorrat auf Nahrung und Saatgut aufteilen, wobei die Kartoffeln nach mehr als einem Jahr Lagerung die Keimfähigkeit verlieren und ungenießbar werden, und aus einem Doppelzentner Saatgut 7 Doppelzentner Kartoffeln geerntet werden. Sie planen in jedem Jahr mit einem Zuwachs der Gruppe um 5 Menschlein. Die im Jahr i, $i = 1, \ldots, 5$ zum Verzehr bestimmten Kartoffeln werden gleichmäßig auf alle Mitglieder der Gruppe (also an $50 + 5(i-1)$ Personen) verteilt. – Man hat mich darauf hingewiesen, dass ich an dieser Stelle erwähnen sollte, dass für Sie und Ihre Gefährten auf der Insel eine neue Zeitrechnung begonnen hat. Das Jahr 2025 wird nun zum Jahr 1. – Zum Überleben braucht jeder Mensch mindestens einen Doppelzentner Kartoffeln im Jahr. Mehr als drei Doppelzentner mag aber keiner im Jahr verzehren. Nach den 5 Jahren wollen Sie mindestens 200 Doppelzentner als Saatgut für das nächste Jahr zurückhalten. Mit welchem Plan können Sie den Gesamtverzehr eines Individuums in den 5 Jahren maximieren?

Als Variablen wählen wir V_i für $i = 1, \ldots, 5$ für den Gesamtverzehr der Gruppe im Jahr i und S_i für $i = 1, \ldots, 5$ für das Saatgut im Jahr i, jeweils in Doppelzentnern. Dann ist

$$V_1 + S_1 = 100 \qquad \text{und} \qquad V_i + S_i = 7S_{i-1} \text{ für } i = 2, \ldots, 5. \tag{1.13}$$

Nach 5 Jahren möchte man sicher stellen, dass

$$S_5 \geq 200. \tag{1.14}$$

Der Jahresverzehr pro Person ist dann $\frac{V_i}{50+5(i-1)}$. Dieser soll zwischen einem und drei Doppelzentnern liegen.

$$1 \leq \frac{V_i}{50+5(i-1)} \leq 3. \tag{1.15}$$

Wiederum sollen die Variablen nicht-negativ sein. Also erhalten wir insgesamt als Modell

$$\begin{array}{lcccccccccccrr}
\max & \frac{V_1}{50} & +\frac{V_2}{55} & +\frac{V_3}{60} & +\frac{V_4}{65} & +\frac{V_5}{70} & & & & & & & & \\
\text{unter} & V_1 & & & & & +S_1 & & & & & & = & 100 \\
 & & V_2 & & & & -7S_1 & +S_2 & & & & & = & 0 \\
 & & & V_3 & & & & -7S_2 & +S_3 & & & & = & 0 \\
 & & & & V_4 & & & & -7S_3 & +S_4 & & & = & 0 \\
 & & & & & V_5 & & & & -7S_4 & +S_5 & & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & S_5 & & \geq & 200 \\
 & V_1 & & & & & & & & & & & \geq & 50 \\
 & & V_2 & & & & & & & & & & \geq & 55 \\
 & & & V_3 & & & & & & & & & \geq & 60 \\
 & & & & V_4 & & & & & & & & \geq & 65 \\
 & & & & & V_5 & & & & & & & \geq & 70 \\
 & V_1 & & & & & & & & & & & \leq & 150 \\
 & & V_2 & & & & & & & & & & \leq & 165 \\
 & & & V_3 & & & & & & & & & \leq & 180 \\
 & & & & V_4 & & & & & & & & \leq & 195 \\
 & & & & & V_5 & & & & & & & \leq & 210 \\
 & & & & & \multicolumn{6}{r}{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5} & & \geq & 0.
\end{array}$$

Da hier Gleichungen und Ungleichungen auftreten, ist es a priori nicht klar, wie wir das in Matrizenschreibweise wie in (1.11) bringen sollen. Wir vertagen dieses Problem auf später.

Aufgabe 1.1 *Zeigen Sie mit einem ad-hoc-Argument, dass das Optimum des obigen Problems größer oder gleich 13 ist.*

Lösung siehe Lösung 9.1.

Mit unserem ersten Modell maximieren wir den Gesamtverzehr. Wenn wir die Optimallösung ausrechnen, was wir in Kürze von Kollege Computer erledigen lassen wollen, so werden wir feststellen, dass wir im ersten Jahr darben müssen, um danach in Kartoffelprodukten schwelgen zu können.

Wie können wir das Modell modifizieren, wenn wir statt dessen den Mindestverzehr pro Person und Jahr über alle Jahre maximieren wollen?

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
\max & & & & & & & & & & & M & & \\
\text{unter} & V_1 & & & & & +S_1 & & & & & & = & 100 \\
& & V_2 & & & & -7S_1 & +S_2 & & & & & = & 0 \\
& & & V_3 & & & & -7S_2 & +S_3 & & & & = & 0 \\
& & & & V_4 & & & & -7S_3 & +S_4 & & & = & 0 \\
& & & & & V_5 & & & & -7S_4 & +S_5 & & = & 0 \\
& & & & & & & & & & S_5 & & \geq & 200 \\
& V_1 & & & & & & & & & & & \geq & 50 \\
& & V_2 & & & & & & & & & & \geq & 55 \\
& & & V_3 & & & & & & & & & \geq & 60 \\
& & & & V_4 & & & & & & & & \geq & 65 \\
& & & & & V_5 & & & & & & & \geq & 70 \\
& V_1 & & & & & & & & & & & \leq & 150 \\
& & V_2 & & & & & & & & & & \leq & 165 \\
& & & V_3 & & & & & & & & & \leq & 180 \\
& & & & V_4 & & & & & & & & \leq & 195 \\
& & & & & V_5 & & & & & & & \leq & 210 \\
& V_1 & & & & & & & & & & -50M & \geq & 0 \\
& & V_2 & & & & & & & & & -55M & \geq & 0 \\
& & & V_3 & & & & & & & & -60M & \geq & 0 \\
& & & & V_4 & & & & & & & -65M & \geq & 0 \\
& & & & & V_5 & & & & & & -70M & \geq & 0 \\
& & & & & & \multicolumn{6}{r}{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, M} & \geq & 0.
\end{array}
$$

Abb. 1.1 Das Modell zur Maximierung des jährlichen Mindestverzehrs

Wir führen dafür eine zusätzliche Variable M wie Mindestverzehr ein. Der jährliche Verzehr einer Person soll nicht kleiner sein als der Mindestverzehr. Dies ergibt die zusätzlichen Ungleichungen $M \leq \frac{V_i}{50+5(i-1)}$. Nun maximieren wir einfach den Mindestverzehr und erhalten das Modell in Abbildung 1.1. ■

1.1.3 Ein Mischungsproblem

Beispiel 1.3
Eine Ölraffinerie hat vier verschiedene Sorten Rohbenzin zur Verfügung und mischt daraus Benzin in drei verschiedenen Oktanstärken. Dafür gelten die Daten aus Tabelle 1.1. Gesucht ist ein Produktionsprozess, der den Gewinn maximiert.

Als Variablen wählen wir die Anzahl der Fässer des jeweiligen Rohstoffes i, das in die Benzinsorte j einfließt. Also

$$x_{ij} := \text{Fässer des Rohstoffs } i\text{, die zur Produktion von Sorte } j \text{ benutzt werden.}$$

Rohstoffsorte	Oktanzahl	Fässer verfügbar	Preis pro Fass
1	68	4000	€ 31.02
2	86	5050	€ 33.15
3	91	7100	€ 36.35
4	99	4300	€ 38.75

Benzinsorte	Mindestoktanzahl	Nachfrage	Preis pro Fass
1	85	$\geq$ 15000	€ 40.99
2	90	beliebig	€ 42.95
3	95	$\leq$ 10000	€ 45.15

Tab. 1.1 Die Daten des Mischungsproblems

Die Daten aus der ersten Tabelle liefern dann folgende Restriktionen.

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} &\leq 4000, \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} &\leq 5050, \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} &\leq 7100, \\ x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} &\leq 4300. \end{aligned}$$

Auch die Anforderungen an die Qualität der Mischungen ergeben lineare Bedingungen. Ursprünglich handelt es sich ja bei der Oktanzahl um den Volumenanteil Isooktan in einer Mischung mit n-Heptan und Volumenanteile mischen sich linear. Also haben wir zunächst zum Beispiel

$$\frac{68x_{1,1} + 86x_{2,1} + 91x_{3,1} + 99x_{4,1}}{x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1}} \geq 85.$$

Als lineare Ungleichungen geschrieben, erhalten wir somit folgende drei Bedingungen (und müssen uns dann auch keine Sorgen mehr machen, ob wir Gefahr laufen, durch Null zu dividieren)

$$\begin{aligned} 68x_{1,1} + 86x_{2,1} + 91x_{3,1} + 99x_{4,1} - 85(x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1}) &\geq 0, \\ 68x_{1,2} + 86x_{2,2} + 91x_{3,2} + 99x_{4,2} - 90(x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2}) &\geq 0, \\ 68x_{1,3} + 86x_{2,3} + 91x_{3,3} + 99x_{4,3} - 95(x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Der Mindest- und Höchstabsatz ergeben:

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} &\geq 15000, \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} &\leq 10000. \end{aligned}$$

Als Zielfunktion, die wir maximieren wollen, erhalten wir, da sich der Gewinn als Differenz aus Erlösen und Kosten ergibt

$$\begin{aligned} c(x) &= 40.99(x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1}+x_{4,1}) \\ &\quad +42.95(x_{1,2}+x_{2,2}+x_{3,2}+x_{4,2}) \\ &\quad +45.15(x_{1,3}+x_{2,3}+x_{3,3}+x_{4,3}) \\ &\quad -31.02(x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3})-33.15(x_{2,1}+x_{2,2}+x_{2,3}) \\ &\quad -36.35(x_{3,1}+x_{3,2}+x_{3,3})-38.75(x_{4,1}+x_{4,2}+x_{4,3}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

oder zusammengefasst

$$\begin{aligned} & 9,97x_{1,1}+7,84x_{2,1}+4,64x_{3,1}+2,24x_{4,1}+11,93x_{1,2}+9,80x_{2,2} \\ + \; & 6,60x_{3,2}+4,20x_{4,2}+14,13x_{1,3}+12,00x_{2,3}+8,80x_{3,3}+6,40x_{4,3}. \end{aligned}$$

Abschließend bemerken wir wieder, dass alle $x_{ij} \geq 0$ sein sollten.

In Tabellenform erhalten wir also zunächst folgende Aufgabenstellung:

$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	$x_{3,1}$	$x_{4,1}$	$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	$x_{3,2}$	$x_{4,2}$	$x_{1,3}$	$x_{2,3}$	$x_{3,3}$	$x_{4,3}$		
9,97	7,84	4,64	2,24	11,93	9,80	6,60	4,20	14,13	12,00	8,80	6,40		
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	$\leq$	4000
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	$\leq$	5050
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	$\leq$	7100
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	$\leq$	4300
-17	1	6	14	0	0	0	0	0	0	0	0	$\geq$	0
0	0	0	0	-22	-4	1	9	0	0	0	0	$\geq$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-27	-9	-4	4	$\geq$	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\geq$	15000
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	$\leq$	10000

wobei sich z.B. die fünfte Zeile aus

$$68x_{1,1}+86x_{2,1}+91x_{3,1}+99x_{4,1}-85(x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1}+x_{4,1}) \geq 0$$

ergibt. ■

Aufgabe 1.2 *Nehmen Sie an, Sie hätten soeben 6.000 € geerbt und wollten sie investieren. Zwei Freunde sind an Sie herangetreten und haben Ihnen eine Beteiligung an ihren ehemaligen Ich-AGs angeboten. In beiden Fällen wird von Ihnen nicht nur monetärer Einsatz erwartet, sondern auch Ihre Arbeitskraft benötigt. Ihr erster Freund erhofft von Ihnen 5.000 € und 200 Stunden Arbeitseinsatz, womit er Ihnen ein Einkommen von 9.500 € in Aussicht stellt. Die entsprechenden Daten beim zweiten Freund lauten 4.000 € und 250 Stunden Einsatz für 9.000 €. Beide stellen Ihnen aber auch in Aussicht, diesen Einsatz nur anteilig, dann aber proportional zu leisten. Also etwa beim ersten Freund*

2.500 € und 100 Stunden Einsatz für 4.750 €. Nehmen Sie ferner an, dass Sie sich neben Ihrem eigentlichen Job eine zusätzliche Belastung von 300 Stunden erlauben können. Wie können Sie Ihr Erbe und Ihre Zeit so in die Ich-AGs Ihrer Freunde investieren, dass Sie Ihr erwartetes Einkommen maximieren.
Modellieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem.

Lösung siehe Lösung 9.2.

1.2 Die allgemeine lineare Optimierungsaufgabe

Bei richtigen Problemen ist die Modellbildung natürlich nicht so eindeutig wie in unseren einführenden Beispielen. Dabei können verschiedene Schwierigkeiten auftauchen. Zunächst liegt ein realistisches Problem nicht in einer klar fassbaren mathematischen Form vor. Oft hat man konkurrierende Optimierungsziele und weiche Nebenbedingungen, die man vom Anwender oft nur erfährt, wenn er mitteilt, warum ihm eine Lösung nicht gefällt.

Zum anderen kann man mögliche Lösungsmengen durch unterschiedliche Ungleichungssysteme beschreiben, etwa indem man zusätzliche Variablen einführt. Je nach Formulierung sind die Probleme – speziell von einer bestimmten Software – schwerer oder leichter lösbar.

Zur allgemeinen theoretischen und algorithmischen Behandlung eines Optimierungsproblems ist es ungünstig, eine Mischung aus „$\leq$“, „$\geq$“und „$=$“ Restriktionen zu haben. Außerdem wollen wir nur einen Aufgabentyp betrachten und nicht das eine Mal maximieren und beim anderen Mal minimieren. In der Linearen Programmierung hat sich inzwischen zumeist das Maximieren durchgesetzt. Das macht keinen Unterschied, da

$$\max_{x \in S} c(x) = -\left(\min_{x \in S} -c(x)\right).$$

Deswegen definieren wir.

Definition 1.2
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, b \geq 0$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei $m \leq n$ und A habe vollen Rang, also $rang(A) = m$. Die Aufgabenstellung

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{unter} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{1.17}$$

nennen wir *Lineares Optimierungsproblem in Standardform.* Ist $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ mit $Ax = b$, so sagen wir x ist *zulässig* für das Problem. Ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ zulässig und gilt für alle zulässigen $x \in \mathbb{R}^n$, dass $c^\top x \leq c^\top x^*$, so nennen wir x^* eine Optimallösung des Problems. Gibt es eine zulässige Lösung und darüberhinaus ein $z \in \mathbb{R}$, so dass für alle zulässigen Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $c^\top x \leq z$, so heißt das Problem *beschränkt*, andernfalls *unbeschränkt*.

♦

Die Forderung, dass die Matrix vollen Rang haben soll, ist keine wirkliche Einschränkung. Wir können z.B. mit den Methoden der linearen Algebra redundante Gleichungen identifizieren und eliminieren. In den Anwendungen des Simplexalgorithmus werden wir dieses Problem aber „on the fly“ lösen.

Die eben eingeführte Standardform ist zur Behandlung mit dem Simplexalgorithmus die geeignetste Erscheinungsform eines linearen Optimierungsproblems. Für die Untersuchungen im Rahmen der Polyedertheorie ist aber eine andere Form besser, die wir die kanonische Form nennen wollen. Wir führen diese und zwei weitere, davon eine sehr allgemeine Form an dieser Stelle schon ein, da wir im Folgenden intensiv üben wollen, Probleme in eine vorgegebene Form zu bringen und verschiedene Formen ineinander zu überführen.

Definition 1.3
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Seien ferner

$$B \in \mathbb{R}^{m \times k}, \quad C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{\ell \times k}$$

sowie $a \in \mathbb{R}^\ell, a \geq 0$, $d \in \mathbb{R}^k$. Ferner habe (C, D) vollen Rang ℓ.

Die Aufgabenstellung

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{unter} & Ax \leq b \end{array}$$

nennen wir *Lineares Optimierungsproblem in kanonischer Form.* Ist $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$, so sagen wir x ist *zulässig* für das Problem. Auch die Optimalität einer Lösung wird analog zur Standardform definiert, ebenso wie Beschränktheit des Problems.

Die Aufgabenstellung

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

nennen wir *Lineares Optimierungsproblem in symmetrischer Form.* Ist $x \in \mathbb{R}^n_+$ mit $Ax \leq b$, so sagen wir x ist *zulässig* für das Problem. Auch die Optimalität einer Lösung wird wieder analog definiert, ebenso wie Beschränktheit des Problems. Die Namengebung wird in Kapitel 3 klarer werden.

Die Aufgabenstellung

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & c^\top x & + & d^\top y & & \\ \text{unter} & Ax & + & By & \leq & b \\ \text{unter} & Cx & + & Dy & = & a \\ & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

nennen wir *Lineares Optimierungsproblem in allgemeiner Form.* Sind $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ und $y \in \mathbb{R}^k$ mit $Ax + By \leq b$ und $Cx + Dy = a$, so sagen wir (x, y) ist *zulässig* für das Problem. Optimallösungen werden wieder analog definiert, ebenso wie Beschränktheit des Problems. ♦

Bemerkung 1.3 *Wir haben in den obigen Aufgaben stets* $\max c^\top x$ *geschrieben. Nimmt man es mathematisch sehr genau, so ist dies nicht richtig, und wir müssten besser* $\sup\ c^\top x$ *schreiben. Wir werden zwar zeigen können, dass bei beschränkten Problemen, für die ein zulässiger Punkt existiert, das Supremum stets angenommen wird, aber wenn es keine zulässigen Punkte gibt, so kann selbstverständlich auch das Maximum nicht angenommen werden. Da aber die hier gewählte Schreibweise durchgängig in der Literatur benutzt wird, und wir das „*max*" eher als Aufforderung denn als Operator betrachten, behalten wir diese Schreibweise bei.*

1.2.1 Techniken zur äquivalenten Umformung

Wir wollen nun zeigen, dass wir uns diejenige Form des linearen Optimierungsproblems aussuchen können, mit der wir am bequemsten arbeiten können. Denn wir können die eine Form so in eine beliebige andere Form überführen, dass der Optimalwert sich nicht ändert und man aus Optimallösungen der einen Form leicht Optimallösungen der anderen Form ablesen kann.

Dazu benutzen wir folgende Techniken.

Multiplikation mit -1: Wie bereits erwähnt, können wir so Minimierungsprobleme in Maximierungsprobleme überführen. Ebenfall können wir „$\geq$"-Ungleichungen in „$\leq$"-Ungleichungen überführen, und dafür sorgen, dass bei Gleichheitsrestriktionen auf der rechten Seite eine nicht-negative Zahl steht.

Einführen von Schlupfvariablen: Dies sind nicht negative neue Variablen, die in Ungleichungen den „Schlupf" (die Differenz) beinhalten, der (die) bis zur Gleichheit bleibt. So ersetzen wir also etwa

$$Ax \leq b \qquad \text{durch} \qquad Ax + y = b,\ y \geq 0,$$

wobei $y := b - Ax \geq 0$ ist, und im Falle

$$Ax \geq b \qquad \text{durch} \qquad Ax - y = b,\ y \geq 0$$

mit $y := Ax - b \geq 0$.

„Elimination" vorzeichenbeschränkter Variablen: Die explizite Vorzeichenbeschränkung von Variablen kann man implizit durch eine Matrixungleichung ausdrücken, indem man etwa $x \geq 0$ durch $-I_n x \leq 0$ ersetzt, wobei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichne.

Aufspaltung nicht vorzeichenbeschränkter Variablen: Will man umgekehrt Vorzeichenbeschränkungen einführen, so ersetzt man etwa eine nicht-vorzeichenbeschränkte Variable $x \in \mathbb{R}^n$ durch die Differenz zweier vorzeichenbeschränkter Variablen $x = x^+ - x^-$ mit $x^+,\ x^- \geq 0$. Wie wir dann x aus x^+ und x^- gewinnen, ist klar, umgekehrt setzen wir $x^+ := \max\{x, 0\}$ und $x^- := \max\{-x, 0\}$. Man beachte, dass diese Relation nicht eineindeutig ist. Mit x^+ und x^- erfüllen auch $\tilde{x}^+ = x^+ + d$ und $\tilde{x}^- = x^- + d$ für jedes $d \in \mathbb{R}^n, d \geq 0$ die Relation $x = \tilde{x}^+ - \tilde{x}^-$.

Definition 1.4
Seien Π_1, Π_2 Klassen von Optimierungsaufgaben. Wir schreiben $\Pi_1 \preceq \Pi_2$, wenn sich aus jeder Instanz P_1 der Problemklasse Π_1 durch „einfache" Modifikationen eine Instanz $P_2 \in \Pi_2$ umformen lässt, so dass man aus jeder Lösung von P_2 eine Lösung von P_1 „leicht" ablesen kann. ♦

Definition 1.4 lässt die Begriffe „einfach" und „leicht" bewusst vage. In unserem Zusammenhang werden das kleine Matrizenmanipulationen oder bestenfalls Subtraktionen sein. Für eine allgemeinere und exakte Definition möchten wir auf den Begriff der polynomialen Transformation in der Komplexitätstheorie verweisen (siehe etwa [9]).

Die Schreibweise $\Pi_1 \preceq \Pi_2$ lesen wir als „Π_1 ist nicht schwerer als Π_2".

Satz 1.4 *Seien $L\Pi_1$ die linearen Optimierungsprobleme in Standardform, $L\Pi_2$ die linearen Optimierungsprobleme in kanonischer Form und $L\Pi_3$ die linearen Optimierungsprobleme in allgemeiner Form. Dann gilt für beliebiges $i, j \in \{1, 2, 3\}$*

$$L\Pi_i \preceq L\Pi_j.$$

Der Satz besagt also, dass die drei Problemklassen gleich schwer sind. Da die symmetrische Form, wie die kanonische Form und die Standardform, Spezialfälle der allgemeinen Form sind, beweisen wir nicht noch einmal extra, dass Gleiches für sie gilt.

Beweis. Wir zeigen $L\Pi_2 \preceq L\Pi_1 \preceq L\Pi_3 \preceq L\Pi_2$, woraus mit der Transitivität der „$\preceq$"-Relation die Behauptung folgt.

$L\Pi_2 \preceq L\Pi_1$: Sei also ein Problem der Form $\{\max c^\top x \mid Ax \leq b\}$ gegeben. Zunächst spalten wir die Restriktionsmatrix und die rechte Seite b so auf, dass in $A_1 x \leq b_1$ die Ungleichungen stehen, in denen b nichtnegative Einträge hat und in $A_2 x \leq b_2$ die Ungleichungen, bei denen in b negative Einträge stehen. Dabei sei A_1 eine $m_1 \times n$-Matrix und A_2 eine $m_2 \times n$-Matrix und

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A_1 & -A_1 & I_{m_1} & 0 \\ -A_2 & A_2 & 0 & -I_{m_2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}.$$