FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

Der Greedy-Algorithmus und unendliche Matroide

Christoph Horst

Paderborn, 25. September 2012

Betreuer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Inhaltsverzeichnis

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, habe ich unter Angabe der Quellen der Entlehnung kenntlich gemacht.

Desweiteren versichere ich, dass diese Arbeit noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Paderborn, 25. September 2012

Christoph Horst

Kurzzusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit werden die Zusammenhänge zwischen Matroiden und dem Greedy-Algorithmus auf unendliche Matroide erweitert. Es ist bekannt (Klee, 1971), dass der Greedy-Algorithmus für wohlgeordnete finitäre Matroide stets eine optimale Basis liefert. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Umkehrung dieser Aussage teilweise gilt: Unabhängigkeitssysteme mit abzählbarer Grundmenge, für die der Greedy-Algorithmus stets eine optimale Basis liefert, sind finitäre Matroide.

1 Einleitung

1.1 Der Greedy-Algorithmus und Matroide

Bei der Lösung von Problemen der kombinatorischen Optimierung ist im Allgemeinen eine Reihe von Entscheidungen darüber zu treffen, welche Elemente aus einer gewissen Menge auszuwählen sind. Oft gibt es dabei mehrere Wahlmöglichkeiten, von denen sich einige später als falsch herausstellen können. Die Greedy-Strategie[1] besteht darin, sich stets lokal optimal zu verhalten, d. h. sich in jedem Schritt für die gerade am günstigsten erscheinende Wahl zu entscheiden und diese Wahl in späteren Schritten niemals zurückzunehmen.

Die Greedy-Strategie garantiert nicht in jedem Fall eine optimale Lösung. Eine Vielzahl von Problemen ist jedoch so gestaltet, dass ein Greedy-Algorithmus stets eine optimale Lösung findet.

Ein klassisches Problem der kombinatorischen Optimierung ist das Problem des minimalen aufspannenden Baumes (*Minimum spanning tree*, MST). Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge E sowie einer Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$, die jeder Kante e ein Gewicht $w(e)$ zuordnet. Gesucht ist ein aufspannender Baum, d. h. ein zusammenhängender und zyklenfreier Teilgraph (V, T) von G mit derselben Knotenmenge wie G, für den das Gesamtgewicht

$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$$

minimal wird.

Das MST-Problem wurde erstmals von Borůvka (1926)[2] algorithmisch gelöst. Es existieren eine Vielzahl weiterer Algorithmen zu seiner Lösung; die bekanntesten – die Algorithmen von Kruskal und Prim – werden wir im Folgenden besprechen.

1.1.1 Der Algorithmus von Kruskal

Der Algorithmus von Kruskal zur Bestimmung eines minimalen aufspannenden Baumes in einem Graphen $G = (V, E)$ beginnt mit einem Teilgraphen $(V, T_0 := \emptyset)$, den man als einen Wald mit $|V|$ Komponenten auffassen kann. In jedem Schritt wird diesem Teilgraphen eine Kante aus E hinzugefügt, die minimales Gewicht hat und deren Hinzufügen nicht dazu führt, dass ein Zyklus entsteht – oder anders gesagt, die zwei bisher getrennte Komponenten des

[1] „gierig". Das englische „greedy" ist aber auch in deutschsprachigen Texten ein feststehender Begriff.

[2] Zu dem tschechischsprachigen Originalartikel gibt es eine Übersetzung des ursprünglichen Wortlautes sowie eine „Übersetzung" in moderne mathematische Sprache von Nešetřil et al. (2001).

Waldes verbindet. Der Algorithmus terminiert nach $|V|-1$ Schritten mit einem minimalen aufspannenden Baum.[3]

Algorithmus 1 Algorithmus von Kruskal.

```
T_0 := ∅
k := 0
while T_k ist kein aufspannender Baum do
    Finde eine Kante e ∈ E\T_k mit minimalem Gewicht, so dass der Teilgraph (V, T_k ∪ {e})
    zyklenfrei ist
    T_{k+1} := T_k ∪ {e}
    k := k + 1
end while
return T_k
```

Das Interessante an diesem Algorithmus ist die Struktur des Systems der möglichen Kantenmengen, die während der Laufzeit des Algorithmus gebildet werden. Man überlegt sich leicht, dass bei gegebenem Graphen G durch passende Wahl der Gewichtsfunktion w jeder mögliche Wald mit k Kanten im k-ten Schritt des Algorithmus gebildet werden kann. Für Wälder gilt nun: Jede Teilmenge eines Waldes ist wieder ein Wald. Ein nichtleeres Mengensystem mit dieser Eigenschaft ist ein *Unabhängigkeitssystem*. Außerdem gilt für zwei Wälder verschiedener Größe, dass es stets eine Kante in dem größeren Wald gibt, um die der kleinere Wald ergänzt werden kann, ohne dass ein Zyklus entsteht und er damit die Wald-Eigenschaft verliert.[4] Ein Unabhängigkeitssystem, das auch diese Ergänzungseigenschaft besitzt, heißt *Matroid*. Im Vorgriff auf spätere Kapitel soll hier bereits die Definition des Begriffes Matroid über die Unabhängigkeitsaxiome gegeben werden.

Definition 1.1 (Matroid)**.** Sei E eine endliche Menge und $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein System von Teilmengen von E. Dann heißt $M = (E, \mathscr{I})$ **Matroid** über der **Grundmenge** E, falls die folgenden Unabhängigkeitsaxiome erfüllt sind:

(I1) $\emptyset \in \mathscr{I}$.

(I2) Ist $I \in \mathscr{I}$ und $I' \subseteq I$, so ist auch $I' \in \mathscr{I}$.

(I3) Sind $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$, dann gibt es ein Element $e \in I_2 \setminus I_1$, so dass $I_1 \cup \{e\} \in \mathscr{I}$.

Die Elemente von $\mathscr{I}$ heißen in diesem Fall **unabhängige Mengen**, die Elemente des Komplements $\mathscr{P}(E) \setminus \mathscr{I}$ entsprechend **abhängige Mengen**.

Eine **Basis** ist eine maximale unabhängige Menge. Die Existenz von Basen sowie die Gleichmächtigkeit aller Basen eines gegebenen Matroids sind einfache Folgerungen aus Definition 1.1.

Man kann nun mithilfe des Matroidbegriffes einen allgemeinen Greedy-Algorithmus formulieren, der für jedes gewichtete Matroid schrittweise eine Basis mit minimalem Gesamtgewicht aufbaut.

[3] vgl. Cormen et al. (2001, Kapitel 23) für eine ausführlichere Darstellung der Algorithmen von Kruskal und Prim, die auch detailliert auf den hier unberücksichtigten Aspekt der benutzten Datenstrukturen, die eine effiziente Implementierung erst möglich machen, eingehen.

[4] Beweis siehe Aigner (2006, Abschnitt 7.4).

Definition 1.2. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid und $w : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt M **gewichtetes Matroid** über der Grundmenge E mit der Gewichtsfunktion w.

Algorithmus 2 Greedy-Algorithmus für gewichtete Matroide.

$A_0 := \emptyset$ $\{\emptyset \in \mathscr{I}$ (I1)$\}$
$k := 0$
while A_k ist keine Basis **do**
  Finde ein Element $e \notin A_k$ mit minimalem Gewicht $w(e)$, so dass $A_k \cup \{e\} \in \mathscr{I}$ {Existiert wegen (I3)}
  $A_{k+1} := A_k \cup \{e\}$
  $k := k + 1$
end while
return A_k

Falls wir ein Optimierungsproblem mithilfe von Matroiden formulieren können, haben wir damit sofort einen allgemeinen effizienten Lösungsalgorithmus zur Verfügung.

Umgekehrt folgt aus dem Funktionieren des Greedy-Algorithmus für ein Unabhängigkeitssystem bereits die Ergänzungseigenschaft (I3), so dass Matroide in gewisser Weise eine „natürliche“ Struktur hinter dem Greedy-Algorithmus darstellen.

1.1.2 Greedy-Algorithmen ohne Matroide

In diesem Abschnitt wollen wir dem Eindruck entgegentreten, dass Matroide hinter jedem Greedy-Algorithmus stecken. Dazu sehen wir uns den Algorithmus von Prim an, der dem Algorithmus von Kruskal oberflächlich ziemlich ähnlich ist.

Algorithmus 3 Algorithmus von Prim.

$T_0 := \emptyset$
Lege Startknoten $v_0 \in V$ beliebig fest
$S_0 := \{v_0\}$
$k := 0$
while $S_0 \neq V$ **do**
  Finde eine Kante $e = \{u, v\}$ mit minimalem Gewicht und $u \in S_k$, $v \in V \setminus S_k$
  {Der Teilgraph (S_k, T_k) ist zusammenhängend und zyklenfrei}
  $T_{k+1} := T_k \cup \{e\}$
  $S_{k+1} := S_k \cup \{v\}$
  $k := k + 1$
end while
return T_k

Beim Algorithmus von Kruskal wird ein anfänglich leerer Wald nach und nach um Kanten zwischen den Komponenten ergänzt, so dass am Ende ein aufspannender Baum entsteht. Beim Algorithmus von Prim wird dagegen von vornherein ein Baum aufgebaut und in jedem Schritt um eine weitere Kante ergänzt, bis am Ende ein aufspannender Baum entsteht.

Wie der Algorithmus von Kruskal ist auch der Algorithmus von Prim vom Greedy-Typ. Ihm liegt jedoch kein Matroid zugrunde, denn die möglichen Kantenmengen, die während des Ablaufs des Algorithmus gebildet werden, sind Bäume, und im Allgemeinen ist eine Teilmenge eines Baumes nicht wieder ein Baum, so dass Bedingung (I2) verletzt ist.

Es liegt damit kein Unabhängigkeitssystem vor: Nur bestimmte Teilmengen von Bäumen sind wieder Bäume. Die hier vorliegende Struktur wird **Greedoid** genannt.[5]

Definition 1.3. Sei E eine Menge und $\mathscr{F}$ ein nichtleeres System von Teilmengen von E. Dann heißt $G = (E, \mathscr{F})$ **Greedoid** über E, falls folgende Axiome erfüllt sind:

(G1) Ist $X \in \mathscr{F}$ nicht leer, so existiert ein $x \in X$, so dass $X \setminus \{x\} \in \mathscr{F}$.

(G2) Sind $X_1, X_2 \in \mathscr{F}$ mit $|X_1| < |X_2|$, dann gibt es ein Element $x \in X_2 \setminus X_1$, so dass $X_1 \cup \{x\} \in \mathscr{F}$.

Die Elemente von $\mathscr{F}$ werden **erreichbare Mengen** genannt.

Das Greedoid ist eine Verallgemeinerung des Matroids: Das Axiom (G2) entspricht dem Ergänzungsaxiom (I3), (G1) ist eine Abschwächung der Erblichkeitsbedingung (I2) und da $\mathscr{F}$ nicht leer ist, folgt mit (G1) die Erreichbarkeit der leeren Menge, also (I1). Greedoide stellen damit noch mehr als Matroide eine „natürliche“ Struktur für den Greedy-Algorithmus dar. Die Theorie der unendlichen Greedoide ist allerdings noch wesentlich weniger ausgearbeitet als die Theorie der unendlichen Matroide. Wir werden deshalb die Diskussion über Greedoide auf die Erwähnung in diesem Abschnitt beschränken und uns sonst auf Matroide konzentrieren.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es auch Greedy-Algorithmen gibt, denen kein Greedoid zugrunde liegt, beispielsweise der Huffman-Algorithmus zur Erstellung eines optimalen Präfixcodes.[6]

1.2 Zu dieser Arbeit

1.2.1 Der Greedy-Algorithmus und unendliche Matroide – Problemstellung

Für endliche Matroide ist bekannt, dass für sie der Greedy-Algorithmus immer eine optimale Basis liefert. Umgekehrt ist auch bekannt, dass ein endliches Unabhängigkeitssystem, für das der Greedy-Algorithmus funktioniert, ein Matroid sein muss. Wir interessieren uns für die Erweiterung dieser Aussagen auf den Fall unendlicher Matroide.

Zunächst ist weder klar, welche Form ein unendlicher Greedy-Algorithmus überhaupt haben sollte, noch nach welchen Kriterien man die produzierte Menge als optimal bezeichnen kann. Wir werden uns in diesen Punkten weitgehend Klee (1971) anschließen, der für finitäre Matroide gezeigt hat, dass der Greedy-Algorithmus stets eine in einem bestimmten Sinne optimale Basis liefert.

Die Problemstellung besteht nun darin, zu untersuchen, ob auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, d. h. ob man aus dem Funktionieren des Greedy-Algorithmus für ein unendliche Unabhängigkeitssysteme folgern kann, dass dieses ein finitäres Matroid sein muss, oder ob der Greedy-Algorithmus möglicherweise auch für andere Klassen von Matroiden funktioniert.

[5] siehe Björner u. Ziegler (1992).
[6] siehe Cormen et al. (2001, Abschnitt 16.3).

1.2.2 Struktur der Arbeit

Nach der informalen Einführung werden wir im Kapitel 2 den Begriff des Matroids nochmals rigoros definieren. Wir beginnen mit den endlichen Matroiden, um die Grundbegriffe der Matroidtheorie einzuführen. Wir erweitern den Begriff dann schrittweise auf verschiedene Klassen von unendlichen Matroiden. Bei der Frage, was ein unendliches Matroid ist, stützen wir uns hauptsächlich auf den kürzlich veröffentlichten Artikel von Bruhn et al. (2010), in dem äquivalente Axiomensysteme für unendliche Matroide angegeben werden.

Danach werden wir in Kapitel 3 die Theorie des Greedy-Algorithmus für endliche Matroide aufarbeiten. Wir werden sehen, dass die Greedy-Strategie bei gewichteten Matroiden im unendlichen Fall zu gewissen Schwierigkeiten führt, die sich umgehen lassen, indem man statt der Gewichtsfunktion eine Wohlordnung auf den Elementen des Matroids vorgibt. Es wird sich herausstellen, dass die Definition von Klee (1971) auch für endliche Matroide geeignet ist und zu identischen Ergebnissen führt, wodurch eine Rechtfertigung für den unendlichen Fall gegeben ist.

In Kapitel 4 werden wir den Greedy-Algorithmus für unendliche Matroide betrachten. Wir werden uns zunächst einen *iterativen* Greedy-Algorithmus ansehen, der nach und nach immer größere unabhängige Mengen produziert, aber nach endlich vielen Schritten abgebrochen wird. Dass die erzeugten Mengen optimal sind, lässt sich mit der Theorie endlicher Matroide zeigen; wir werden aber auch zeigen, dass dieser Algorithmus selbst für Unabhängigkeitssysteme funktioniert, die keine Matroide sind. Danach geben wir Klees Formulierung des Greedy-Algorithmus sowie seinen Satz, dass der Greedy-Algorithmus für finitäre Matroide stets eine optimale Basis liefert, an. Schließlich gehen wir in Abschnitt 4.3 die Umkehrung des Satzes an.

1.2.3 Notation

Die in dieser Arbeit verwendete Notation wird keine größere Überraschung hervorrufen. In der Regel bezeichnen große Buchstaben wie A Mengen, kalligraphische Großbuchstaben wie $\mathscr{A}$ Mengensysteme und kleine Buchstaben wie a Elemente, die nicht selbst Mengen sind. Die Potenzmenge wird mit $\mathscr{P}(A)$, die Kardinalität einer Menge mit $|A|$, die Mengendifferenz mit $A \setminus B$ notiert. Falls aus dem Kontext eine Grundmenge U ersichtlich ist, wird für $A \subseteq U$ das relative Komplement $U \setminus A$ auch einfach A^c geschrieben.

Eine in der Matroidtheorie übliche vereinfachte Schreibweise wird benutzt: Falls es nicht zu Missverständnissen kommen kann, fallen die Mengenklammern bisweilen weg. Beispielsweise schreiben wir $A \cup x$ statt $A \cup \{x\}$ und $B \setminus y$ statt $B \setminus \{y\}$.

Die lineare Hülle einer (Multi-)Menge S von Vektoren schreiben wir $\langle S \rangle$; falls $\mathbb{K}$ ein Körper ist schreiben wir den Vektorraum der n-Spaltenvektoren $\mathbb{K}^n$.

2 Endliche und unendliche Matroide

Dieses Kapitel soll eine Einführung in den Matroidbegriff sein. Es werden zunächst die endlichen Matroide vorgestellt und grundlegende, damit zusammenhängende Konzepte erarbeitet, die für das Verständnis der weiteren Untersuchungen wesentlich sind. Dann wird die Endlichkeitsbedingung weggelassen, so dass die wesentlich größere Klasse der *pre-independence spaces* entsteht. Diese wird dann durch geeignete Zusatzbedingungen wieder eingeschränkt, um zu einem handhabbaren unendlichen Matroidbegriff zu kommen, der die wesentlichen Eigenschaften endlicher Matroide auch im Unendlichen zeigt.

Wir werden folgende Klassen Matroid-ähnlicher Objekte besprechen:

- endliche Matroide (siehe Abschnitt 2.1)
- Matroide endlichen Ranges (siehe Abschnitt 2.4)
- finitäre Matroide (siehe Abschnitt 2.5)
- Matroide (siehe Abschnitt 2.6)
- *pre-independence spaces* (siehe Abschnitt 2.3)

Diese Begriffe sind in eine echte Inklusionshierarchie eingeordnet, siehe Abbildung 2.1.

2.1 Endliche Matroide

Die Theorie der unendlichen Matroide führt innerhalb der Matroidtheorie vergleichsweise ein Schattendasein. Wenn der Begriff Matroid fällt, ist damit folglich in der Regel ein endliches Matroid gemeint. Wir werden uns in diesem und nur in diesem Abschnitt dieser Sprechweise

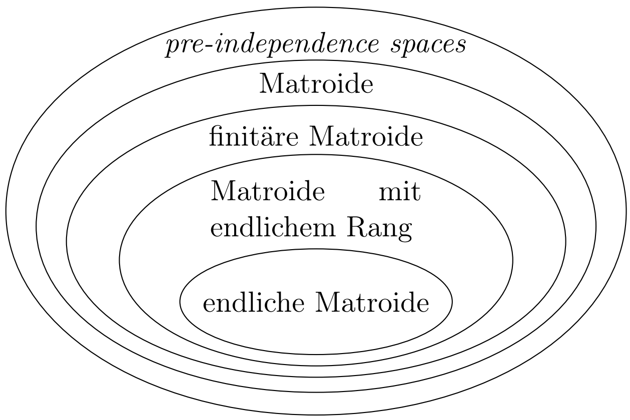


Abbildung 2.1: Hierarchie Matroid-ähnlicher Begriffe. Die Teilmengenbeziehung ist jeweils echt.

weitestgehend anschließen. Im restlichen Teil der Arbeit werden wir dann jedoch explizit von „endlichen“ Matroiden sprechen und mit „Matroid“ eine bestimmte unendliche Verallgemeinerung bezeichnen.

Eine interessante Eigenart des Matroidbegriffs ist die Existenz einer Vielzahl äquivalenter Definitionen, sogenannter „kryptomorpher“ Axiomensysteme. Neben der Definition über die Unabhängigkeitsaxiome werden wir endliche Matroide in diesem Abschnitt über die Basis-, Kreis- und Abschlussaxiome charakterisieren. Eine Vielzahl weiterer Definitionen findet sich z. B. bei Nicoletti u. White (1986).

Die Definitionen und Sätze in diesem Abschnitt stammen, soweit nicht anders angegeben, von Oxley (1992a).

Beginnen wir mit der Definition über die in der Einleitung schon genannten unabhängigen Mengen.

Definition 2.1 (Unabhängigkeitsaxiome)**.** Sei E eine endliche Menge, und sei $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein System von Teilmengen von E. Dann heißt $M = (E, \mathscr{I})$ **(endliches) Matroid** über der Grundmenge E, falls die folgenden Unabhängigkeitsaxiome erfüllt sind:

(I1) $\emptyset \in \mathscr{I}$.

(I2) Falls $I \in \mathscr{I}$ und $I' \subseteq I$, so folgt $I' \in \mathscr{I}$. (*Erblichkeitsbedingung*)

($\mathrm{I3_F}$) Falls $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$ und $|I_1| < |I_2|$, so existiert ein $x \in I_2 \setminus I_1$, so dass $I_1 \cup x \in \mathscr{I}$. (*(endliche) Ergänzungseigenschaft*)

Die Elemente von $\mathscr{I}$ werden **unabhängige Mengen** genannt. Die Elemente von $\mathscr{P}(E) \setminus \mathscr{I}$ heißen entsprechend **abhängige Mengen**.

Wie üblich gelten zwei Matroide als isomorph, wenn sie durch Umbenennen der Elemente ineinander übergehen, formal: $M_1 = (E_1, \mathscr{I}_1)$ und $M_2 = (E_2, \mathscr{I}_2)$ sind **isomorph**, $M_1 \cong M_2$, falls eine bijektive Abbildung $\psi\colon E_1 \to E_2$ existiert, so dass

$$\psi(X) \in \mathscr{I}_2 \Longleftrightarrow X \in \mathscr{I}_1 \quad \text{für alle } X \subseteq E_1.$$

Beispiel 2.2 (Darstellbare Matroide)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und A eine $n \times m$-Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K}$. Wir schreiben A spaltenweise als

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Definieren wir nun $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (S ist eine Multimenge, d. h. zwei gleiche Spalten mit unterschiedlichem Index sollen beide in S auftauchen) und

$$\mathscr{I} = \{I \subseteq S \mid I \text{ ist linear unabhängig}\}, \tag{2.1}$$

so ist $(S, \mathscr{I})$ ein Matroid, das sogenannte *Vektormatroid* von A. Ein zu einem Vektormatroid isomorphes Matroid heißt ($\mathbb{K}$-)*darstellbar*. In der Literatur sind teilweise auch die Begriffe *matrisches* oder *lineares* Matroid gebräuchlich.

Beweis. Wir überprüfen die Unabhängigkeitsaxiome. (I1) und (I2) gelten offensichtlich.

Seien I_1, I_2 mit $|I_1| < |I_2|$ linear unabhängige Teilmengen von S. Angenommen, ($\mathrm{I3_F}$) gilt nicht. Dann ist $I_1 \cup e$ für alle $e \in I_2 \setminus I_1$ linear abhängig, d. h. $e \in \langle I_1 \rangle$ für alle $e \in I_2 \cup I_1$. Daraus folgt $\langle I_1 \cup I_2 \rangle = \langle I_1 \rangle$, also $|I_2| \leq \dim\langle I_1 \cup I_2 \rangle = \dim\langle I_1 \rangle = |I_1| < |I_2|$, Widerspruch. $\square$

In der linearen Algebra ist eine Basis eine maximale linear unabhängige Menge. Einen entsprechenden Begriff gibt es auch in der Matroidtheorie.

Definition 2.3. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid. Eine **Basis** von M ist eine (bezüglich der Inklusion) maximale unabhängige Menge von M.

Die unabhängigen Mengen sind nach oben durch E beschränkt. Da E endlich ist, ist somit jede unabhängige Menge in einer Basis enthalten. Aus (I1) folgt damit, dass es stets Basen gibt.

Die Ergänzungseigenschaft ($\mathrm{I3_F}$) sichert die Gleichmächtigkeit sämtlicher Basen eines Matroids.

Satz 2.4. Seien B_1, B_2 Basen eines endlichen Matroids $(E, \mathscr{I})$. Dann gilt $|B_1| = |B_2|$.

Beweis. Sei o. B. d. A. angenommen, dass $|B_1| < |B_2|$. Dann gibt es nach ($\mathrm{I3_F}$) ein $e \in B_2 \setminus B_1$, so dass $B_1 \cup e \in \mathscr{I}$, im Widerspruch zur Maximalität von B_1. □

Satz 2.5. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein endliches Matroid und X eine Teilmenge von E. Dann ist auch

$$M|X := (X, \mathscr{I} \cap \mathscr{P}(X)) \tag{2.2}$$

ein Matroid, die **Restriktion** von M auf X.

Beweis. Einfaches Nachprüfen der Unabhängigkeitsaxiome zeigt die Behauptung. □

Definition 2.6 (Rang)**.** Sei B eine beliebige Basis des Matroids $M = (E, \mathscr{I})$. Die nach Satz 2.4 von der konkreten Wahl von B unabhängige Anzahl der Elemente von B heißt **Rang** von M und wird mit $r(M)$ bezeichnet.

Ist X eine Teilmenge von E, so schreiben wir abkürzend auch $r(X)$ für $r(M|X)$.

Satz 2.7 (Basisaxiome)**.** Die Menge $\mathscr{B}$ der Basen eines Matroids M besitzt folgende Eigenschaften:

(B1) $\mathscr{B} \neq \emptyset$.

(B2) Falls $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ und $x \in B_1 \setminus B_2$, dann gibt es ein $y \in B_2 \setminus B_1$, so dass $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathscr{B}$. (*Austauscheigenschaft*)

Beweis. (B1) folgt aus (I1) und der Endlichkeit von E.

Nach (I2) ist $B_1 \setminus x \in \mathscr{I}$, und da $|B_1 \setminus x| < |B_2|$ gibt es nach ($\mathrm{I3_F}$) ein $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus x)$, so dass $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathscr{I}$. Wegen $x \notin B_2$ ist offenbar $y \in B_2 \setminus B_1$.

Es ist noch zu zeigen, dass $(B_1 \setminus x) \cup y$ maximal ist. $(B_1 \setminus x) \cup y$ ist in einer Basis B_1' enthalten. Da wir $|(B_1 \setminus x) \cup y| = |B_1|$ und wegen Satz 2.4 $|B_1| = |B_1'|$ haben, folgt $(B_1 \setminus x) \cup y = B_1'$, also ist $(B_1 \setminus x) \cup y$ eine Basis, womit (B2) gezeigt ist. □

Matroide lassen sich durch ihre Basenmenge $\mathscr{B}$ charakterisieren. Anders gesagt, die Basisaxiome bilden ein kryptomorphes Axiomensystem.

Satz 2.8 (Charakterisierung von Matroiden durch ihre Basen)**.** Sei E eine endliche Menge und besitze $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(E)$ die Eigenschaften (B1) und (B2). Setzt man

$$\mathscr{I} = \{I \subseteq B \mid B \in \mathscr{B}\}, \tag{2.3}$$

dann ist $(E, \mathscr{I})$ ein Matroid mit der Basenmenge $\mathscr{B}$.

Beweis. Siehe Oxley (1992a, Theorem 1.2.3). □

Definition 2.9. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid. Ein **Kreis**[1] von M ist eine (bezüglich der Inklusion) minimale abhängige Menge von M.

Satz 2.10 (Kreisaxiome)**.** Die Menge $\mathscr{C}$ der Kreise eines Matroids M besitzt folgende Eigenschaften:

(C1) $\emptyset \notin \mathscr{C}$.

(C2) Falls $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ und $C_1 \subseteq C_2$, so folgt $C_1 = C_2$.

(C3) Falls C_1, C_2 voneinander verschiedene Elemente von $\mathscr{C}$ sind und $e \in C_1 \cap C_2$ ist, dann gibt es ein Element $C_3 \in \mathscr{C}$, so dass $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$. (*Kreiseliminationseigenschaft*)

Beweis. (C1) folgt direkt aus (I1), (C2) aus der Minimalität von C_1 und C_2. Zum Beweis von (C3) sei angenommen, dass es keinen Kreis in $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ gibt. Dann muss $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ eine unabhängige Menge sein. Sei f ein beliebiges Element aus der nach (C2) nichtleeren Menge $C_2 \setminus C_1$. Da C_2 als Kreis eine minimale abhängige Menge ist, muss $C_2 \setminus f$ unabhängig sein.

Sei nun $I \in \mathscr{I}$ maximal mit

$$C_2 \setminus f \subseteq I \subseteq C_1 \cup C_2$$

gewählt. Dann ist offenbar $f \notin I$, da sonst $C_2 \subseteq I$ wäre, im Widerspruch zur Unabhängigkeit von I. Da C_1 abhängig ist und somit C_1 keine Teilmenge von I ist, gibt es ein $g \in C_1 \setminus I$, das wegen $f \in C_2 \setminus C_1$ von f verschieden sein muss. Es folgt

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus e|.$$

Wendet man nun ($\mathrm{I3_F}$) auf I und $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ an, erhält man ein $x \in (C_1 \cup C_2) \setminus e$, so dass $I \cup x \in \mathscr{I}$ und $C_2 \setminus f \subseteq I \cup x \subseteq C_1 \cup C_2$, im Widerspruch dazu, dass I bereits maximal gewählt war. □

Wie durch ihre Basen lassen sich Matroide auch durch ihre Kreise charakterisieren. Die Kreisaxiome bilden damit ein weiteres kryptomorphes Axiomensystem.

Satz 2.11 (Charakterisierung von Matroiden durch ihre Kreise)**.** Sei E eine endliche Menge und besitze $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(E)$ die Eigenschaften (C1), (C2) und (C3). Setzt man

$$\mathscr{I} = \{I \subseteq E \mid \forall C \in \mathscr{C} \colon C \nsubseteq I\}, \tag{2.4}$$

so ist $(E, \mathscr{I})$ ein Matroid, dessen Kreismenge gerade $\mathscr{C}$ ist.

Beweis. Siehe Oxley (1992a, Theorem 1.1.4). □

[1] engl. circuit.

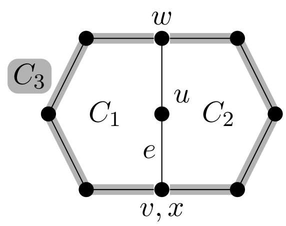


Abbildung 2.2: Kreiseliminationsaxiom. In der Vereinigung von C_1 und C_2 ist ein Kreis C_3 enthalten, hier grau hinterlegt, der die gemeinsame Kante e nicht enthält.

Die Begriffe Matroid (von Matrix[2]), unabhängig und Basis sind offensichtlich von der Linearen Algebra inspiriert. Der Begriff des Kreises stammt aus der zweiten großen Inspirationsquelle der Matroidtheorie, der Graphentheorie.

Beispiel 2.12 (Graphische Matroide)**.** Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$. Sei $\mathscr{C}$ die Menge der Kantenmengen von G, die einen Zyklus bilden, d. h. einen zusammenhängenden Teilgraphen induzieren, in dem jeder Knoten den Grad 2 hat. Dann ist $\mathscr{C}$ die Menge der Kreise eines Matroids über E, des sogenannten *Zyklen-* oder *Polygonmatroids* von G. Zu Zyklenmatroiden isomorphe Matroide heißen *graphisch.*

Beweis. Die leere Kantenmenge bildet keinen Zyklus, also ist $\emptyset \notin \mathscr{C}$, so dass (C1) gilt. Es gilt auch (C2), denn ein Zyklus kann keinen anderen Zyklus echt enthalten. Zum Beweis von (C3) seien C_1 und C_2 die Kantenmengen zweier verschiedener Zyklen von G, die eine gemeinsame Kante $e = \{u, v\}$ besitzen. Wir konstruieren einen Zyklus C_3, dessen Kantenmenge in $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ enthalten ist.

Für $i = 1, 2$ sei P_i jeweils der Pfad von u nach v mit der Kantenmenge $C_i \setminus e$. Durchlaufe P_1 von u nach v. Sei w der erste Knoten, dessen folgende Kante in $P_1 \setminus P_2$ liegt, und sei x der erste Knoten ungleich w, dessen folgende Kante aus P_1 auch in P_2 liegt.

Vereinige nun den P_1-Abschnitt von w nach x mit dem P_2-Abschnitt von x nach w. Das Ergebnis ist ein Zyklus mit einer Kantenmenge in $(C_1 \cup C_2) \setminus e$. Damit gilt auch (C3). □

Oxley (1992a) führt den Abschlussoperator eines Matroids über die *Rangfunktion* eines Matroids,

$$r\colon \mathscr{P}(E) \to \mathbb{N}, X \mapsto r(X),$$

siehe Definition 2.6, ein. Der Abschluss einer Teilmenge X von E ist damit durch

$$\operatorname{cl}(X) := \{x \in E \mid r(X \cup x) = r(X)\}$$

definiert.

Im Hinblick auf unendliche Matroide ist die Rangfunktion in dieser Form allerdings recht unpraktisch[3], weshalb wir uns Bruhn et al. (2010) für die Definition des Abschlusses anschließen wollen.

[2]siehe Whitney (1935).

[3]Siehe Bruhn et al. (2010). Dort wird für unendliche Matroide statt dieser Rangfunktion eine *relative Rangfunktion* einführt.

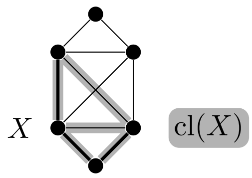


Abbildung 2.3: Der Abschluss $\mathrm{cl}(X)$ der mit dicken Linien markierten Kantenmenge X besteht aus den Kanten aus X sowie den Kanten, die in X einen Zyklus schließen.

Definition 2.13. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid. Die Abbildung

$$\begin{aligned}&\mathrm{cl}\colon \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)\\ &\mathrm{cl}(X) := X \cup \{x \in E \mid \exists I \subseteq X : I \in \mathscr{I} \wedge I \cup x \notin \mathscr{I}\} \qquad \text{für } X \subseteq E\end{aligned}$$

heißt **Abschlussoperator** von M. Die Menge $\mathrm{cl}(X)$ heißt **Abschluss** von X.

Vor der Untersuchung der Eigenschaften des Abschlussoperators wollen wir uns noch jeweils ein Beispiel für darstellbare und für graphische Matroide anschauen.

Beispiel 2.14. Sei A eine $n \times m$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ mit der Spaltenmenge E und $M[A] = (E, \mathscr{I})$ das Vektormatroid von A. Ist X eine Teilmenge der Spalten von A, dann ist ein Element $e \in E$ im Abschluss $\mathrm{cl}(X)$ genau dann enthalten, wenn e in der linearen Hülle $\langle X \rangle$ enthalten ist, das heißt $\mathrm{cl}(X) = E \cap \langle X \rangle$.

Beispiel 2.15. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M(G) = (E, \mathscr{I})$ sein Zyklenmatroid. Ist X eine Teilmenge der Kanten von G, dann besteht der Abschluss von X gerade aus den Kanten e, die bereits in X enthalten sind, oder durch deren Hinzufügen zu X ein Zyklus geschlossen wird (siehe Abbildung 2.3.)

Satz 2.16 (Abschlussaxiome)**.** Der Abschlussoperator cl eines Matroids M über E besitzt folgende Eigenschaften.

(CL1) Für alle $X \subseteq E$ ist $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$.

(CL2) Sind X, Y Teilmengen von E mit $X \subseteq Y$, so gilt $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$. (*Isotonie*)

(CL3) Für alle $X \subseteq E$ gilt $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$. (*Idempotenz*)

(CL4) Für alle $X \subseteq E$ gilt: Ist $x \in E$ und $y \in \mathrm{cl}(X \cup x) \setminus \mathrm{cl}(X)$, so folgt $x \in \mathrm{cl}(X \cup y)$. (*Austauscheigenschaft*)

Beweis. (CL1) und (CL2) folgen direkt aus der Definition.

(CL3) Der Beweis stützt sich auf das folgende Lemma.

Lemma 2.17. Sei $X \subseteq E$ und B eine Basis von $M|X$, dann gilt

$$\mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(X).$$

Beweis. Wir müssen wegen (CL2) nur die Inklusion $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(B)$ zeigen. Für $y \in B$ ist die Aussage trivial, sei also zunächst $y \in X \setminus B$. Dann ist $B \in \mathscr{I}$ und $B \cup y \notin \mathscr{I}$, also $y \in \mathrm{cl}(B)$.

Sei nun $y \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$. Dann gibt es laut Definition eine unabhängige Teilmenge $I \subseteq X$ mit $I \cup y \notin \mathscr{I}$. Wir erweitern I zu einer Basis B' von $M|(X \cup y)$. Dann ist offenbar $y \notin B'$, also ist B' auch eine Basis von $M|X$.

Nach Satz 2.4 gilt $|B| = |B'|$, so dass B auch eine Basis von $M|(X \cup y)$ sein muss. Dann muss also $B \cup y \notin \mathscr{I}$ sein, also $y \in \mathrm{cl}(B)$, und es folgt die behauptete Inklusion. □

Aus dem Beweis des Lemmas lässt sich auch die folgende Aussage ableiten.

Korollar 2.18. Sei B eine Basis von $M|X$ für ein $X \subseteq E$. Dann ist B eine Basis von $M|\,\mathrm{cl}(X)$.

Beweis. Im Beweis des Lemmas ist $B \cup y \notin \mathscr{I}$ für alle $y \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$, also ist B in $\mathrm{cl}(X)$ eine maximale unabhängige Menge. □

Wir fahren mit dem Beweis von (CL3) fort. Sei $X \subseteq E$, und sei B eine Basis von $M|X$. Nach dem Korollar ist B auch eine Basis von $M|\,\mathrm{cl}(X)$. Mit dem Lemma schließen wir

$$\mathrm{cl}(X) = \mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)).$$

(CL4) In den Fällen $x \in X$ und $x = y$ ist die Behauptung trivial erfüllt, sei also $x \in E \setminus (X \cup y)$. Es gibt dann per Definition ein $I \subseteq X \cup x$ mit $I \in \mathscr{I}$ und $I \cup y \notin \mathscr{I}$ mit $x \in I$. Wegen $y \notin \mathrm{cl}(X)$ ist $(I \setminus x) \cup y \in \mathscr{I}$, und mit $((I \setminus x) \cup y) \cup x = I \cup y \notin \mathscr{I}$ folgt $x \in \mathrm{cl}(X \cup y)$. □

Die Abschlussaxiome bilden ein weiteres kryptomorphes Axiomensystem für Matroide.

Satz 2.19. Sei E eine endliche Menge und $\mathrm{cl} : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ eine Abbildung, die die Eigenschaften (CL1)–(CL4) erfüllt. Dann ist cl der Abschlussoperator eines Matroids $M = (E, \mathscr{I})$, und es gilt

$$\mathscr{I} = \{I \subseteq E \mid \forall x \in I : x \notin \mathrm{cl}(I \setminus x)\}. \tag{2.5}$$

Beweis. Siehe Oxley (1992a), Theorem 1.4.4 inkl. Lemma 1.4.5 und Korollar 1.4.6. □

Der Abschlussbegriff bringt eine Reihe von Bezeichnungen für spezielle Teilmengen von E mit sich.

- $X \subseteq E$ heißt **abgeschlossene Menge** oder **Fläche**, falls $X = \mathrm{cl}(X)$.
- $X \subseteq E$ heißt **aufspannende Menge**, falls $\mathrm{cl}(X) = E$.
- $X \subseteq E$ heißt **Hyperebene**, falls X eine maximale nicht-aufspannende Menge ist.

Korollar 2.20. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid. Dann gilt: $B \subseteq E$ ist eine Basis genau dann, wenn B unabhängig und aufspannend ist.

Beweis.

$$\begin{aligned} B \text{ ist Basis} &\Leftrightarrow B \in \mathscr{I} \text{ und } B \cup x \notin \mathscr{I} \text{ für alle } x \in B^c \\ &\Leftrightarrow B \in \mathscr{I} \text{ und } B^c \subseteq \mathrm{cl}(B) \\ &\Leftrightarrow B \text{ ist unabhängig und aufspannend.} \end{aligned}$$

□

Zusätzlich zu den hier aufgezählten Axiomensystemen lassen sich endliche Matroide auch durch ihre Rangfunktion, ihre abhängigen, aufspannenden oder nicht-aufspannenden Mengen sowie ihre Hyperebenen charakterisieren. Dazu sei auf Nicoletti u. White (1986) verwiesen.

2.2 Dualität

Der Begriff der *Dualität* zieht sich durch viele Bereiche der Mathematik. In der Matroidtheorie beruht die Dualität von Matroiden über einer endlichen Menge E darauf, die Inklusionsteilordnung auf $\mathscr{P}(E)$ umzukehren und dadurch *duale* Begriffe und Aussagen zu gewinnen. Wir werden diese Herleitung aber nicht von Grund auf durchführen, sondern uns an der existierenden Literatur orientieren, die in der Regel mit der Definition der dualen Basen beginnt.

Satz 2.21. Sei M ein endliches Matroid über E mit der Basenmenge $\mathscr{B}$. Setzt man

$$\mathscr{B}^* := \{E \setminus B \mid B \in \mathscr{B}\}, \tag{2.6}$$

so ist $\mathscr{B}^*$ die Basenmenge eines endlichen Matroids über E.

Beweis. Siehe Oxley (1992a, Theorem 2.1.1). □

Das Matroid mit der Basenmenge $\mathscr{B}^*$ wird **duales Matroid** zu M genannt und mit M^* bezeichnet. Da die dualen Basen durch Komplementbildung aus den Basen hervorgehen, führt eine erneute Bildung des Duals wieder zum Ausgangspunkt: $(M^*)^* = M$, d. h. die Dualisierung $M \mapsto M^*$ ist eine *Involution*.

Die Basen von M^* heißen **Kobasen** von M. Entsprechend heißen beispielsweise die unabhängigen Mengen, Kreise, aufspannenden Mengen von M^* **kounabhängige Mengen**, **Kokreise**, **koaufspannende Mengen** von M. Dabei gelten folgende Beziehungen:

Satz 2.22. Sei M ein Matroid über E und sei X eine Teilmenge von E. Dann gilt:

(i) X ist unabhängig $\Leftrightarrow$ $E \setminus X$ ist koaufspannend.

(ii) X ist aufspannend $\Leftrightarrow$ $E \setminus X$ ist kounabhängig.

(iii) X ist eine Hyperebene $\Leftrightarrow$ $E \setminus X$ ist ein Kokreis.

(iv) X ist ein Kreis $\Leftrightarrow$ $E \setminus X$ ist eine Kohyperebene.

Beweis. Siehe Oxley (1992a, Theorem 2.1.6). □

Die Bedeutung der Dualität liegt zum großen Teil im **Dualitätsprinzip**, welches besagt, dass man zu jeder Aussage über Matroide eine äquivalente duale Aussage erhält, indem man alle Begriffe durch ihre Dualen ersetzt. Dualität spielt eine zentrale Rolle in der Matroidtheorie und, wie wir bei der Untersuchung unendlicher Matroide sehen werden, insbesondere bei der Entscheidung, welche Klasse ins Unendliche verallgemeinerter Matroide überhaupt wert ist, weiter betrachtet zu werden.

2.3 *Pre-independence spaces*

Lässt man in der Definition 2.1 die Bedingung weg, dass die Grundmenge E endlich sei, erhält man die Klasse der *pre-independence spaces*.[4]

Diese Definition ist so allgemein, dass sie aus Sicht der Matroidtheorie relativ uninteressant ist. Beispielsweise müssen *pre-independence spaces* im Allgemeinen nicht einmal Basen oder Kreise besitzen.

Beispiel 2.23. Wir betrachten auf der Grundmenge $\mathbb{R}$ die Menge $\mathscr{I}$ der abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann sind die Axiome (I1),(I2),($I3_F$) sicher erfüllt, es gibt jedoch weder maximale abzählbare noch minimale überabzählbare Teilmengen und somit keine Basen oder Kreise.

2.4 Matroide endlichen Ranges

Die Klasse der Matroide endlichen Ranges erhalten wir aus Definition 2.1, indem wir die Bedingung, dass die Grundmenge E endlich sei, entfernen, und durch die folgende Bedingung ersetzen:

(R_F) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|I| \leq n$ für alle $I \in \mathscr{I}$.

Matroide endlichen Ranges besitzen Basen und Kreise. Überhaupt ist die Theorie ähnlich der der endlichen Matroide, mit Ausnahme der Dualität: Die Komplemente der Basen sind bei unendlicher Grundmenge unendlich, das Dual ist also kein Matroid endlichen Ranges.

Beispiele für Matroide endlichen Ranges sind endlichdimensionale Vektorräume bzw. Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume, wobei wie im Beispiel 2.2 die unabhängigen Mengen durch die linear unabhängigen Mengen gebildet werden.

2.5 Finitäre Matroide

Dehnen wir das Beispiel 2.2 der darstellbaren Matroide nicht nur auf unendliche Grundmengen, sondern sogar auf unendliche (Vektorraum-)Basen aus, erhalten wir den Begriff des finitären Matroids.

Definition 2.24. Sei E eine Menge und $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein System von Teilmengen von E. Dann heißt $M = (E, \mathscr{I})$ **finitäres Matroid**, falls zusätzlich zu den in Definition 2.1 aufgeführten Unabhängigkeitsaxiomen (I1), (I2), ($I3_F$)das folgende Axiom gilt:

(I4) Falls für alle endlichen Teilmengen Y von $X \subseteq E$ gilt, dass $Y \in \mathscr{I}$, dann folgt $X \in \mathscr{I}$. (*endlicher Charakter*)

Bemerkung 2.25. Finitäre Matroide werden in manchen Publikationen, z. B. bei Oxley (1992), auch als „independence spaces“ bezeichnet.

[4] siehe Oxley (1992).

Beispiel 2.26. Sei V ein möglicherweise unendlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Bekanntlich[5] heißt eine Teilmenge $M \subseteq V$ linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge $N \subseteq M$ linear unabhängig ist. Eine Teilmenge von V zusammen mit den linear unabhängigen Teilmengen von V ist dann ein finitäres Matroid.

Eine zu (I4) äquivalente Eigenschaft führt uns direkt zum nächsten Beispiel aus der Graphentheorie.

Satz 2.27. Für einen *pre-independence space* $M = (E, \mathscr{I})$ gilt (I4) genau dann, wenn jede abhängige Menge einen endlichen Kreis enthält.

Beweis. Die Kontraposition von (I4) lautet: Jede abhängige Menge enthält eine endliche abhängige Menge. Die Äquivalenz zur Existenz eines endlichen Kreises ist dann trivial. □

Beispiel 2.28. Wir erweitern Beispiel 2.12, indem wir nun einen unendlichen Graphen G zulassen. Die Menge $\mathscr{C}$ bestehe nach wie vor aus den Zyklen von G. Da alle Zyklen aus endlich vielen Kanten bestehen, ist das Zyklenmatroid von G ein finitäres Matroid.

Finitäre Matroide besitzen viele der Eigenschaften endlicher Matroide. Die Klasse der finitären Matroide ist jedoch nicht unter Dualität abgeschlossen. Die dualen Matroide zu finitären Matroiden werden *kofinitäre Matroide* genannt.

Die folgenden Aussagen werden wir später benötigen.

Satz 2.29. Finitäre Matroide erfüllen die Kreisaxiome (C1)–(C3).

Beweis. Man prüft leicht nach, dass im Beweis von Satz 2.10 lediglich die Unabhängigkeitsaxiome, nicht jedoch die Endlichkeit der Grundmenge verwendet wurde. □

Bemerkung 2.30. Durch Hinzunahme der Bedingung

(C4) Jede abhängige Menge enthält einen endlichen Kreis.

erhält man laut Oxley (1992, Theorem 3.1.3) sogar eine Charakterisierung der finitären Matroide durch die Kreisaxiome.

Satz 2.31. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein finitäres Matroid und $I \in \mathscr{I}$. Falls $I \cup x \notin \mathscr{I}$ für ein $x \in E$ gilt, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Kreis C von M mit

$$x \in C \subseteq I \cup x. \tag{2.7}$$

Beweis. (1) $I \cup x$ ist abhängig und enthält daher nach (I4) mindestens einen Kreis. Jeder dieser Kreise muss x enthalten, denn sonst wäre er auch in I enthalten.

(2) Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei angenommen, C_1, C_2 wären zwei verschiedene Kreise, die (2.7) erfüllen. Dann existiert mit (C3) ein Kreis C_3 mit $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus x \subseteq I$, Widerspruch. □

[5] siehe Unger (2003, Definition 7.2.2 (b))

Eine Folgerung aus (C3), das *starke Kreiseliminationsaxiom*[6], werden wir zum Beweis der Abschlusseigenschaften benötigen.

Satz 2.32. Falls C_1, C_2 voneinander verschiedene Kreise sind und $e \in C_1 \cap C_2$ ist, dann gibt es für jedes $f \in C_1 \setminus C_2$ einen Kreis C_3 mit

$$f \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e. \tag{2.8}$$

Beweis. [7] Angenommen, die Behauptung ist falsch, und sei durch Kreise C_1, C_2 sowie Elemente $e \in C_1 \cap C_2$ und $f \in C_1 \setminus C_2$ ein Gegenbeispiel gegeben, wobei o. B. d. A. $|C_1 \cup C_2|$ minimal sei.

Nach (C3) existiert ein Kreis C_3 mit $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$, und nach der Annahme ist $f \notin C_3$. Nun muss es ein $g \in C_3 \cap (C_2 \setminus C_1)$ geben, denn sonst wäre C_3 eine echte Teilmenge von C_1.

Betrachte C_2, C_3. Es ist $g \in C_2 \cap C_3$, $e \in C_2 \setminus C_3$, und da $f \notin C_2 \cup C_3$ ist $C_2 \cup C_3 \subsetneq C_1 \cup C_2$, also $|C_2 \cup C_3| < |C_1 \cup C_2|$, d. h. C_2, C_3, g, e ist kein Gegenbeispiel für die Behauptung. Es existiert daher ein Kreis C_4 mit $e \in C_4 \subseteq (C_2 \cup C_3) \setminus g$.

Betrachte nun C_1, C_4. Es ist $e \in C_1 \cap C_4$ und $f \notin C_2 \cup C_3$, also $f \in C_1 \setminus C_4$. Da $C_1 \cup C_4 \subsetneq C_1 \cup C_2$ wegen $g \in C_2 \setminus (C_1 \cup C_4)$ ist, haben wir wieder $|C_1 \cup C_4| < |C_1 \cup C_2|$, d. h. C_1, C_4, e, f ist kein Gegenbeispiel für die Behauptung.

Es existiert daher ein Kreis C_5 mit $f \in C_5 \subseteq (C_1 \cup C_4) \setminus e$, aber wegen $C_1 \cup C_4 \subseteq C_1 \cup C_2$ gilt für diesen Kreis auch

$$f \in C_5 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e,$$

Widerspruch. □

Der Abschlussoperator ist für finitäre Matroide genauso definiert wie in Definition 2.13 für endliche Matroide, d. h.

$$\operatorname{cl}(X) := X \cup \{x \in E \mid \exists I \subseteq X : I \in \mathscr{I} \wedge I \cup x \notin \mathscr{I}\} \quad \text{für } X \subseteq E. \tag{2.9}$$

Satz 2.33. Der Abschlussoperator eines finitären Matroids erfüllt die Abschlussaxiome (CL1)–(CL4) aus Satz 2.16:

(CL1) Für alle $X \subseteq E$ ist $X \subseteq \operatorname{cl}(X)$.

(CL2) Sind X, Y Teilmengen von E mit $X \subseteq Y$, so gilt $\operatorname{cl}(X) \subseteq \operatorname{cl}(Y)$.

(CL3) Für alle $X \subseteq E$ gilt $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(X)) = \operatorname{cl}(X)$.

(CL4) Für alle $X \subseteq E$ gilt: Ist $x \in E$ und $y \in \operatorname{cl}(X \cup x) \setminus \operatorname{cl}(X)$, so folgt $x \in \operatorname{cl}(X \cup y)$.

Beweis. (CL1) und (CL2) folgen direkt aus der Definition von cl; für (CL4) kann der Beweis des endlichen Falls aus Satz 2.16 übertragen werden.

Zu (CL3): Es genügt wegen (CL1), $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(X)) \subseteq \operatorname{cl}(X)$ für alle $X \subseteq E$ zu zeigen.

[6] Die Bezeichnung als Axiom rührt daher, dass das starke Kreiseliminationsaxiom äquivalent zum (schwachen) Kreiseliminationsaxiom ist und daher dessen Platz innerhalb der Kreisaxiome einnehmen kann.

[7] siehe Welsh (1976, Theorem 9.2).

Sei das Gegenteil angenommen, dann gibt es $y \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) \setminus \mathrm{cl}(X)$. Dann existiert ein $I \subseteq \mathrm{cl}(X)$ mit $I \in \mathscr{I}$ und $I \cup y \notin \mathscr{I}$. Nach Satz 2.31 gibt es einen Kreis C_y mit

$$y \in C_y \subseteq I \cup y.$$

Sei o. B. d. A. C_y von allen Kreisen mit

$$y \in C_y \subseteq \mathrm{cl}(X) \cup y$$

derjenige, für den

$$|C_y \cap (\mathrm{cl}(X) \setminus X)| = |C_y \setminus (X \cup y)| \tag{2.10}$$

minimal ist. Falls $|C_y \setminus (X \cup y)| = 0$, sind wir fertig, da dann mit $I := C_y \setminus y \subseteq X$ gilt: $I \in \mathscr{I}$ und $I \cup y \notin \mathscr{I}$, also $y \in \mathrm{cl}(X)$, im Widerspruch zur Annahme.

Sei also $|C_y \setminus (X \cup y)| > 0$, und sei ein $x \in C_y \setminus (X \cup y)$ gewählt. Wegen $x \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$ gibt es dann einen Kreis C_x mit

$$x \in C_x \subseteq X \cup x.$$

Wir können nun das starke Kreiseliminationsaxiom, Satz 2.32, auf $C_y, C_x, x \in C_y \cap C_x, y \in C_y \setminus C_x$ anwenden und erhalten einen Kreis C mit

$$y \in C \subseteq (C_y \cup C_x) \setminus x.$$

Für diesen gilt:

$$\begin{aligned}
C \setminus (X \cup y) &\subseteq ((C_y \cup C_x) \setminus x) \setminus (X \cup y) \\
&= (C_y \cup C_x) \setminus (X \cup \{x, y\}) \\
&= C_y \setminus (X \cup \{x, y\}) \quad \text{da } C_x \subseteq X \cup x \\
&\subsetneq C_y \setminus (X \cup y) \quad \text{da } x \in C_y \setminus (X \cup y),
\end{aligned}$$

also ist

$$|C \setminus (X \cup y)| \leq |C_y \setminus (X \cup y)| - 1,$$

im Widerspruch dazu, dass C_y (2.10) minimiert. □

Satz 2.34. Für jeden Kreis C gilt

$$x \in \mathrm{cl}(C \setminus x) \qquad \text{für alle } x \in C.$$

Beweis. Wegen der Minimalität von C gilt $C \setminus x \in \mathscr{I}$ für alle $x \in C$, außerdem ist $(C \setminus x) \cup x = C \notin \mathscr{I}$, also $x \in \mathrm{cl}(C \setminus x)$. □

2.6 Matroide

Eigentlich müsste dieser Abschnitt mit „B-Matroide“ überschrieben sein. B-Matroide wurden bereits von Higgs (1969) beschrieben und stellen einen von vielen Versuchen zur Verallgemeinerung des Matroidbegriffs auf unendliche Grundmengen dar. Sie haben gegenüber finitären Matroiden den Vorteil, unter Dualität abgeschlossen zu sein. Später hat Oxley (1978) bewiesen, dass B-Matroide die größte Klasse von *pre-independence spaces* bilden, die unter einem Begriff von Dualität abgeschlossen ist, der die von endlichen Matroiden bekannten Konstruktionen zulässt. Man kann, wie das Bruhn et al. (2010) getan haben, also mit Fug und Recht allgemein von „Matroiden“ sprechen, wenn man B-Matroide meint.

Bruhn et al. (2010) geben für Matroide fünf äquivalente Axiomensysteme an, darunter die im folgenden zitierten Unabhängigkeits- und Abschlussaxiome.

Definition 2.35 (Unabhängigkeitsaxiome)**.** Sei E eine Menge und $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(E)$, so dass die folgenden Unabhängigkeitsaxiome erfüllt sind.

(I1) $\emptyset \in \mathscr{I}$.

(I2) Falls $I \in \mathscr{I}$ und $I' \subseteq I$, so folgt $I' \in \mathscr{I}$.

(I3) Falls $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$, wobei I_2 maximal und I_1 nicht maximal seien, dann existiert ein $x \in I_2 \setminus I_1$, so dass $I_1 \cup x \in \mathscr{I}$. (*Ergänzungseigenschaft*)

(IM) Falls $I \subseteq X \subseteq E$ und $I \in \mathscr{I}$, dann gibt es in $\{I' \in \mathscr{I} \mid I \subseteq I' \subseteq X\}$ ein maximales Element.

Dann heißt $M = (E, \mathscr{I})$ **Matroid** über E.

Wie für endliche Matroide heißen die Elemente von $\mathscr{I}$ **unabhängige Mengen**, die Elemente von $\mathscr{P}(E) \setminus \mathscr{I}$ heißen **abhängige Mengen**. Maximale unabhängige Mengen heißen **Basen**, minimale abhängige Mengen heißen **Kreise**. Der Abschlussoperator wird genauso wie im endlichen Fall definiert:

$$\mathrm{cl}(X) := X \cup \{x \in E \mid \exists I \subseteq X : I \in \mathscr{I} \wedge I \cup x \notin \mathscr{I}\}. \tag{2.11}$$

Die Abschlussaxiome für Matroide lauten:

(CL1) Für alle $X \subseteq E$ ist $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$.

(CL2) Sind X, Y Teilmengen von E mit $X \subseteq Y$, so gilt $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$.

(CL3) Für alle $X \subseteq E$ gilt $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$.

(CL4) Für alle $X \subseteq E$ gilt: Ist $x \in E$ und $y \in \mathrm{cl}(X \cup x) \setminus \mathrm{cl}(X)$, so folgt $x \in \mathrm{cl}(X \cup y)$.

(CLM) Für die Menge $\mathscr{I}_{\mathrm{cl}}$ der cl-*unabhängigen Mengen*,

$$\mathscr{I}_{\mathrm{cl}} := \{I \subseteq E \mid \forall x \in I : x \notin \mathrm{cl}(I \setminus x)\},$$

gilt: Falls $I \subseteq X \subseteq E$ und $I \in \mathscr{I}_{\mathrm{cl}}$, dann gibt es in $\{I' \in \mathscr{I}_{\mathrm{cl}} \mid I \subseteq I' \subseteq X\}$ ein maximales Element.

Die von endlichen oder finitären Matroiden bekannten Eigenschaften sind teilweise für Matroide erstaunlich schwierig zu beweisen. Für die Beweise der folgenden Sätze sei auf Bruhn et al. (2010) verwiesen. Es sei angemerkt, dass beispielsweise für den Beweis, dass die Restriktion $M|X$ eines Matroids wieder ein Matroid ist, bereits die Abgeschlossenheit der Matroide unter Dualität sowie eine Reihe sehr technischer Lemmata benötigt wird.

Satz 2.36 (Restriktion)**.** Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$. Dann ist die **Restriktion**

$$M|X := (X, \mathscr{I} \cap \mathscr{P}(X))$$

ein Matroid.

Satz 2.37 (Kreise)**.** Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$ eine abhängige Menge. Dann enthält X eine minimale abhängige Menge C, einen **Kreis**.

2.7 Beziehungen zwischen den Klassen Matroid-ähnlicher Objekte

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass die in Abbildung 2.1 auf Seite 6 dargestellte Inklusionshierarchie gilt.

Folgende Beziehungen ergeben sich unmittelbar aus den jeweiligen Definitionen:

Satz 2.38.

1. Jedes endliche Matroid ist ein Matroid mit endlichem Rang.
2. Jedes Matroid mit endlichem Rang, das eine endliche Grundmenge hat, ist ein endliches Matroid.
3. Jedes Matroid mit endlichem Rang ist ein finitäres Matroid.
4. Jedes finitäres Matroid, für dessen System unabhängiger Mengen $\mathscr{I}$ gilt, dass $|I| \leq n$ für alle $I \in \mathscr{I}$ und ein $n \in \mathbb{N}$, ist ein Matroid mit endlichem Rang.

Satz 2.39. Jedes finitäre Matroid ist ein Matroid.

Beweis. Wir müssen die Gültigkeit der Axiome (I3) und (IM) für finitäre Matroide zeigen.

Zu (I3): Angenommen, es gibt ein Gegenbeispiel $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$, wobei I_2 maximal und I_1 nichtmaximal sei.

Für alle $y \in I_2 \setminus I_1$ gilt dann $I_1 \cup y \notin \mathscr{I}$, d. h. $y \in \mathrm{cl}(I_1)$, und damit $I_2 \subseteq \mathrm{cl}(I_1)$. Mit (CL2) und (CL3) folgt nun $\mathrm{cl}(I_2) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(I_1)) = \mathrm{cl}(I_1)$, also, da I_2 eine Basis und damit aufspannend ist, $\mathrm{cl}(I_1) = E$. Also muss auch I_1 maximal sein, Widerspruch.

Zu (IM): Sei $I \in \mathscr{I}$ und $X \subseteq E$, und sei $\mathscr{K}$ eine aufsteigende Kette in

$$\mathscr{S} := \{I' \in \mathscr{I} \mid I \subseteq I' \subseteq X\},$$

und sei $I_{\mathscr{K}} := \bigcup \mathscr{K}$. Für jede endliche Teilmenge $F \subseteq I_{\mathscr{K}}$ gibt es dann ein Kettenglied $G \in \mathscr{K}$ mit $F \subseteq G$, es ist also $F \in \mathscr{I}$. Mit (I4) folgt nun $I_{\mathscr{K}} \in \mathscr{I}$, und da offenbar $I_{\mathscr{K}} \in \mathscr{S}$ ist, ist $I_{\mathscr{K}}$ eine obere Schranke von $\mathscr{S}$. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathscr{S}$ dann ein maximales Element. Damit ist (IM) bewiesen. □

Für den folgenden Satz benötigen wir noch ein Lemma von Bruhn et al. (2010).

Lemma 2.40. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid. Dann gilt

(I3') Für $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$, wobei I_2 maximal sei, gibt es eine maximale unabhängige Menge B mit $I_1 \subseteq B \subseteq I_1 \cup I_2$.

Beweis. Nach (IM) gibt es ein maximales Element B der Menge $\{I' \in \mathscr{I} \mid I_1 \subseteq I' \subseteq I_1 \cup I_2\}$. Angenommen, B ist keine Basis von M. Dann gibt es nach (I3) ein $x \in I_2 \setminus B$ mit $B \cup x \in \mathscr{I}$, aber dann wäre auch

$$I_1 \subseteq B \cup x \subseteq I_1 \cup I_2,$$

Widerspruch, denn B ist maximal mit dieser Eigenschaft. □

Satz 2.41. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid. Dann gilt für M die endliche Ergänzungseigenschaft ($\mathrm{I3_F}$).

Beweis. Angenommen, I_1, $I_2 \in \mathscr{I}$ mit $|I_1| < |I_2| < \infty$ bilden ein Gegenbeispiel, d. h. für alle $x \in I_2 \setminus I_1$ ist $I_1 \cup x$ eine abhängige Menge.

Den Beweis kann man beispielsweise leicht führen, indem man auf der Restriktion $M|(I_1 \cup I_2)$, die nach Satz 2.36 ein Matroid ist, das Axiom (I3) anwendet.

Hier soll jedoch ein anderer Weg beschritten werden:

(1) Ergänze I_1 unter Verwendung von (IM) zu einer Basis B_1. Nach der Annahme gilt dann

$$B_1 \cap I_2 = I_1 \cap I_2. \tag{2.12}$$

(2) Ergänze I_2 unter Verwendung von (I3') aus Lemma 2.40 zu einer Basis B_2 mit

$$I_2 \subseteq B_2 \subseteq I_2 \cup B_1. \tag{2.13}$$

(3) Ergänze I_1 unter Verwendung von (I3') zu einer Basis B_3 mit

$$I_1 \subseteq B_3 \subseteq I_1 \cup B_2. \tag{2.14}$$

Nach der Annahme gilt dann

$$B_3 \cap I_2 = I_1 \cap I_2. \tag{2.15}$$

(4) Aus (2.13) und (2.14) folgt

$$B_3 \subseteq I_1 \cup B_2 \subseteq I_1 \cup I_2 \cup B_1 = I_2 \cup B_1,$$

also mit (2.15)

$$B_3 \setminus I_2 \subseteq B_1 \setminus I_2 \text{ und} \tag{2.16}$$

$$B_3 \cap I_2 = I_1 \cap I_2 = B_1 \cap I_2, \tag{2.17}$$

also $B_3 \subseteq B_1$ und daher $B_3 = B_1$. Aus (2.14) schließt man also

$$I_1 \subseteq B_1 \subseteq I_1 \cup B_2. \tag{2.18}$$

(5) Aus (2.13) folgt durch Bilden der Mengendifferenz mit B_1

$$I_2 \setminus B_1 \subseteq B_2 \setminus B_1 \subseteq I_2 \setminus B_1, \text{ also} \tag{2.19}$$
$$B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1, \tag{2.20}$$

wobei die letzte Gleichung aus (2.12) folgt.

Aus (2.18) folgt analog

$$I_1 \setminus B_2 \subseteq B_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus B_2, \text{ also} \tag{2.21}$$
$$B_1 \setminus B_2 = I_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2 \tag{2.22}$$

Wir haben also

$$|B_1 \setminus B_2| \leq |I_1 \setminus I_2| < |I_2 \setminus I_1| = |B_2 \setminus B_1|, \tag{2.23}$$

und damit einen Widerspruch zum folgenden Lemma.

Lemma 2.42. Sind B_1, B_2 Basen mit $|B_1 \setminus B_2| < \infty$, so folgt $|B_1 \setminus B_2| = |B_2 \setminus B_1|$.

Beweis. [8] Angenommen, B_1, B_2 bilden ein Gegenbeispiel, für das o. B. d. A. $|B_1 \setminus B_2|$ minimal ist. Es gilt also $|B_1 \setminus B_2| < |B_2 \setminus B_1|$. Sei $x \in B_2 \setminus B_1$ gewählt. Mit (I3') existiert eine Basis B_3 mit

$$B_2 \setminus x \subseteq B_3 \subseteq (B_2 \setminus x) \cup B_1.$$

Da B_3 keine echte Teilmenge von B_2 sein kann, muss es einen nichtleeren Schnitt $B_3 \cap (B_1 \setminus B_2)$ geben. Es folgt $|B_1 \setminus B_3| < |B_1 \setminus B_2|$, laut der Annahme bildet das Paar B_1, B_3 also kein Gegenbeispiel, d. h. es gilt $|B_1 \setminus B_3| = |B_3 \setminus B_1|$, und es folgt

$$|B_3 \setminus B_1| = |B_1 \setminus B_3| < |B_1 \setminus B_2| < |B_2 \setminus B_1|,$$

im Widerspruch dazu, dass sich $B_3 \setminus B_1$ und $B_2 \setminus B_1$ nur um ein Element unterscheiden. □

Korollar 2.43. Ein Matroid, das zusätzlich (I4) erfüllt, ist ein finitäres Matroid.

Da wir gerade ($\mathrm{I3_F}$) für Matroide bewiesen haben, folgt:

Korollar 2.44. Matroide sind *pre-independence spaces.*

[8] Bruhn et al. (2010, Lemma 3.7)

3 Der Greedy-Algorithmus

Dieses Kapitel ist zunächst der Darstellung der bekannten Aussagen über den endlichen Greedy-Algorithmus gewidmet. Wir werden zeigen, dass endliche Matroide dadurch charakterisiert sind, dass auf ihnen der (endliche) Greedy-Algorithmus für jede Gewichtsfunktion eine optimale Lösung liefert.

Danach werden wir die Anpassung der Definition des Greedy-Algorithmus auf unendliche Unabhängigkeitssysteme vorbereiten, indem wir die Gewichtsfunktion durch eine Wohlordnung auf der Grundmenge ersetzen.

3.1 Gewichtete Matroide

Definition 3.1. Ein **gewichtetes Matroid** ist ein Matroid $(E, \mathscr{I})$ mit einer **Gewichtsfunktion**

$$w \colon E \to \mathbb{R}.$$

Wir betrachten in diesem Abschnitt das folgende Optimierungsproblem:

Gesucht ist ein maximales Element A von $\mathscr{I}$ mit minimalem Gesamtgewicht

$$w(A) := \sum_{x \in A} w(x). \tag{3.1}$$

So gestellt handelt es sich um ein Minimierungsproblem. Maximierungsprobleme können durch Negieren der Gewichtsfunktion in Minimierungsprobleme überführt werden und bedürfen daher keiner gesonderten Betrachtung.

Algorithmus 4 Greedy-Algorithmus für gewichtete Matroide.

```
A_0 := ∅
k := 0
while A_k ist keine Basis do
    Wähle x_k ∉ A_k so, dass w(x_k) minimal und A_k ∪ x_k ∈ 𝒥 ist.
    A_{k+1} := A_k ∪ x_k
    k := k + 1
end while
return A_k
```

Satz 3.2. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein endliches Matroid mit einer beliebigen Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$. Dann liefert der Greedy-Algorithmus (Algorithmus 4) eine Basis A mit minimalem Gesamtgewicht, d. h. es gilt für jede Basis B von M:

$$\sum_{x \in A} w(x) \leq \sum_{x \in B} w(x). \tag{3.2}$$

Der Beweis findet sich bei Oxley (1992a, Abschnitt 1.8). Er ist jedoch so erhellend, dass er hier wiedergegeben werden soll.

Beweis. Der Algorithmus terminiert offenbar nach $r = r(M)$ Schritten mit einer Basis $A = A_r = \{x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}\}$. Sei $B = \{y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}\}$ eine beliebige Basis von M mit $w(y_0) \leq w(y_1) \leq \cdots \leq w(y_{r-1})$. Die Behauptung folgt nun mit dem folgenden Lemma.

Lemma 3.3. Für $0 \leq k < r$ gilt $w(x_k) \leq w(y_k)$.

Beweis. Annahme des Gegenteils. Sei k der kleinste Index mit $w(x_k) > w(y_k)$. Sei $I_1 := \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ und $I_2 := \{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$. Da $|I_1| < |I_2|$ gibt es nach (I3) ein $y_t \in I_2 \setminus I_1$, so dass $I_1 \cup y_t \in \mathscr{I}$. Da nun aber $w(y_t) \leq w(y_k) < w(x_k)$ laut Annahme ist, hätte der Greedy-Algorithmus y_t statt x_k wählen müssen, um A_{k+1} zu bilden, Widerspruch. □

Die Aussage des Lemmas 3.3 ist wesentlich stärker als von Satz 3.2 benötigt. Nicht nur ist das Gesamtgewicht von A minimal, auch das Gewicht jedes einzelnen Basiselements ist kleiner oder gleich dem des korrespondierenden Elementes einer beliebigen anderen Basis. Wir werden darauf im nächsten Abschnitt zurückkommen.

Wie in der Einleitung schon erwähnt, gilt in gewisser Weise sogar die Umkehrung von Satz 3.2. Während es zwar andere Strukturen gibt, auf denen der Greedy-Algorithmus funktioniert, so sind doch die endlichen Matroide genau diejenigen endlichen *Unabhängigkeitssysteme*, für die das der Fall ist.

Definition 3.4. Sei E eine (endliche) Menge und $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(E)$ ein System von Teilmengen von E. Dann heißt das Paar $U = (E, \mathscr{I})$ **(endliches) Unabhängigkeitssystem**, falls die Unabhängigkeitsaxiome (I1) und (I2) erfüllt sind.

Soweit anwendbar gilt für Unabhängigkeitssysteme die gleiche Terminologie wie für Matroide. Die Elemente von $\mathscr{I}$ heißen unabhängige Mengen, maximale unabhängige Mengen heißen Basen usw.

Satz 3.5. Sei $U = (E, \mathscr{I})$ ein endliches Unabhängigkeitssystem. Für jede Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$ liefere der Greedy-Algorithmus 4 eine Basis A mit minimalem Gewicht. Dann ist U ein endliches Matroid.

Der folgende Beweis nutzt die Formulierung des Optimierungsproblems als Maximierungsproblem. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass Minimierungs- und Maximierungsprobleme äquivalent sind, da sie ineinander überführt werden können.

Beweis. [1] Die Eigenschaften (I1), (I2) sind für Unabhängigkeitssysteme bereits erfüllt. Angenommen, die endliche Ergänzungseigenschaft ($\mathrm{I3_F}$) ist für $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$ nicht erfüllt, d. h. es ist $|I_1| < |I_2|$ und $I_1 \cup x \notin \mathscr{I}$ für alle $x \in I_2 \setminus I_1$.

Aus $|I_1| < |I_2|$ folgt dann $|I_1 \setminus I_2| < |I_2 \setminus I_1|$, und da aus (I2) $I_1 \setminus I_2 \neq \emptyset$ folgt, können wir ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$0 < (1+\varepsilon)|I_1 \setminus I_2| < |I_2 \setminus I_1| \tag{3.3}$$

wählen.

Wir definieren nun eine Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$ mit

$$w(x) := \begin{cases} 2 & \text{falls } x \in I_1 \cap I_2, \\ 1/|I_1 \setminus I_2| & \text{falls } x \in I_1 \setminus I_2, \\ (1+\varepsilon)/|I_2 \setminus I_1| & \text{falls } x \in I_2 \setminus I_1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Wird nun der Greedy-Algorithmus für das Problem, eine Basis mit maximalem Gesamtgewicht zu finden, benutzt, wählt er der Reihe nach zuerst alle Elemente von $I_1 \cap I_2$ und danach wegen (3.3) alle Elemente von $I_1 \setminus I_2$. Nach der Annahme kann er dann kein Element von $I_2 \setminus I_1$ wählen, weil dadurch eine abhängige Menge entstünde, so dass er A mit Elementen aus $E \setminus (I_1 \cup I_2)$ auffüllt.

Das Gesamtgewicht von A ist damit

$$\begin{aligned} w(A) &= 2|I_1 \cap I_2| + |I_1 \setminus I_2| \cdot \frac{1}{|I_1 \setminus I_2|} \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1. \end{aligned}$$

Sei nun I_2' eine maximale unabhängige Obermenge von I_2. I_2' hat ein Gesamtgewicht von

$$\begin{aligned} w(I_2') \geq w(I_2) &= 2|I_1 \cap I_2| + |I_2 \setminus I_1| \frac{1+\varepsilon}{|I_2 \setminus I_1|} \\ &= 2|I_1 \cap I_2| + 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist also $w(I_2') > w(A)$, im Widerspruch dazu, dass der Greedy-Algorithmus für jede Gewichtsfunktion eine optimale Basis erzeugt. Es ist also auch ($I3_\mathrm{F}$) erfüllt und U ist ein endliches Matroid. □

Korollar 3.6. Ein endliches Unabhängigkeitssystem $(E, \mathscr{I})$ ist genau dann ein Matroid, wenn der Greedy-Algorithmus für jede Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$ eine Basis mit minimalem Gesamtgewicht liefert.

[1] siehe Oxley (1992a, Theorem 1.8.5).

3.2 Wohlgeordnete Matroide

3.2.1 Die Klee'sche Formulierung des Greedy-Algorithmus

Bei der Untersuchung von unendlichen gewichteten Matroiden trifft man unmittelbar auf die Frage, ob und unter welchen Umständen die Gewichtssumme einer Basis überhaupt existiert, d. h. konvergiert. Je nach Wahl der Gewichtsfunktion kann es sein, dass die Gewichtssumme für alle, nur für einige oder gar für überhaupt keine Basen konvergiert.

Ein weiteres Problem betrifft den Schritt im Greedy-Algorithmus, in dem ein Element mit minimalem Gewicht ausgewählt werden soll. Die Menge der Kandidaten ist dort im Allgemeinen unendlich, so dass die Existenz dieses Minimums nicht gesichert ist.

Klee (1971) umgeht diese Probleme vollständig, indem er für den Greedy-Algorithmus für unendliche Matroide eine strikte *Wohlordnung* der Grundmenge voraussetzt.

Definition 3.7. Eine irreflexive Totalordnung $\prec$ auf einer Menge M heißt **Wohlordnung**, wenn bezüglich $\prec$ jede nichtleere Teilmenge $T \subseteq M$ ein kleinstes Element besitzt. Dieses Element wird $\min T$ geschrieben.

Für ein gewichtetes Matroid mit injektiver Gewichtsfunktion lässt sich leicht eine entsprechende Totalordnung angeben, indem man $x \prec y$ setzt, falls $w(x) < w(y)$ ist. Im Falle einer nicht-injektiven Gewichtsfunktion gibt es Elemente mit gleichem Gewicht. Man macht sich jedoch leicht klar, dass ein systematisches Verfahren, ein Algorithmus, für diesen Fall ohnehin eine feste Auswahlregel vorgeben muss. Man vergibt sich also nichts, wenn man von vornherein eine strikte Totalordnung fordert, die zu der Gewichtsfunktion in dem Sinne *kompatibel* ist, dass aus $x \prec y$ stets $w(x) \leq w(y)$ folgt.

Dass diese Ordnung sogar eine Wohlordnung sein muss, ist dagegen eine natürliche Forderung, da sie die Durchführbarkeit des Greedy-Algorithmus sichert.

Der Greedy-Algorithmus für wohlgeordnete Matroide lautet damit wie folgt.

Algorithmus 5 Greedy-Algorithmus für wohlgeordnete Matroide.

$A_0 := \emptyset$
$k := 0$
while A_k ist keine Basis **do**
    Setze $x_k := \min\{x \in A_k^c \mid A_k \cup x \in \mathscr{I}\}$
    $A_{k+1} := A_k \cup x_k$
    $k := k + 1$
end while
return A_k

Der Algorithmus terminiert nach $r = r(M)$ Schritten mit einer maximalen unabhängigen Menge $A := A_r$.

Klee verwendet dagegen folgende Definition des Greedy-Algorithmus. Beide führen für endliche Matroide zum gleichen Ergebnis.

Algorithmus 6 Greedy-Algorithmus von Klee

Sei $P_x := \{y \in E \mid y \prec x\}$ für jedes $x \in E$.
return $A := \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_x)\}$.

Satz 3.8. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein endliches Matroid mit dem Abschlussoperator cl, sei $\prec$ eine Wohlordnung auf E, und sei A die Ergebnismenge von Algorithmus 5 auf M. Dann gilt

$$A = \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_x)\}. \tag{3.5}$$

Beweis. (1) Sei $A = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}\}$ die Ergebnismenge des Greedy-Algorithmus, und seien $\emptyset = A_0, A_1, \ldots, A_r = A$ die während des Greedy-Algorithmus aufgebauten Mengen. Es gilt dann für jedes $0 \leq k < r$:

$$x_k = \min\{x \in E \setminus A_k \mid A_k \cup x \in \mathscr{I}\}. \tag{3.6}$$

Wegen der Äquivalenz $A_k \cup x \in \mathscr{I} \wedge x \notin A_k \Leftrightarrow x \notin \mathrm{cl}(A_k)$ kann man (3.6) auch als

$$x_k = \min\{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(A_k)\} \tag{3.7}$$

schreiben. Alle $y \prec x_k$ sind dann in $\mathrm{cl}(A_k)$ enthalten, d. h. $P_{x_k} \subseteq \mathrm{cl}(A_k)$, und wegen $A_k \subseteq P_{x_k}$ und der Idempotenz von cl gilt

$$\mathrm{cl}(P_{x_k}) = \mathrm{cl}(A_k).$$

Wir haben also

$$x_k = \min\{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_{x_k})\},$$

d. h. die Inklusion

$$A \subseteq \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_x)\}$$

gezeigt.

(2) Sei nun $y \in \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_x)\}$ und sei k maximal mit $y \notin \mathrm{cl}(A_k)$. Angenommen, es gibt ein $z \prec y$ mit $z \notin \mathrm{cl}(A_k)$. Dann ist

$$x_k = \min\{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(A_k)\} \prec y,$$

also

$$A_{k+1} = A_k \cup x_k \subseteq P_y$$

und damit

$$\mathrm{cl}(A_{k+1}) \subseteq \mathrm{cl}(P_y),$$

also $y \notin \mathrm{cl}(A_{k+1})$ wegen $y \notin \mathrm{cl}(P_y)$, im Widerspruch zur angenommenen Maximalität von k.

Es folgt

$$y = \min\{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(A_k)\} = x_k,$$

also

$$y \in A,$$

und daraus zusammen mit Teil (1) die Behauptung. $\square$

Interessanterweise kommen in dieser Formulierung des Greedy-Algorithmus keine numerischen Indizes mehr vor, so dass man ihn formal auch für Matroide auf unendlichen Grundmengen anwenden kann (Klee, 1971), solange diese wohlgeordnet sind. Siehe dazu die Ausführungen in Kapitel 4.

Wir wollen nun die äquivalente Aussage zu Korollar 3.6 für wohlgeordnete endliche Matroide beweisen. Dazu müssen wir zunächst festlegen, was wir in Abwesenheit einer Gewichtsfunktion unter einer optimalen Basis verstehen wollen. Dabei kommt die Beobachtung von Lemma 3.3 zur Hilfe. Wie dort werden wir fordern, dass jedes Element von A im Sinne der Wohlordnung kleiner oder gleich dem korrespondierenden Element einer beliebigen anderen Basis ist.

Definition 3.9 (Optimalitätskriterium für wohlgeordnete Matroide)**.** Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Matroid. Auf E bestehe eine Wohlordnung $\prec$.

Dann heißt eine Basis A von M **optimal** bezüglich $\prec$, wenn es für jede Basis B eine injektive Abbildung $\alpha\colon B \to A$ mit

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= x \quad \text{für } x \in B \cap A, \\ \alpha(x) &\prec x \quad \text{für } x \in B \setminus A \end{aligned}$$

gibt.[2]

Bemerkung 3.10. (1) Für endliche Matroide ist α nicht nur injektiv, sondern wegen der Gleichmächtigkeit der Basen auch stets bijektiv. Außerdem lässt sich im endlichen Fall eine solche Abbildung stets angeben, indem man die Elemente der Basen aufsteigend sortiert und Elemente mit gleichem Index aufeinander abbildet. Man gelangt so zu einer Aussage analog Lemma 3.3.

Wir werden diese Definition erst bei der Betrachtung unendlicher Matroide in Kapitel 4 in voller Allgemeinheit benutzen.

(2) Für Unabhängigkeitssysteme gilt die Definition entsprechend.

Wir schließen den Abschnitt mit der Entsprechung von Korollar 3.6 für wohlgeordnete endliche Matroide.

Satz 3.11. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein endliches Unabhängigkeitssystem. M ist genau dann ein endliches Matroid, wenn der Greedy-Algorithmus für jede Wohlordnung $\prec$ auf E eine optimale Basis liefert.

Beweis. (1) Sei M ein endliches Matroid und sei $A = \{x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_{r-1}\}$ das Ergebnis des Greedy-Algorithmus 5. Nach Konstruktion ist A eine maximale unabhängige Menge. Sei $B = \{y_0 \prec y_1 \prec \cdots \prec y_{r-1}\}$ eine beliebige Basis von M.

Angenommen, es gibt einen Index j so dass $x_j \succ y_j$, und sei k der kleinste dieser Indizes. Setze nun $I_1 := \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$, $I_2 := \{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$. Nach ($\mathrm{I3_F}$) gibt es $y_t \in I_2 \setminus I_1$, so dass $I_1 \cup y_t \in \mathscr{I}$. Da nun aber laut der Annahme $y_t \preceq y_k \prec x_k$ ist, hätte der Greedy-Algorithmus y_t statt x_k wählen müssen, um A_{k+1} zu bilden, Widerspruch.

Wir haben also $x_j \preceq y_j$ für $0 \leq j < r$. Mit $\alpha\colon B \to A$, $y_j \mapsto x_j$, ist damit die Optimalität von A gezeigt.

[2]siehe Klee (1971).

(2) Sei M ein endliches Unabhängigkeitssystem, der Greedy-Algorithmus liefere für jede Wohlordnung auf E eine optimale maximale unabhängige Menge. (I1) und (I2) gelten bereits. Angenommen, ($\mathrm{I3_F}$) gilt nicht allgemein, und sei durch $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$ ein Gegenbeispiel gegeben, d. h. $|I_1| < |I_2|$ und $I_1 \cup x \notin \mathscr{I}$ für alle $x \in I_2 \setminus I_1$.

Sei eine Wohlordnung $\prec$ auf E festgelegt, für die gilt:

$$x \prec y \text{ falls } \begin{cases} x \in I_1 \cap I_2 \text{ und } y \notin I_1 \cap I_2 \text{ oder} \\ x \in I_1 \text{ und } y \notin I_1 \text{ oder} \\ x \in I_1 \cup I_2 \text{ und } y \notin I_1 \cup I_2. \end{cases} \tag{3.8}$$

Der Greedy-Algorithmus wählt dann für die optimale Basis A zuerst alle Elemente aus $I_1 \cap I_2$, danach die restlichen Elemente aus I_1. Nach der Annahme kann er nun kein Element aus $I_2 \setminus I_1$ wählen, A wird also mit Elementen aus $E \setminus (I_1 \cup I_2)$ aufgefüllt.

Sei dagegen I_2' eine maximale unabhängige Obermenge von I_2. Angenommen, es existiert eine injektive Abbildung $\alpha\colon I_2' \to A$ mit $\alpha(x) = x$ für $x \in I_2' \cap A$ und $\alpha(x) \prec x$ für $x \in I_2' \setminus A$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= x \qquad \text{für alle } x \in I_1 \cap I_2, \\ \alpha(x) &\prec x \qquad \text{für alle } x \in I_2 \setminus I_1. \end{aligned}$$

Durch α muss also allen Elementen von $I_2 \setminus I_1$ eineindeutig ein Element von $I_1 \setminus I_2$ zugeordnet werden, was wegen $|I_2 \setminus I_1| > |I_1 \setminus I_2|$ nicht möglich ist. A kann damit keine optimale Basis von M sein, der Greedy-Algorithmus versagt also für die angegebene Wohlordnung und die Annahme, ($\mathrm{I3_F}$) gelte nicht allgemein, muss fallen gelassen werden. □

Bemerkung 3.12. Satz 3.11 gilt auch für Matroide mit endlichem Rang, siehe Abschnitt 2.4, da im Beweis lediglich die Endlichkeit der Basen, nicht aber die der Grundmenge verwendet wurde.

3.2.2 Äquivalenz der beiden Formen

Bisher wurde lediglich kurz darauf hingewiesen, dass zu einer Gewichtsfunktion eine kompatible Wohlordnung konstruiert werden kann. Der Beweis, dass die beiden Greedy-Algorithmen tatsächlich äquivalente Ergebnisse liefern, soll an dieser Stelle nachgeholt werden.

Definition 3.13. Sei E eine Menge und $w\colon E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine irreflexive Totalordnung $\prec$ auf E heißt dann mit w **kompatibel**, wenn für alle $x, y \in E$ aus $w(x) < w(y)$ folgt $x \prec y$. Ist $\prec$ sogar eine Wohlordnung auf E, sprechen wir von einer *kompatiblen Wohlordnung*.

Bemerkung 3.14. (1) Falls E endlich ist, existiert stets eine kompatible Wohlordnung.

(2) Durch Kontraposition folgert man leicht, dass aus $x \prec y$ folgt $w(x) \leq w(y)$.

Um die Äquivalenz der beiden Formulierungen zu beweisen, zeigen wir, dass die beiden Algorithmen sich gegenseitig simulieren können. Zuerst zeigen wir, dass der Greedy-Algorithmus für ein gewichtetes Matroid simuliert werden kann, indem der Greedy-Algorithmus für eine kompatible Wohlordnung durchgeführt wird.

Satz 3.15. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein endliches Matroid mit der Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$. Sei $\prec$ eine zu w kompatible Wohlordnung. Dann liefert der Greedy-Algorithmus 5 eine Basis A, so dass für jede Basis B gilt: $w(A) \leq w(B)$.

Beweis. Sei A eine bezüglich $\prec$ optimale Basis von M, und sei B eine beliebige Basis von M. Dann existiert eine injektive Abbildung $\alpha\colon B \to A$ mit $\alpha(x) = x$ für $x \in B \cap A$ und $\alpha(x) \prec x$ für $x \in B \setminus A$. Da α wegen $|A| = |B| < \infty$ bijektiv ist, folgt

$$\begin{aligned} w(A) &= \sum_{x \in A} w(x) = \sum_{y \in B} w(\alpha(y)) \\ &= \sum_{x \in B \cap A} w(\alpha(x)) + \sum_{y \in B \setminus A} w(\alpha(y)) \\ &\leq \sum_{x \in B \cap A} w(x) + \sum_{y \in B \setminus A} w(y) \\ &= \sum_{x \in B} w(x) = w(B). \end{aligned}$$

A ist also auch bezüglich des Gesamtgewichtes optimal. □

Als zweites zeigen wir, dass der Greedy-Algorithmus für wohlgeordnete endliche Matroide umgekehrt durch den Greedy-Algorithmus für gewichtete endliche Matroide simuliert werden kann.

Satz 3.16. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein endliches Matroid und $\prec$ eine Wohlordnung auf E. Dann existiert eine Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$, so dass $\prec$ zu w kompatibel ist und der Greedy-Algorithmus 4 eine bezüglich $\prec$ optimale Basis liefert.

Beweis. Sei $E = \{x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n\}$. Setze dann

$$w(x_i) := i \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

Dann ist $\prec$ offensichtlich zu w kompatibel. Sei nun $A = \{a_0 \prec a_1 \prec \cdots \prec a_{r-1}\}$ das Ergebnis des minimierenden Greedy-Algorithmus 4 für gewichtete Matroide, und sei $B = \{b_0 \prec b_1 \prec \cdots \prec b_{r-1}\}$ eine Basis von M. Dann gilt nach Lemma 3.3 für $0 \leq i < r$ $w(a_i) \leq w(b_i)$. Da alle Gewichte verschieden sind, bedeutet das für jedes i entweder

- $a_i = b_i$ oder
- $a_i \neq b_i$ und $w(a_i) < w(b_i)$, also $a_i \prec b_i$.

Mit $\alpha(b_i) := a_i$ für $b_i \in B$ folgt also nach Definition die Optimalität von A bezüglich der Wohlordnung $\prec$. □

4 Unendliche Matroide und der Greedy-Algorithmus

In diesem Kapitel sollen die bekannten Aussagen über den Zusammenhang zwischen Matroiden und dem Greedy-Algorithmus auf unendliche Matroide erweitert werden. Der erste Schritt dazu ist eine sinnvolle Definition des Greedy-Algorithmus und eines Optimalitätskriteriums für unendliche maximale unabhängige Mengen.

4.1 Der iterative Greedy-Algorithmus

Ein offenkundiges Problem bei der Betrachtung von Greedy-Algorithmen auf unendlichen Matroiden ist, dass ein Algorithmus nach der üblichen Definition in endlicher Zeit terminieren muss. Wir könnten uns zwar eines Orakels bedienen, um das nächste Element zu bestimmen, das in die Basis aufgenommen wird. Jedoch wäre selbst dann ein Greedy-Algorithmus auf einem Matroid mit unendlichem Rang ausgeschlossen.

Wir können den Algorithmus schrittweise ausführen und abbrechen, wenn beispielsweise die bis dahin konstruierte unabhängige Menge groß genug ist oder andere Kriterien erfüllt.

Formal ist dieses Vorgehen dazu äquivalent, für $n = 0, 1, 2 \dots$ den Greedy-Algorithmus jeweils auf der *n-Trunkation* des unendlichen Matroids bzw. Unabhängigkeitssystems auszuführen.

Definition 4.1. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Unabhängigkeitssystem und n eine natürliche Zahl. Dann heißt $T^n(M) = (E, \mathscr{I}_n)$ mit

$$\mathscr{I}_n := \{I \in \mathscr{I} \mid |I| \leq n\}$$

die **n-Trunkation** von M.

Bemerkung 4.2. (1) Falls für M zusätzlich das Axiom ($\mathrm{I3_F}$) erfüllt ist, dann ist jede n-Trunkation von M ein Matroid endlichen Ranges.

(2) Die Trunkation wird in der Literatur teils abweichend definiert. Bei Oxley (1992a) ist sie beispielsweise eine Operation, die letztlich den Rang um 1 verringert; $T^n(M)$ ist die n-fache Trunkation. Diese Definition ergibt für unendliche Matroide keinen Sinn. Hier soll unter der n-Trunkation lediglich die Begrenzung des Ranges auf n verstanden werden.

Die folgende Aussage ergibt sich direkt aus Satz 3.11 mit Bemerkung 3.12.

Satz 4.3. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein durch $\prec$ wohlgeordnetes Matroid. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass der Greedy-Algorithmus für die Trunkation $T^n(M)$ eine bezüglich $\prec$ optimale Basis liefert.

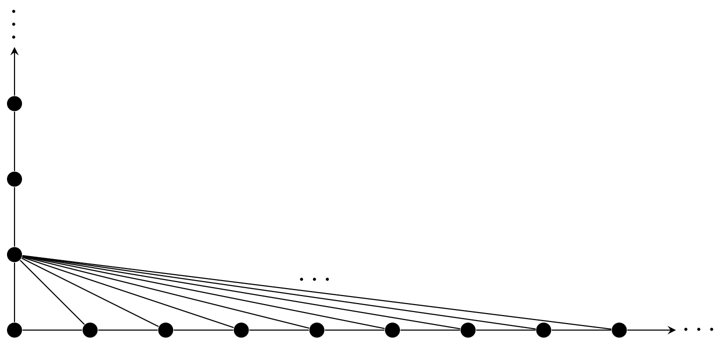
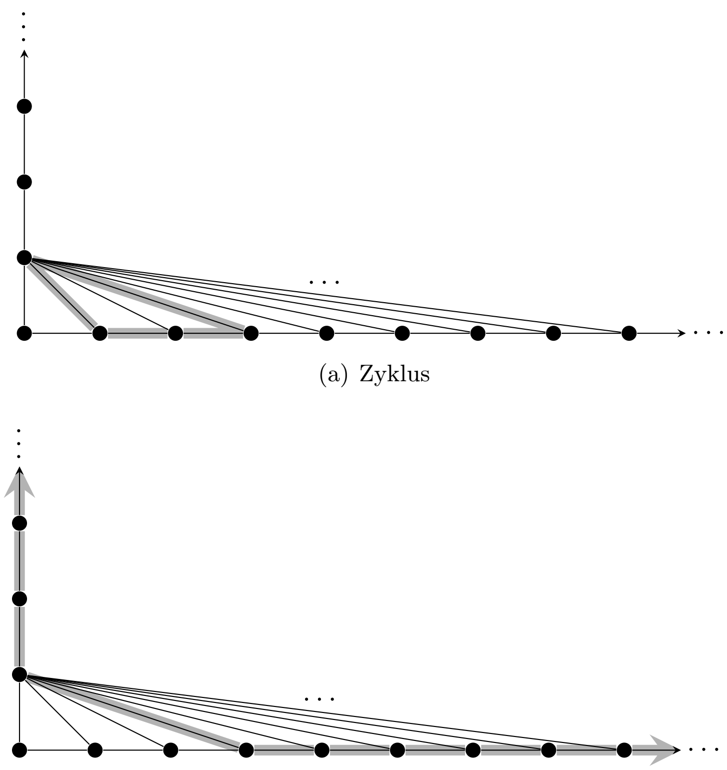


Abbildung 4.1: Der Bean-Graph.

Die Umkehrung der Aussage gilt dagegen nicht: Wenn der Greedy-Algorithmus für alle n-Trunkationen eines Unabhängigkeitssystems eine optimale Basis liefert, folgt daraus nicht, dass es sich um ein Matroid handelt. Das Gegenbeispiel liefert der **Bean-Graph**[1] in Abbildung 4.1.

Sei E die Kantenmenge des Bean-Graphen und $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(E)$ die Menge der Mengen von Kanten, die keinen Zyklus und keinen unendlichen Doppelstrahl enthalten, siehe Abbildung 4.2.



(a) Zyklus

(b) Unendlicher Doppelstrahl

Abbildung 4.2: Minimale abhängige Mengen im Bean-Graphen.

[1] siehe Higgs (1969).

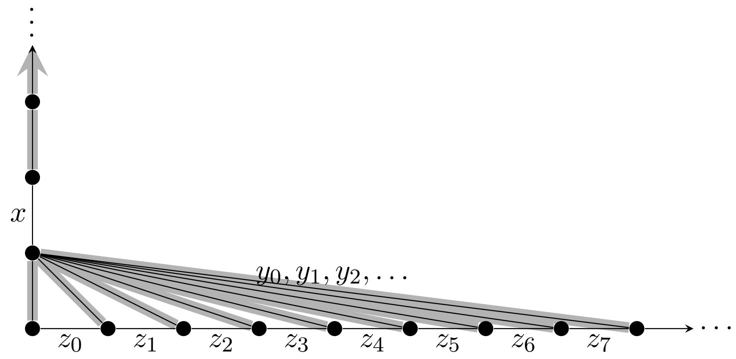


Abbildung 4.3: Nicht-maximale Kantenmenge I.

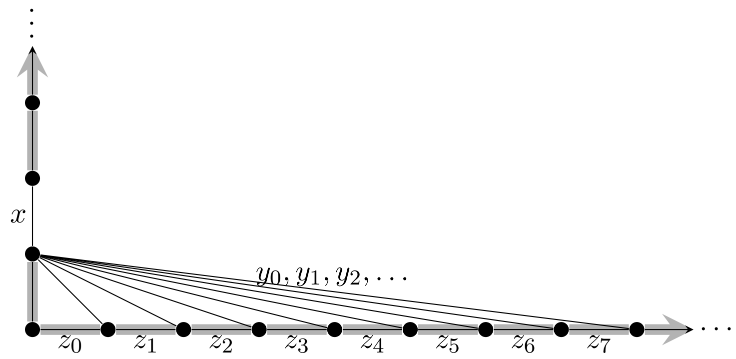


Abbildung 4.4: Maximale Kantenmenge I'.

Dann ist $M = (E, \mathscr{I})$ offenbar ein Unabhängigkeitssystem, und die Trunkationen $T^n(M)$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$ Matroide endlichen Ranges. Der Greedy-Algorithmus liefert also für alle diese Trunkationen eine optimale Basis. M ist allerdings kein Matroid.

Betrachten wir dazu die in Abbildung 4.3 und 4.4 dargestellten Kantenmengen I und I'. Beide enthalten keine Zyklen oder Doppelstrahlen und sind damit unabhängig. I' ist maximal, denn das Hinzufügen von x würde einen unendlichen Doppelstrahl vollenden, während das Hinzufügen eines der y_i einen Zyklus schließen würde. I ist dagegen nicht maximal, da $I \cup x$ ebenfalls weder einen Zyklus noch einen Doppelstrahl enthält und somit unabhängig ist.

Nach dem Ergänzungsaxiom (I3) müsste es nun ein Element $e \in I' \setminus I$ geben, so dass $I \cup e \in \mathscr{I}$ ist. Das ist aber offenbar nicht der Fall; für jedes Element aus $I' \setminus I = \{z_i \mid \; i \in \mathbb{N}\}$ enthält $I \cup z_i$ einen Zyklus. [2]

[2] Higgs selbst hat seine „B-Matroide“ mithilfe eines Ableitungsoperators $\partial : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$, der sehr eng mit dem Abschlussoperator cl verknüpft ist, definiert (Higgs, 1969). Seine Argumentation lässt sich so darstellen: Weil $I \cup x \in \mathscr{I}$ ist, gehört x nicht zu $\mathrm{cl}(I)$. Es gehören jedoch alle z_i zu $\mathrm{cl}(I)$, so dass x zu $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(I))$ gehört, ein Widerspruch zur Idempotenz (CL3).

4.2 Der transfinite Greedy-Algorithmus nach Klee

In Kapitel 3 wurde bereits der Greedy-Algorithmus in der Formulierung nach Klee (1971) vorgestellt. Wir werden hier zunächst den Satz von Klee über den Greedy-Algorithmus für finitäre Matroide[3] angeben und im Hinblick auf die Zielsetzung der Arbeit diskutieren, und dann eine für unsere Zwecke geeignetere Formulierung herleiten.

Satz 4.4 (Klee)**.** Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein finitäres Matroid mit dem Abschlussoperator cl. Auf der Grundmenge E bestehe eine Wohlordnung $\prec$, und für jedes Element $x \in E$ sei $P_x := \{y \in E \mid y \prec x\}$. Dann ist

$$A := \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_x)\} \tag{4.1}$$

eine optimale Basis von M in dem Sinne, dass für jede beliebige Basis B von M eine injektive Abbildung $\alpha\colon B \to A$ existiert mit

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= x \quad \text{für } x \in B \cap A, \\ \alpha(x) &\prec x \quad \text{für } x \in B \setminus A. \end{aligned}$$

Klee schreibt dazu:[4]

> Implicit in the above theorem is a simple inductive procedure for constructing A [...], and that procedure is here called the *greedy algorithm.* A useful property of A [...] is that
>
> $$A = \{m \in M : m \notin\!f\ P_m \cap A\}.$$
>
> Thus to identify a point m of M as belonging to A it is not necessary to show that it does not depend on the set P_m of all its predecessors. It suffices instead, when A is being constructed inductively, to show that m does not depend on those of its predecessors that have already been assigned to A.

In unserer Notation lautet die Gleichung

$$A = \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(A \cap P_x)\}. \tag{4.2}$$

Dazu sind zwei Punkte zu sagen. Wie Klee selbst in dem Zitat feststellt, wird der Charakter des Greedy-Algorithmus erst in dieser Form wirklich deutlich. Das, was er lediglich als „useful property“ bezeichnet, erweist sich als eine deutlich natürlichere Formulierung des Greedy-Algorithmus als die Formulierung (4.1) in Satz 4.4. Außerdem greift Klee, wie wir sehen werden, zum Beweis von (4.2) auf die Idempotenz (CL3) des Abschlussoperators zurück. Wenn wir zeigen wollen, dass das Funktionieren des Greedy-Algorithmus für unendliche Unabhängigkeitssysteme umgekehrt Matroid-Eigenschaften impliziert, haben wir (CL3) selbstverständlich nicht zur Verfügung.

Wir werden deshalb im Folgenden nachweisen, dass (4.2) erstens als eine sinnvolle Definition des Greedy-Algorithmus betrachtet werden kann und zweitens für Matroide äquivalent zu der ursprünglichen Definition ist.

[3]Klee (1971) macht gleichzeitig auch Aussagen über das Ergebnis eines Greedy-Algorithmus für kofinitäre Matroide, die Dualen zu finitären Matroiden. Diesen Teil ignorieren wir hier.

[4]Klee (1971, S. 139), Hervorhebung im Original.

Dazu übertragen wir zuerst den Greedy-Algorithmus ins Unendliche. Die von Klee angedeutete Intuition über eine „induktive Prozedur“, die nach und nach eine ggf. unendliche Basis A konstruiert, erfordert eine transfinite Betrachtungsweise.[5] Die endliche Folge der im Algorithmus 5 aufgebauten Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_r$ wird nun zu einer durch Ordinalzahlen indizierten **transfiniten Folge** $(A_\alpha \mid \alpha < \beta)$, wobei β eine geeignete Ordinalzahl ist.

Diese Folge kann durch transfinite Rekursion definiert werden:

$$A_0 = \emptyset \tag{4.3}$$

$$A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \min\{x \in A_\alpha^c \mid A_\alpha \cup x \in \mathscr{I}\} \text{ für Ordinalzahlen } \alpha < \beta \tag{4.4}$$

$$A_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \text{ für Limesordinalzahlen } \lambda < \beta \tag{4.5}$$

Das Ergebnis wäre dann $A = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$. Dieser direkte Ansatz ist problematisch, weil die Bedingung „solange A_α keine Basis ist“ fehlt und durch eine nicht weiter festgelegte Ordinalzahl β ersetzt wurde. Dieses Problem lässt sich überwinden, indem man sich an den gegebenen Indizes der wohlgeordneten Menge E „entlanghangelt“. Sei dazu η eine Ordinalzahl, so dass η und E ordnungsisomorph zueinander sind; η heißt der **Ordnungstyp** von E. E sei durch Ordinalzahlen aus η indiziert, d. h.

$$E = \{x_\alpha \mid \alpha < \eta\}.$$

Definiere dann die Mengenfolge

$$A_0 = \emptyset \tag{4.6}$$

$$A_{\alpha+1} = \begin{cases} A_\alpha \cup x_\alpha & \text{falls } x_\alpha \notin \mathrm{cl}(A_\alpha), \\ A_\alpha & \text{falls } x_\alpha \in \mathrm{cl}(A_\alpha) \end{cases} \text{ für Ordinalzahlen } \alpha < \eta \tag{4.7}$$

$$A_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \text{ für Limesordinalzahlen } \lambda \leq \eta \tag{4.8}$$

Das Ergebnis des Greedy-Algorithmus ist wieder

$$A = \bigcup_{\alpha<\eta} A_\alpha. \tag{4.9}$$

Die Schritte, in denen die Menge um ein Element wächst, entsprechen den Auswahlschritten (4.4); die Wahl des Minimums ist in dem schrittweisen Vorgehen bereits inbegriffen.

Wir können nun zeigen, dass die Gleichung (4.2) tatsächlich eine eindeutige Lösung hat.

Lemma 4.5. Die Menge A aus Gleichung (4.9) ist die einzige Lösung der Gleichung (4.2).

Beweis. (1) Die Mengenfolge (A_α) ist isoton, d. h. $A_\alpha \subseteq A_\beta$ falls $\alpha \leq \beta$.

(2) Für $x_\beta \in A$ gilt $x_\beta \notin A_\beta$ und $x_\beta \in A_{\beta+1}$. Falls also $x_\beta \in A_\alpha$, so folgt mit (1) $\beta < \alpha$; falls $x_\beta \in A \setminus A_\alpha$, so folgt $\beta \geq \alpha$. Es ist also

$$A_\alpha = A \cap P_{x_\alpha}. \tag{4.10}$$

[5] siehe z. B. Deiser (2002).

(3) Wegen (4.7) gilt:

$$\begin{aligned} x_\alpha \in A &\Leftrightarrow x_\alpha \notin \mathrm{cl}(A_\alpha) \\ &\Leftrightarrow x_\alpha \notin \mathrm{cl}(A \cap P_{x_\alpha}). \end{aligned}$$

Das heißt, Gleichung (4.2) wird von A erfüllt.

(4) Sei nun B irgendeine Lösung von (4.2). Wir zeigen durch transfinite Induktion über $\alpha < \eta$, dass $A_\alpha = B \cap P_{x_\alpha}$, woraus $A = B$ folgt.

- $\alpha = 0$: $A_0 = \emptyset = B \cap P_{x_0}$.
- $0 \leq \alpha < \eta$: Sei als Induktionsvoraussetzung angenommen, dass $A_\alpha = B \cap P_{x_\alpha}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_\alpha \in A_{\alpha+1} &\Leftrightarrow x_\alpha \notin \mathrm{cl}(A_\alpha) \\ &\Leftrightarrow x_\alpha \notin \mathrm{cl}(B \cap P_{x_\alpha}) \quad [\mathrm{IV}] \\ &\Leftrightarrow x_\alpha \in B \\ &\Leftrightarrow x_\alpha \in B \cap (P_{x_\alpha} \cup x_\alpha) = B \cap P_{x_{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

  Es folgt $A_{\alpha+1} = B \cap P_{x_{\alpha+1}}$.
- $\lambda \leq \eta$ Limesordinalzahl: Sei $A_\alpha = B \cap P_{x_\alpha}$ für alle $\alpha < \lambda$ als Induktionsvoraussetzung angenommen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \\ &= \bigcup_{\alpha<\lambda} (B \cap P_{x_\alpha}) \quad [\mathrm{IV}] \\ &= B \cap \bigcup_{\alpha<\lambda} P_{x_\alpha} \\ &= B \cap P_{x_\lambda}. \end{aligned}$$

Es folgt $A = B$ und damit die Behauptung. □

Gleichung (4.2) kann damit tatsächlich als Definition des unendlichen Greedy-Algorithmus betrachtet werden.

Lemma 4.6. Sei $(E, \mathscr{I})$ ein wohlgeordnetes Matroid. Dann erfüllt die Menge

$$A = \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_x)\} \tag{4.11}$$

die Gleichung (4.2) und ist somit mit ihrer eindeutigen Lösung identisch.

Beweis. (1) Für $x \in A$ gilt $x \notin \mathrm{cl}(P_x)$, also auch $x \notin \mathrm{cl}(A \cap P_x)$ wegen $A \cap P_x \subseteq P_x$.

(2)[6] Angenommen, es gibt ein $x \in A^c$ mit $x \notin \mathrm{cl}(A \cap P_x)$. Sei x minimal gewählt (das ist wegen der Wohlordnung möglich). Es gilt dann mit (CL1) $A \cap P_x \subseteq \mathrm{cl}(A \cap P_x)$; für $y \in P_x \setminus A$ ist wegen $y \prec x$ und (CL2)

$$y \in \mathrm{cl}(A \cap P_y) \subseteq \mathrm{cl}(A \cap P_x),$$

[6] Klee (1971).

also $P_x \subseteq \mathrm{cl}(A \cap P_x)$. Da $x \in A^c$ ist, haben wir nun mit (4.11), (CL2) und (CL3)

$$x \in \mathrm{cl}(P_x) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A \cap P_x)) = \mathrm{cl}(A \cap P_x),$$

Widerspruch. Für $x \in A^c$ gilt also stets $x \in \mathrm{cl}(A \cap P_x)$.

(3) Aus (1) und (2) folgt $x \in A \Leftrightarrow x \notin \mathrm{cl}(A \cap P_x)$, zusammen mit Lemma 4.5 ist damit die Behauptung bewiesen. □

Bevor wir zum zentralen Beweis dieses Abschnittes kommen, fassen wir noch einmal zusammen, dass die Definition der Greedy-Ergebnismenge als Lösung von $A = \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(A \cap P_x)\}$ natürlicher der Vorstellung des Greedy-Algorithmus entspricht als die Klee'sche Definition $A = \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_x)\}$, während letztere mathematisch eleganter ist. Die Äquivalenz der beiden Definitionen setzt allerdings die Idempotenz des Abschlussoperators voraus, was für allgemeine Unabhängigkeitssysteme nicht gegeben ist. Im nächsten Abschnitt werden wir die Eigenschaften von Unabhängigkeitssystemen, auf denen der Greedy-Algorithmus eine optimale maximale unabhängige Menge liefert, untersuchen, und dazu die erste Definition verwenden.

Beweis von Satz 4.4. (1) Nach Lemma 4.6 gilt für jedes $x \in A^c$, dass $x \in \mathrm{cl}(A \cap P_x)$, also ist $A^c \subseteq \mathrm{cl}(A)$ und damit $\mathrm{cl}(A) = E$, das heißt, A ist eine aufspannende Menge. Angenommen A wäre eine abhängige Menge. Dann enthält A wegen der Finitaritätsbedingung (I4) einen endlichen Kreis C, der ein bezüglich $\prec$ größtes Element z enthält. Es folgt dann mit Satz 2.34 und (CL2) $z \in \mathrm{cl}(C \setminus z) \subseteq \mathrm{cl}(P_z)$. Da aber wegen $z \in A$ auch $z \notin \mathrm{cl}(P_z)$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch. A ist also eine Basis.

(2) Sei U eine unabhängige Teilmenge von E und sei Φ die Menge aller bijektiven Abbildungen

$$\phi\colon D_\phi \to R_\phi$$

mit

$$\begin{aligned} U \cap A \subseteq D_\phi \subseteq U, \\ U \cap A \subseteq R_\phi \subseteq A, \end{aligned}$$

wobei $(U \setminus D_\phi) \cup R_\phi$ eine unabhängige Menge ist, und

$$\begin{aligned} \phi(u) &= u && \text{für alle } u \in U \cap A, \\ \phi(u) &\prec u && \text{für alle } u \in D_\phi \setminus A. \end{aligned}$$

Wir werden im Folgenden die Elemente ϕ von Φ mit ihren Graphen $\{(x, \phi(x)) \mid x \in D_\phi\}$ identifizieren.

Die Elemente von Φ sind durch die Teilmengenbeziehung partiell geordnet. Φ enthält außerdem zumindest die identische Abbildung auf $U \cap A$ und ist damit nicht leer.

Sei nun $\mathscr{K}$ eine Kette in Φ. Setze $\mu := \bigcup \mathscr{K}$. Dann ist μ offenbar bijektiv, $D_\mu \subseteq U$, $R_\mu \subseteq A$, $\mu(u) = u$ für $u \in U \cap A$ und $\mu(u) \prec u$ für $u \in D_\mu \setminus A$. Es ist nur noch zu zeigen, dass $(U \setminus D_\mu) \cup R_\mu$ unabhängig ist.

Sei dazu $Z \subseteq (U \setminus D_\mu) \cup R_\mu$ eine endliche Teilmenge, $X := Z \cap (U \setminus D_\mu)$ und $Y := Z \cap R_\mu$. Dann gilt für alle $\phi \in \mathscr{K}$ wegen $D_\mu = \bigcup_{\phi \in \mathscr{K}} D_\phi$:

$$X \subseteq U \setminus D_\mu \subseteq U \setminus D_\phi.$$

Und da Y endlich ist, gibt es mit $R_\mu = \bigcup_{R_\phi \in \mathscr{K}} \phi$ ein $\phi_Y \in \mathscr{K}$ mit

$$Y \subseteq R_{\phi_Y} \subseteq R_\mu.$$

Es ist also $Z \subseteq (U \setminus D_{\phi_Y}) \cup R_{\phi_Y}$, und damit ist Z eine unabhängige Menge.

Da Z beliebig gewählt war, folgt nun mit (I4), dass $(U \setminus D_\mu) \cup R_\mu$ eine unabhängige Menge ist. Es ist also $\mu \in \Phi$, und mit dem Lemma von Zorn folgern wir, dass es in Φ ein maximales Element α gibt.

(3) Wir werden nun $D_\alpha = U$ zeigen, und damit auch, dass α die gesuchte Abbildung ist. Angenommen $D_\alpha \neq U$, d. h. $U \setminus D_\alpha$ ist nicht leer und wir können $x := \min U \setminus D_\alpha$ setzen. Da $A \cap P_x$ unabhängig ist, aber $x \in \operatorname{cl}(A \cap P_x)$ (wegen $x \in A^c$) ist und daher $x \cup (A \cap P_x)$ abhängig ist, gibt es nach Satz 2.31 einen eindeutigen Kreis C_x mit $x \in C_x \subseteq x \cup (A \cap P_x)$. x ist dann größtes Element in C_x. Da $(U \setminus D_\alpha) \cup R_\alpha$ eine unabhängige Menge ist, kann sie C_x nicht als Teilmenge enthalten, daher existiert ein $a_x \in C_x \cap (A \setminus R_\alpha)$, welches wegen $x \in A^c$ von x verschieden und damit kleiner als x sein muss.

Damit definieren wir nun $\phi_x := \alpha \cup (x, a_x)$. Da die Abbildung ϕ_x eine bijektive Fortsetzung von α ist, muss wegen der Maximalität von α die Menge

$$(U \setminus D_{\phi_x}) \cup R_{\phi_x} = (U \setminus (D_\alpha \cup x)) \cup R_\alpha \cup a_x$$

abhängig sein. Da diese Menge ohne a_x unabhängig wäre, ist a_x nach Satz 2.31 in einem eindeutig bestimmten Kreis C mit

$$a_x \in C \subseteq (U \setminus (D_\alpha \cup x)) \cup R_\alpha \cup a_x$$

enthalten.

Da $C \cap (R_\alpha \cup a_x) \subseteq A$ unabhängig ist, muss es ein $y \in C \cap (U \setminus (D_\alpha \cup x))$ geben, und, da x minimal gewählt war, ist $a_x \prec x \prec y$.

C ist aber auch in $(U \setminus D_\alpha) \cup R_\alpha \cup a_x$ der eindeutige enthaltene Kreis. Nimmt man aus dieser Menge das Element $y \in C$ heraus, erhält man folglich die unabhängige Menge

$$(U \setminus (D_\alpha \cup y)) \cup R_\alpha \cup a_x.$$

Das heißt, die Funktion $\phi_y := \alpha \cup (y, a_x)$ ist in Φ enthalten, im Widerspruch zur angenommenen Maximalität von α.

Es folgt $U = D_\alpha$. Wir haben damit eine bijektive Abbildung $\alpha \colon U \to R_\alpha \subseteq A$ gewonnen. Mit A als Bildbereich ergibt sich damit die Existenz der behaupteten injektiven Abbildung. □

Bemerkung 4.7. Klee schreibt, dass α ein „biunique mapping“ sei, was eigentlich mit „bijektive Abbildung“ übersetzt wird. Im Kontext kann er damit jedoch nur „injektive Abbildung“ meinen, da er erstens nicht $R_\alpha = A$ zeigt, zweitens nur U unabhängig voraussetzt, so dass für $|U| < |A|$ überhaupt keine solche Bijektion möglich ist. Falls wir hypothetisch annehmen, dass stets ein bijektives α existiert, können wir die Umkehrung des Satzes folgern, nämlich dass jedes Unabhängigkeitssystem, auf dem der Greedy-Algorithmus funktioniert, ein finitäres Matroid sein muss. Die Beweisführung ist im Anhang A dargestellt.

4.3 Die Rückrichtung

Für endliche Unabhängigkeitssysteme ist die Ergänzungseigenschaft ($\mathrm{I3_F}$) hinreichend und notwendig für das Funktionieren des Greedy-Algorithmus.

Im unendlichen Fall haben wir das Funktionieren des Greedy-Algorithmus für den Spezialfall finitärer Matroide gezeigt. Wir wollen nun untersuchen, ob sich auch die Umkehrung zeigen lässt, d. h. ob die Klasse der finitären Matroide genau die Klasse der Unabhängigkeitssysteme ist, auf denen der Greedy-Algorithmus funktioniert.

Wir stellen dazu folgende allgemeine Voraussetzung auf:

(G) Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Unabhängigkeitssystem. Der Greedy-Algorithmus liefert für jede Wohlordnung $\prec$ auf E eine maximale Menge $A \in \mathscr{I}$, so dass für jede maximale Menge $U \in \mathscr{I}$ eine injektive Abbildung $\alpha\colon U \to A$ mit $\alpha(u) = u$ für $u \in U \cap A$, $\alpha(u) \prec u$ für $u \in U \setminus A$ existiert.

Ein Beispiel zeigt, dass wir von vornherein ausschließen können, dass der Greedy-Algorithmus für jedes unendliche Matroid funktioniert.

Beispiel 4.8. Wir betrachten das Matroid $M = (\mathbb{N}, \mathscr{I})$ mit $\mathscr{I} := \mathscr{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N}\}$, das heißt, es gibt genau eine abhängige Menge, und das ist die Grundmenge $\mathbb{N}$ selbst. Führen wir bezüglich der natürlichen Ordnung $1 < 2 < 3 < \cdots$, die eine Wohlordnung ist, den Greedy-Algorithmus aus, erhalten wir das Ergebnis $A = \mathbb{N}$, denn sonst gäbe es ein kleinstes $n \notin A$, d. h. $\{1, \ldots, n-1, n\} \notin \mathscr{I}$, Widerspruch zur Definition von $\mathscr{I}$.

Der Greedy-Algorithmus scheitert hier offenbar an der Anwesenheit eines unendlichen Kreises. Folgende Vermutung liegt also nahe:

Vermutung 4.9. Der Greedy-Algorithmus funktioniert genau für solche Unabhängigkeitssysteme, die finitäre Matroide sind.

Für die Beweise der folgenden Aussagen benötigen wir eine Möglichkeit, Wohlordnungen, die bestimmte Bedingungen erfüllen, zu konstruieren, um den Greedy-Algorithmus in die gewünschten Bahnen zu lenken. Wir vereinbaren folgende Notation. Seien A_i Teilmengen der Grundmenge eines Matroids.

$$A_1 \prec A_2 \prec A_3$$

bedeutet, dass an die Ordnung $\prec$ folgende Bedingungen gestellt werden:

$$x \prec y \text{ falls } \begin{cases} x \in A_1 \text{ und } y \notin A_1 & \text{oder} \\ x \in A_1 \cup A_2 \text{ und } y \notin A_1 \cup A_2 & \text{oder} \\ x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \text{ und } y \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3, \end{cases}$$

und dass die Ordnung innerhalb der A_i ansonsten beliebig ist. Sofern die A_i bezüglich $\prec$ wohlgeordnet sind, ist die gesamte Ordnung eine Wohlordnung.

Satz 4.10. (G) impliziert (IM).

Beweis. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Unabhängigkeitssystem, auf dem der Greedy-Algorithmus für jede Wohlordnung eine optimale Basis liefert. Wir zeigen, dass für $I \in \mathscr{I}$ und $I \subseteq X \subseteq E$ die Menge $S = \{I' \in \mathscr{I} \mid I \subseteq I' \subseteq X\}$ ein maximales Element besitzt.

Dazu sei $\prec$ eine Wohlordnung auf E, die der Bedingung

$$I \prec X \setminus I \prec E \setminus X$$

genügt.

Sei A die maximale unabhängige Menge, die der Greedy-Algorithmus als Ergebnis liefert. Dann gilt offenbar $I \subseteq A \cap X \subseteq X$. Falls $A = A \cap X$ sind wir fertig, da A nach (G) eine maximale unabhängige Menge ist. Andernfalls sei angenommen, dass $A \cap X$ nicht maximal ist. Dann gibt es ein $x \in X \setminus A$ mit $(A \cap X) \cup x \in \mathscr{I}$. Wegen $x \in A^c$ haben wir mit (4.2) und (CL2) $x \in \mathrm{cl}(A \cap P_x) \subseteq \mathrm{cl}(A \cap X)$, also gibt es nach Definition von cl eine unabhängige Teilmenge $Y \subseteq A \cap X$ mit $Y \cup x \notin \mathscr{I}$, was mit (I2) einen Widerspruch zu $(A \cap X) \cup x \in \mathscr{I}$ ergibt. □

Satz 4.11. (G) impliziert (I3$_\mathrm{F}$).

Beweis. Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Unabhängigkeitssystem, auf dem der Greedy-Algorithmus für jede Wohlordnung eine optimale maximale unabhängige Menge liefert. Angenommen, wir haben ein Gegenbeispiel für (I3$_\mathrm{F}$), d. h. $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$ mit $|I_1| < |I_2| < \infty$, so dass $I_1 \cup x \notin \mathscr{I}$ für alle $x \in I_2 \setminus I_1$.

Sei $\prec$ eine Wohlordnung auf E, die der Bedingung

$$I_1 \prec I_2 \setminus I_1 \prec E \setminus (I_1 \cup I_2)$$

genügt. Dann wird der Greedy-Algorithmus zuerst alle Elemente von I_1 auswählen, dann nach der Annahme kein Element von $I_2 \setminus I_1$ auswählen, und schließlich die gebildete Basis A mit Elementen – mindestens einem, da I_1 nicht maximal ist – außerhalb von I_1 und I_2 auffüllen, so dass $A = I_1 \cup R$ mit $\emptyset \neq R \subseteq E \setminus (I_1 \cup I_2)$.

Mit Theorem 4.10 können wir (mit $X = E$) I_2 zu einer maximalen unabhängigen Menge I_2' erweitern. Nach (G) gibt es nun eine injektive Abbildung $\alpha \colon I_2' \to A$ mit $\alpha(u) = u$ für $u \in I_2' \cap A$ und $\alpha(u) \prec u$ für $u \in I_2' \setminus A$. Betrachten wir die Einschränkung von α auf I_2:

Für $u \in I_2 \setminus A = I_2 \setminus I_1$ gilt $\alpha(u) \prec u$. Durch α muss also $I_2 \setminus I_1$ injektiv auf $I_1 \setminus I_2$ abgebildet werden, das heißt $|I_2 \setminus I_1| \leq |I_1 \setminus I_2|$ und bildet einen Widerspruch zur Annahme $|I_1| < |I_2|$. □

Satz 4.12. Sei $(E, \mathscr{I})$ ein Unabhängigkeitssystem mit **abzählbarer** Grundmenge E. Dann gilt: (G) impliziert (I4).

Beweis. Alle Teilmengen von E sind abzählbar, die Aussage folgt damit direkt aus dem folgenden Lemma 4.13.

Lemma 4.13. Sei $(E, \mathscr{I})$ ein Unabhängigkeitssystem, das (G) erfüllt, und X eine abzählbare Teilmenge von E. Dann gilt: Falls alle endlichen Teilmengen von X unabhängig sind, dann ist X selbst eine unabhängige Menge.

Beweis. Sei $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ und setze $X_n := \{x \in X \mid x \preceq x_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei dann $\prec$ eine Wohlordnung auf E, für die gilt

$$x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \cdots \prec E \setminus X.$$

Führe den Greedy-Algorithmus aus, die Ergebnismenge sei A. Angenommen, $X \nsubseteq A$, dann gibt es ein kleinstes k mit $x_k \notin A$. Dann ist aber $X_{k-1} \subseteq A$ und $X_{k-1} \cup x_k = X_k \in \mathscr{I}$ wegen $|X_k| = k < \infty$. Der Widerspruch zeigt $X \subseteq A$, also $X \in \mathscr{I}$. □

Die Aussagen dieses und des vorhergehenden Abschnittes liefern uns damit schließlich eine teilweise Antwort auf die eingangs gestellte Frage:

Korollar 4.14. Sei E eine abzählbare Menge und $M = (E, \mathscr{I})$ ein Unabhängigkeitssystem. Dann gilt:

M ist genau dann ein finitäres Matroid, wenn der Greedy-Algorithmus für jede Wohlordnung auf M als Ergebnis eine optimale Basis liefert.

Als abschließende Bemerkung sei noch erwähnt, dass die Voraussetzung der Abzählbarkeit der Grundmenge nicht notwendig ist, wenn das (unendliche) Ergänzungsaxiom (I3) zur Verfügung steht.

Satz 4.15. (G) zusammen mit (I3) impliziert (I4).

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass wir aus (G) bereits (IM) gefolgert haben, und daher mit (I3) die vollständigen Unabhängigkeitsaxiome für Matroide, Definition 2.35, zur Verfügung haben.

Sei X eine unendliche Teilmenge von E, deren endliche Teilmengen sämtlich unabhängige Mengen sind. Wegen Lemma 4.13 müssen wir die Unabhängigkeit von X nur für überabzählbare X nachweisen.

Angenommen, X ist abhängig, dann gibt es nach Satz 2.37 einen Kreis $C \subseteq X$, der nach Lemma 4.13 überabzählbar sein muss. Sei $Z = \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ eine abzählbar unendliche Teilmenge von C. Wegen der Minimalität von C muss $C \setminus Z$ also unabhängig sein.

Wir versehen nun E mit einer Wohlordnung $\prec$, die die Bedingung

$$C \setminus Z \prec z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec \cdots \prec E \setminus C$$

erfüllt. Die Argumentation ist ähnlich der in Lemma 4.13. Setze $Z_n := C \setminus Z \cup \{z \in Z \mid z \preceq z_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei B das Ergebnis des Greedy-Algorithmus. Dann gilt sicher $C \setminus Z \subseteq B$. Angenommen, $C \nsubseteq B$, dann gibt es ein kleinstes k mit $z_k \notin B$. Dann ist $Z_{k-1} \subseteq B$ und, wegen der Minimalität von C, $Z_k = Z_{k-1} \cup z_k \in \mathscr{I}$. Der Greedy-Algorithmus hätte also z_k auswählen müssen, also muss $C \subseteq B$ sein. Das heißt, B ist eine abhängige Menge, Widerspruch zu (G), also muss X eine unabhängige Menge sein. □

5 Zusammenfassung und offene Fragen

Die Veröffentlichung von Bruhn et al. (2010) über neue Axiomensysteme für unendliche Matroide war der Anlass, erneut den Zusammenhang zwischen Matroiden und dem Greedy-Algorithmus zu untersuchen, wobei besonderes Augenmerk der Untersuchung der Klasse von Unabhängigkeitssystemen, für die der Greedy-Algorithmus stets eine optimale Basis liefert, gewidmet wurde. Es stellte sich heraus, dass die eine Richtung bereits von Klee (1971) bearbeitet wurde: Für finitäre Matroide funktioniert der Greedy-Algorithmus.

Zuerst war die Definition des Greedy-Algorithmus Gegenstand der Diskussion. Wir haben uns dafür entschieden, die Definition von Klee im Wesentlichen zu übernehmen, haben sie jedoch aufgrund einer für allgemeine Unabhängigkeitssysteme Formulierung in leicht modifizierter Form neu hergeleitet. Das Kriterium für optimale Basen haben wir direkt von Klee übernommen.

Wir stellten dann aufgrund eines Gegenbeispiels die Vermutung auf, dass auch umgekehrt gilt: Wenn der Greedy-Algorithmus für ein Unabhängigkeitssystem funktioniert, so muss dieses ein finitäres Matroid sein.

Wir konnten die Gültigkeit dieser Vermutung teilweise nachweisen:

1. Die Umkehrung ist gültig, falls die Grundmenge höchstens abzählbar ist (Satz 4.12.)
2. Falls der Greedy-Algorithmus für ein Unabhängigkeitssystem funktioniert, ist dieses entweder ein finitäres Matroid oder überhaupt kein Matroid (Satz 4.15.)

Dadurch ergeben sich zwei offene Fragen.

1. Die Kleesche Definition $A = \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(P_x)\}$ für die Ergebnismenge des Greedy-Algorithmus haben wir modifiziert, weil zum Beweis der Eigenschaft $A = \{x \in E \mid x \notin \mathrm{cl}(A \cap P_x)\}$ die Idempotenz des Abschlussoperators benutzt wurde. Kann man beweisen, dass die Idempotenz, eventuell in einer abgeschwächten Form, für diese Folgerung notwendig ist?
2. Kann man auch für überabzählbare Unabhängigkeitsysteme, für die der Greedy-Algorithmus funktioniert, beweisen oder widerlegen, dass sie finitäre Matroide sein müssen?

A Hypothetisch: Greedy-Algorithmus impliziert finitäres Matroid?

Wie in Abschnitt 4.2 erwähnt, stiftet Klee einiges an Verwirrung, indem er in Satz 4.4 die Existenz einer „biunique" – also bijektiven – Abbildung α behauptet, sie dann aber nur als injektiv zeigt. In diesem Anhang sollen die Konsequenzen für den **hypothetischen Fall** aufgezeigt werden, in dem α wie im Falle endlicher Unabhängigkeitssysteme eine bijektive Abbildung ist.

Wir formulieren wieder die Voraussetzung

(G') Sei $M = (E, \mathscr{I})$ ein Unabhängigkeitssystem. Der Greedy-Algorithmus liefert für jede Wohlordnung $\prec$ auf E eine maximale Menge $A \in \mathscr{I}$, so dass für jede maximale Menge $U \in \mathscr{I}$ eine **bijektive** Abbildung $\alpha\colon U \to A$ mit $\alpha(u) = u$ für $u \in U \cap A$, $\alpha(u) \prec u$ für $u \in U \setminus A$ existiert.

Die folgenden Aussagen aus Abschnitt 4.3 gelten mit der modifizierten Voraussetzung weiterhin:

- (G') $\Rightarrow$ (IM)
- (G') $\Rightarrow$ ($\mathrm{I3_F}$)
- (G') $\wedge$ E abzählbar $\Rightarrow$ (I4)
- (G') $\wedge$ (I3) $\Rightarrow$ (I4)

Mit bijektivem α können wir zusätzlich (I3) nachweisen, und damit wegen Satz 4.15 auch (I4).

Satz A.1. (G') impliziert (I3).

Beweis. Es gelte (G') für ein Unabhängigkeitssystem $M = (E, \mathscr{I})$. Angenommen, wir haben ein Gegenbeispiel $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$ gefunden, d. h. es sei I_2 maximal, I_1 nicht maximal, und für alle $x \in I_2 \setminus I_1$ sei $I_1 \cup x \notin \mathscr{I}$.

Sei $\prec$ eine Wohlordnung auf E, die der Bedingung

$$I_1 \prec I_2 \setminus I_1 \prec E \setminus (I_1 \cup I_2)$$

genügt. Dann wird der Greedy-Algorithmus zuerst alle Elemente von I_1 auswählen, dann nach der Annahme den Rest von I_2 überspringen und die Ergebnismenge A mit Elementen aus $E \setminus (I_1 \cup I_2)$ auffüllen. Da I_1 nicht maximal ist, muss A somit mindestens ein Element $z \in E \setminus (I_1 \cup I_2)$ enthalten.

Wir vergleichen nun A mit der Basis I_2. Da $x \prec z$ für alle $x \in I_2$ gilt, kann es keine bijektive Abbildung $\alpha\colon I_2 \to A$ geben, für die $\alpha(x) \prec x$ für alle $x \in I_2 \setminus A$ gilt, da dann für $x := \alpha^{-1}(z)$ gelten müsste $x \prec z = \alpha(x) \prec x$.

A ist also keine optimale Menge bezüglich $\prec$, Widerspruch. $\square$

Damit sind die die Unabhängigkeitsaxiome für unendliche Matroide nach Bruhn et al. (2010) vollständig. Die Finitaritätseigenschaft (I4) folgt nun mit Satz 4.15, so dass wir zusammenfassend feststellen:

Korollar A.2. Falls (G') für ein Unabhängigkeitssystem $M = (E, \mathscr{I})$ gilt, so ist M ein finitäres Matroid.

Literaturverzeichnis

Martin Aigner (2006). *Diskrete Mathematik.* 6. Auflage, Vieweg+Teubner.

Anders Björner, Günter M. Ziegler (1992). *Introduction to Greedoids.* In: Neil White (Hrsg.), Matroid applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 40, Cambridge University Press, S. 284–357.

Otakar Borůvka (1926), *O jistém problému minimálním.* Práce moravské přírodovědecké společnosti v Brně III (3), S. 37–58.

Henning Bruhn, Reinhard Diestel, Matthias Kriesell, Rudi Pendavingh, Paul Wolland (2010). *Axioms for infinite matroids.* arXiv:1003.3919.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein (2001). *Introduction to Algorithms, Second Edition.* MIT Press.

Oliver Deiser (2002). *Einführung in die Mengenlehre.* Springer Verlag, 3. Auflage.

Denis A. Higgs (1969). *Infinite graphs and matroids.* In: W. T. Tutte (Hrsg.), Recent Progress in Combinatorics. Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics, Academic Press, S. 245–253.

Victor Klee (1971). *The Greedy algorithm for finitary and cofinitary matroids.* In: Theodore S. Motzkin (Hrsg.), Combinatorics. Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, Vol. XIX, S. 137–152.

Jaroslav Nešetřil, Eva Milková, Helena Nešetřilová (2001). *Otakar Borůvka on minimum spanning tree problem. Translation of both the 1926 papers, comments, history.* In: Discrete Mathematics 233, S. 3–36.

Giorgio Nicoletti, Neil White (1986). *Axiom Systems.* In: Neil White (Hrsg.), Theory of Matroids. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 26, Cambridge University Press, S. 29–44.

James G. Oxley (1978). *Infinite Matroids.* In: Proceedings of the London Mathematical Society (3) 37, S. 259–272.

James G. Oxley (1992). *Infinite Matroids.* In: Neil White (Hrsg.), Matroid applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 40, Cambridge University Press, S. 73–90.

James G. Oxley (1992a). *Matroid Theory.* Oxford University Press.

Luise Unger (2003). *Lineare Algebra I.* Kurs 1104 der Fernuniversität in Hagen.

D. J. A. Welsh (1976). *Matroid Theory.* Academic Press.

Hassler Whitney (1935), *On the abstract properties of linear dependence.* In: American Journal of Mathematics, Vol 57, No. 3, S. 509–533.