Fernuniversität Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

Die totalspielchromatische Zahl ausgewählter Graphenklassen

Gregor Ehrensperger
Matrikel-Nr.: 7460414

Innsbruck, 19. Juli 2011

Prüfer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Betreuer: Dr. Dominique Andres

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie Zitate kenntlich gemacht habe.
Diese Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde in gleicher oder ähnlicher Form vorgelegt, und auch nicht veröffentlicht.

Innsbruck, den 19. Juli 2011

. . . .
(Unterschrift des Kandidaten)

Inhaltsverzeichnis

Zu dieser Arbeit

Der Inhalt dieser Arbeit ist die Untersuchung des Totalfärbungsproblems auf Graphen unter spieltheoretischen Gesichtspunkten. Dieses Thema wurde bisher in der veröffentlichten mathematischen Literatur nicht behandelt, wenngleich bereits ähnliche Färbungsspiele Eingang in die mathematische Forschung gefunden haben. Eine Internet-Recherche am 15. Juli 2011 offenbarte, dass bereits zwei Masterarbeiten zum Thema „totalspielchromatische Zahl" geschrieben wurden, auf welche der Author der vorliegenden Arbeit jedoch keinen Zugriff hatte. Diese Masterarbeiten stammen von Yi-Jaw Liaw [Lianta] und Zef Segal [Seg08].[1]

Erstmals wurden Graphenfärbungsspiele 1989 von Hans Bodlaender in seiner Arbeit *On the complexity of some coloring games* [Bod89] spieltheoretisch untersucht. Nach der Veröffentlichung seiner Arbeit war das Interesse der Mathematiker geweckt, und es folgten zahlreiche weitere Untersuchungen von derartigen Spielen.[2] Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Totalfärbungsspiel handelt es sich um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel, bei welchem zwei Spieler - Alice und Bob - abwechselnd die Elemente eines Graphen unter vorgegebenen Regeln färben müssen, bis kein weiterer Zug mehr möglich ist. Dabei gewinnt Alice, wenn der Graph am Ende vollständig gefärbt wurde, oder Bob, wenn er eine vollständige Färbung verhindern kann. Spiele mit solchen Eigenschaften werden auch als *Maker/Breaker-Spiele* bezeichnet.
Welcher Spieler gewinnt, hängt dabei wesentlich von der Anzahl der gegebenen Farben und dem gegebenen Graph ab. Das Interesse der Untersuchungen liegt dabei meist an der kleinsten Anzahl von Farben für welche Alice eine Gewinnstrategie hat. Diese Kennzahl wird im Fall des Totalfärbungsspiels als *totalspielchromatische Zahl* bezeichnet. Die Bestimmung und Eingrenzung dieser Zahl für verschiedene Graphenklassen ist Ziel der vorliegenden Arbeit.

[1] Während auf die Arbeit von Yi-Jaw Liaw nur ein Eintrag in der taiwanesischen Nationalbibliothek [Liantb] hinweist, ist ein Entwurf eines Teils der Masterarbeit von Zef Segal [Segnt] als PDF abrufbar.

[2] Eine gute Übersicht ist auf der Graphenfärbungsspiele-Website von Dominique Andres [And11] zu finden.

Die Arbeit ist in drei Kapitel gegliedert. Das erste Kapitel dient zur Einführung der benötigten graphen- und spieltheoretischen Begriffe. Unterkapitel 1.1 stellt die Sprechweise aus der Graphentheorie sicher. Im Unterkapitel 1.2 werden einige wichtige Graphenklassen vorgestellt. Unterkapitel 1.3 geht auf die Geschichte der Graphenfärbung ein, und erläutert drei wichtige Vertreter der Graphenfärbung. Namentlich sind dies die Knoten-, Kanten- und Totalfärbung. Anschließend werden im Unterkapitel 1.4 die Grundzüge und die geschichtliche Entwicklung der Spieltheorie beschrieben, und im Unterkapitel 1.5 werden spieltheoretische Varianten der zuvor beschriebenen Graphenfärbungen betrachtet.
Das zweite Kapitel ist der Hauptteil dieser Arbeit. In diesem wird die totalspielchromatische Zahl einiger Graphenklassen bestimmt bzw. eingegrenzt. Dabei wird das Totalfärbungsspiel auf Kreisen, Sternen, Rädern, vollständigen Graphen, Raupen sowie Hummern untersucht.
Im dritten und letzten Kapitel werden die Ergebnisse und die offenen Fragen nochmals zusammengefasst.

An dieser Stelle möchte ich Prof. Dr. Winfried Hochstättler und Dr. Dominique Andres für das spannende Thema und die stets hervorragende Betreuung danken.

1 Einführung

Die in dieser Arbeit verwendeten graphentheoretischen Definitionen orientieren sich weitestgehend an [Die10], [Bri08] und [Mer09].

1.1 Allgemeines über Graphen

Definition 1.1.1. ***ungerichteter Graph***
Ein *ungerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge von *Knoten* V und einer Menge von *Kanten* $E \subseteq \binom{V}{2}$. Dabei ist $\binom{V}{2}$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von V. Die Knotenmenge eines Graphen G wird auch mit $V(G)$ und seine Kantenmenge mit $E(G)$ bezeichnet. Statt $v \in V(G)$ bzw. $e \in E(G)$ schreiben wir auch $v \in G$ bzw. $e \in G$ sofern keine Verwechslung auftreten kann.
Als *Elemente* bezeichnen wir sowohl Knoten als auch Kanten des Graphen.
Ein Graph lässt sich anschaulich bildlich darstellen, indem man für jeden Knoten einen Punkt zeichnet, und je zwei Punkte durch eine Linie verbindet, wenn die entsprechenden Knoten eine Kante bilden.

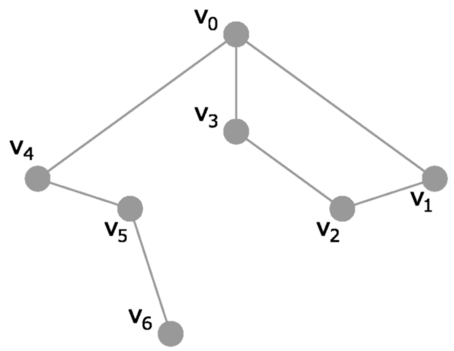


Abbildung 1.1: Der ungerichtete Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{v_0, v_1, \cdots, v_6\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$.

Definition 1.1.2. ***Endknoten***
Ist $e = \{v, w\} \in E$ eine Kante, so werden die Knoten v, w als *Endknoten* der Kante e bezeichnet.

Definition 1.1.3. ***planarer Graph***
Als *planar* bezeichnet man einen Graph, der in der Ebene so gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten kreuzen.

Definition 1.1.4. ***Teilgraph***
Ein Graph $G' = (V', E')$ ist ein *Teilgraph* eines Graphen $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt. Wir schreiben auch $G' \subseteq G$.

Definition 1.1.5. ***induzierter Teilgraph***
Ein Graph $G' = (V', E')$ nennt man einen *induzierten Teilgraph* eines Graphen $G = (V, E)$, wenn G' ein Teilgraph von G ist, und $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

Definition 1.1.6. ***Adjazenz und Inzidenz***
Zwei verschiedene Knoten v, w sind *adjazent*, wenn sie durch eine Kante $\{v, w\}$ verbunden sind.
Zwei verschiedene Kanten e, f sind *adjazent*, wenn sie einen gemeinsamen Endknoten haben.
Ein Knoten v ist *inzident* zu einer Kante e, wenn $v \in e$.

Definition 1.1.7. ***Knotengrad*** $\mathbf{d_G(v)}$ ***und Maximalgrad*** $\mathbf{\Delta(G)}$
Der *Grad* eines Knotens $v \in G = (V, E)$ ist die Anzahl der mit ihm inzidenten Kanten, also

$$d_G(v) := |\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$$

Der *Maximalgrad* $\Delta(G)$ eines Graphen ist der maximale Knotengrad der Knoten von G, also

$$\Delta(G) := \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$$

Definition 1.1.8. ***Matching***
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und $M \subseteq E$. M wird als *Matching* bezeichnet, wenn alle $e, f \in M$ paarweise disjunkt sind, also $\forall\, e, f \in M,\ e \neq f : e \cap f = \emptyset$.

Definition 1.1.9. ***perfektes Matching***
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und $M \subseteq E$ ein Matching. M ist *perfekt*, wenn $\forall\, v \in V\ \exists\, e \in M : v \in e$.

Definition 1.1.10. ***Kantenfolge und Weg***
Eine endliche Folge $e_1 = \{v_0, v_1\}, e_2 = \{v_1, v_2\}, \ldots, e_n = \{v_{n-1}, v_n\}$ von sukzessive adjazenten Kanten $e_i \in G$ bezeichnet man als *Kantenfolge* der Länge n vom Knoten v_0 zum Knoten v_n.
Sind alle Knoten v_i paarweise verschieden, so spricht man auch von einem *Weg*.

Definition 1.1.11. ***Distanz zweier Knoten***
Als *Distanz* zweier Knoten $v, w \in G$ bezeichnet man die Länge des kürzesten Weges von v nach w.

Definition 1.1.12. ***Zusammenhang und Komponente***
Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn für je zwei seiner Knoten $v, w \in G$ eine Kantenfolge von v nach w existiert.
Eine *Komponente* von G ist ein maximal zusammenhängender Teilgraph G' eines Graphen G.

Definition 1.1.13. ***gerichteter Graph***
Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $\vec{G} = (V, \vec{E})$, wobei V die Menge der Knoten, und $\vec{E} = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v\}$ eine Menge von geordneten Paaren verschiedener Elemente aus V ist. Ist $e = (u, v) \in \vec{E}$ eine gerichtete Kante, so bezeichnen wir u auch als den *Anfangsknoten* und v als den *Endknoten* von e.
Die bisher beschriebenen Begriffe können mit kleinen Modifikationen auch für gerichtete Graphen definiert werden.

In dieser Arbeit werden ausschließlich ungerichtete Graphen betrachtet. Aus diesem Grund treffen wir zur besseren Unterscheidung zwischen Knoten und Kanten folgende Vereinbarung:

Vereinbarung 1.1.14. *Betrachten wir einen ungerichteten Graph, so schreiben wir Kanten $\{v, w\}$ statt mit geschwungenen Klammern auch mit runden Klammern (v, w).*

1.2 Einige Graphenklassen

Definition 1.2.1. ***Kreise***
Ein *Kreis* C_n ist ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, in welchem

jeder Knoten vom Grad 2 ist.

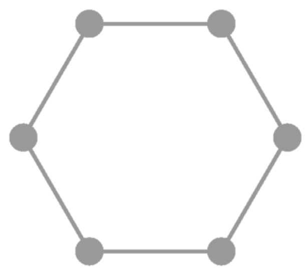


Abbildung 1.2: Beispiel: der Kreis C_6

Definition 1.2.2. ***Pfade***
Ein *Pfad* P_n entsteht aus dem Kreis C_n durch Entfernung von genau einer Kante.

Abbildung 1.3: Beispiel: der Pfad P_5

Definition 1.2.3. ***Räder***
Verbindet man einen einzelnen Knoten c mit allen Knoten eines Kreises C_n, so erhält man ein *Rad* W_n mit $n + 1$ Knoten.

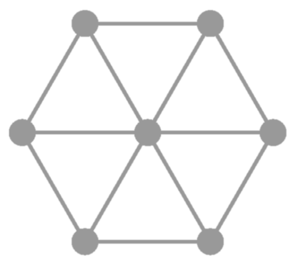


Abbildung 1.4: Beispiel: das Rad W_6.

Definition 1.2.4. ***vollständige Graphen***
Ein *vollständiger Graph* K_n ist ein Graph mit n Knoten, in welchem alle Knoten paarweise adjazent sind.

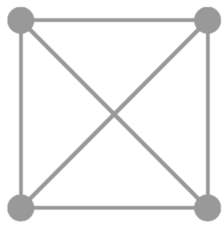


Abbildung 1.5: Beispiel: der vollständige Graph K_4

Definition 1.2.5. ***Bäume und Wälder***
Ein *Baum* G ist ein Graph, in welchem es zwischen je zwei Knoten genau einen Weg gibt. Die Knoten v mit $d_G(v) = 1$ bezeichnen wir als *Blätter*. Alle Knoten, die keine Blätter sind, nennen wir *innere Knoten*. Ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind, bezeichnen wir als *Wald*.

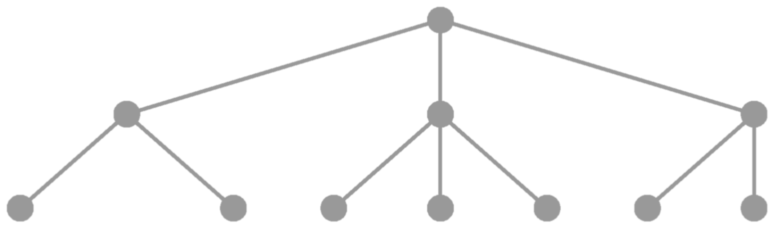


Abbildung 1.6: Beispiel: ein Baum.

Definition 1.2.6. ***Sterne***
Ein *Stern* S_n ist ein Baum mit einem inneren Knoten c und n Blättern. Dabei ist $d_G(c) = n$.

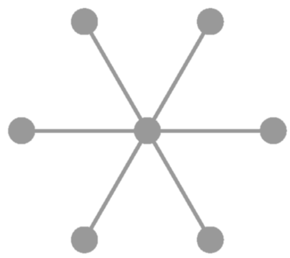


Abbildung 1.7: Beispiel: der Stern S_6.

Definition 1.2.7. ***Raupen und Hummer***
Eine *Raupe* ist ein Baum, bei dem nach dem Löschen der Blätter und den dazu inzidenten Kanten nur ein Pfad übrig bleibt.
Ein *Hummer* ist ein Baum, bei dem nach dem Löschen der Blätter und den dazu inzidenten Kanten nur eine Raupe übrig bleibt.

1.3 Graphenfärbung

Die Färbung von Graphen geht auf das Vier-Farben-Problem zurück:
Im Jahr 1852 zeigte der Mathematikstudent Francis Guthrie seinem Bruder Frederick Guthrie einen „Beweis“ dafür, dass die Länder jeder beliebigen Landkarte mit nur vier Farben so gefärbt werden können, dass keine zwei angrenzenden Länder dieselbe Farbe bekommen. Frederick Guthrie äußerte diese Tatsache gegenüber seinem Mathematikprofessor Augustus De Morgan, und fragte, ob er für die Richtigkeit eine einfache Begründung hat, was dieser jedoch verneinte. In einem Brief von De Morgan an den irischen Mathematiker und Physiker William Rowan Hamilton wurde die Vermutung erstmals veröffentlicht. Aber erst im Jahr 1977 gelang es Kenneth Appel und Wolfgang Haken die Vier-Farben-Vermutung unter erheblichem Rechnereinsatz in *Every planar map is four colorable*[1] zu beweisen. 1996 haben es Neil Robertson et al. in [RSST96] geschafft, das Vier-Farben-Theorem mit einem einfacheren Computerbeweis zu beweisen. Über die Art und Struktur des Beweises von Francis Guthrie ist übrigens nichts bekannt. Allerdings war Francis nach Aussage von Frederick Guthrie mit seinem Beweis nicht zufrieden. Eine sehr umfangreiche Darstellung der Geschichte des Vier-Farben-Problems kann der interessierte Leser in [Wil03] finden.
Stellt man jedes Land als einen Knoten dar, und verbindet je zwei Knoten durch eine Kante, wenn die entsprechenden Länder eine gemeinsame Grenze haben, so erhält man ein Färbungsproblem eines Graphen. Auch viele andere Probleme lassen sich in Färbungsprobleme auf Graphen übersetzen, wie zum Beispiel:

- Die Planung zeitlicher Abläufe von Ereignissen, welche in gegenseitigen Abhängigkeiten stehen:
  Wir können diese Aufgabe als Färbungsproblem auf einem Graph betrachten, indem wir jedes der Ereignisse als einen Knoten darstellen,

[1] *Every planar map is four colorable* wurde in zwei Teilen veröffentlicht: [AH77] und [AHK77]

und Ereignisse, welche nicht zeitgleich stattfinden können, durch Kanten verbinden. Die Farben repräsentieren dabei unterschiedliche Zeitfenster.

- Die Frequenzzuteilung an Mobilfunksender:
  Das Problem besteht darin, die Frequenzen so zuzuteilen, dass sich nahe beieinanderliegende Sendestationen aufgrund ähnlicher Frequenzen nicht gegenseitig stören. Betrachtet man die Sender als Knoten, und verbindet jene Sender durch Kanten, welche sich gegenseitig aufgrund geographischer Nähe stören können, so erhält man ein Färbungsproblem auf einem Graphen. Die verschiedenen Farben repräsentieren die zur Verfügung stehenden Frequenzen.

- Das Logikrätsel Sudoku:
  Jedes der 81 Sudoku-Felder wird als Knoten dargestellt, und alle Felder, welche sich im selben 3×3 Quadrat, oder in derselben Zeile oder Spalte befinden, werden durch eine Kante verbunden. Die verfügbaren Farben entsprechen den neun Ziffern.

Weitere Beispiele sind im Artikel [Mar04] beschrieben. Im Folgenden werden wir drei wichtige Arten der Graphenfärbung sowie die zugehörigen zentralen Ergebnisse betrachten.

Definition 1.3.1. ***Knotenfärbung und chromatische Zahl***
Als *Knotenfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir eine Abbildung $\mathrm{col} : V \to \mathrm{COL}$ von der Knotenmenge V des Graphen auf eine Farbmenge COL. Die Elemente der Menge COL sind die zur Verfügung stehenden Farben, und $|\mathrm{COL}|$ ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden Farben.
Die Knotenfärbung ist *gültig*, wenn für je zwei adjazente Knoten $v, w \in V$ $\mathrm{col}(v) \neq \mathrm{col}(w)$ gilt. Existiert eine gültige Färbung $\mathrm{col} : V \to \mathrm{COL}$ mit $|\mathrm{COL}| = k$, so hat G eine *k-Färbung* und wir nennen G *k-färbbar.*
Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ von G ist die minimale Anzahl von Farben, welche benötigt werden, um eine gültige Knotenfärbung zu erhalten.
Ein *Färbungsproblem* besteht darin, für einen gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er mit der gegebenen Anzahl von Farben gültig gefärbt werden kann.

Satz 1.3.2 (Satz von Brooks). *Die chromatische Zahl $\chi(G)$ jedes zusammenhängenden Graphen G, der weder vollständig, noch ein Kreis ungerader Länge ist, ist höchstens so groß wie der Maximalgrad $\Delta(G)$ des Graphen.*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) \text{ für } G \neq K_n \text{ und } G \neq C_{2n+1}, \text{ sowie}$$
$$\chi(G) = \Delta(G) + 1 \text{ für } G = K_n \text{ oder } G = C_{2n+1}.$$

Der Satz von Brooks wurde beispielsweise in den Artikeln [Bro41] und [Lov75] bewiesen.

Definition 1.3.3. ***Kantenfärbung und chromatischer Index***
Als *Kantenfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir eine Abbildung $\mathrm{col} : E \to \mathrm{COL}$ von der Kantenmenge E des Graphen auf eine Farbmenge COL.
Die Kantenfärbung ist *gültig*, wenn für je zwei adjazente Kanten $e, f \in E$ $\mathrm{col}(e) \neq \mathrm{col}(f)$ gilt.
Der *chromatische Index* $\chi'(G)$ von G ist die minimale Anzahl von Farben, welche benötigt werden, um eine gültige Kantenfärbung zu erhalten.

Satz 1.3.4 (Satz von Vizing).

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Ein Beweis des Satzes von Vizing ist bspw. in [Sei02] zu finden.

Definition 1.3.5. ***Totalfärbung und totalchromatische Zahl***
Als *Totalfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir eine Abbildung $\mathrm{col} : V \cup E \to \mathrm{COL}$ von der Vereinigung der Knotenmenge V und der Kantenmenge E auf eine Farbmenge COL.
Die Totalfärbung ist *gültig*, wenn für je zwei adjazente oder inzidente Elemente $a, b \in V \cup E$ $\mathrm{col}(a) \neq \mathrm{col}(b)$ gilt.
Die *totalchromatische Zahl* $\chi''(G)$ von G ist die minimale Anzahl von Farben, welche benötigt werden, um eine gültige Totalfärbung zu erhalten.

Vermutung 1.3.6 (Vermutung von Behzad).

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$$

Diese Vermutung wurde erstmals 1965 von Mehdi Behzad im Rahmen seiner Doktorarbeit [Beh65] formuliert, und konnte bereits für viele Graphenklassen bestätigt werden. Unter anderem wurde die Gültigkeit für Graphen mit Höchstgrad 5 in [Kos96] und für vollständige Graphen, vollständige bipartite[2] sowie 3-partite[3] Graphen in [Ros71] gezeigt.

[2] Ein Graph $G = (V, E)$ ist bipartit, wenn sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen $V_1, V_2 \subseteq V$ mit $V_1 \cup V_2 = V$ aufteilen lassen, sodass für je zwei Knoten $v, w \in V_i$ die Kante $\{v, w\} \notin E$ $(i \in \{1, 2\})$.

[3] Ein Graph $G = (V, E)$ ist 3-partit, wenn sich seine Knoten in drei disjunkte Teilmengen $V_1, V_2, V_3 \subseteq V$ mit $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$ aufteilen lassen, sodass für je zwei Knoten $v, w \in V_i$ die Kante $\{v, w\} \notin E$ $(i \in \{1, 2, 3\})$.

Die angegebene untere Schranke $\Delta(G)+1$ ist bestmöglich, da ein Knoten v mit $d_G(v) = \Delta(G)$ sowie die zu v inzidenten Kanten paarweise verschieden gefärbt werden müssen, und so für die gültige Färbung dieser Elemente mindestens $\Delta(G) + 1$ Farben benötigt werden.

Definition 1.3.7. ***partielle Färbungen***
Eine *partielle Totalfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung

$$\mathrm{pcol} : V \cup E \to \mathrm{COL} \ \cup \ \{\textit{ungefärbt}\}.$$

Eine partielle Totalfärbung ist *gültig*, wenn für je zwei adjazente Elemente $a, b \in V \cup E$ gilt, dass $\mathrm{pcol}(a) \neq \mathrm{pcol}(b)$, oder $\mathrm{pcol}(a) = \textit{ungefärbt} = \mathrm{pcol}(b)$.
Für Kanten- und Knotenfärbungen lässt sich die partielle Färbung analog definieren.

1.4 Spieltheorie

„Die *Spieltheorie* beschäftigt sich mit der Beschreibung und Analyse von Spielen in einem weiten Sinne. Bei den Spielen mag es sich ganz allgemein um Konfliktsituationen zwischen mehreren Beteiligten (Spielern) handeln, die verschiedene Handlungsmöglichkeiten haben, und damit den Ausgang des Konflikts beeinflussen können. Es kann sich bei einer solchen Konfliktsituation um einen Markt mit konkurrierenden oder interagierenden Unternehmen, um politische Gruppen mit unterschiedlichen Zielen, aber auch um die Spieler einer Schachpartie handeln.“[4]
Die älteste wissenschaftliche Abhandlung eines Spiels findet sich in einem Brief, welcher 1713 vom britischen Botschafter James Waldegrave verfasst wurde.[5] [6] Im Jahr 1928 legt der Mathematiker John von Neumann den Grundstein der modernen Spieltheorie. In *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* [von28] beweist er das Min-Max-Theorem. Sechzehn Jahre später erschien das Standardwerk *Theory of Games and Economic Behavior* [vM44] von John von Neumann und Oskar Morgenstern. Die Resonanz auf diese Veröffentlichung war enorm. Bereits 1953 existierten laut dem Vorwort zur dritten Edition ihres Werks mehrere hundert Publikationen, welche sich mit dem Thema Spieltheorie befassten.

[4]Diese Beschreibung entstammt dem Manusskript [Kan08].
[5]James Waldegrave gibt in diesem Brief eine Minimax-Strategie für das Kartenspiel Le Her an.
[6]Quelle: [Bew07] (Seite 280)

Definition 1.4.1. ***strategisches Spiel in Normalform***
Ein strategisches Spiel in Normalform wird durch folgende Punkte beschrieben:

- Eine Menge $S := \{S_1, \dots, S_N\}$ von *Spielern*.
- *Strategiemengen* X_ν für $\forall \nu \in S$.
- *Auszahlungsfunktionen* $\Theta_\nu : X_{S_1} \times \ldots \times X_{S_N} \to \mathbb{R}^d$ für $\forall \nu \in S$.

Als Abkürzung für eine Spielbeschreibung definieren wir $\Gamma = (\Theta_\nu, X_\nu)_{\nu \in S}$ mit $|S| = N$, und bezeichnen Γ als ein *N-Personenspiel*.

Definition 1.4.2. ***Strategie***
„Eine *Strategie* ist ein vollständiger Verhaltensplan eines Spielers, und muss im spieltheoretischen Sinn mehr angeben als eine Strategie im Alltagssinn, nämlich eine exakte Handlungsvorschrift für jede Situation, in die der Spieler kommen kann.“[7]

Anmerkung 1.4.3. ***Spielausgang***
Der *Spielausgang* steht bereits fest, sobald alle Spieler $S_1, \dots, S_N \in S$ ihre Strategien $\zeta_{S_1} \in X_{S_1}, \dots, \zeta_{S_N} \in X_{S_N}$ gewählt haben.

Definition 1.4.4. ***Auszahlungsfunktion***
Die *Auszahlungsfunktion* $\Theta_\nu : X_{S_1} \times \ldots \times X_{S_N} \to \mathbb{R}^d$ ordnet jedem möglichen Spielausgang einen Auszahlungsvektor zu, wodurch festgelegt wird, welchen Gewinn oder Verlust ein Spieler $\nu \in S$ macht, wenn ein bestimmter Spielausgang eintritt.

Definition 1.4.5. ***Auszahlung***
Wurden die Strategien $\zeta_{S_1} \in X_{S_1}, \dots, \zeta_{S_N} \in X_{S_N}$ gewählt, so bezeichnen wir $\Theta_\nu(\zeta_{S_1}, \dots, \zeta_{S_N})$ als *Auszahlung* des Spielers $\nu \in S$.

Definition 1.4.6. ***Nullsummenspiel***
Ein *Nullsummenspiel* liegt vor, wenn für ein gegebenes Spiel $\Gamma = (\Theta_\nu, X_\nu)_{\nu \in S}$ für jeden möglichen Spielausgang

$$\sum_{\nu \in S} \Theta_\nu(\zeta_{S_1}, \dots, \zeta_{S_N}) = 0 \qquad \forall \zeta_{S_1} \in X_{S_1}, \dots, \zeta_{S_N} \in X_{S_N}$$

gilt.

[7] Diese Beschreibung stammt von Christian Rieck [Rie11].

Definition 1.4.7. ***perfekte Information***
Perfekte Information liegt vor, wenn jedem Spieler $\nu \in S$ bei jedem seiner Züge das vorangegangene Spielgeschehen vollständig bekannt ist.
Beispiele für Spiele mit perfekter Information sind z.B. Schach, Mühle und Dame. Gegenbeispiele sind bspw. Poker, Skat und Schere-Stein-Papier.

Definition 1.4.8. ***kombinatorisches Spiel***
Als *kombinatorisches Spiel* wird ein strategisches Spiel bezeichnet, welches folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Das Spiel ist endlich.
2. Es liegt perfekte Information vor.
3. Die beteiligten Spieler ziehen abwechselnd.
4. Das Spiel unterliegt keinem Zufallseinfluss.

In dieser Arbeit betrachten wir ausschließlich Spiele, in welchen die Bildmenge der Auszahlungsfunktion mit $\{-1, 1\}$ (Sieg oder Niederlage) gegeben ist. Daher treffen wir nachstehende Vereinbarung:

Vereinbarung 1.4.9. *Im Folgenden betrachten wir ausschließlich strategische Spiele, deren Auszahlungsfunktionen den Wertebereich $\mathbb{R}$ haben.*

Definition 1.4.10. ***Gewinn***
Eine positive Auszahlung wird *Gewinn* genannt.

Definition 1.4.11. ***Gewinnstrategie***
Eine *Gewinnstrategie* ist eine Strategie $\zeta \in X_\nu$ eines Spielers $\nu \in S$, die ihm unabhängig von der Spielweise seiner Mitspieler einen Gewinn sichert.

Satz 1.4.12 (Folgerung aus dem Min-Max-Theorem).
In jedem kombinatorischen 2-Personen-Nullsummenspiel, in welchem es kein Unentschieden gibt, hat einer der Spieler eine Gewinnstrategie.

In dieser Arbeit werden ausschließlich 2-Personen-Nullsummenspiele untersucht. Die Besonderheit eines solchen Spieles ist, dass der Gewinn eines Spielers immer der Verlust des anderen ist, und dadurch die Interessen der beiden Spieler völlig entgegengesetzt sind.

1.5 Graphenfärbungsspiele

Färbungsprobleme auf Graphen wurden unter spieltheoretischen Gesichtspunkten erstmals im Jahr 1989 von Hans Bodlaender untersucht. In der Einleitung seines Artikels *On the complexity of some coloring games* [Bod89] motiviert er seine Untersuchungen wie folgt:

> *„Games can be used to model situations where different parties have conflicting interests, or to model „the worst type of erroneous behavior of a system". In the latter case, we assume that an erroneous system is malicious and uses an intelligent strategy to try to prevent us from reaching our goal. If we are able to deal with this type of behavior, we are also able to deal with all weaker types of errors."*

Im Folgenden werden einige ausgewählte Graphenfärbungsspiele vorgestellt.
(MB) Als Ausgangspunkt dient dabei das Grundgerüst eines *Maker/Breaker-Spieles*. Es sei ein Graph $G = (V, E)$, eine Farbmenge COL und eine Objektmenge O gegeben. Je nachdem, ob wir ein Knoten-, Kanten- oder Totalfärbungsspiel betrachten, setzen wir $O := V$, $O := E$ oder $O := V \cup E$. Wir definieren die Spielregeln:

- Zwei Spieler treten gegeneinander an. Der erste Spieler (*Alice*) versucht, den Graph gültig zu färben, während der zweite Spieler (*Bob*) versucht, dies zu verhindern.[8]

- Zu Beginn des Spiels sind noch alle Elemente der Menge O ungefärbt.

- Die beiden Spieler färben abwechselnd ein Element der Objektmenge O mit einer Farbe aus COL, sodass die resultierende partielle Färbung $\mathrm{pcol} : O \to \mathrm{COL} \cup \{\textit{ungefärbt}\}$ gültig ist.

- Das Spiel endet, wenn kein weiterer Zug mehr möglich ist. Das ist nach spätestens $|O|$ Zügen der Fall, was bedeutet, dass unser Spiel *endlich* ist.

- Alice gewinnt, wenn am Spielende alle Elemente der Menge O gültig gefärbt wurden. Ansonsten gewinnt Bob.

[8]Die Synonyme Alice und Bob werden traditionell in der Datenübertragungstechnik verwendet um bspw. Erklärungen von Netzwerkprotokollen und Verschlüsselungsverfahren zu vereinfachen.

Das so definierte Spiel ist offenbar ein 2-Personen-Nullsummenspiel, und mit dem Min-Max-Theorem folgt, dass stets einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat. Wir interessieren uns insbesondere für die jeweils kleinste Zahl an gegebenen Farben $|\mathrm{COL}|$, bei der Alice eine Gewinnstrategie hat.
Im Folgenden beschreiben wir einige Graphenfärbungsspiele. Wir beginnen mit dem Knotenfärbungsspiel, welches erstmals von Bodlaender [Bod89] unter spieltheoretischen Gesichtspunkten untersucht wurde.

Definition 1.5.1. ***Knotenfärbungsspiel und spielchromatische Zahl***
Es sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben. Ein *Knotenfärbungsspiel* liegt vor, wenn wir im eben definierten Maker/Breaker-Spiel (MB) $O := V$ wählen. Die *spielchromatische Zahl* $\chi_g(G)$ eines Graphen G ist die minimale Anzahl an Farben $|\mathrm{COL}|$, wofür Alice eine Gewinnstrategie auf G hat, wenn der Spieler $g \in \{\mathrm{Alice}, \mathrm{Bob}\}$ das Spiel eröffnet. Die spielchromatische Zahl $\chi_g(\mathcal{G})$ einer Graphenklasse $\mathcal{G}$ definieren wir mit $\chi_g(\mathcal{G}) := sup\,\{\chi_g(G) \mid G \in \mathcal{G}\}$.

Satz 1.5.2 (triviale Schranken der spielchromatischen Zahl).

$$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Beweis. Offensichtlich muss $\chi(G) \leq \chi_g(G)$ gelten, da $\chi_g(G)$ eine gültige und vollständige Färbung des Graphen erfordert, und damit mindestens $\chi(G)$ Farben benötigt werden. Die obere Schranke kann man sich ebenfalls leicht klarmachen, da zu jedem Knoten $v \in G$ maximal $\Delta(G)$ Knoten adjazent sind. Zusätzlich muss v noch selbst gefärbt werden, und somit werden maximal $\Delta(G) + 1$ Farben benötigt. □

Der folgende Sachverhalt wurde anhand eines einfachen Beispiels von Henry Kierstead in [Kie00] aufgezeigt.

Anmerkung 1.5.3. Ist G' ein Teilgraph von G, so folgt im Allgemeinen nicht $\chi_g(G') \leq \chi_g(G)$.

Ein weiteres wichtiges Färbungsspiel ist das Kantenfärbungsspiel, welches 2001 von Xuding Zhu und Leizhen Cai [CZ01] eingeführt wurde.

Definition 1.5.4. ***Kantenfärbungsspiel und spielchromatischer Index***
Es sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben. Ein *Kantenfärbungsspiel* liegt vor, wenn wir in (MB) $O := E$ wählen. Der *spielchromatische Index* $\chi'_g(G)$ eines Graphen G ist die minimale Anzahl an Farben $|\mathrm{COL}|$, wofür Alice eine Gewinnstrategie auf G hat, wenn der Spieler $g \in \{\mathrm{Alice}, \mathrm{Bob}\}$ das Spiel eröffnet. Den spielchromatischen Index $\chi'_g(\mathcal{G})$ einer Graphenklasse $\mathcal{G}$ definieren wir mit $\chi'_g(\mathcal{G}) := sup\left\{\chi'_g(G) \mid G \in \mathcal{G}\right\}$.

Satz 1.5.5 (triviale Schranken des spielchromatischen Index).

$$\chi'(G) \leq \chi'_g(G) \leq 2\Delta(G) - 1 \text{ für jeden Graph } G = (V, E) \text{ mit } E \neq \emptyset.$$

Beweis. Offensichtlich muss $\chi'(G) \leq \chi'_g(G)$ gelten. Die obere Schranke gilt, da zu einer Kante $e \in E$ maximal $2\Delta(G) - 2$ Kanten adjazent sind. Zusätzlich muss noch e selbst gefärbt werden, und somit werden maximal $2\Delta(G) - 1$ Farben benötigt. □

Anmerkung 1.5.6. Ein Kantenfärbungsspiel auf einem Graph $G = (V, E)$ lässt sich auch als ein Knotenfärbungsspiel auf dem Graph $G' = (V', E')$ auffassen, wenn man

$$V' := E$$

$$E' := \{(e_1, e_2) \mid e_1, e_2 \in E,\ e_1 \neq e_2 \text{ und } e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\}$$

setzt. Eine Untersuchung des Graphen G' ist jedoch meist komplexer als die Untersuchung des ursprünglichen Graphen G.

Definition 1.5.7. ***Totalfärbungsspiel und totalspielchromatische Zahl*** Es sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben. Ein *Totalfärbungsspiel* liegt vor, wenn wir in (MB) $O := V \cup E$ wählen. Die *totalspielchromatische Zahl* $\chi''_g(G)$ eines Graphen G ist die minimale Anzahl an Farben $|\mathrm{COL}|$, für welche Alice eine Gewinnstrategie auf G hat, wenn der Spieler $g \in \{\mathrm{Alice}, \mathrm{Bob}\}$ das Spiel eröffnet. Die totalspielchromatische Zahl $\chi''_g(\mathcal{G})$ einer Graphenklasse $\mathcal{G}$ definieren wir mit $\chi''_g(\mathcal{G}) := sup\left\{\chi''_g(G) \mid G \in \mathcal{G}\right\}$.

Satz 1.5.8 (triviale Schranken der totalspielchromatischen Zahl).

$$\chi''(G) \leq \chi''_g(G) \leq 2\Delta(G) + 1$$

Beweis. Grundlegend unterliegt die Färbung eines beliebigen Knotens v maximal $2\Delta(G)$ Einschränkungen, da zu jedem Knoten v genau $d_G(v)$ Kanten inzident und ebensoviele Knoten adjazent sind. Die Färbung einer Kante e unterliegt ebenfalls maximal $2\Delta(G)$ Einschränkungen, da zu einer Kante genau 2 Knoten v_1 und v_2 inzident sind, welche wiederum mit $d_G(v_1)$ bzw. $d_G(v_2)$ Kanten inzident sind. Eine dieser zu v_1 bzw. v_2 inzidenten Kanten ist e selbst, und daher unterliegt die Färbung von e maximal $(d_G(v_1) - 1) + (d_G(v_2) - 1) + 2 = d_G(v_1) + d_G(v_2) \leq 2\Delta(G)$ Einschränkungen. Die untere Schranke $\chi''(G)$ muss offenbar gelten. □

Anmerkung 1.5.9. Ein Totalfärbungsspiel auf einem Graph $G = (V, E)$ lässt sich auch als ein Knotenfärbungsspiel auf dem Graph $G' = (V', E')$ auffassen, wenn man

$$V' := V \ \cup \ E$$

$$\begin{aligned} E' := E \ \cup \ &\{(e_1, e_2) \mid e_1, e_2 \in E,\ e_1 \neq e_2 \text{ und } e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\} \\ \cup \ &\{(e, v) \mid e \in E,\ v \in V \text{ und } v \in e\} \end{aligned}$$

setzt.

Zuletzt betrachten wir das Markierungsspiel, welches 1999 von Xuding Zhu [Zhu99] eingeführt wurde, um die obere Schranke der spielchromatischen Zahl von planaren Graphen genauer bestimmen zu können. Dabei gelang es ihm, die im selben Jahr von ihm und Thomas Dinski in [DZ99] bewiesene obere Schranke der spielchromatischen Zahl von planaren Graphen von 30 auf 19 zu senken. Im Jahr 2008 konnte Xuding Zhu [Zhu08] die Schranke erneut verbessern, und mit 17 angeben.

Definition 1.5.10. ***Markierungsspiel und Spielfärbungszahl***
Es sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben. Beim *Markierungsspiel* ist zu Beginn keiner der Knoten $v \in V$ markiert. Die Aufgabe der beiden Spieler Alice und Bob ist es, abwechselnd noch unmarkierte Knoten zu markieren. Das Spielende ist erreicht, wenn alle Knoten markiert wurden. Für jeden Knoten $v \in V$ definieren wir $t(v)$ als den Zug, in dem v markiert wurde. Weiters setzen wir $\mathcal{S}(v) := |\{w \in V \mid (w \text{ adjazent zu } v) \wedge (t(w) < t(v))\}|$, also entspricht $\mathcal{S}(v)$ der Anzahl aller zu v adjazenten Knoten, welche im Spielverlauf vor v markiert wurden. Das Endergebnis des Spieles ist dann gegeben mit $\mathcal{S} := 1 + \max_{v \in V} \mathcal{S}(v)$. Während Alice versucht, diese Zahl zu minimieren, versucht Bob, diese zu maximieren. Alice gewinnt, wenn sie es für einen vorgegeben Wert $\mathcal{T}$ schafft, dass nach dem Spielende $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ ist. Die kleinste Zahl $\mathcal{T}$ für welche Alice eine Gewinnstrategie hat, wird *Spielfärbungszahl* $\mathrm{col}_g(G)$ genannt.

Satz 1.5.11. *Die Spielfärbungszahl ist eine obere Schranke der spielchromatischen Zahl.*

$$\chi_g(G) \leq col_g(G) \text{ für jeden Graph } G$$

Beweis. Dieser Beweis stammt von Xuding Zhu [Zhu99].
Alice und Bob spielen ein Knotenfärbungsspiel auf einem gegebenen Graph G mit $\mathrm{col}_g(G) = \mathcal{T}$ gegebenen Farben. Alice wählt jeweils ihren als nächstes zu färbenden Knoten v gemäß ihrer Strategie beim Markierungsspiel. Offensichtlich wurden dann maximal $(\mathcal{T} - 1)$ zu v adjazente Knoten gefärbt, weshalb dessen Färbung nur maximal ebensovielen Einschränkungen unterliegt. Da jedoch $\mathcal{T}$ Farben gegeben sind, kann Alice den Knoten auf alle Fälle gültig färben. □

Anmerkung 1.5.12. Analog kann das Markierungsspiel und die Spielfärbungszahl auch auf der Kantenmenge E bzw. der Kanten- und Knotenmenge $V \cup E$ formuliert werden. Wie man sich leicht überlegen kann, bietet die Spielfärbungszahl auch in diesen Fällen eine obere Schranke für den spielchromatischen Index bzw. die totalspielchromatische Zahl.

Anmerkung 1.5.13. Es wurden noch zahlreiche weitere Spiele auf Graphen vorgeschlagen:

- Ein *relaxed coloring game* wurde 2003 von Chun-Yen Chou et al. [CWZ03] beschrieben.
- *Asymmetrische Färbungsspiele* wurden 2005 von Hal Kierstead [Kie05] definiert.
- Ein *Inzidenzenfärbungsspiel* wurde 2006 von Dominique Andres [And06b] vorgeschlagen.
- Ein *Digraph-Färbungsspiel* wurde 2007 ebenfalls von Dominique Andres [And07] vorgeschlagen.
- ...

Anmerkung 1.5.14. Es werden auch verschiedene Varianten der diskutierten Spiele untersucht, in denen man es den Spielern beispielsweise erlaubt, Runden auszusetzen.

In dieser Arbeit untersuchen wir das in Definition 1.5.7 beschriebene Totalfärbungsspiel, und bestimmen die totalspielchromatische Zahl einiger Graphenklassen.

2 Die totalspielchromatische Zahl einiger Graphenklassen

In diesem Kapitel werden wir die totalspielchromatische Zahl einiger ausgewählten Graphenklassen bestimmen bzw. eingrenzen.

2.1 Die totalspielchromatische Zahl eines Kreises

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass für jeden Kreis $\chi''_{\mathrm{Alice}}(C_n) = 5$ gilt.
Auf einem Kreis entspricht das Totalfärbungsspiel dem Inzidenzenfärbungsspiel, welches von Dominique Andres in [And06b] auch auf Kreisen C_n ($n \geq 7$) untersucht wurde. Dabei nutzte er eine ähnliche Strategie um zu zeigen, dass die inzidenzspielchromatische Zahl gleich 5 ist, wenn Alice das Spiel beginnt.

Vereinbarung 2.1.1. *Wir bezeichnen die Elemente des Kreises reihum mit* $a_0, \dots, a_{2n-1}$.

Vereinbarung 2.1.2. *Alle Element-Indizes sind im Folgenden mit modulo* $2n$ *zu betrachten.*

Zunächst bestimmen wir die totalchromatische Zahl $\chi''(C_n)$ des Kreises C_n, und erhalten damit die triviale untere Schranke der totalspielchromatischen Zahl $\chi''_g(C_n)$.

Lemma 2.1.3. $\chi''(C_{3k}) = 3$, $\chi''(C_{3k+1}) = 4$ *und* $\chi''(C_{3k+2}) = 4$.

Beweis.

1. $\chi''(C_{3k}) = 3$: Färben wir die Elemente a_{3i} mit der Farbe 1, a_{3i+1} mit 2 und a_{3i+2} mit 3, so erhalten wir eine gültige Färbung mit nur 3 Farben.

2. $\chi''(C_{3k+1}) = 4$ und $\chi''(C_{3k+2}) = 4$: Eine Färbung wie in (1) ist hier nicht möglich, da sowohl a_0 als auch a_{2n-2} (bei C_{3k+1}) bzw. a_{2n-1} (bei C_{3k+2}) mit 1 gefärbt werden würden, was aber gegen die Färbungsregeln verstößt. Ein weiterer Konflikt bestünde bei a_1 und a_{2n-1} (bei C_{3k+1}). Daher können diese Kreise nicht mit 3 Farben gefärbt werden.

Eine gültige Färbung mit 4 Farben erhalten wir für einen beliebigen Kreis C_n bspw. wie folgt[1]:

- **Fall 1** - n ist gerade:
  $\text{col}(a_{4i}) = 1$ für $0 \leq 4i \leq 2n - 1$
  $\text{col}(a_{4i-1}) = 2$ für $0 \leq 4i - 1 \leq 2n - 1$
  $\text{col}(a_{4i-2}) = 3$ für $0 \leq 4i - 2 \leq 2n - 1$
  $\text{col}(a_{4i-3}) = 4$ für $0 \leq 4i - 3 \leq 2n - 1$
- **Fall 2** - n ist ungerade:
  $\text{col}(a_{2n-1}) = 3$
  $\text{col}(a_{2n-2}) = 4$
  $\text{col}(a_{4i}) = 1$ für $0 \leq 4i \leq 2n - 3$
  $\text{col}(a_{4i-1}) = 2$ für $0 \leq 4i - 1 \leq 2n - 3$
  $\text{col}(a_{4i-2}) = 3$ für $0 \leq 4i - 2 \leq 2n - 3$
  $\text{col}(a_{4i-3}) = 4$ für $0 \leq 4i - 3 \leq 2n - 3$

Nun untersuchen wir die totalspielchromatische Zahl $\chi''_g(C_n)$ des Kreises C_n.

Beobachtung 2.1.4. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} 3 \leq \chi''_g(C_{3k}) \leq 5 \\ 4 \leq \chi''_g(C_{3k+1}) \leq 5 \\ 4 \leq \chi''_g(C_{3k+2}) \leq 5 \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den trivialen Schranken der totalspielchromatischen Zahl. □

Lemma 2.1.5. $4 \leq \chi''_g(C_i) \leq 5$ *für* $i \geq 4$

Beweis. Für $(i \bmod 3) \neq 0$ ist die Richtigkeit der Aussage offensichtlich, da nur Kreise C_{3k} mit 3 Farben gefärbt werden können. Eine solche Färbung erfolgt nach einem strikten Muster: Elemente a_{3l} müssen mit der Farbe α gefärbt werden, Elemente a_{3l+1} mit der Farbe β und Elemente a_{3l+2} mit der Farbe γ.
Wir beweisen die Aussage, indem wir eine Gewinnstrategie für Bob auf einem Kreis C_{3k} ($k \geq 2$) bei drei gegebenen Farben angeben.

[1] Diese Färbung entstammt [Vij71].

Beginnt Alice das Spiel, und färbt ein beliebiges Element a_m mit der Farbe 1, so färbt Bob das Element a_{m+3} mit einer anderen Farbe, und gewinnt damit sofort das Spiel.
Beginnt Bob das Spiel, so färbt er das Element a_0 mit 1. Alice kann nicht verhindern, dass Bob in seinem nächsten Zug eines der beiden Elemente a_{2i-3}, a_3 mit einer Farbe ungleich 1 färbt, und damit das Spiel gewinnt. □

Nun muss nur noch untersucht werden, ob $\chi''_g(C_i) = 4$ oder $\chi''_g(C_i) = 5$ ist.

Beobachtung 2.1.6. *Gewinnstrategien für Bob bei einem Spiel auf einem Kreis bei 4 gegebenen Farben.*

1. Liegt folgende Färbung vor, so hat Bob bereits das Spiel gewonnen, da das Element a_{m+3} mit den gegebenen 4 Farben nicht mehr gefärbt werden kann.

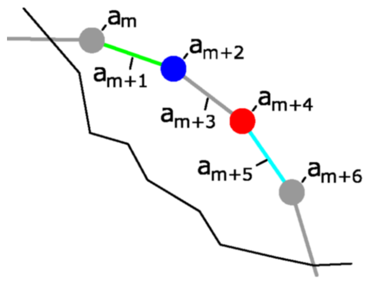


Abbildung 2.1: Gewinnstrategie 1

2. Liegt folgende Färbung vor, so hat Bob bereits das Spiel gewonnen, da für die Elemente a_{m+4} und a_{m+5} nur eine Farbe zur Verfügung steht, aber die Elemente verschieden gefärbt werden müssen, um die Färbungsregeln nicht zu verletzen.

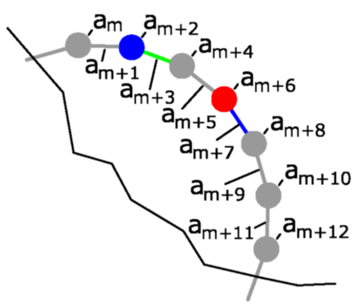


Abbildung 2.2: Gewinnstrategie 2

3. Liegt folgende Färbung vor, so hat Bob bereits das Spiel gewonnen, da für die Elemente a_{m+4}, a_{m+5} und a_{m+6} nur noch zwei Farben zur Verfügung stehen, aber die Elemente paarweise verschieden gefärbt werden müssen, um die Färbungsregeln nicht zu verletzen.

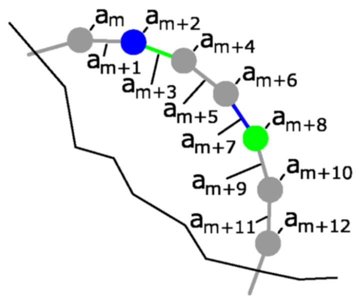


Abbildung 2.3: Gewinnstrategie 3

4. Liegt folgende Färbung vor ($a_{m+1}, a_{m+3}, a_{m+4}, a_{m+6}, a_{m+7}, a_{m+9}$ müssen zu diesem Zeitpunkt noch ungefärbt sein. Ausnahme: a_{m+1} und a_{m+9} dürfen zu diesem Zeitpunkt auch mit grün gefärbt sein.), so kann Bob die Färbung zu der in Gewinnstrategie 1 vorliegenden ergänzen, sobald Alice das Element a_{m+1} oder a_{m+9} mit einer in dieser Konfiguration nicht verwendeten Farbe färbt, bzw. sobald Alice eines der Elemente a_{m+3}, a_{m+4}, a_{m+6}, a_{m+7} färbt.

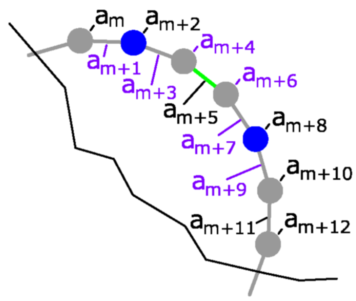


Abbildung 2.4: Gewinnstrategie 4

5. Liegt folgende Färbung vor, und ist Bob als nächstes am Zug, so hat er bereits gewonnen. Die Elemente a_{m+1}, a_{m+3}, a_{m+4}, a_{m+6}, a_{m+7}, a_{m+9}, a_{m+10}, a_{m+11} müssen dabei zu diesem Zeitpunkt noch ungefärbt sein.
Bob färbt nun das Element a_{m+6} mit einer dritten Farbe. Unabhängig davon, wie Alice auf diesen Spielzug reagiert, kann Bob in seinem nächs-

ten Spielzug entweder das Element a_{m+3} oder a_{m+9} mit der vierten Farbe färben, und siegt nach Gewinnstrategie 1.

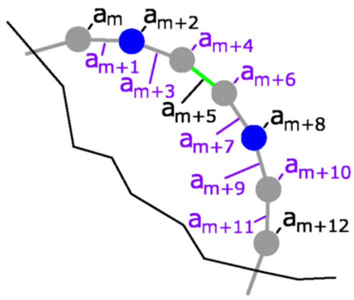


Abbildung 2.5: Gewinnstrategie 5

Es müssen dabei nicht zwangsläufig alle eingangs erwähnten Knoten ungefärbt sein. Diese Gewinnstrategie ist auch dann erfolgreich, wenn ...:

a) ... ein oder mehrere Elemente aus a_{m+1}, a_{m+10}, a_{m+11} grün gefärbt sind.

b) ... für die Färbung der Elemente a_{m+1}, a_{m+5}, a_{m+8}, a_{m+10}, a_{m+11} (ungefärbte Elemente werden ignoriert) insgesamt nur 3 Farben verwendet wurden. Denn dann kann Bob a_{m+6} mit der bereits verwendeten 3. Farbe färben, und Alice kann nicht mehr verhindern, dass Bob die Färbung in seinem nächsten Spielzug nach Gewinnstrategie 1 ergänzt.

c) ... für die Färbung des Elements a_{m+11} die Farbe blau verwendet wurde.

d) ... für die Färbung des Elements a_{m+1} grün und für die Färbung von a_{m+11} blau verwendet wurde.

e) ... für die Färbung des Elements a_{m+10} grün und für die Färbung von a_{m+11} blau verwendet wurde.

Lemma 2.1.7. $\chi''_{Alice}(C_3) = 5$

Beweis. Es seien 4 Farben gegeben. Wir beweisen die Aussage, indem wir eine Gewinnstrategie für Bob angeben.
Alice beginnt das Spiel. O.B.d.A nehmen wir an, dass Alice das Element a_0 mit der Farbe 1 färbt. Bob kontert, indem er das gegenüberliegende Element a_3 mit der Farbe 2 färbt. Für die restlichen Elemente stehen dann nur noch

zwei Farben zur Verfügung. Eines dieser Elemente muss nun von Alice gefärbt werden. Färbt Alice das Element a_m, so färbt Bob wiederum das gegenüberliegende Element a_{m+3} mit der vierten Farbe. Dies entspricht einer Färbung wie in Gewinnstrategie 1, und somit gewinnt Bob.
Da gemäß Beobachtung 2.1.4 $\chi_g''(C_3) \leq 5$ gilt, folgt sofort $\chi''_{\text{Alice}}(C_3) = 5$. □

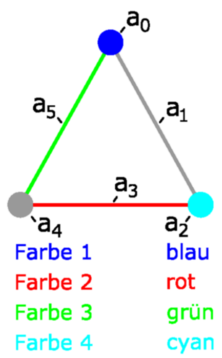


Abbildung 2.6: Beispiel für einen möglichen Spielverlauf.

Lemma 2.1.8. $\chi''_{Alice}(C_4) = 5$

Beweis. Wiederum beweisen wir die Aussage, indem wir bei vier gegebenen Farben eine Gewinnstrategie für Bob angeben.
Alice eröffnet das Spiel, und färbt ein beliebiges Element. O.B.d.A. nehmen wir an, dass Alice das Element a_0 mit der Farbe 1 gefärbt hat. Bob kontert, indem er das gegenüberliegende Element a_4 mit Farbe 2 färbt.

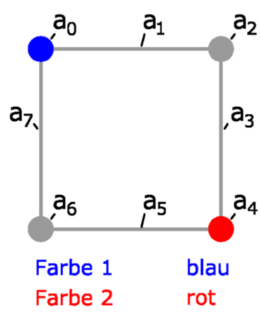


Abbildung 2.7: Nach dem Zug von Bob

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: Alice färbt in ihrem nächsten Zug ein Element aus a_1, a_3, a_5, a_7 mit einer dritten Farbe. Dann kann Bob die Färbung so ergänzen, dass er ein Muster wie in Gewinnstrategie 1 erhält. Somit siegt Bob in diesem Fall.

Fall 2: Alice färbt in ihrem nächsten Zug a_1 oder a_7 mit rot, bzw. a_3 oder a_5 mit blau. Dann kann Bob die Färbung so ergänzen, dass er ein Muster wie in Gewinnstrategie 3 erhält, und hat somit gewonnen.

Fall 3: Alice färbt in ihrem nächsten Zug a_2 oder a_6 mit einer dritten Farbe. Dann färbt Bob das gegenüberliegende Element mit derselben Farbe.

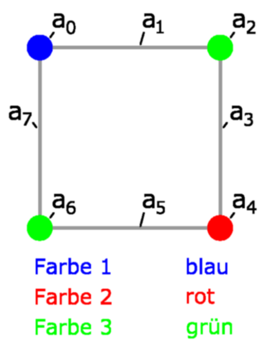


Abbildung 2.8: Nach dem Zug von Bob

Nun ist es egal, welches der vier verbleibenden Elemente von Alice gefärbt wird. Bob kann nun auf jeden Zug von Alice kontern, und eine Färbung wie in Gewinnstrategie 1 konstruieren.

Da es keine weiteren Möglichkeiten für Alice gibt, hat Bob eine Gewinnstrategie für 4 Farben gefunden, und mit Beobachtung 2.1.4 folgt $\chi''_{\text{Alice}}(C_4) = 5$. $\square$

Lemma 2.1.9. $\chi''_{Alice}(C_5) = 5$

Beweis. Um diese Aussage zu beweisen, geben wir wiederum eine Gewinnstrategie für Bob bei vier gegebenen Farben an.
Alice eröffnet das Spiel und färbt ein beliebiges Element. O.B.d.A. nehmen wir an, dass Alice das Element a_0 mit der Farbe 1 färbt. Bob kontert, indem er das gegenüberliegende Element a_5 mit derselben Farbe färbt. Nun kann kein weiteres Element mehr gültig mit dieser Farbe gefärbt werden.

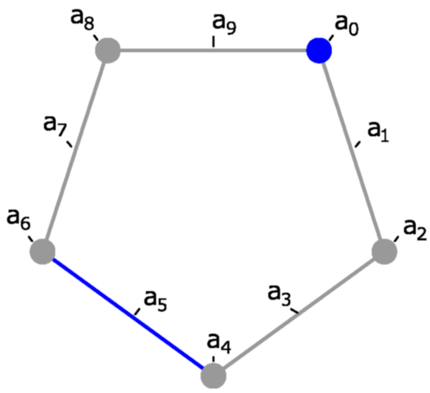


Abbildung 2.9: Nach dem Zug von Bob

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: Alice färbt in ihrem nächsten Zug eines der Elemente a_1, a_4, a_6, a_9 mit einer weiteren Farbe. Bob kann diese Färbung so ergänzen, dass er das Muster aus Gewinnstrategie 3 erhält, und somit gewinnt.

Fall 2: Alice färbt eines der Elemente a_2, a_3, a_7, a_8 mit einer weiteren Farbe.

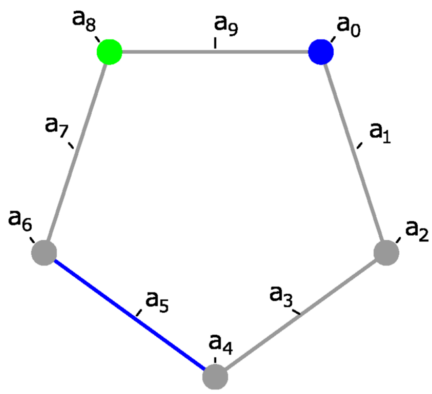


Abbildung 2.10: Beispiel: Nach dem Zug von Alice

Ausgehend von dem gerade gefärbten Element liegt nun (entweder im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn) folgendes Muster vor (dabei bezeichnet 1 die beiden eingangs mit derselben Farbe gefärbten Elemente, 2 das im letzten Zug gefärbte Element und - die noch ungefärbten Elemente): `2 - 1 - - - - 1 - -`

Bob ergänzt die Färbung mit einer weiteren Farbe 3:

`2 - 1 3 - - - 1 - -.`

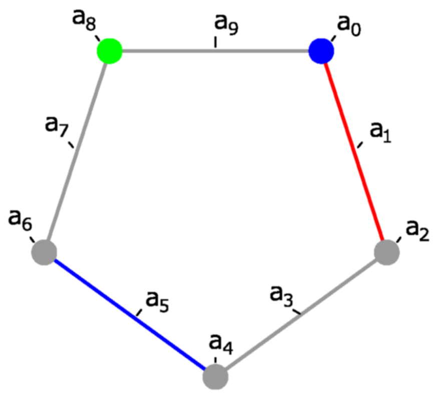


Abbildung 2.11: Beispiel: Nach dem Zug von Bob

O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Situation aus Abbildung 2.11 vorliegt. Man kann sich nun leicht klar machen, dass jeder weitere Zug von Alice sofort von Bob so ergänzt werden kann, dass das Muster aus Gewinnstrategie 1 vorliegt, und er somit gewinnt. Die einzige Ausnahme liegt vor, wenn Alice a_6 mit einer vierten Farbe 4 färbt: `2 - 1 3 - - - 1 4 -`. Aber auch hier kann Bob das Spiel sofort für sich entscheiden, indem er a_4 mit 2 färbt, und somit das Muster aus Gewinnstrategie 2 erhält: `2 - 1 3 - - 2 1 4 -`.

Somit hat Bob eine Gewinnstrategie bei vier gegebenen Farben, und mit Beobachtung 2.1.4 folgt sofort $\chi''_{\text{Alice}}(C_5) = 5$. □

Lemma 2.1.10. $\chi''_{Alice}(C_i) = 5$ *für* $i \geq 6$

Beweis. Es seien vier Farben gegeben. Wir beweisen die Aussage, indem wir eine Gewinnstrategie für Bob mit vier Farben angeben.
Alice eröffnet das Spiel, und färbt ein beliebiges Element a_m mit einer Farbe 1. Bob färbt das Element a_{m+3} mit einer weiteren Farbe 2.

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: Alice färbt a_{m+1} oder a_{m+2} mit einer dritten Farbe 3 (die beiden Elemente können mit 1 und 2 nicht mehr gefärbt werden). Bob kann diese Färbung sofort wie in Gewinnstrategie 1 ergänzen, und gewinnt.

Fall 2: Alice färbt a_{m-1} oder a_{m+4} mit einer dritten Farbe 3. Auch hier kann Bob die Färbung sofort wie in Gewinnstrategie 1 ergänzen, und gewinnt.

Fall 3: Alice wählt einen von den Fällen 1 und 2 verschiedenen Zug. Dann liegt, unter der Voraussetzung $i \geq 6$, eine der beiden folgenden Situationen vor:

1. a_{m-1}, a_{m-2} und a_{m-3} sind ungefärbt, und a_{m-4} wurde nicht mit 3 oder 4 gefärbt.
2. a_{m+4}, a_{m+5} und a_{m+6} sind ungefärbt, und a_{m+7} wurde nicht mit 3 oder 4 gefärbt.

Ist ersteres der Fall, und kann a_{m-3} gültig mit 2 gefärbt werden, so färbt Bob dieses Element mit 2. Ansonsten färbt er a_{m+6} mit 1. Somit liegt im Kreis nun eine Färbung `1 - - 2 - - 1` oder `2 - - 1 - - 2` vor, welche dem Muster in Gewinnstrategie 4 entspricht. Außerhalb dieses Musters wurde bereits ein viertes Element gefärbt. O. B. d. A. treffen wir die Annahme, dass die Färbung `1 - - 2 - - 1` vorliegt. Zusätzlich ist noch kein zu den `1`en benachbartes Element mit 3 oder 4 gefärbt. Nach einem weiteren Zug von Alice gibt es folgende Möglichkeiten. Dabei ist darauf zu achten, dass diese Muster sowohl im Uhrzeigersinn als auch gegen den Uhrzeigersinn auftreten können, und die Symbole $*$, $*_1$, $*_2$ ein mit beliebiger Farbe gefärbtes Element bezeichnen.

1. Alice hat ein Element innerhalb des Musters `1 - - 2 - - 1` gefärbt.
   Dann kann Bob diese Färbung sofort wie in Gewinnstrategie 1 ergänzen, und gewinnt.
2. Es liegt ein Muster der Form `- 1 - - 2 - - 1 2` vor.
   Bob prüft, ob er das Element ganz links mit 2 färben kann.
   Falls dies nicht möglich ist, muss eines der folgenden beiden Muster vorliegen:
   `- 2 - 1 - - 2 - - 1 2` oder `2 - - 1 - - 2 - - 1 2`
   In beiden Fällen gewinnt Bob nach Gewinnstrategie 5a.
   Ist die Färbung mit 2 möglich, so wählt Bob diesen Zug, und

es liegt das Muster `2 1 - - 2 - - 1 2` vor. Nun muss Bob nur noch sicherstellen, dass Alice die erste Spielerin ist, welche ein Element innerhalb dieses Musters färben muss, denn dann kann Bob diese Färbung gemäß Gewinnstrategie 4 zu Gewinnstrategie 1 ergänzen. Dies ist aber immer der Fall, solange die Elemente außerhalb dieses Musters noch gültig gefärbt werden können, denn ein Kreis C_i besteht aus $2i$ Elementen (i Knoten und i Kanten). Im bisherigen Spielverlauf wurden erst 6 Elemente gefärbt, und innerhalb des Musters gibt es 4 ungefärbte Elemente. Das heißt, es gibt außerhalb dieses Musters noch genau $2i - 6 - 4 = 2i - 10$ ungefärbte Elemente. Da diese Anzahl gerade ist, und Alice als Nächstes am Zug ist, braucht Bob nur solange die Elemente außerhalb mit beliebiger, gültiger Farbe zu färben, bis Alice gezwungen ist, ein Element innerhalb zu färben. Tritt bereits vorher der Fall ein, dass es ein noch ungefärbtes Element gibt, welches nicht mehr gültig gefärbt werden kann, so hat Bob das Spiel schon vorzeitig für sich entschieden.

3. Es liegt ein Muster der Form `2 1 - - 2 - - 1 2` vor.
   Dann färbt Bob ein beliebiges Element außerhalb des Musters mit beliebiger Farbe, und gewinnt, wie im vorangegangenen Punkt beschrieben wurde.

4. Es liegt ein Muster der Form `1 - - 2 - - 1 3` vor.
   Bob kann diese Färbung sofort wie in Gewinnstrategie 1 ergänzen, und gewinnt.

5. Es liegt ein Muster der Form `- 1 - - 2 - - 1 - - -` vor.
   Dann gewinnt Bob sofort mit Gewinnstrategie 5.

6. Es liegt ein Muster der Form `- 1 - - 2 - - 1 -` $*$ `-` vor.
   Dann gewinnt Bob nach Gewinnstrategie 5b, wenn $*$ mit `3` oder `4` gefärbt wurde, bzw. nach Gewinnstrategie 5a, wenn $*$ mit `2` gefärbt wurde.

7. Es liegt ein Muster der Form `- 1 - - 2 - - 1 - -` $*$ vor.
   Dann gewinnt Bob nach Gewinnstrategie 5b, wenn $*$ mit `3` oder `4` gefärbt wurde, bzw. nach Gewinnstrategie 5a, wenn $*$ mit `2` gefärbt wurde. Wurde $*$ mit `1` gefärbt, so gewinnt Bob nach Gewinnstrategie 5c.

8. Es liegt ein Muster der Form `- 1 - - 2 - - 1 -` $*_1$ $*_2$ vor.

Dann gewinnt Bob nach Gewinnstrategie 5e, wenn $*_1$ mit 2 und $*_2$ mit 1 gefärbt wurde, bzw. nach Gewinnstrategie 5b, wenn $*_1$ und $*_2$ mit (2 und 3) oder (1 und 3) gefärbt wurden. Wurden $*_1$ und $*_2$ mit 3 und 4 gefärbt, so kann Bob die Färbung sofort wie in Gewinnstrategie 1 ergänzen. □

Satz 2.1.11. *Für alle Kreise C_i ($i \geq 3$) gilt $\chi''_{Alice}(C_i) = 5$.*

Beweis. Dieser Satz folgt direkt aus den Lemmata 2.1.7 bis 2.1.10. □

2.2 Die totalspielchromatische Zahl eines Sterns

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die totalspielchromatische Zahl $\chi_g''(S_n)$ für jeden Stern ($n \geq 3$) gleich $n+1$ ist. Dieser Wert gilt unabhängig davon, ob Alice oder Bob das Spiel beginnt. Sterne mit $n \leq 2$ werden seperat betrachtet.

Definition 2.2.1. ***Pendel***
Als *Pendel* bezeichnen wir eine Kante inklusive dem zur Kante inzidenten Blatt. Wir nennen ein Pendel *ungefärbt*, wenn weder der Knoten noch das Blatt des Pendels gefärbt wurde.

Lemma 2.2.2. *Für einen Stern S_n ($n \geq 2$) gilt $n+1 \leq \chi_g''(S_n)$.*

Beweis. Um den Knoten vom Grad n und die n dazu inzidenten Kanten zu färben, benötigt man $n+1$ Farben. Folglich gilt aufgrund der trivialen Schranken der totalspielchromatischen Zahl $n+1 = \chi''(S_n) \leq \chi_g''(S_n)$. □

Beobachtung 2.2.3. *Gewinnstrategie von Alice auf einem Stern S_n ($n \geq 2$) bei $n+1$ gegebenen Farben.*
Alice versucht, eine Färbung des Graphen zu konstruieren, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

- In jedem Pendel wurde mindestens ein Element gefärbt. Wurde nur das Blatt gefärbt, so muss zusätzlich eine Kante des Sterns mit derselben Farbe gefärbt werden.
- Der Knoten mit Grad n wurde gültig gefärbt.

Dann hat Alice gewonnen, denn alle verbleibenden Knoten und Kanten können mit Sicherheit gültig gefärbt werden:

- Für die Färbung eines beliebigen Blattes bestehen nur max. 2 Einschränkungen, es sind aber $n+1$ Farben zur Auswahl.
- Zu jeder Kante sind $n-1$ Kanten adjazent, sowie 2 Knoten inzident. Da mit der Farbe des inzidenten Blattes bereits eine Kante gefärbt wurde, unterliegt die Färbung der betrachteten Kante nur maximal n Einschränkungen.

Mit dieser Gewinnstrategie sind wir nun in der Lage, die totalspielchromatische Zahl $\chi_g''(S_n)$ von Sternen exakt zu bestimmen.

Lemma 2.2.4. $\chi''_{Alice}(S_n) = n + 1$ *für* $(n \geq 2)$.

Beweis. Es seien $n+1$ Farben gegeben. Wir geben eine Gewinnstrategie für Alice an.
Alice eröffnet das Spiel durch Färbung des Knotens mit Grad n mit einer
(*) beliebigen Farbe 0. Nun gibt es folgende Möglichkeiten:

(i) • Bob färbt in seinem Zug eine Kante mit einer beliebigen Farbe. Alice kontert, indem sie ein Blatt eines noch ungefärbten Pendels mit derselben Farbe färbt.

(ii) • Bob färbt ein Blatt eines ungefärbten Pendels mit einer Farbe, welche bisher für keine Kante verwendet wurde. Dann kontert Alice, indem sie eine Kante eines bisher ungefärbten Pendels mit derselben Farbe färbt.

(iii) • Bob entscheidet sich für einen von den ersten beiden Punkten verschiedenen Zug. Dann färbt Alice ein Blatt eines ungefärbten Pendels mit einer beliebigen Farbe, welche bereits im bisherigen Spielverlauf für die Färbung einer Kante verwendet wurde.

Diese Punkte werden solange wiederholt, bis es keine ungefärbten Pendel mehr gibt. Färbt Bob dabei ein Element des letzten ungefärbten Pendels, so treffen wir folgende Fallunterscheidung:

- Bob hat das Blatt des letzten ungefärbten Pendels mit einer Farbe gefärbt, welche noch für keine Kante verwendet wurde: Dann kann die dazu inzidente Kante durch Alice immer gültig gefärbt werden, außer es sind bereits alle anderen $n-1$ Kanten gefärbt worden. Dieser Fall kann jedoch nicht eintreten, da es aufgrund der Spielweise von Alice nach jedem ihrer Züge mindestens ein Pendel gibt, dessen Blatt mit einer bereits für eine Kante verwendeten Farbe gefärbt wurde, während die dazu inzidente Kante noch ungefärbt ist. In (i) und (iii) wird ein solches Pendel von Alice generiert und in (ii) von Bob. Somit liegt nach dem Zug von Alice eine Färbung vor, welche die in der Gewinnstrategie beschriebenen Eigenschaften erfüllt, und Alice gewinnt das Spiel.

- Bob färbt die Kante des letzten ungefärbten Pendels mit beliebiger Farbe, oder das Blatt mit einer bereits für eine Kante verwendeten Farbe. Dann liegt eine Färbung vor, welche die Eigenschaften der in Beobachtung 2.2.3 beschriebenen Gewinnstrategie erfüllt, und Alice gewinnt das Spiel.

Somit hat Alice eine Gewinnstrategie auf S_n $(n \geq 2)$ bei $n+1$ gegebenen Farben. $\square$

Lemma 2.2.5. $\chi''_{Bob}(S_n) = n+1$ *für* $(n \geq 3)$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage, indem wir eine Gewinnstrategie für Alice bei $n+1$ gegebenen Farben angeben.
Alice verfolgt zunächst das Ziel, so schnell wie möglich den Knoten mit Grad n mit einer gültigen Farbe 0 zu färben. Färbt Bob diesen Knoten in seinem Eröffnungszug, so färbt Alice ein beliebiges anderes Element mit beliebiger Farbe. Ansonsten wird der Knoten von Alice gefärbt.
Nach dem zweiten Zug von Bob ist Alice erneut an der Reihe, und für den bisherigen Spielverlauf gibt es folgende Möglichkeiten (der Knoten mit Grad n ist bereits gefärbt):

1.

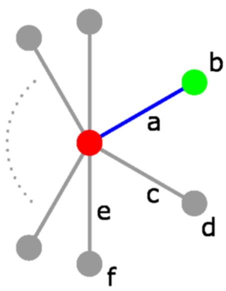


Abbildung 2.12: 1. Möglichkeit

Dann färbt Alice d blau.

2.

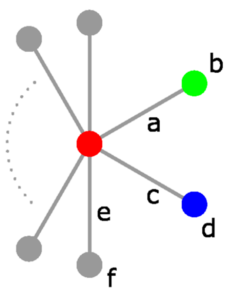


Abbildung 2.13: 2. Möglichkeit

Dann färbt Alice a blau.

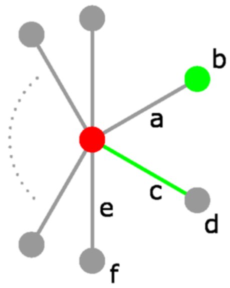
3. 

Abbildung 2.14: 3. Möglichkeit

Dann färbt Alice f grün.

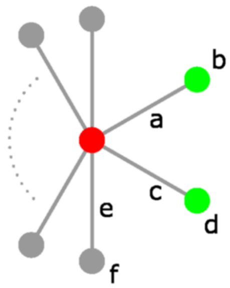
4. 

Abbildung 2.15: 4. Möglichkeit

Dann färbt Alice e grün.

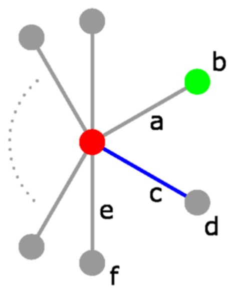
5. 

Abbildung 2.16: 5. Möglichkeit

Dann färbt Alice e grün.

6.

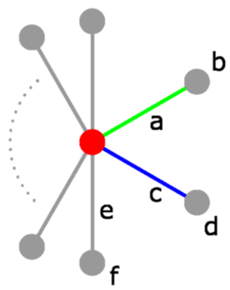


Abbildung 2.17: 6. Möglichkeit

Dann färbt Alice f blau.

Im weiteren Spielverlauf verfolgt Alice die im Beweis von Lemma 2.2.4 beschriebene Strategie ab dem mit (*) markierten Einstiegspunkt, und gewinnt damit das Spiel. □

Nun sind wir in der Lage, den Satz für Sterne S_n mit $n \geq 3$ zu formulieren.

Satz 2.2.6. $\chi''_g(S_n) = n + 1$ *für* $(n \geq 3)$.

Beweis. Dieser Satz folgt direkt aus den Lemmata 2.2.4 und 2.2.5. □

Schließlich betrachten wir noch die Sterne S_n mit $n \leq 2$.

Satz 2.2.7. $\chi''_g(S_1) = 3$, $\chi''_{Alice}(S_2) = 3$ *und* $\chi''_{Bob}(S_2) = 4$.

Beweis.

1. $\chi''_g(S_1) = 3$
   Diese Aussage ist trivial.

2. $\chi''_{\text{Alice}}(S_2) = 3$
   Dies folgt direkt aus dem Lemma 2.2.4.

3. $\chi''_{\text{Bob}}(S_2) = 4$
   Der Graph S_2 ist offenbar ein Pfad mit 3 Knoten und 2 Kanten. Wir beweisen, dass $\chi''_{\text{Bob}}(S_2) \geq 4$, indem wir eine Gewinnstrategie für Bob bei 3 Farben angeben. Bob färbt hierzu das mittlere Element: `- - 1 - -`
   Alice hat zwei Möglichkeiten: `- 2 1 - -` oder `2 - 1 - -`.
   Bob kontert mit `- 2 1 - 3` bzw. mit `2 - 1 3 -` worauf das innere

Element nicht mehr gültig gefärbt werden kann, und Bob gewinnt.
Sind 4 Farben gegeben, gewinnt Alice trivialerweise sobald das mittlere Element gefärbt wurde. $\square$

2.3 Die totalspielchromatische Zahl eines Rades

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass für die totalspielchromatische Zahl $\chi_g''(W_n)$ eines Rades W_n mit $n \geq 5$ gilt, dass $n + 1 \leq \chi_g''(W_n) \leq n + 2$.
Der spielchromatische Index von Rädern W_n konnte von Dominique Andres et al. [AHSss] exakt bestimmt werden. Es ist $\chi'_{\text{Alice}}(W_n) = \chi'(W_n) = n$ für $n \geq 6$ und $\chi'_{\text{Bob}}(W_n) = n$ für $n \geq 3$.

Für unsere Untersuchungen definieren wir zunächst einige Begriffe.

Definition 2.3.1. ***Knotenbezeichnungen, Speichen, Radkranz***
Wir bezeichnen den Knoten vom Grad n mit c, und die zu c adjazenten Knoten reihum mit $v_0, \ldots, v_{n-1}$. Die Kanten (v_i, c) nennen wir auch *Speichen* s_i. Der Begriff *Radkranz* umfasst die Kanten (v_i, v_{i+1}) sowie die Knoten v_i. Dabei ist $0 \leq i \leq n-1$ und $v_n := v_0$.

Vereinbarung 2.3.2. *Alle Element-Indizes sind im Folgenden mit modulo n zu betrachten.*

Mithilfe der totalchromatischen Zahl bestimmen wir die triviale untere Schranke der totalspielchromatischen Zahl.

Beobachtung 2.3.3. *Für ein Rad W_n $(n \geq 4)$ gilt*

$$\chi''(W_n) = n + 1$$

Beweis. Da $\Delta(W_n) = n$, gilt $n+1 \leq \chi''(W_n)$. Wir geben eine gültige Totalfärbung mit $n+1$ Farben an. Dazu wählen wir für s_i, v_{i+1} sowie (v_{i+1}, v_{i+2}) die Farbe i $(0 \leq i \leq n-1)$ und für c die Farbe n. □

Nun untersuchen wir die totalspielchromatische Zahl $\chi_g''(W_n)$ von Rädern W_n.

Beobachtung 2.3.4. *Aufgrund der trivialen Schranken der totalspielchromatischen Zahl gilt für ein Rad W_n mit $n \geq 4$*

$$n + 1 \leq \chi_g''(W_n) \leq 2n + 1$$

Lemma 2.3.5. $n + 1 \leq \chi_g''(W_n) \leq n + 2$ *für* $n \geq 6$.

Beweis. Wir beweisen diese Aussage, indem wir zeigen, dass Alice bei $n+2$ gegebenen Farben $(\text{COL} := \{1, \ldots, n+2\})$ eine Gewinnstrategie auf W_n hat. Zusätzlich definieren wir

$$\Psi := (\{\mathrm{pcol}(s_i) : 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{\mathrm{pcol}(c)\}) \setminus \{\text{ungefärbt}\},$$

also entspricht Ψ der Menge aller Farben, welche bereits zur Färbung von Speichen bzw. zur Färbung des Knotens c verwendet wurden.
Da die Färbung aller Elemente des Radkranzes nur maximal 6 Einschränkungen unterliegt, wir $n \geq 5$ voraussetzen, sowie $n+2$ Farben im Farbpool haben, hat Alice bereits dann gewonnen, wenn der Knoten c und alle Speichen gültig gefärbt wurden.
Ihre Gewinnstrategie ist in folgende drei Phasen unterteilt:

(i)
- **Phase 1**: Alice stellt sicher, dass c gefärbt wird, und für die Färbung aller noch ungefärbten Speichen maximal $|\Psi|$ Einschränkungen bestehen.

(ii)
- **Phase 2**: Nach Abschluss dieser Phase liegt eine der folgenden Situationen vor:
  1. Es gibt nur noch zwei ungefärbte Speichen[2] s_k, s_l wobei $l > k$ und $l \neq k+1$, und die Färbung dieser unterliegt nur jeweils $|\Psi|$ Einschränkungen. Das heißt, es sind noch 3 Farben verfügbar, um diese beiden Speichen zu färben.
  2. Es gibt nur noch zwei ungefärbte Speichen s_k, s_{k+1}, und die Färbung dieser unterliegt nur $|\Psi|$ Einschränkungen. Zusätzlich ist bereits die Kante (v_k, v_{k+1}) gefärbt, und es gilt $\mathrm{col}((v_k, v_{k+1})) \in \Psi$.
  3. Es gibt nur noch eine ungefärbte Speiche s_k, und die Färbung dieser Kante unterliegt $|\Psi|$ Einschränkungen. Das heißt, es sind noch 2 Farben verfügbar, um diese Speiche zu färben.
- **Phase 3**: Die verbleibenden Speichen werden gültig gefärbt, und Alice gewinnt das Spiel.

Die Umsetzung dieser Strategie im Detail:

Phase 1:

1. Beginnt Alice das Spiel, so färbt sie den Knoten c.
2. Beginnt Bob das Spiel, und färbt ...
   - ... eine Kante des Radkranzes mit einer beliebigen Farbe f, so färbt Alice den Knoten c mit derselben Farbe f.

[2]Sind $s_0 =: s_n$ und s_{n-1} noch ungefärbt, so setzen wir $k := n-1$ und $l := n$

- … den Knoten c, so färbt Alice eine beliebige Speiche mit einer beliebigen Farbe.
- … eine Speiche, so färbt Alice den Knoten c mit beliebiger Farbe.
- … einen Knoten v_i mit der Farbe 1. Dann färbt Alice den Knoten c mit einer weiteren Farbe 2.

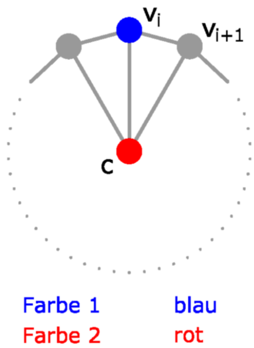


Abbildung 2.18

Nun hat Bob wiederum folgende Möglichkeiten. Er färbt …

- … eine Speiche mit der Farbe 1. Dann färbt Alice eine weitere Speiche mit einer beliebigen Farbe.
- … eine Speiche mit einer beliebigen Farbe $f \neq 1$. Dann färbt Alice die Speiche s_i mit einer beliebigen Farbe.
- … eine Kante (v_j, v_{j+1}) oder einen Knoten v_j des Radkranzes, mit einer Farbe $f \in \{1, 2\}$. Dann färbt Alice eine beliebige Speiche mit der Farbe 1.
- … eine Kante (v_j, v_{j+1}) oder einen Knoten v_k des Radkranzes, wobei $j \neq i$, $j + 1 \neq i$ und $0 \leq k \leq n - 1$, mit einer Farbe $f \notin \{1, 2\}$. Alice färbt s_i ebenfalls mit f.
- … eine der Kanten (v_{i-1}, v_i) oder (v_i, v_{i+1}) mit einer Farbe $f \notin \{1, 2\}$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass Bob die Kante (v_{i-1}, v_i) mit 3 gefärbt hat. Dann färbt Alice die Speiche s_{i+1} mit derselben Farbe 3. Nun liegt folgende Situation vor:

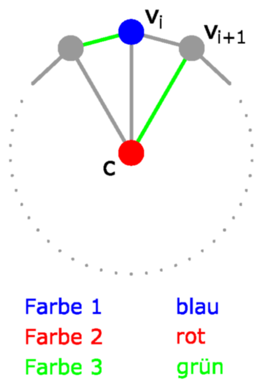


Abbildung 2.19

Bob's mögliche Spielzüge:

- Bob färbt eine Kante (v_j, v_{j+1}) oder einen Knoten v_j des Radkranzes mit einer Farbe $g \in \{1, 2, 3\}$. Alice färbt eine beliebige Speiche mit der Farbe 1.
- Bob färbt (v_j, v_{j+1}) oder v_j (wobei $j \neq i$) mit einer Farbe $g \notin \{1, 2, 3\}$. Alice färbt s_i ebenfalls mit g.
- Bob färbt (v_i, v_{i+1}) mit einer Farbe $g \notin \{1, 2, 3\}$. Alice färbt die Speiche s_i mit einer beliebigen Farbe.
- (*) Bob färbt eine Speiche s_j mit $j \neq i$ mit einer beliebigen Farbe. Alice färbt s_i mit einer beliebigen Farbe.
- (**) Bob färbt die Speiche s_i mit einer beliebigen Farbe. Dann färbt Alice eine weitere Speiche mit einer beliebigen Farbe.

Offensichtlich hat Alice nun die in (i) beschriebenen Voraussetzungen geschaffen. Sie fährt mit der Phase 2 ihrer Strategie fort.

Phase 2:
Ausgangssituation: Der Knoten c und t Speichen sind gefärbt, somit gilt $|\Psi| = t+1$. Die Färbung aller zu diesem Zeitpunkt noch ungefärbten Speichen unterliegt maximal $|\Psi|$ Einschränkungen. Phase 2 wird wiederholt, solange $t < n-2$ ist. Da $n \geq 6$ ist, ist diese Bedingung zu Beginn von Phase 2 erfüllt. Sobald $t \geq n-2$ ist, fährt Alice mit Phase 3 ihrer Strategie fort.

Bob ist am Zug, und hat dabei folgende Möglichkeiten:

- Bob färbt eine beliebige Speiche mit beliebiger Farbe. Dann färbt auch Alice eine Speiche mit einer beliebigen Farbe.

- Bob färbt ein Element des Radkranzes mit einer Farbe $f \in \Psi$. Dann färbt Alice eine Speiche mit einer beliebigen Farbe.

- Bob färbt ein Element des Radkranzes mit einer Farbe $f \notin \Psi$. Dann färbt Alice eine Speiche ebenfalls mit der Farbe f.

Dabei wählt Alice die von ihr zu färbende Speiche wie folgt:

- Sind vor ihrem Zug noch genau 3 Speichen[3] s_k, s_l, s_m $(k < l < m)$ ungefärbt, so muss Alice eine Speiche wählen, sodass eine der in (ii) beschriebenen Spielsituationen hergestellt wird. (***)
  - Ist $l \neq k+1$ und $m \neq l+1$, so kann Alice eine beliebige, zu ihrer Farbwahl passende, Speiche wählen.
  - Ist $l = k+1$ aber $m \neq l+1$, so kann Alice immer entweder die Speiche s_l oder s_k wählen.
    Ausnahme: Bob hat in seinem Zug die Kante (v_l, v_k) mit einer Farbe $f \notin \Psi$ gefärbt. Dann kann Alice aber s_m mit f färben. Somit ist eine Spielsituation gemäß (ii) hergestellt.
  - Ist $m = l+1$ aber $l \neq k+1$, so kann analog zum vorhergehenden Punkt eine Spielsituation wie in (ii) hergestellt werden.
  - Ist $l = k+1$ und $m = l+1$, dann kann ebenfalls wie im zweiten Punkt eine Spielsituation gemäß (ii) hergestellt werden.
    Ausnahme: Bob hat in seinem Zug den Knoten v_l mit einer Farbe $f \notin \Psi$ gefärbt. Dann färbt Alice die Speiche s_l mit einer beliebigen Farbe.

- Ansonsten wählt Alice eine beliebige, zu ihrer Farbwahl passende, Speiche.

Phase 3:
Bob ist am Zug. Mögliche Ausgangssituationen sind in (ii) beschrieben:

[3]Sind $s_0 =: s_n$, $s_1 =: s_{n+1}$ und s_{n-1} ungefärbt, so setzen wir $k := n-1$, $l := n$ und $m := n+1$.
Sind $s_0 =: s_n$, s_{n-1} und eine dritte Speiche s_p mit $p \neq 1$ ungefärbt, so setzen wir $k := p$, $l := n-1$ und $m := n$.

1. Es gibt nur noch zwei ungefärbte Speichen[4] s_k, s_l wobei $l > k$, $l \neq k+1$, und die Färbung dieser unterliegt jeweils nur $|\Psi|$ Einschränkungen. Das heißt, es sind noch 3 Farben verfügbar, um diese beiden Speichen zu färben.
   Bob färbt ...
   - ... ein beliebiges Element des Radkranzes mit einer Farbe $f \in \Psi$. Alice färbt s_k, und damit stehen für die Speiche s_l noch zwei Farben zur Verfügung. Somit kann Bob nicht mehr verhindern, dass Alice in ihrem nächsten Zug auch die zweite Speiche färbt.
   - ... ein beliebiges Element des Radkranzes mit einer Farbe $f \notin \Psi$. Alice färbt s_k oder s_l ebenfalls mit f. Auch hier stehen für die letzte ungefärbte Speiche noch 2 Farben zur Verfügung, und Bob kann Alice nicht mehr daran hindern, diese Speiche gültig zu färben.
   - ... eine der Speichen s_k oder s_l. Alice färbt die jeweils andere.

2. Es gibt nur noch zwei ungefärbte Speichen s_k, s_{k+1}, und die Färbung dieser unterliegt jeweils nur $|\Psi|$ Einschränkungen. Zusätzlich ist bereits die Kante (v_k, v_{k+1}) gefärbt, und es gilt $\mathrm{col}((v_k, v_{k+1})) \in \Psi$. Es stehen also noch 3 Farben zur Verfügung, um die beiden noch ungefärbten Speichen gültig zu färben.
   Alice kontert auf Bob's Züge wie in 1.) beschrieben.

3. Es gibt nur noch eine ungefärbte Speiche s_k, und die Färbung dieser Kante unterliegt $|\Psi|$ Einschränkungen. D.h. für die Färbung von s_k stehen noch 2 Farben zur Verfügung. Somit kann Bob Alice nicht mehr daran hindern, s_k gültig zu färben.

Nach dem Durchlaufen der 3 Phasen hat Alice es offenbar geschafft, alle kritischen Elemente gültig zu färben. Die gegebenenfalls noch ungefärbten Elemente des Radkranzes können in jedem Fall gültig gefärbt werden. □

Lemma 2.3.6. $n + 1 \leq \chi''_g(W_5) \leq n + 2$

Beweis. Analysieren wir den Beweis von Lemma 2.3.5, so sehen wir, dass die dort beschriebene Strategie von Alice nur an zwei Punkten bei $n = 5$ fehlschlagen kann.

[4]Sind $s_0 =: s_n$ und s_{n-1} noch ungefärbt, so setzen wir $k := n - 1$ und $l := n$

- Die erste Stelle ist mit (*) markiert. Ohne Modifizierung dieser Stelle wäre es Bob möglich, eine Spielsituation herzustellen, welche nicht in (ii) beschrieben ist. Um dies zu verhindern, ersetzen wir die mit (*) markierte Stelle durch:
  - Bob färbt eine Speiche s_j mit $j \neq i$ mit einer beliebigen Farbe $g \neq 1$. Alice wählt eine Speiche gemäß (***) und färbt diese mit der Farbe 1.
  - Bob färbt eine Speiche s_j mit der Farbe 1. Alice färbt ein Element des Radkranzes mit einer Farbe $g \in \Psi$.
- Die zweite Stelle ist mit (**) markiert, und muss aus dem selben Grund leicht angepasst werden. Es reicht aus, dass Alice an dieser Stelle die zu färbende Speiche gemäß (***) wählt. □

Damit sind wir in der Lage, den Satz für Räder W_n mit $n \geq 5$ zu formulieren.

Satz 2.3.7. $n + 1 \leq \chi''_g(W_n) \leq n + 2$ *für* $n \geq 5$

Beweis. Dies folgt direkt aus den Lemmata 2.3.5 und 2.3.6, sowie der Beobachtung 2.3.4. □

2.4 Die totalspielchromatische Zahl von vollständigen Graphen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass für einen vollständigen Graph K_n mit $n \geq 4$ Knoten $\chi_g''(K_n) \geq n+1$ (unabhängig davon, ob Alice oder Bob das Spiel beginnt) und für den K_4 $\chi_{\text{Alice}}''(K_4) = 6$ bzw. $\chi_{\text{Bob}}''(K_4) = 5$ gilt. Der Graph K_3 wird gesondert betrachtet. Im Anschluss wird eine Modifikation des K_4 (Entfernung einer Kante) untersucht.

Zunächst bestimmen wir die totalchromatische Zahl $\chi''(K_n)$ des vollständigen Graphen K_n, und erhalten damit die triviale untere Schranke der totalspielchromatischen Zahl $\chi_g''(K_n)$.

Beobachtung 2.4.1. *Für einen vollständigen Graph K_n gilt*

$$\chi_g''(K_n) \geq \begin{cases} n+1, & \textit{wenn } n \textit{ gerade,} \\ n, & \textit{wenn } n \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis.
Denn $\chi_g''(G) \geq \chi''(G)$, und es gilt $\chi''(K_n) = \begin{cases} n+1, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ n, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Die folgende Beweisidee entstammt dem Artikel [BCC67]:
Der vollständige Graph $G = (V, E)$ hat n Knoten und $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$ Kanten. Die n Knoten bezeichnen wir mit $v_0, \ldots, v_{n-1}$. Die Indizes der Knoten sind jeweils modulo n zu betrachten. Grundsätzlich muss jeder Knoten mit einer eigenen Farbe gefärbt werden, da alle Knoten paarweise adjazent sind.

- Bei ungeradem n:
  Wurde ein Knoten v_i gefärbt, so kann im induzierten Teilgraph G_i' mit der Knotenmenge $V_i' = \{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_{n-1}\}$ noch zusätzlich ein perfektes Matching $M_i := \left\{(v_{i-q}, v_{i+q}) \mid q = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$ mit derselben Farbe gefärbt werden. Man kann leicht sehen, dass die Matchings M_i $(0 \leq i \leq n-1)$ voneinander unabhängig sind, und $\bigcup_{0 \leq i \leq n-1} M_i = E$.
  Wir können also den vollständigen Graph K_n (n ungerade) mit n Farben gültig färben, indem wir den Elementen in $\{v_i\} \cup M_i$ jeweils die Farbe i zuweisen $(0 \leq i \leq n-1)$.

- Bei geradem n:
  Da keine unabhängige Menge von Knoten und Kanten mehr als $\frac{n}{2}$ Elemente enthalten kann, und $|V \cup E| = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, muss offenbar

$\chi''(K_n) \geq n+1$ gelten. Fügt man dem Graph K_n einen weiteren Knoten v_n, sowie die Kanten (v_i, v_n) $(0 \leq i \leq n-1)$ hinzu, so erhält man den vollständigen Graph K_{n+1} mit ungerader Knotenanzahl, und da K_n ein Teilgraph von K_{n+1} ist, gilt offensichtlich $\chi''(K_n) \leq \chi''(K_{n+1}) = n+1$. Wir haben somit $\chi''(K_n) = n+1$ gezeigt.
Eine Färbung mit $n+1$ Farben sieht folgendermaßen aus. Wird ein Knoten v_i gefärbt, so existiert im induzierten Teilgraph mit der Knotenmenge $V_i' = \{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_{n-1}\}$ kein perfektes Matching, da die Knotenanzahl ungerade ist. Es kann jedoch ein Matching mit maximal $\frac{n-2}{2}$ Kanten gefunden werden. Färbt man jedes Paar aus Knoten v_i und gefundenem maximalem Matching in (V_i', E_i') mit jeweils einer Farbe, so hat man unter Verwendung von n Farben n Knoten und $\frac{n(n-2)}{2}$ Kanten gefärbt. Nun sind noch $\frac{n}{2}$ Kanten übrig, welche mit der $(n+1)$-ten Farbe gefärbt werden können, sofern keine zwei Kanten adjazent sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn diese Kanten ein perfektes Matching in E sind. □

2.4.1 Eine untere Schranke für vollständige Graphen mit 4 oder mehr Knoten

Wir beweisen, dass für einen vollständigen Graph K_n mit $n \geq 4$ Knoten $\chi_g''(K_n) \geq n+1$ gilt.
Ingo Brinkmeier [Bri08] untersuchte den spielchromatischen Index von vollständigen Graphen mit verschiedenen Ansätzen. Dabei konnte er u.A. zeigen, dass $\chi_g'(K_n) \geq n$ $(n \geq 3)$ ist.

Lemma 2.4.2. *$\chi_g''(K_n) \geq n+1$ für $n \geq 5$, wobei n ungerade ist.*

Beweis. Wir beweisen diese Aussage, indem wir zeigen, dass Bob bei n gegebenen Farben eine Gewinnstrategie auf dem K_n hat. Die zugrundeliegende Beweisidee wurde von Ingo Brinkmeier [Bri08] verwendet, um den spielchromatischen Index $\chi_g'(K_{2k})$ abzuschätzen. Durch einige Anpassungen ist es möglich, auch für $\chi_g''(K_{2k+1})$ eine untere Schranke anzugeben.
Um den Graph K_n (n ungerade) mit n Farben vollständig zu färben, muss mit jeder Farbe die maximale Anzahl von genau einem Knoten und $\frac{n-1}{2}$ Kanten gefärbt werden. Dazu muss, wie in Beobachtung 2.4.1 beschrieben, jeweils ein Knoten v_i und ein zugehöriges perfektes Matching des induzierten Teilgraphen $G_i' = (V_i', E_i')$ mit Knotenmenge $V_i' = \{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}\}$ und

Kantenmenge E_i' mit einer Farbe gefärbt werden. Bob's Strategie ist es, die Färbung eines solchen perfekten Matchings in E_i' zu verhindern.

- **Phase 1**: Bob färbt hierzu in seinem ersten Zug einen beliebigen Knoten v_i mit beliebiger Farbe i. Falls Alice das Spiel beginnt und ein Element mit j färbt, wählt Bob eine Farbe $i \neq j$.

- **Phase 2**: Zu Beginn seiner weiteren Züge überprüft Bob die Anzahl aller Kanten, welche bereits mit i gefärbt wurden. Nun gibt es folgende Fallunterscheidungen:
  - Die Anzahl ist kleiner als $\frac{n-1}{2} - 3$: Bob färbt eine weitere Kante mit i, und führt seinen nächsten Spielzug wiederum gemäß *Phase 2* durch.
  - Die Anzahl ist gleich $\frac{n-1}{2} - 3$: Bob färbt eine weitere Kante mit i, und fährt anschließend mit *Phase 3* seiner Strategie fort.
  - Die Anzahl ist gleich $\frac{n-1}{2} - 2$: Bob färbt ein Element gemäß (***) in *Phase 3* und fährt anschließend mit *Phase 3* seiner Strategie fort.
  - Die Anzahl ist größer als $\frac{n-1}{2} - 2$: Bob kontert sofort, wie in *Phase 3* beschrieben.

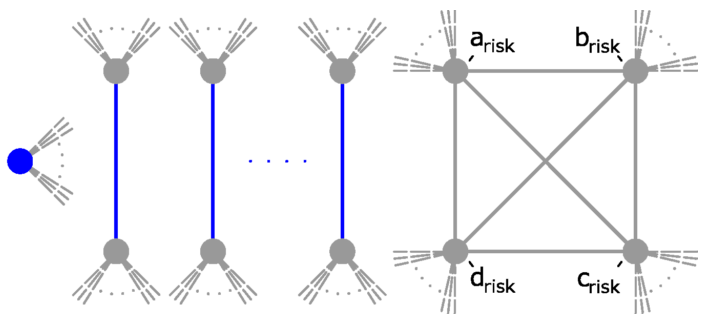


Abbildung 2.20: Nach Beendigung der Phase 2 sieht das Spielfeld grundsätzlich aus, wie in dieser Abbildung dargestellt. Es können durchaus einige der grau dargestellten Elemente bereits von Alice mit Farben ungleich i gefärbt worden sein.

- **Phase 3**: In den nächsten Runden hat Alice folgende Möglichkeiten:
  - Alice färbt eine Kante $e \in \binom{\{a_{\text{risk}}, b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}}, d_{\text{risk}}\}}{2}$ mit der Farbe i: Dann (*)

ist die letzte zum perfekten Matching gehörige Kante eindeutig bestimmt, und Bob kann die Kante (sofern sie nicht bereits gefärbt wurde) mit einer beliebigen anderen Farbe färben. Somit hat Bob das Spiel gewonnen.

(**) – Alice färbt eine Kante $e \in \binom{\{a_{\text{risk}}, b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}}, d_{\text{risk}}\}}{2}$ mit einer Farbe ungleich i: Dann überprüft Bob, ob die eindeutig bestimmte Kante $f \in \binom{\{a_{\text{risk}}, b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}}, d_{\text{risk}}\}}{2}$, welche nicht mit e adjazent ist, noch ungefärbt ist. Falls ja, wird sie von Bob mit der Farbe i gefärbt, und Bob hat das Spiel gewonnen. Ansonsten kontert Bob wie in (***).

(***) – Alice färbt ein beliebiges anderes Element: Bob färbt eine der Kanten $(a_{\text{risk}}, b_{\text{risk}})$, $(a_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$, $(b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$ mit einer beliebigen Farbe ungleich i. Sobald alle drei Kanten gefärbt sind, kann kein perfektes Matching mehr mit i gefärbt werden, und Bob gewinnt das Spiel.

Bei Erfolg dieser Strategie benötigt Bob maximal $1 + (\frac{n-1}{2} - 2) + 3 = \frac{n+3}{2}$ Züge, um das Spiel für sich zu entscheiden.

Alice kann Bob offensichtlich nicht daran hindern, die in Abbildung 2.20 dargestellte Situation herzustellen. Anschließend besteht ihre einzige Chance darin, zu verhindern, dass Bob die Kanten $(a_{\text{risk}}, b_{\text{risk}})$, $(a_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$, $(b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$ mit einer beliebigen Farbe ungleich i färbt. Dabei darf sie aber selbst keine dieser Kanten mit i färben, da Bob ansonsten nach (*) gewinnt. Deshalb muss Alice versuchen, für die Färbung mindestens einer dieser Kanten $n-1$ Einschränkungen zu schaffen, sodass sie nur noch mit der Farbe i gefärbt werden kann. O.B.d.A. nehmen wir an, dass es Alice gelingt, $n-1$ Einschränkungen für die Kante $(b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$ zu generieren. Da diese Kante nur noch mit i gefärbt werden kann, kontert Bob, indem er die Kante $(a_{\text{risk}}, d_{\text{risk}})$ mit einer Farbe ungleich i färbt. Dies ist möglich, da Alice maximal $\frac{n+3}{2}$ Züge hat, um $n-1$ Einschränkungen für $(b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$ zu erzeugen. Gleichzeitig müsste sie ebensoviele Einschränkungen für $(a_{\text{risk}}, d_{\text{risk}})$ schaffen, wofür dann nur mehr $\frac{n+3}{2} - (n-1) = \frac{5-n}{2}$ Züge zur Verfügung stehen. Es gibt jedoch 4 Kanten, welche sowohl zu $(b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$ als auch zu $(a_{\text{risk}}, d_{\text{risk}})$ adjazent sind. Diese können durch Alice während *Phase 1* und *Phase 2* gefärbt werden. Somit könnte sie für $(a_{\text{risk}}, d_{\text{risk}})$ $\frac{5-n}{2} + 4 = \frac{13-n}{2}$ Einschränkungen generieren, es ist aber $\frac{13-n}{2} < n-1$ für $(n \geq 6)$. Im Fall $n = 5$ bestehen *Phase 1* und *Phase 2* zusammen nur aus einem Zug. Somit kann Alice nur $\frac{5-n}{2} + 1 = 1$ Einschränkung für $(a_{\text{risk}}, d_{\text{risk}})$ erzeugen. Bob's Antwortzug ist daher in jedem Fall erlaubt, und somit gewinnt er das Spiel, da im weiteren

Spielverlauf entweder die Kante $(b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$ mit i gefärbt wird, und dadurch der Fall (*) eintritt, oder zwei andere Kanten $e, f \in \binom{\{a_{\text{risk}}, b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}}, d_{\text{risk}}\}}{2}$ mit i gefärbt werden, und dadurch $(b_{\text{risk}}, c_{\text{risk}})$ nicht mehr zulässig gefärbt werden kann.
Bob's Strategie setzt offenbar voraus, dass der Graph mindestens 5 Knoten enthält. Deshalb ist $n \geq 5$ Voraussetzung für dieses Lemma. □

Satz 2.4.3. $\chi''_g(K_n) \geq n+1$ *für* $n \geq 4$ *unabhängig davon, ob Bob oder Alice das Spiel beginnt.*

Beweis. Dies folgt direkt mit Lemma 2.4.2 und Beobachtung 2.4.1. □

2.4.2 Vollständige Graphen mit maximal 4 Knoten

In diesem Abschnitt untersuchen wir die vollständigen Graphen K_1, K_2, K_3 und K_4.

Satz 2.4.4. $\chi''_g(K_1) = 1$, $\chi''_g(K_2) = 3$

Beweis. Diese Aussagen sind trivial. □

Satz 2.4.5. $\chi''_{Alice}(K_3) = 5$ *und* $\chi''_{Bob}(K_3) = 3$

Beweis. Offensichtlich ist der Graph K_3 ident mit dem Graph C_3. In Lemma 2.1.7 haben wir bereits bewiesen, dass $\chi''_{\text{Alice}}(C_3) = 5$, und somit gilt auch $\chi''_{\text{Alice}}(K_3) = 5$.
$\chi''_{\text{Bob}}(K_3) = 3$ zeigen wir, indem wir eine Gewinnstrategie für Alice bei drei gegebenen Farben angeben. Hierzu verwendet Alice für jeden ihrer Züge das Schema in folgender Abbildung.

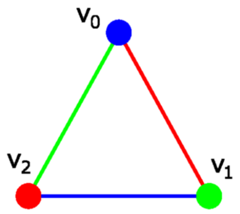


Abbildung 2.21

In diesem wird jede Farbe für genau zwei Elemente verwendet. Je zwei Elemente, welche im Schema mit derselben gefärbt sind, nennen wir *Paarung*. Nach jedem von Bob's Zügen sieht Alice im Schema nach, in welcher Paarung das von ihm gerade gefärbte Element liegt, und färbt das zweite Element der Paarung mit der von Bob verwendeten Farbe. Nach drei Spielrunden gelangt Alice zu einem vollständig gefärbten Graphen (wie in Abbildung 2.21 dargestellt) mit 3 Farben und gewinnt das Spiel. □

Anmerkung 2.4.6. *Für den vollständigen Graph K_4 gilt $5 \leq \chi''_g(K_4)$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Beobachtung 2.4.1, denn $\chi''(G) \leq \chi''_g(G)$. □

Beobachtung 2.4.7. *Es gibt eine Totalfärbung des K_4 mit 5 Farben.*

Beweis. Diese Färbung wurde für den allgemeinen Fall (K_n) bereits in Beobachtung 2.4.1 beschrieben. Es ist einfach zu sehen, dass im K_4 nur max. 2 Elemente mit derselben Farbe gefärbt werden können. Dabei können entweder zwei Kanten (perfektes Matching), oder eine Kante und ein Knoten dieselbe Farbe erhalten. Da jeder Knoten mit einer anderen Farbe gefärbt werden muss, und je Knoten nur eine Kante gefärbt werden kann, bleiben nach Färbung dieser Elemente noch zwei Kanten übrig. Sofern diese beiden Kanten ein perfektes Matching von K_4 sind, können sie mit der 5. Farbe gefärbt werden.

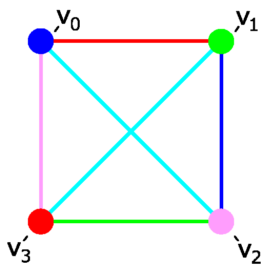


Abbildung 2.22: gültige Totalfärbung mit 5 Farben.

Satz 2.4.8. $\chi''_{Bob}(K_4) = 5$.

Beweis. Alice verwendet für jeden ihrer Züge das Schema in Abbildung 2.22. In diesem wird jede Farbe für genau zwei Elemente verwendet. Je zwei Elemente, welche im Schema mit derselben gefärbt sind, nennen wir *Paarung*. Bob beginnt das Spiel, und färbt ein beliebiges Element. Alice sieht im Schema nach, in welcher Paarung das Element liegt, und färbt das zweite Element der Paarung mit der von Bob verwendeten Farbe. In weiterer Folge ist Bob gezwungen, eine neue Farbe zu verwenden, und damit das erste Element einer weiteren Paarung zu färben. Erneut sieht Alice im Schema nach, und färbt das zugehörige zweite Element mit derselben Farbe. Fährt Alice mit dieser Taktik fort, so gelangt sie nach 5 Zügen zu einem vollständig gefärbten Graphen (wie in Abbildung 2.22 dargestellt) mit 5 Farben und gewinnt das Spiel. □

Satz 2.4.9. $\chi''_{Alice}(K_4) = 6$.

Beweis. Der Beweis ist in zwei Teile gegliedert:

- $\chi''_{\text{Alice}}(K_4) \geq 6$:
  Es seien 5 Farben gegeben. Wir beweisen diese Aussage, indem wir eine Gewinnstrategie für Bob angeben.
  Alice eröffnet das Spiel, und Bob kopiert in den ersten drei Runden die von Alice im Beweis von Satz 2.4.8 verwendete Strategie.
  Im vierten Zug ist Alice gezwungen, ein Element mit einer 4. Farbe zu färben. Bob sieht im Schema nach, in welcher Paarung das Element liegt, und färbt das zweite Element der Paarung mit der 5. Farbe.
  Im Schema kann man leicht nachprüfen, dass man zu jeder beliebigen Paarung P in jeder weiteren Paarung genau ein Element a finden kann, zu welchem beide Elemente der ersten Paarung adjazent bzw. inzident sind. Ist P die Paarung, welche in der 4. Runde von Bob mit zwei unterschiedlichen Farben gefärbt wurde, so kann das Element a nun nicht mehr gültig gefärbt werden, da bereits alle 5 Farben für die hierzu inzidenten und adjazenten Elemente verwendet wurden.
  Da Bob damit eine Gewinnstrategie auf K_4 mit 5 Farben hat, wenn Alice das Spiel eröffnet, ist diese Teilaussage bewiesen.

- $\chi''_{\text{Alice}}(K_4) \leq 6$:
  Es seien 6 Farben gegeben. Wir beweisen diese Aussage, indem wir eine Gewinnstrategie für Alice angeben. Alice eröffnet das Spiel, indem sie den Knoten v_0 mit der ersten Farbe färbt. Nun ist Bob an der Reihe, und wir treffen folgende Fallunterscheidungen:

  – Bob färbt einen weiteren Knoten. Alice kontert darauf durch Färbung einer Kante, welche weder mit dem durch Alice, noch mit dem durch Bob gefärbten Knoten inzident ist, mit der bereits eingangs von ihr verwendeten Farbe. Durch Verschiebung und Neunummerierung der Knoten liegt nun folgende Situation vor.: (*)

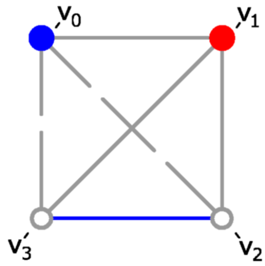


Abbildung 2.23: Kanten, deren Färbung nur 5 oder weniger Einschränkungen unterliegen, sind strichliert dargestellt. Knoten, deren Färbung nur 5 oder weniger Einschränkungen unterliegen, sind als Ringe dargestellt. Die so markierten Knoten und Kanten können somit im restlichen Spielverlauf immer gültig gefärbt werden.

Bob ist als nächstes an der Reihe, und färbt ein beliebiges Element mit beliebiger Farbe. Alice's Hauptaugenmerk gilt den Kanten (v_0, v_2), (v_0, v_3). Wird eine dieser Kanten rot gefärbt, so unterliegt die Färbung zwei weiterer Kanten nur noch max. 5 Einschränkungen, und somit ist nur noch eine Kante e_{risk} übrig, mit welcher Bob das Spiel noch für sich entscheiden könnte.
Angenommen Bob hat in seinem letzten Zug eine der genannten Kanten rot gefärbt, dann kann Alice die Kante e_{risk} mit einer beliebigen Farbe färben, da in diesem Spiel bisher nur 2 Farben verwendet wurden. Nun unterliegt die Färbung jedes noch ungefärbten Elements im weiteren Spielverlauf maximal 5 Einschränkungen, wonach Alice das Spiel für sich entschieden hat.
Hat Bob in seinem letzten Zug keine der genannten Kanten rot gefärbt, dann kann Alice dies in ihrem Zug nachholen, und somit gibt es nur mehr eine kritische Kante e_{risk}. Nun ist Bob an der Reihe, und färbt erneut ein beliebiges Element mit beliebiger Farbe. Hat Bob die Kante e_{risk} bereits in einem seiner letzten beiden Züge gefärbt, so hat Alice bereits das Spiel gewonnen. Ansonsten kann Alice diese Kante in ihrem Zug mit einer gültigen Farbe färben, da im bisherigen Spielverlauf erst maximal 4 Farben verwendet wurden, und gewinnt damit das Spiel.

– Bob färbt eine Kante mit der bereits von Alice verwendeten Farbe.

Dann kann wiederum durch Verschiebung sowie Neunummerierung der Knoten und anschließender Färbung eines weiteren Knotens durch Alice dieselbe Situation hergestellt werden, wie in Abbildung 2.23 dargestellt. In Folge gewinnt Alice das Spiel mit der in (*) beschriebenen Strategie.

– Bob färbt eine Kante mit einer noch nicht verwendeten Farbe. Diese Kante ist Teil eines perfekten Matchings, und Alice färbt die zweite Kante des Matchings mit derselben Farbe. Nach Verschiebung und Neunummerierung der Knoten liegt nun folgende Situation vor:

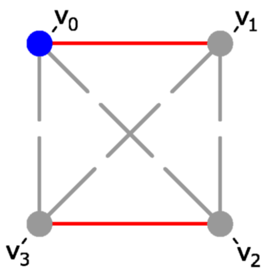


Abbildung 2.24

Die Färbung jeder Kante unterliegt somit im weiteren Spielverlauf maximal 5 Einschränkungen.
Bob ist als nächstes an der Reihe, und färbt ein beliebiges Element mit beliebiger Farbe. Alice's Hauptaugenmerk gilt diesmal den Kanten (v_1, v_2), (v_1, v_3). Wird eine dieser Kanten blau gefärbt, so unterliegt die Färbung zwei weiterer Knoten nur noch max. 5 Einschränkungen, und somit ist nur noch ein Knoten v_{risk} übrig, mit welchem Bob das Spiel noch für sich entscheiden könnte.
Hat Bob in seinem Zug bereits eine dieser Kanten blau gefärbt, so färbt Alice den Knoten v_{risk} mit einer weiteren Farbe und gewinnt das Spiel.
Hat Bob in seinem Zug keine dieser Kanten blau gefärbt, so holt Alice dies in ihrem Zug nach. Nach einem weiteren Zug von Bob sind bisher insgesamt maximal 4 Farben im Spiel verwendet worden, und somit findet Alice eine gültige Färbung für den Knoten v_{risk} sofern dieser nicht bereits von Bob gefärbt wurde. Damit hat Alice dieses Spiel für sich entschieden.

Insgesamt ist damit die Aussage bewiesen. □

2.4.3 Der vollständige Graph mit 4 Knoten in dem eine Kante fehlt

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die totalspielchromatische Zahl $\chi_g''(G)$ für den Graph, der aus dem vollständigen Graph K_4 entsteht, indem man eine Kante entfernt, gleich 5 ist.

Dabei beweisen wir zunächst, dass $\chi_g''(G) \geq 5$ ist, und zeigen im Anschluss, dass sowohl $\chi_{\text{Alice}}''(G) = 5$ als auch $\chi_{\text{Bob}}''(G) = 5$ gilt.

Beobachtung 2.4.10. *Für den betrachteten Graphen G gilt aufgrund der trivialen Schranken der totalspielchromatischen Zahl* $4 \leq \chi_g''(G) \leq 7$.

Lemma 2.4.11. $\chi_g''(G) \geq 5$

Beweis.

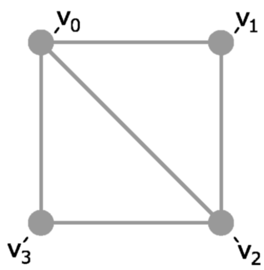


Abbildung 2.25: Wir bezeichnen die Knoten des Graphen wie in der Grafik dargestellt.

Im vollständigen Graph K_4 kann jede Farbe nur für maximal 2 Elemente verwendet werden. Dadurch, dass im vorliegenden Graph eine Kante entfernt wurde, können sowohl die Kante (v_0, v_2) als auch die Knoten v_1 und v_3 mit derselben Farbe gefärbt werden. Sind diese 3 Elemente gefärbt, so bleiben 6 ungefärbte Elemente übrig, welche mit 3 weiteren Farben gefärbt werden können.
Diese Färbung würde nur 4 Farben benötigen. Alice kann jedoch nicht verhindern, dass Bob für die Färbung der Elemente (v_0, v_2), v_1, v_3 zwei oder mehr Farben verwendet, was zur Folge hat, dass Alice für eine Gewinnstrategie auf diesem Graph mindestens 5 Farben benötigt. □

Lemma 2.4.12. $\chi_{Alice}''(G) = 5$.

Beweis. Wir geben für Alice eine Gewinnstrategie für das Spiel mit 5 Farben an, bei dem Alice anfängt.

Alice beginnt das Spiel, und färbt die Kante (v_0, v_2) mit einer beliebigen Farbe. Im weiteren Spielverlauf verwendet Alice für jeden ihrer Züge das folgende Schema.

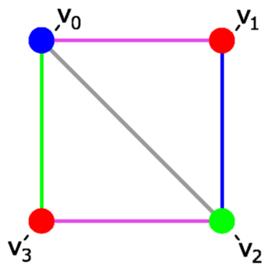


Abbildung 2.26: Färbungsschema

In diesem wird jede Farbe für genau zwei Elemente verwendet. Je zwei Elemente, welche im Schema mit derselben gefärbt sind, nennen wir *Paarung*. Bob ist am Zug und färbt ein beliebiges Element. Alice sieht im Schema nach, in welcher Paarung das Element liegt, und färbt das zweite Element der Paarung mit der von Bob verwendeten Farbe.
In weiterer Folge ist Bob gezwungen, eine neue Farbe zu verwenden (außer bei Färbung der Knoten v_1, v_3), und damit das erste Element einer weiteren Paarung zu färben. Erneut sieht Alice im Schema nach, und färbt das zugehörige zweite Element mit derselben Farbe. Fährt Alice mit dieser Taktik fort, so gelangt sie nach 5 Zügen zu einem vollständig gefärbten Graph mit maximal 5 Farben, und gewinnt das Spiel. □

Lemma 2.4.13. $\chi''_{Bob}(G) = 5$.

Beweis. Es seien 5 Farben gegeben. Wir beweisen die Aussage, indem wir eine Gewinnstrategie für Alice angeben.
Grundsätzlich ist festzuhalten, dass die Färbung der Knoten v_0, v_2, sowie der Kante (v_0, v_2) jeweils maximal 6 Einschränkungen unterliegen. Die Färbung der restlichen Kanten unterliegt maximal 5 Einschränkungen, und die Färbung der Knoten v_1, v_3 unterliegt nur 4 Einschränkungen.
Bob eröffnet das Spiel, und färbt ein beliebiges Element. Unabhängig davon, welches Element von Bob gefärbt wurde, kann Alice aufgrund der Symmetrie des Graphen durch Verschiebung und Neunummerierung der Knoten, sowie anschließender Färbung eines Elements, einen der beiden folgenden Spielstände herstellen, und Bob ist am Zug:

1. Bob hat einen Knoten vom Grad 2 oder die Kante (v_0, v_2) gefärbt.

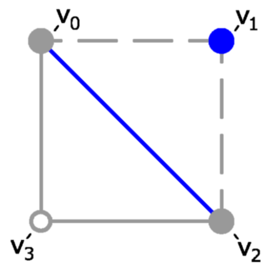


Abbildung 2.27: Kanten, deren Färbung nur 4 oder weniger Einschränkungen unterliegen, sind strichliert dargestellt.
Knoten, deren Färbung nur 4 oder weniger Einschränkungen unterliegen, sind als Ringe dargestellt.
Die so markierten Knoten und Kanten können somit im restlichen Spielverlauf immer gültig gefärbt werden.

Offensichtlich hat Alice das Spiel gewonnen, sobald der Knoten v_3 ebenfalls mit blau gefärbt wurde. Da jedoch Bob am Zug ist, kann er das verhindern, indem er diesen Knoten mit einer anderen Farbe färbt. Alice kontert, indem sie die Kante (v_0, v_1) ebenfalls mit der eben von Bob verwendeten Farbe färbt.

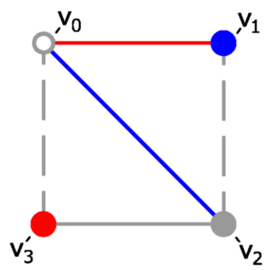


Abbildung 2.28

Nun hat Bob folgende Möglichkeiten:

- Bob färbt die Kante (v_0, v_3) oder (v_1, v_2): Alice färbt die jeweils andere mit derselben Farbe. Nun unterliegt jedes noch ungefärbte Element mit Ausnahme des Knotens v_2 nur noch 4 oder weniger Einschränkungen. Bob muss nun ein weiteres Element mit einer vierten Farbe färben. Fällt seine Wahl auf den Knoten v_2, so hat Alice bereits gewonnen. Ansonsten färbt Alice in ihrem Zug den

Knoten v_2 mit der fünften Farbe, und gewinnt das Spiel.

- Bob färbt den Knoten v_2: Alice färbt die Kante (v_0, v_3) mit derselben Farbe, und da nun die Färbung jedes noch ungefärbten Elements 4 oder weniger Einschränkungen unterliegt, hat Alice das Spiel gewonnen.
- Bob färbt den Knoten v_0 oder die Kante (v_2, v_3): Alice färbt das jeweils andere Element mit derselben Farbe, und da nun die Färbung jedes noch ungefärbten Elements vier oder weniger Einschränkungen unterliegt, hat Alice das Spiel gewonnen.

2. Bob hat einen Knoten vom Grad 3 oder eine Außenkante gefärbt.

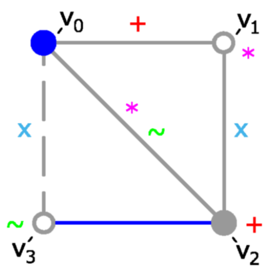


Abbildung 2.29

Auf Bob's folgenden Zug kontert Alice, indem sie das zweite Element, welches mit demselben Symbol markiert ist, mit der gerade von Bob verwendeten Farbe färbt. Wurde von Bob die Kante (v_0, v_2) gefärbt, so färbt Alice den Knoten v_3 mit derselben Farbe.

- Wurden die mit $*$ oder $+$ markierten Elemente gefärbt, so hat Alice bereits gewonnen.
- Wurden die mit $\times$ markierten Elemente gefärbt, so unterliegt jedes noch ungefärbte Element mit Ausnahme des Knotens v_2 maximal 4 Einschränkungen. Bob muss nun ein weiteres Element mit einer dritten Farbe färben. Fällt seine Wahl auf den Knoten v_2, so hat Alice bereits gewonnen. Ansonsten färbt Alice in ihrem Zug den Knoten v_2 mit der vierten Farbe, und gewinnt das Spiel.
- Wurden die mit $\sim$ markierten Elemente gefärbt, so muss Bob in seinem Zug den Knoten v_1 mit einer dritten Farbe färben. Ansonsten kann Alice diesen Knoten ebenfalls mit der zweiten Farbe färben, wodurch für die Färbung aller verbleibenden Elemente nur noch

maximal 4 Einschränkungen bestehen würden, und Bob somit verloren hätte. Alice kontert, indem sie die Kante (v_0, v_3) mit derselben Farbe färbt. Jetzt liegt folgende Situation vor:

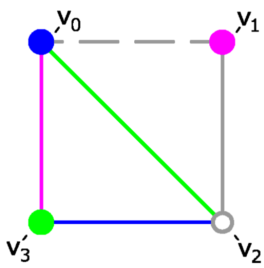


Abbildung 2.30

Es kann nur noch die Kante (v_1, v_2) gefährlich werden. Wird diese Kante im nächsten Zug von Bob gefärbt, so hat Alice gewonnen. Entscheidet sich Bob für ein anderes Element, so kann Alice diese Kante mit der fünften Farbe färben, und gewinnt wiederum das Spiel. □

Satz 2.4.14. $\chi_g''(G) = 5$ *unabhängig davon, ob Bob oder Alice das Spiel beginnt.*

Beweis. Dies folgt direkt aus den Lemmata 2.4.11, 2.4.12 und 2.4.13. □

2.5 Die totalspielchromatische Zahl eines Baumes

In diesem Abschnitt werden wir zwei Untergruppen der Bäume näher untersuchen. Namentlich sind dies Raupen und Hummer.
Für die spielchromatische Zahl von Wäldern G_W konnte bereits $\chi_g(G_W) \leq 4$ gezeigt werden. Zu diesem Resultat gelangten Ulrich Faigle et al. [FKKT93] im Jahr 1993.
Der spielchromatische Index von Bäumen G_B wurde bis dato noch nicht exakt bestimmt. Leizhen Cai und Xuding Zhu [CZ01] konnten jedoch 2001 beweisen, dass für Wälder G_W $\chi'(G_W) \leq \Delta(G_W) + 2$ gilt. Im Jahr 2002 haben Peter Erdös et al. [EFHK02][5] gezeigt, dass für Wälder G_W mit $\Delta(G_W) \geq 6$ $\chi'(G_W) \leq \Delta(G_W) + 1$ gilt. Ein Jahr später wurde von Dominique Andres [And03] bewiesen, dass diese Schranke auch für G_W mit $\Delta(G_W) \leq 3$ gilt, und 2006 konnte diese Schranke von Dominique Andres [And06a] auch für Wälder G_W mit $\Delta(G_W) = 5$ bewiesen werden.

Für unsere Untersuchungen der totalspielchromatischen Zahl bestimmen wir zunächst die totalchromatische Zahl eines beliebigen Baumes.

Definition 2.5.1. ***Knotenbezeichnung, Wurzel, Knoten und Kanten l-ter Ebene***

- Wir wählen einen beliebigen Knoten, und bezeichnen diesen als *Wurzel* v_1.
- Alle zur Wurzel adjazenten Knoten erhalten einen Doppelindex. Der erste Index ist gleich dem der Wurzel. Der zweite Index wird durchnummeriert $(v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1})$. Diese Knoten werden auch *Knoten erster Ebene* genannt. Die Kanten $(v_1, v_{1,j})$ werden als *Kanten erster Ebene* bezeichnet.
- Die zu den Knoten der $(l-1)$-ten Ebene adjazenten Knoten (welche bisher noch nicht bezeichnet wurden), erhalten einen Mehrfachindex mit $(l+1)$ Stellen. Die ersten l Stellen des Index sind gleich dem Index des adjazenten Knotens der $(l-1)$-ten Ebene. Die letzte Stelle des Index wird wiederum durchnummeriert. Wir nennen diese Knoten $v_{i_1,\ldots,i_l,j}$ *Knoten l-ter Ebene*, und die Kanten $(v_{i_1,\ldots,i_l}, v_{i_1,\ldots,i_l,j})$ *Kanten l-ter Ebene.*
- Die Ebenen sind mit $1, \ldots, n$ nummeriert.

[5]Dieser Artikel wurde 2004 veröffentlicht: [EFHK04]

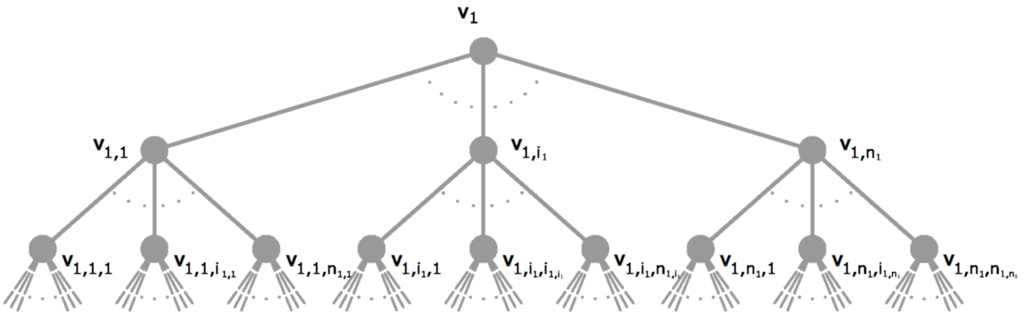


Abbildung 2.31: grafische Veranschaulichung

Satz 2.5.2. *Für einen Baum G mit $\Delta(G) \geq 2$ gilt:* $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$

Beweis. Es seien ein zunächst gänzlich ungefärbter Baum G sowie $\Delta(G)+1$ Farben gegeben. Wir konstruieren eine gültige Färbung wie folgt:

1. Wir färben die Wurzel mit einer beliebigen Farbe, und setzen $l := 1$.

2. Die Kanten der l-ten Ebene werden gefärbt. Dies ist möglich, da die Färbung dieser Kanten zu diesem Zeitpunkt nur maximal $\Delta(G)$ Einschränkungen unterliegt (1 Einschränkung aufgrund des inzidenten Knotens in der $(l-1)$-ten Ebene, und maximal $\Delta(G) - 1$ Einschränkungen durch adjazente Kanten in der l-ten sowie $(l-1)$-ten Ebene).

3. Die Knoten der l-ten Ebene werden gefärbt. Dies ist möglich, da die Färbung dieser Knoten zu diesem Zeitpunkt nur 2 Einschränkungen unterliegt (1 Einschränkung aufgrund des adjazenten Knotens in der $(l-1)$-ten Ebene und 1 Einschränkung aufgrund der inzidenten Kante in der l-ten Ebene). Falls $l < n$ setzen wir anschließend $l := l+1$, und springen erneut zum Punkt 2.

Nach endlich vielen Schritten gelangen wir so zu einem mit $\Delta(G) + 1$ Farben gültig gefärbten Baum. □

2.5.1 Raupen

Wir werden zeigen, dass für die totalspielchromatische Zahl $\chi_g''(G)$ einer Raupe G mit $\Delta(G) \geq 7$ gilt, dass $\chi_g''(G) = \Delta(G)+1$. Dies bewerkstelligen wir in drei Schritten. Zunächst führen wir einige Begriffsdefinitionen ein. Anschließend beweisen wir, dass $\Delta(G) + 1 \leq \chi_g''(G) \leq \Delta(G) + 2$ für Raupen mit $\Delta(G) \geq 6$, und schließlich bestimmen wir die totalspielchromatische Zahl für Raupen mit

$\Delta(G) \geq 7$ exakt.
Raupen mit $\Delta(G) \leq 5$ werden im Anschluss betrachtet.

Beobachtung 2.5.3. *Für eine Raupe G mit $\Delta(G) \geq 2$ gilt:*

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''_g(G) \leq 2\Delta(G) + 1$$

Beweis. Dies folgt sofort mit Satz 2.5.2 aufgrund der trivialen Schranken der totalspielchromatischen Zahl. □

Definition 2.5.4. ***Knotenbezeichnung***
Um die folgende Beweisführung zu erleichtern, wählen wir eine von Definition 2.5.1 verschiedene Knotenbezeichnung.

- Die Knoten des zentralen Pfades werden durchnummeriert.
- Die restlichen Knoten erhalten einen Doppelindex. Der erste Index ist gleich der Nummer des adjazenten Knotens, welcher ein Element des zentralen Pfades ist. Der zweite Index wird wiederum durchnummeriert.

Definition 2.5.5. ***Pendel***
Kanten $(v_i, v_{i,j})$ inklusive den inzidenten Blättern $v_{i,j}$ bezeichnen wir im Folgenden als *Pendel*.

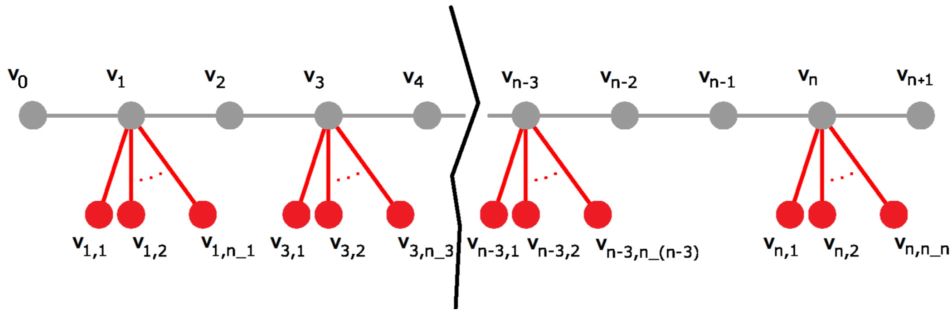


Abbildung 2.32: grafische Veranschaulichung - Pendel sind rot dargestellt.

Lemma 2.5.6. *Für eine Raupe G mit $\Delta(G) \geq 6$ gilt:*

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''_g(G) \leq \Delta(G) + 2$$

Beweis. Um diese Aussage zu beweisen, zeigen wir, dass Alice eine Gewinnstrategie mit $\Delta(G) + 2$ Farben hat.
Offenbar existieren für die Färbung von Knoten $v_{i,j}$ maximal 2 und für die Färbung von Kanten $(v_i, v_{i,j})$ nur maximal $\Delta(G) + 1$ Einschränkungen. Das

bedeutet, Alice hat eine Gewinnstrategie mit $\Delta(G) + 2$ Farben, wenn sie es schafft, alle Elemente des zentralen Pfades mit $\Delta(G) + 2$ Farben gültig zu färben.
Hierzu verwendet sie folgende Strategie bis alle Elemente des zentralen Pfades gefärbt wurden:

- (*) Bob färbt ein Element des zentralen Pfades: Alice kontert, indem sie ein weiteres Element des zentralen Pfades mit beliebiger Farbe färbt.

- (**) Bob färbt eine Kante $(v_i, v_{i,j})$ oder einen Knoten $v_{i,j}$. Alice prüft der Reihe nach, ob folgende Elemente bereits gefärbt wurden:

  1. die Kante (v_{i-1}, v_i)
  2. die Kante (v_i, v_{i+1})
  3. der Knoten v_i

  Das hiervon erste ungefärbte Element, wird von Alice mit einer gültigen Farbe gefärbt.
  (***) Sind alle drei Elemente bereits gefärbt, so färbt Alice ein beliebiges anderes Element des zentralen Pfades mit einer gültigen Farbe.

Anmerkungen:

1. Kann Alice kein Element des zentralen Pfades färben, da bereits alle Elemente gefärbt wurden, so färbt Alice ein beliebiges anderes Element mit beliebiger Farbe.

2. Eröffnet Alice das Spiel, so färbt sie ein beliebiges Element des zentralen Pfades.

Mit dieser Strategie kann jedes Element des zentralen Pfades gültig gefärbt werden, wenn mindestens 8 Farben gegeben sind:

- Für einen Knoten v_i gibt es maximal 7 Einschränkungen:
  Die Färbung der Knoten v_{i-1}, v_{i+1}, sowie der Kanten (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}). Desweiteren sind maximal 3 Elemente der zu v_i inzidenten Pendel gefärbt, da Alice ausschließlich Elemente des zentralen Pfades färbt, und der Knoten v_i spätestens dann gefärbt wird, wenn Bob das dritte Element der hierzu inzidenten Pendel färbt (siehe (**)).

- Für eine Kante (v_i, v_{i+1}) gibt es maximal 6 Einschränkungen:
  Die Färbung der Knoten v_i, v_{i+1}, sowie die Färbung der Kanten (v_{i-1}, v_i), (v_{i+1}, v_{i+2}). Desweiteren sind aufgrund der Spielweise von Alice (siehe (**)) insgesamt maximal 2 Elemente der zu v_i und v_{i+1} inzidenten Pendel gefärbt.

Da Alice mit der beschriebenen Strategie mindestens 8 Farben benötigt, um die Elemente des zentralen Pfades zu färben, stellen wir im Lemma die Forderung $\Delta(G) \geq 6$, und haben insgesamt gezeigt, dass $\Delta(G)+1 \leq \chi_g''(G) \leq \Delta(G)+2$.□

Satz 2.5.7. *Für eine Raupe G mit $\Delta(G) \geq 7$ gilt $\chi_g''(G) = \Delta(G) + 1$.*

Beweis. Grundsätzlich können wir eine Raupe als Verkettung von Sternen sehen, deren Mittelpunkte die Knoten v_i des zentralen Pfades sind. Dabei überlappen sich die Sterne an den Kanten entlang des zentralen Pfades, was für unsere weitere Betrachtung aber nicht von Bedeutung ist.
Sobald der Mittelpunkt v_i eines Sterns gefärbt ist, können die restlichen Elemente des Sterns, welche nicht auf dem zentralen Pfad liegen, immer mit maximal $d_G(v_i) + 2$ Farben gefärbt werden. Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, dass Alice es schafft, die Sterne mit maximal $\Delta(G) + 1$ Farben zu färben.
Alice nutzt die in Lemma 2.5.6 beschriebene Strategie, um die Elemente entlang des Pfades mit maximal 8 Farben färben zu können. Trivialerweise sind dann alle Sterne mit $d_G(v_i) \leq \Delta(G)-1$ mit $\Delta(G)+1$ Farben färbbar. Um auch die Sterne mit $d_G(v_i) = \Delta(G)$ mit nur $\Delta(G) + 1$ Farben färben zu können, modifiziert Alice die Strategie von Lemma 2.5.6 in (***) wie folgt:
Sind in (***) bereits alle drei Elemente (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}) sowie v_i entlang des zentralen Pfades gefärbt, so betrachten wir den zugehörigen Stern mit Mittelpunkt v_i von diesem Zeitpunkt an als eigenständiges Spielfeld. Dabei entfernen wir vom betrachteten Stern die Knoten v_{i-1}, v_{i+1}, da sie auf die Färbung der restlichen Elemente des Sterns keine Auswirkung haben, und die Färbung dieser beiden Knoten bereits durch die Strategie in Lemma 2.5.6 abgedeckt wird. Alice spielt (sofern möglich) grundsätzlich immer in dem Stern, in dem Bob im vorangegangenen Zug gespielt hat.
Aufgrund der Spielweise von Alice sind zum Zeitpunkt, in dem ein Stern als eigenständiges Spielfeld herausgelöst wird, nach Bob's Antwortzug maximal 4 Elemente der zu v_i inzidenten Pendel von Bob gefärbt worden. Gleichzeitig hat ein Stern mit $d_G(v_i) = \Delta(G)$ nach Voraussetzung mindestens 7 Kanten, also mindestens 5 Pendel. Es gibt somit mindestens ein Pendel, welches noch

gänzlich ungefärbt ist. Da für die Färbung von Blättern immer nur maximal 2 Einschränkungen existieren, müssen wir nur sicherstellen, dass die Kanten des Sterns mit $\Delta(G)+1$ Farben gefärbt werden können. Nun gilt es noch zu filtern, welche Pendel im weiteren Spielverlauf Alice gefährlich werden können. Pendel, deren Kante bereits gefärbt wurde, können nicht mehr gefährlich werden. Blätter, die mit einer Farbe gefärbt wurden, welche bereits für eine Kante verwendet wurden, stellen ebenfalls keine Gefahr dar. Somit sind nur Pendel *kritisch*, deren Kante noch nicht gefärbt wurde, während das Blatt mit einer Farbe gefärbt wurde, welche noch für keine Kante des Sterns verwendet wurde.

Betrachtet man ausschließlich die kritischen Pendel, so findet Alice nach dem Zug von Bob eine der folgenden Situationen vor. Zusätzlich existiert noch mindestens eine ungefärbte Kante k eines Pendels, wessen Blatt noch nicht gefärbt wurde, oder mit einer Farbe gefärbt wurde, welche bereits für eine Kante ver-
(****) wendet wurde. Solche Kanten bezeichnen wir als *rettende Kanten*.

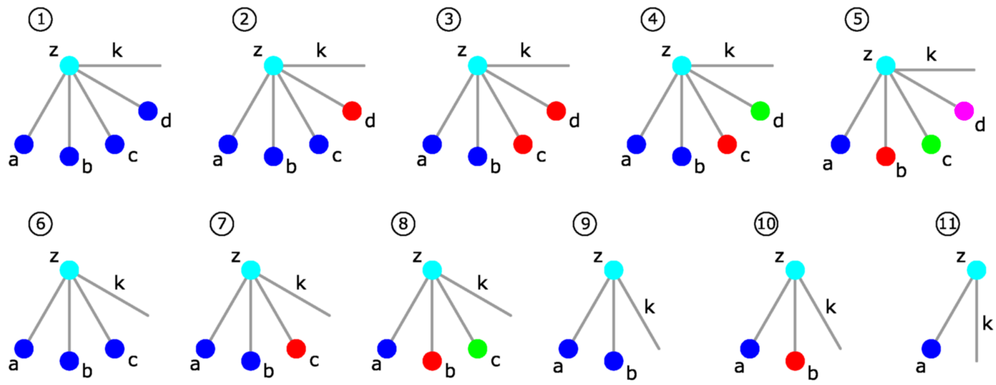


Abbildung 2.33

Alice kontert darauf folgendermaßen:

Fall 1: Alice färbt die Kante k blau.

Fall 2-5: Alice färbt die Kante (z, d) blau.

Fall 6: Alice färbt die Kante k blau.

Fall 7-8: Alice färbt die Kante (z, c) blau.

Fall 9: Alice färbt die Kante k blau.

Fall 10: Alice färbt die Kante (z, b) blau.

Fall 11: Alice färbt die Kante k blau.

Fall 12: Es gibt im betrachteten Stern kein kritisches Pendel (dieser Fall ist in der Grafik nicht dargestellt).
Wenn es noch ein ungefärbtes Pendel gibt, färbt Alice das Blatt davon mit einer Farbe, welche bereits für eine Kante verwendet wurde. Ansonsten färbt Alice ein beliebiges Element des Sterns mit beliebiger Farbe. Gibt es im Stern kein ungefärbtes Element mehr, so färbt Alice ein Element des zentralen Pfades. Sind im zentralen Pfad bereits alle Elemente gefärbt, so betrachtet Alice einen beliebigen anderen Stern gemäß (****).

Anmerkung zu Fall 1 bis 10: Nach diesem Zug von Alice gibt es im Stern maximal 2 kritische Pendel und gleichzeitig mindestens 2 rettende Kanten. Bob kann in einem weiteren Zug entweder die Anzahl der kritischen Pendel um eins erhöhen, die Anzahl der rettenden Kanten um eins reduzieren, oder einen neutralen Zug machen, welcher sowohl die Anzahl der kritischen Pendel, als auch der rettenden Kanten nicht verändert. Deshalb kann Alice nach einem weiteren Zug von Bob erneut nach (****) vorgehen.
Nach dem Zug von Alice im Fall 11 gibt es keine kritischen Pendel mehr, aber mindestens eine rettende Kante. Erzeugt Bob in seinem Zug ein kritisches Pendel, so kann Alice erneut nach Fall 11 in (****) vorgehen. Erzeugt Bob in seinem Zug kein kritisches Pendel, so kann Alice nach Fall 12 in (****) vorgehen.
Nach dem Zug von Alice im Fall 12 gibt es folgende Möglichkeiten:

- Es gibt keine kritischen Pendel und zusätzlich mindestens eine rettende Kante. Erzeugt Bob in seinem nächsten Zug ein kritisches Pendel, so kontert Alice gemäß Fall 11 in (****), andernfalls gemäß Fall 12 in (****).
- Hat Alice in ihrem letzten Zug keine rettende Kante erzeugt, so sind bereits alle Pendel des Sterns zumindest teilweise gefärbt. Insbesondere gibt es auch keine kritischen Pendel mehr, und Bob kann in seinem Zug auch keine neuen erzeugen. Unabhängig von Bob's Antwortzug kann Alice also erneut nach Fall 12 in (****) vorgehen. An diesem Punkt kann Bob bereits nicht mehr verhindern, dass der betrachtete Stern mit $\Delta(G) + 1$ Farben gültig gefärbt wird.

Somit wurde gezeigt, dass Alice nach jedem Zug von Bob die Strategie in (****) anwenden, und die Anzahl der kritischen Pendel stets reduzieren kann.

Dass die wiederholte Anwendung von (****) alle kritischen Pendel beseitigt und letztenendens zu einem vollständig gefärbten Stern führt, kann man sich leicht klarmachen. Nach spätestens dreimaligem Eintreffen eines Falles 1 bis 10 hat Alice alle kritischen Pendel entschärft, da sie in diesen Fällen in jedem ihrer Züge mindestens 2 kritische Pendel beseitigt, aber Bob in seinem Antwortzug maximal ein neues kritisches Pendel erzeugen kann. Sind erstmals alle kritischen Pendel beseitigt, so treffen im betrachteten Stern nach Bob's Zügen nur mehr die Fälle 11 und 12 ein, und da es nur endlich viele Pendel gibt, gelangen wir hiermit letztlich zu einem vollständig und gültig gefärbten Stern.
Generell verfolgt Alice nach jedem Zug von Bob zunächst die im Beweis von Lemma 2.5.6 beschriebene Strategie. Gelangt sie dabei zum Punkt (*), und kann kein Element des zentralen Pfades mehr färben, da dieser bereits vollständig gefärbt wurde, so betrachtet Alice einen beliebigen Stern, und färbt davon ein Element gemäß (****). Gelangt Alice mit der Strategie aus dem Beweis von Lemma 2.5.6 zum Punkt (***), so verfährt sie ebenfalls gemäß (****).
Nach endlich vielen Zügen können so alle Elemente des Graphen mit $\Delta(G)+1$ Farben gültig gefärbt werden. □

Folgerung 2.5.8. *Für eine Raupe G mit $\Delta(G) = 5$ gilt $6 \leq \chi''_g(G) \leq 8$.*
Für eine Raupe G mit $\Delta(G) = 4$ gilt $5 \leq \chi''_g(G) \leq 8$.
Für eine Raupe G mit $\Delta(G) = 3$ gilt $4 \leq \chi''_g(G) \leq 7$.

Beweis. Die oberen Schranken in den Fällen $\Delta(G) = 4$ und $\Delta(G) = 5$ folgen sofort mit dem Beweis aus Lemma 2.5.6. Sämtliche unteren Schranken sind die trivialen Schranken der totalspielchromatischen Zahl. Die obere Schranke im Fall $\Delta(G) = 3$ ist die triviale obere Schranke für die totalspielchromatische Zahl. □

2.5.2 Hummer

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass für die totalspielchromatische Zahl eines Hummers G gilt, dass $\Delta(G) + 1 \leq \chi''_g(G) \leq \Delta(G) + 4$.

Beobachtung 2.5.9. *Für einen Hummer G mit $\Delta(G) \geq 2$ gilt:*

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''_g(G) \leq 2\Delta(G) + 1$$

Beweis. Dies folgt mit Satz 2.5.2 sofort aufgrund der trivialen Schranken der totalspielchromatischen Zahl. □

Für unsere Untersuchungen müssen wir zunächst einige Begriffe einführen.

Definition 2.5.10. ***Knotenbezeichnung, Knoten und Kanten der ersten/zweiten Ebene***
Wir wählen eine ähnliche Knotenbezeichnung wie bei den Raupen in Definition 2.5.4.

- Die Knoten des zentralen Pfades werden durchnummeriert.
- Die zu den Knoten des zentralen Pfades adjazenten Knoten erhalten einen Doppelindex. Der erste Index ist gleich der Nummer des adjazenten Knotens, welcher ein Element des zentralen Pfades ist. Der zweite Index wird wiederum durchnummeriert. Wir nennen diese Knoten $v_{i,j}$ *Knoten erster Ebene* und die Kanten $(v_i, v_{i,j})$ *Kanten erster Ebene.*
- Die restlichen Knoten sind Blätter, und erhalten einen Dreifach-Index. Die ersten beiden Indizes sind gleich dem Doppelindex des adjazenten Knotens. Der dritte Index wird durchnummeriert. Die Blätter nennen wir auch *Knoten zweiter Ebene*, und die inzidenten Kanten *Kanten zweiter Ebene.*

Definition 2.5.11. ***Pendel***
Ein Blatt $v_{i,j,l}$ inklusive der dazu inzidenten Kante $(v_{i,j}, v_{i,j,l})$ bezeichnen wir als *Pendel.*

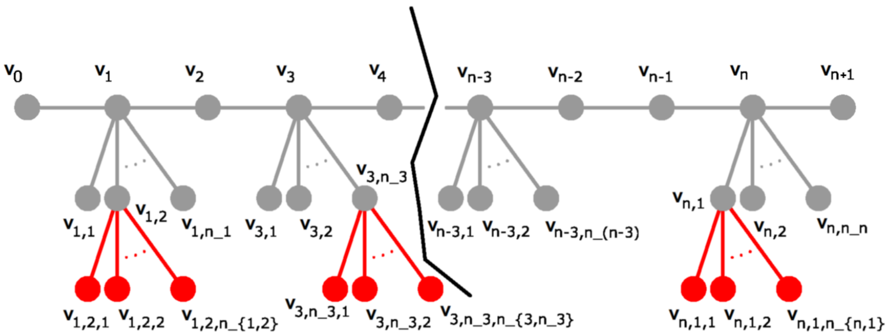


Abbildung 2.34: grafische Veranschaulichung - Pendel sind rot dargestellt.

Nun können wir eine obere Schranke für die totalspielchromatische Zahl $\chi_g''(G)$ eines Hummers G angeben.

Lemma 2.5.12. *Für einen Hummer G mit $\Delta(G) \geq 4$ gilt*

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi_g''(G) \leq \Delta(G) + 4.$$

Beweis. Um diese Aussage zu beweisen, zeigen wir, dass Alice eine Gewinnstrategie mit $\Delta(G) + 4$ Farben hat.
Offenbar gibt es für die Färbung von Knoten zweiter Ebene $v_{i,j,l}$ maximal 2 und für die Färbung von Kanten zweiter Ebene $(v_{i,j}, v_{i,j,l})$ nur maximal $\Delta(G) + 1$ Einschränkungen. Das bedeutet, Alice hat eine Gewinnstrategie mit $\Delta(G) + 4$ Farben, wenn sie es schafft, alle Elemente des zentralen Pfades, sowie der ersten Ebene mit $\Delta(G) + 4$ Farben gültig zu färben.
Hierzu verwendet sie folgende Strategie bis alle Elemente des zentralen Pfades, sowie der ersten Ebene gefärbt wurden:

- Bob färbt ein Element des zentralen Pfades: Alice kontert, indem sie ein weiteres Element des zentralen Pfades mit beliebiger Farbe färbt.

- Bob färbt eine Kante $(v_i, v_{i,j})$ oder einen Knoten $v_{i,j}$ erster Ebene. Alice
(*) prüft der Reihe nach, ob folgende Elemente bereits gefärbt wurden:

  1. die Kante (v_{i-1}, v_i)
  2. die Kante (v_i, v_{i+1})
  3. der Knoten v_i

  Das hiervon erste ungefärbte Element, wird von Alice mit einer gültigen Farbe gefärbt.

- Bob färbt eine Kante $(v_{i,j}, v_{i,j,l})$ oder einen Knoten $v_{i,j,l}$ zweiter Ebene. Alice sieht sich die zum Knoten $v_{i,j}$ inzidenten Pendel an, und zählt nach, wieviele Elemente dieser Pendel bereits gefärbt wurden.
  - Es wurde erst ein Element gefärbt: Alice kontert wie in (*).
  - Es wurden bereits zwei Elemente gefärbt: Alice färbt die Kante $(v_i, v_{i,j})$ mit einer gültigen Farbe.
  - Es wurden drei Elemente gefärbt: Alice kontert wie in (*).
  - Es wurden vier Elemente gefärbt: Alice färbt den Knoten $v_{i,j}$.

Anmerkungen:

1. Kann Alice in irgendeinem Punkt ihren Zug nicht durchführen, da das genannte Element bereits im bisherigen Spielverlauf gefärbt wurde, so geht sie folgendermaßen vor: Alice färbt ein beliebiges Element des zentralen Pfades mit einer beliebigen Farbe. Wurden bereits alle gefärbt, so färbt Alice ein beliebiges Element der ersten Ebene mit beliebiger Farbe.

Wurden diese ebenfalls bereits alle gefärbt, so färbt Alice ein beliebiges Element der zweiten Ebene mit beliebiger Farbe.

2. Eröffnet Alice das Spiel, so färbt sie ein beliebiges Element des zentralen Pfades.

Mit dieser Strategie kann jedes Element des zentralen Pfades, sowie der ersten Ebene mit $\Delta(G) + 4$ Farben gültig gefärbt werden:

- Für einen Knoten des zentralen Pfades v_i gibt es maximal 7 Einschränkungen: Die Färbung der Knoten v_{i-1}, v_{i+1}, sowie der Kanten (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}). Desweiteren sind maximal 3 zu v_i adjazente oder inzidente Elemente gefärbt, da Alice durch ihre Spielweise spätestens beim 3. gefärbten Element den Knoten v_i färbt.

- Für eine Kante (v_i, v_{i+1}) des zentralen Pfades gibt es maximal 6 Einschränkungen: Die Färbung der Knoten v_i, v_{i+1}, sowie die Färbung der Kanten (v_{i-1}, v_i), (v_{i+1}, v_{i+2}). Desweiteren sind aufgrund der Spielweise von Alice insgesamt maximal 2 der zu v_i und v_{i+1} adjazenten oder inzidenten Elementen gefärbt, da Alice spätestens beim 2. gefärbten Element, die Kante (v_i, v_{i+1}) färbt.

- Für einen Knoten $v_{i,j}$ erster Ebene gibt es maximal 6 Einschränkungen: Die Färbung des Knotens v_i, sowie der Kante $(v_i, v_{i,j})$. Desweiteren sind aufgrund der Spielweise von Alice maximal 4 Elemente der zu $v_{i,j}$ inzidenten Pendel gefärbt, da Alice spätestens beim 4. gefärbten Element den Knoten $v_{i,j}$ färbt.

- Für eine Kante $(v_i, v_{i,j})$ gibt es maximal $\Delta(G)+3$ Einschränkungen: Die Färbung aller anderen $\Delta(G) - 1$ zu v_i inzidenten Kanten. Die Färbung der Knoten v_i und $v_{i,j}$. Desweiteren sind aufgrund der Spielweise von Alice maximal 2 Elemente der zu $v_{i,j}$ inzidenten Pendel gefärbt.

Da Alice mit der beschriebenen Strategie mindestens 8 Farben benötigt, um die Elemente des zentralen Pfades, sowie der ersten Ebene zu färben, stellen wir im Satz die Forderung $\Delta(G) \geq 4$, und haben insgesamt gezeigt, dass $\Delta(G) + 1 \leq \chi_g''(G) \leq \Delta(G) + 4$. □

Beobachtung 2.5.13. *Für einen Hummer G mit $\Delta(G) = 3$ gilt:*

$$4 \leq \chi_g''(G) \leq 7.$$

Beweis. Dies folgt aus den trivialen Schranken der totalspielchromatischen Zahl und Beobachtung 2.5.9. □

Satz 2.5.14. $\Delta(G)+1 \leq \chi''_g(G) \leq \Delta(G)+4$ *unabhängig davon, ob Bob oder Alice das Spiel beginnt.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 2.5.12 und Beobachtung 2.5.13. □

3 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die totalspielchromatische Zahl einiger Graphenklassen untersucht. In Kapitel 2.1 wurde gezeigt, dass für einen Kreis C_n mit n Knoten $\chi''_{\text{Alice}}(C_n) = 5$ für $n \geq 3$ und $4 \leq \chi''_{\text{Bob}}(C_n) \leq 5$ für $n \geq 4$ gilt. Die in Lemma 2.1.10 für Bob beschriebene Gewinnstrategie bei 4 gegebenen Farben schlägt aus mehreren Gründen fehl, wenn er das Spiel selbst beginnt. Der hinderlichste davon ist, dass er den Eröffnungszug von Alice verwendet, um eine Gewinnsituation wie in Beobachtung 2.1.6 Gewinnstrategie 4 und 5 zu konstruieren. Das bedeutet insbesondere, dass er bei entsprechender Spielweise von Alice einen Zug mehr benötigt, um eine Gewinnsituation konstruieren zu können. Die Frage ist nun, ob Alice diese Verzögerung zu ihrem Vorteil nutzen kann, und eine Gewinnstrategie auf dem C_n bei 4 gegebenen Farben hat, wenn Bob das Spiel beginnt.

Offene Frage 1. *Für welche $n \geq 4$ gilt $\chi''_{Bob}(C_n) = 4$ und für welche $\chi''_{Bob}(C_n) = 5$?*

Auch für Pfade wurde die totalspielchromatische Zahl in dieser Arbeit nicht bestimmt. Man kann sich leicht überlegen, dass für Pfade P_n (mit großem n) $4 \leq \chi''_g(P_n) \leq 5$ gilt. Obwohl sich der Pfad P_n gegenüber dem Kreis C_n nur durch das Fehlen einer Kante unterscheidet, kann auch in diesem Fall die für Kreise in Lemma 2.1.10 beschriebene Gewinnstrategie nicht auf Pfade übertragen werden, da dort die zyklische Eigenschaft des Kreises verwendet wird.

Offene Frage 2. *Wie lautet die totalspielchromatische Zahl $\chi''_g(P_n)$ von Pfaden P_n?*

Desweiteren konnten wir in Kapitel 2.2 zeigen, dass für Sterne S_n mit $n \geq 3$ die totalspielchromatische Zahl, unabhängig davon, ob Alice oder Bob das Spiel beginnt, gleich $n + 1$ ist.
In Kapitel 2.3 haben wir für Räder W_n mit $n \geq 5$ bewiesen, dass für die totalspielchromatische Zahl $n + 1 \leq \chi''_g(W_n) \leq n + 2$ gilt. Dies führt uns zur nächsten Frage.

Offene Frage 3. *Es sei W_n ein Rad mit $n \geq 5$. Was sind die exakten Werte von $\chi''_{Alice}(W_n)$ und $\chi''_{Bob}(W_n)$?*

Offensichtlich ist $W_3 = K_4$, wofür wir die totalspielchromatische Zahl bereits in Kapitel 2.4 bestimmt haben, nämlich $\chi''_{\text{Alice}}(W_3) = 6$ und $\chi''_{\text{Bob}}(W_3) = 5$. Die totalspielchromatische Zahl des Rades W_4 wurde bisher noch nicht bestimmt.

Offene Frage 4. *Wie lautet die totalspielchromatische Zahl $\chi''_g(W_4)$ des Rades W_4?*

In Kapitel 2.4 konnten wir die untere Schranke der totalspielchromatischen Zahl von vollständigen Graphen K_n leicht anheben, und haben gezeigt, dass $\chi''_g(K_n) \geq n + 1$ für $n \geq 5$ gilt. Eine genauere Bestimmung der totalspielchromatischen Zahl steht noch aus.

Offene Frage 5. *Wie lautet die totalspielchromatische Zahl $\chi''_g(K_n)$ von vollständigen Graphen K_n mit $n \geq 5$?*

Ebenfalls in Kapitel 2.4 haben wir gezeigt, dass für den Graph $K_4 - e$, welcher aus dem K_4 durch Entfernen einer Kante e entsteht, $\chi''_g(K_4 - e) = 5$ gilt.
In Kapitel 2.5 haben wir die totalchromatische Zahl für Bäume G_B bestimmt ($\chi''(G_B) = \Delta(G_B) + 1$), und im Anschluss gezeigt, dass für Raupen G_R mit $\Delta(G_R) \geq 7$ $\chi''_g(G_R) = \Delta(G_R) + 1$ gilt. Für Raupen G_R mit $\Delta(G_R) = 6$ haben wir $\Delta(G_R) + 1 \leq \chi''_g(G_R) \leq \Delta(G_R) + 2$ ermittelt.

Offene Frage 6. *Welchen Wert hat die totalspielchromatische Zahl $\chi''_g(G_R)$ von Raupen G_R mit $\Delta(G_R) \leq 6$?*

Zuletzt haben wir für Hummer G_H die totalspielchromatische Zahl eingeschränkt. Es gilt $\Delta(G_H) + 1 \leq \chi''_g(G_H) \leq \Delta(G_H) + 4$.

Offene Frage 7. *Wie lautet die totalspielchromatische Zahl von Hummern G_H?*

Zur besseren Übersicht findet sich im Anhang eine Tabelle, welche alle in dieser Arbeit erzielten Resultate zusammenfasst. Betrachtet man diese Tabelle, so kann man feststellen, dass es für Alice sowohl Vorteil als auch Nachteil sein kann, wenn sie das Spiel eröffnet. Es existieren zum einen Graphen G für welche $\chi''_{\text{Alice}}(G) \leq \chi''_{\text{Bob}}(G)$ gilt, und zum anderen auch Graphen H für welche $\chi''_{\text{Alice}}(H) \geq \chi''_{\text{Bob}}(H)$ gilt.

Im Weiteren wurden in dieser Arbeit nur zusammenhängende Graphen untersucht. Es stellt sich die Frage, inwiefern sich die totalspielchromatischen Zahlen einzelner Komponenten auf den gesamten Graph auswirken. Man könnte annehmen, dass für einen Graph G, der aus mehreren Komponenten $G_1, \ldots, G_n$ besteht, für ein bestimmtes $g \in \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$ gilt, dass die totalspielchromatische Zahl $\chi''_g(G) = \max\left\{\chi''_g(G_1), \ldots, \chi''_g(G_n)\right\}$ ist. Dass dies nicht der Fall ist, kann man sich leicht klarmachen, indem man beispielsweise den Graph G analysiert, welcher aus dem vollständigen Graph K_3 und einem isolierten Knoten v besteht. Dann gilt $\chi''_{\text{Alice}}(K_3) = 5$ und $\chi''_{\text{Alice}}(H) = 1$, wobei $H := (\{v\}, \emptyset)$. Eröffnet aber Alice das Spiel, und färbt den Knoten v, so ist Bob gezwungen, den ersten Zug auf der Komponente K_3 zu machen. Somit hat Alice eine Gewinnstrategie mit 3 Farben, und es ist $\chi''_g(G) = 3 \neq 5 = \max\left\{\chi''_g(K_n), \chi''_g(H)\right\}$.

Offene Frage 8. *Es seien $G_1, \ldots, G_n$ die einzelnen Komponenten eines Graphen G. Wie korrelieren die totalspielchromatischen Zahlen der einzelnen Komponenten mit der totalspielchromatischen Zahl des Graphen G?*

Ebenso stellt sich die Frage, ob man aufgrund von Bestandteilen $G \subseteq H$ eines Graphen H Rückschlüsse auf die totalspielchromatische Zahl $\chi''_g(H)$ des gesamten Graphen H ziehen kann.

Offene Frage 9. *Gibt es „interessante“ Klassen[1] $\mathcal{G}$ von Graphen, sodass für alle $G, H \in \mathcal{G}$ mit $G \subseteq H$*

$$\chi''_g(G) \leq \chi''_g(H)$$

gilt?

Auch folgende leicht abgewandelte Form dieser Fragestellung ist von großem Interesse.

Offene Frage 10. *Welche Eigenschaften müssen G und/oder H haben, sodass gilt:*

$$G \subseteq H \Rightarrow \chi''_g(G) \leq \chi''_g(H)$$

Eventuell ist es auch möglich, die obere Schranke der totalspielchromatischen Zahl für einen allgemeinen Graphen zu verbessern.

[1] „Interessant“ sind bspw. Klassen, deren Repräsentanten gemeinsame Struktureigenschaften haben.

Offene Frage 11. *Gibt es Konstanten $z \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$, sodass*

$$\chi_g''(G) \leq z \cdot \chi''(G) + k$$

für alle Graphen G?

Weitere offene Probleme sind natürlich die Bestimmung der totalspielchromatischen Zahl von anderen komplizierteren Graphenklassen wie z.B. von planaren oder bipartiten Graphen sowie von Wäldern.

Anhang

Diese Tabelle enthält alle, in dieser Arbeit erzielten, Resultate.

Graphenklasse	Resultate
Kreise C_n	$\chi''_{\text{Alice}}(C_n) = 5$ für $n \geq 3$
	$4 \leq \chi''_g(C_n) \leq 5$ für $n \geq 4$
	$\chi''_{\text{Bob}}(C_3) = 3$
Sterne S_n	$\chi''_g(S_n) = n + 1$ für $n \geq 3$
	$\chi''_g(S_1) = 3$
	$\chi''_{\text{Alice}}(S_2) = 3$
	$\chi''_{\text{Bob}}(S_2) = 4$
Räder W_n	$n + 1 \leq \chi''_g(W_n) \leq n + 2$ für $n \geq 5$
	$\chi''_{\text{Alice}}(W_3) = 6$
	$\chi''_{\text{Bob}}(W_3) = 5$
vollständige Graphen K_n	$\chi''_g(K_n) \geq n + 1$ für $n \geq 5$
	$\chi''_g(K_2) = 3$
	$\chi''_{\text{Alice}}(K_3) = 5$
	$\chi''_{\text{Bob}}(K_3) = 3$
	$\chi''_{\text{Alice}}(K_4) = 6$
	$\chi''_{\text{Bob}}(K_4) = 5$
	$\chi''_g(K_4 - e) = 5$ wobei $K_4 - e$ der Graph ist, welcher durch Entfernen einer Kante e aus dem K_4 entsteht.
Raupen G_R	$\chi''_g(G_R) = \Delta(G_R) + 1$ für $\Delta(G_R) \geq 7$
	$\Delta(G_R) + 1 \leq \chi''_g(G_R) \leq \Delta(G_R) + 2$ für $\Delta(G_R) = 6$
	$6 \leq \chi''_g(G_R) \leq 8$ für $\Delta(G_R) = 5$
	$5 \leq \chi''_g(G_R) \leq 8$ für $\Delta(G_R) = 4$
	$4 \leq \chi''_g(G_R) \leq 7$ für $\Delta(G_R) = 3$
Hummer G_H	$\Delta(G_R) + 1 \leq \chi''_g(G_R) \leq \Delta(G_R) + 4$

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[AH77] Appel, K. und W. Haken: *Every planar map is four colorable. Part I: Discharging.* Illinois Journal of Mathematics, 21(3):429–490, September 1977.

[AHK77] Appel, K., W. Haken und J. Koch: *Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility.* Illinois Journal of Mathematics, 21(3):491–567, September 1977.

[AHSss] Andres, Stephan Dominique, Winfried Hochstättler und Christiane Schallück: *The game chromatic index of wheels.* Discrete Applied Mathematics, (in press).

[And03] Andres, Stephan Dominique: *Spieltheoretische Kantenfärbungsprobleme auf Wäldern und verwandte Strukturen.* Diplomarbeit, Universität zu Köln, 2003.

[And06a] Andres, Stephan Dominique: *The game chromatic index of forests of maximum degree Delta >= 5.* Discrete Appl. Math., 154:1317–1323, June 2006.

[And06b] Andres, Stephan Dominique: *The incidence game chromatic number.* Electronic Notes in Discrete Mathematics, 27:1–2, 2006.

[And07] Andres, Stephan Dominique: *Digraph coloring games and game-perfectness.* PhD thesis, Universität zu Köln, 2007.

[And11] Andres, Stephan Dominique: *Graph Colouring Games.* `http://www.fernuni-hagen.de/MATHEMATIK/DMO/graphcolor.html`, 2011. [Online; Version vom 19. Juli 2011, 00:30].

[BCC67] Behzad, M., G. Chartrand und J. K. Cooper, Jr: *The Colour Numbers of Complete Graphs.* J. London Math. Soc., 42:226–228, 1967.

[Beh65] Behzad, Mehdi: *Graphs and their Chromatic Numbers.* Doktorarbeit, Michigan State University, 1965.

[Bew07] Bewersdorff, Jörg: *Glück, Logik und Bluff*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2007.

[Bod89] Bodlaender, H.L.: *On the complexity of some coloring games*. Technischer Bericht RUU-CS-89-27, Department of Information and Computing Sciences, Utrecht University, 1989.

[Bri08] Brinkmeier, Ingo: *Eine Potentialfunktion fuer Kantenfärbungsspiele*. Diplomarbeit, Fachbereich Mathematik, Fernuniversität Hagen, 2008.

[Bro41] Brooks, Rowland Leonard: *On colouring the nodes of a network*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 37:194 – 197, 1941.

[CWZ03] Chou, Chun-Yen, Weifan Wang und Xuding Zhu: *Relaxed game chromatic number of graphs*. Discrete Math., 262:89–98, February 2003.

[CZ01] Cai, Leizhen und Xuding Zhu: *Game chromatic index of k-degenerate graphs*. J. Graph Theory, 36:144–155, March 2001.

[Die10] Diestel, Reinhard: *Graph Theory*. Nummer 173 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 4 Auflage, 2010.

[DZ99] Dinski, Thomas und Xuding Zhu: *A bound for the game chromatic number of graphs*. Discrete Mathematics, 196:109–115, 1999.

[EFHK02] Erdös, Péter L., Ulrich Faigle, Winfried Hochstättler und Walter Kern: *Note on the game chromatic index of trees*. Preprint, 2002.

[EFHK04] Erdös, Péter L., Ulrich Faigle, Winfried Hochstättler und Walter Kern: *Note on the game chromatic index of trees*. Theoretical Computer Science, 303:371–376, 2004.

[FKKT93] Faigle, Ulrich, Walter Kern, Hal A. Kierstead und William Trotter: *On the game chromatic number of some classes of graphs*. Ars Combin, 35:143–150, 1993.

[Kan08] Kanzow, Christian: *Einführung in die Spieltheorie*. Manuskript, Universität Würzburg, 2008.

[Kie00] KIERSTEAD, HENRY: *A simple competitive graph coloring algorithm.* J. Comb. Theory Ser. B, 78:57–68, January 2000.

[Kie05] KIERSTEAD, HENRY: *Asymmetric graph coloring games.* Journal of Graph Theory, 48:169–185, 2005.

[Kos96] KOSTOCHKA, ALEXANDR V.: *The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven.* Discrete Mathematics, 162:199–214, 1996.

[Lianta] LIAW, YI-JAW: *The total game chromatic number and the total game coloring.* masters thesis, National Sun Yat-Sen University, Erscheinungsjahr unbekannt.

[Liantb] LIAW, YI-JAW: *The total game chromatic number and the total game coloring.* `http://ndltd.ncl.edu.tw/cgi-bin/gs32/gsweb.cgi/login?o=dnclcdr&s=id=%22087NSYSU507023%22.&searchmode=basic`, Erscheinungsjahr unbekannt. [Online; Version vom 18. Juli 2011, 23:15].

[Lov75] LOVÁSZ, LÁSZLÓ: *Three short proofs in graph theory.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, 19(3):269 – 271, 1975.

[Mar04] MARX, DÁNIEL: *Graph coloring problems and their applications in scheduling.* Periodica Polytechnica Ser. El. Eng., 48(1-2):5–10, 2004.

[Mer09] MERKEL, MARKUS: *Das Basenaustauschspiel fuer Graphen.* Bachelorarbeit, Fachbereich Mathematik, Fernuniversität Hagen, 2009.

[Rie11] RIECK, CHRISTIAN: *Begriffe der Spieltheorie.* `http://www.spieltheorie.de/Spieltheorie_Grundlagen/begriffe_spieltheorie.htm`, 2011. [Online; Version vom 06. Juli 2011, 12:30].

[Ros71] ROSENFELD, M.: *On the total coloring of certain graphs.* Israel Journal of Mathematics, 9:396–402, 1971. 10.1007/BF02771690.

[RSST96] ROBERTSON, NEIL, DANIEL P. SANDERS, PAUL SEYMOUR und ROBIN THOMAS: *A New Proof Of The Four-Colour Theorem.* Electron. Res. Announce. Amer. Math Soc, 2:17–25, 1996.

[Sch04] SCHLEE, WALTER: *Einführung in die Spieltheorie - mit Beispielen und Aufgaben.* Vieweg, 2004.

[Seg08] SEGAL, ZEF: *Variations of the Game chromatic number.* masters thesis, Tel Aviv University, 2008.

[Segnt] SEGAL, ZEF: *Variations of the Game chromatic number.* `http://virtual2002.tau.ac.il/users/www/56322/%D7%9E%D7%97%D7%A7%D7%A8%D7%99%D7%9D%20%D7%9E%D7%AA%D7%9E%D7%98%D7%99%D7%99%D7%9D/total%20coloring%20game.pdf`, Erscheinungsjahr unbekannt. [Online; Version vom 18. Juli 2011, 23:15].

[Sei02] SEIP, ULRICH: *Graphentheorie.* Manuskript, Fernuniversität Hagen, 2002.

[Vij71] VIJAYADITYA, N.: *On Total Chromatic Number of a Graph.* Journal of The London Mathematical Society-second Series, s2-3:405–408, 1971.

[vM44] VON NEUMANN, JOHN und OSKAR MORGENSTERN: *Theory of games and economic behavior / by John Von Neumann and Oskar Morgenstern.* Princeton University Press, Princeton :, 1944.

[von28] VON NEUMANN, JOHN: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.* Mathematische Annalen, 100:295–320, 1928.

[Wil03] WILSON, ROBIN JAMES: *Four Colours Suffice. How the Map Problem Was Solved.* Penguin UK, 2003.

[Zhu99] ZHU, XUDING: *The Game Coloring Number of Planar Graphs.* Journal of Combinatorial Theory, 75:245–258, 1999.

[Zhu08] ZHU, XUDING: *Refined activation strategy for the marking game.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, 98(1):1 – 18, 2008.