

Diplomarbeit

Birch-Partitionen und k -Mengen in orientierten
Matroiden

Viktor Herrmann
betreut von Prof. Dr. Winfried Hochstättler

FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik
2011/2012

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	iii
Symbolverzeichnis	v
1 Einleitung	1
1.1 k -Mengen	2
1.2 Birch-Partitionen	4
1.3 Orientierte Matroide	6
2 k-Mengen und orientierte Matroide	11
2.1 Eine obere Schranke für die Anzahl der k -Cocircuits	13
2.1.1 Orientierte Matroide vom Rang 3	13
2.1.2 Ansätze für höhere Dimensionen	19
2.2 Eine obere Schranke für die Anzahl der ($< k$)-Cocircuits	24
2.2.1 Orientierte Matroide vom Rang 3	24
2.2.2 Orientierte Matroide vom Rang 4	26
2.2.3 Orientierte Matroide vom Rang r	28
2.3 Eine untere Schranke für die Anzahl der k -Cocircuits	30
2.4 Eine untere Schranke für die Anzahl der ($\leq k$)-Cocircuits	38
3 Birch-Partitionen und orientierte Matroide	45
3.1 Eine untere Schranke für die Anzahl der Birch-Partitionen	45
3.1.1 Pseudopunktfigurationen	45
3.1.2 Pseudosphärenarrangements	51
3.2 Simplices, die einen Punkt enthalten	63
3.2.1 Pseudopunktfigurationen	64
3.2.2 Pseudosphärenarrangements	65
Literaturverzeichnis	67

Zusammenfassung

Brian John Birch bewies im Jahre 1959 [4], dass für eine Menge von $3N$ Punkten in der Ebene stets eine Partition in N Teilmengen derart existiert, dass die konvexen Hüllen der N Teilmengen einen gemeinsamen Punkt enthalten. Eine solche Partition nennt man eine *Birch-Partition*.

Eine k -Menge einer n -elementigen Punktmenge \mathcal{P} ist eine k -elementige Teilmenge \mathcal{S} von \mathcal{P} derart, dass \mathcal{S} und $\mathcal{P} \setminus \mathcal{S}$ durch eine Hyperebene getrennt werden können. Obere und untere Schranken für k -Mengen wurden 1973 in einer Publikation von Paul Erdős et al. [7] angegeben.

In dieser Arbeit soll es darum gehen, Ergebnisse sowohl aus dem Bereich der Birch-Partitionen, als auch aus dem Bereich der k -Mengen in die allgemeinere Struktur der *orientierten Matroide* zu übertragen. Durch orientierte Matroide lassen sich die Informationen (z.B. Lage von Punkten zu Linien, Schnittpunkte) von geometrischen Anordnungen kombinatorisch ausdrücken. Orientierte Matroide sind jedoch 'allgemeiner', es werden z.B. krumme Linien und 'Deformationen' von Hyperebenen zugelassen.

Eingeführt wurden orientierte Matroide im Jahre 1978 in zwei Aufsätzen, einmal von Jon Folkman und James Lawrence [9] und einmal von Robert G. Bland und Michel Las Vergnas [6]. Kapitel 1 ist eine kurze Einführung zu k -Mengen, zu Birch-Partitionen und zu orientierten Matroiden.

Es gibt verschiedene Publikationen zum Thema 'Obere und untere Schranken für die Anzahl der k -Mengen', d.h. Schranken dafür, wie viele k -Mengen eine n -elementige Punktmenge höchstens haben kann bzw. mindestens haben muss. Stefan Felsner fasst in Kapitel 4 seines Buches [8] den Stand der Forschung (bis 2004) zusammen.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt insbesondere im Studium von Schranken für die Anzahl der $(\leq k)$ -Mengen; $(\leq k)$ -Mengen sind die Summe der j -Mengen für $j = 0, 1, \dots, k$.

In Kapitel 2 übertragen wir verschiedene dieser Schranken auf bestimmte orientierte Matroide.

Stefan Hell gibt in [10] eine untere Schranke für die Anzahl der Birch-Partitionen an. In seiner Doktorarbeit [11] findet sich eine Aussage über die Parität der Anzahl der Dreiecke mit Eckpunkten aus einer festen Punktmenge, deren konvexe Hüllen einen gemeinsamen Punkt haben. Beides lässt sich auf bestimmte orientierte Matroide verallgemeinern, dies ist das Thema von Kapitel 3.

Ich danke Herrn Prof. Hochstättler für das interessante Thema, für viele hilfreiche Hinweise und Anregungen und für seine Geduld bei unserer Zusammenarbeit. Meiner Frau Gloria danke ich herzlich für ihre Unterstützung während dieser Arbeit und während des gesamten Studiums, sowie für das endlose Durchlesen meiner Manuskripte. Für weiteres Korrekturlesen bedanke ich mich bei Dr. Christoph Stahl und seiner Frau Sylvia und bei Wolfgang Heinig. Zusammen haben sie die Anzahl meiner Fehler deutlich reduziert.

Symbolverzeichnis

\mathbb{N} bezeichne die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen.

Für eine rationale Zahl a seien $\lfloor a \rfloor$ und $\lceil a \rceil$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist und die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich a ist.

\mathcal{O} : orientiertes Matroid S. 7

E : endliche Menge, Grundmenge von \mathcal{O} S. 7

\mathcal{D} : Menge der Cocircuits eines orientierten Matroids S. 7

\mathcal{C} : Menge der Circuits eines orientierten Matroids S. 10, 56

\mathcal{T} : Menge der Tope eines orientierten Matroids S. 9

\mathcal{L} : Menge der Covektoren eines orientierten Matroids S. 9

\mathcal{P} : Punktemenge in \mathbb{R}^d S. 2

G : Graph S. 1

Kapitel 1

Einleitung

In diesem Kapitel werden einige Resultate zu k -Mengen und Birch-Partitionen vorgestellt. Es werden weiter die Aspekte der orientierten Matroide eingeführt, die wir später benötigen.

In Abschnitt 1.1 wird eine obere Schranke für die Anzahl der k -Mengen in der Ebene vorgestellt. Mit Hilfe des Abwechslungslemmas (Lemma 1) lässt sich Lemma 2 beweisen, mit Lemma 2 wiederum das Lemma von Lovász (Lemma 3). Auf diesem Lemma basiert die obere Schranke, die in Proposition 1 angegeben wird.

In 1.2 wird erklärt, was man unter einem Birch-Punkt und einer Birch-Partition versteht. In Satz 3 wird eine untere Schranke für die Anzahl der Birch-Partitionen einer Punktmenge angegeben.

In 1.3 führen wir die orientierten Matroide anhand eines Beispiels ein, das bereits darauf hinweisen soll, wie wir die orientierten Matroide in den Kapiteln 2 und 3 verwenden.

Es folgen verschiedene Definitionen überwiegend geometrischer Natur, vergleiche hierzu z.B. [2].

Definition 1. Ein Graph $G = (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ ist ein Paar, bestehend aus einer endlichen Eckenmenge \mathcal{E} und einer Kantenmenge \mathcal{K} . Für die Menge \mathcal{K} gilt $\mathcal{K} \subseteq \binom{\mathcal{E}}{2}$, sie besteht also aus Paaren $\{u, v\}$ mit $u, v \in \mathcal{E}$. Ein Beispiel für einen Graphen ist der rechte Teil von Bild 6 auf Seite 17.

Definition 2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ein Weg in einem Graphen G ist eine Folge von verschiedenen Ecken u_1, u_2, \dots, u_n aus \mathcal{E} mit $\{u_i, u_{i+1}\} \in \mathcal{K}$ für alle i . Die Länge des Weges ist die Anzahl $n - 1$ der Kanten $\{u_i, u_{i+1}\}$. Eine Ecke $v \in \mathcal{E}$ heißt erreichbar von einer Ecke $u \in \mathcal{E}$, wenn es einen Weg mit Anfangsecke u und Endecke v gibt. Einen solchen Weg nennen wir einen u, v -Weg. G heißt zusammenhängend, wenn es für je zwei beliebige Ecken $u, v \in \mathcal{E}$ stets einen u, v -Weg gibt. Ansonsten besteht G aus mindestens zwei Komponenten, wobei jede dieser Komponenten zusammenhängend ist.

Definition 3. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ein Kreis in einem Graphen G ist eine Folge von verschiedenen Ecken u_1, u_2, \dots, u_n aus \mathcal{E} mit $\{u_i, u_{i+1}\} \in \mathcal{K}$ für alle i und $\{u_n, u_1\} \in \mathcal{K}$. Die Länge des Kreises ist die Anzahl n seiner Ecken bzw. Kanten.

Definition 4. In einem Graphen $G = (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ heißen eine Ecke $u \in \mathcal{E}$ und eine Kante $k \in \mathcal{K}$ inzident, falls $u \in k$ gilt. Ebenso heißen zwei Kanten inzident, wenn sie eine gemeinsame Ecke haben. In Analogie dazu verwenden wir den Begriff der Inzidenz in allgemeineren geometrischen Anordnungen. So nennen wir in höherdimensionalen geometrischen Objekten die Ecken, die Kanten, die Seitenflächen usw. und das Objekt selbst

inzident.

Definition 5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $f(n)$ und $g(n)$ Funktionen auf \mathbb{N} . Wir definieren die Bedeutung des Landau-Symbols 'Groß-O':

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \text{es existieren eine Konstante } C > 0 \text{ und ein } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass} \\ |f(n)| \leq C|g(n)| \text{ gilt für } n \geq n_0\}.$$

Für die folgende Definition der allgemeinen Lage sowie des Simplex vergleiche z.B. [11].

Definition 6. Seien $d, n \in \mathbb{N}$. Sei \mathcal{P} eine Menge von n Punkten in \mathbb{R}^d . Wir sagen, \mathcal{P} ist in allgemeiner Lage, wenn keine $(d + 1)$ Punkte auf einer Hyperebene liegen. Als einen d -Simplex bezeichnen wir die konvexe Hülle von $d + 1$ Punkten in \mathbb{R}^d , die sich in allgemeiner Lage befinden.

Nach Definition 6 sind somit ein 0-Simplex ein Punkt, ein 1-Simplex eine Strecke, ein 2-Simplex ein Dreieck, ein 3-Simplex ein Tetraeder usw.

1.1 k -Mengen

Wir wollen zunächst den Begriff der k -Menge formal definieren (vergleiche [8], Kapitel 4, Seite 53).

Definition 7. Seien $d, k, n \in \mathbb{N}$. Sei \mathcal{P} eine Menge von n Punkten in \mathbb{R}^d in allgemeiner Lage. Eine k -Menge von \mathcal{P} ist eine k -elementige Teilmenge \mathcal{S} von \mathcal{P} derart, dass \mathcal{S} und $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{S}$ durch eine Hyperebene getrennt werden können.

Für eine Punktmenge in der Ebene ($d = 2$) bedeutet die allgemeine Lage, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen dürfen. Das Studium der k -Mengen in der Ebene ist eng verknüpft mit dem Studium der k -Kanten: Eine k -Kante von \mathcal{P} ist eine orientierte Kante, deren Anfangs- und Endpunkt ein Punkt aus \mathcal{P} ist, mit der Eigenschaft, dass genau k Punkte von \mathcal{P} auf der positiven (linken) Seite der Geraden liegen, die durch die Kante definiert ist (vergleiche Bild 1).

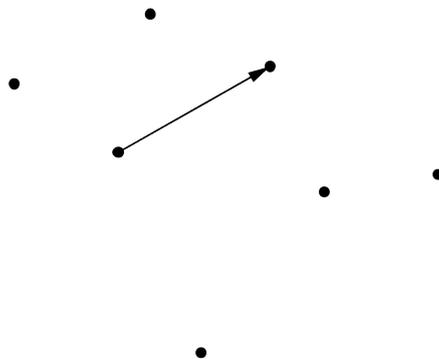


Bild 1. Beispiel für eine 2-Kante einer 7-elementigen Punktmenge in der Ebene.

Folgende Beobachtung aus [8] gibt den Zusammenhang zwischen k -Kanten und k -Mengen an.

Beobachtung 1. *Es sei \mathcal{P} eine Menge von n Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage, und es gelte $1 \leq k < n$. Die Anzahl der k -Mengen von \mathcal{P} ist gleich der Anzahl der $(k-1)$ -Kanten von \mathcal{P} .*

Beweis. Siehe [8] Kapitel 4.1, Observation 1.

Sei \mathcal{P} im weiteren Verlauf stets wie in Beobachtung 1 definiert.

Für gerades n nennt man eine k -Kante eine *halbierende Kante*, wenn auf der negativen (rechten) und auf der positiven Seite der durch die Kante definierten Geraden gleich viele Punkte (und zwar $k = \frac{n-2}{2}$) liegen.

Sei $j \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $e_j = e_j(\mathcal{P})$ die Anzahl der j -Kanten der Menge \mathcal{P} und mit $E_k = E_k(\mathcal{P})$ die Anzahl der $(\leq k)$ -Kanten von \mathcal{P} , d.h. $E_k = \sum_{j=0}^k e_j$.

Kehren wir die Orientierung einer k -Kante um, so erhalten wir eine $(n-2-k)$ -Kante (vor der Reorientierung liegen k Punkte auf der positiven Seite und $(n-2-k)$ Punkte auf der negativen Seite der die Kante überdeckenden Geraden, hinterher ist es umgekehrt). Somit ist die Anzahl der k -Kanten gleich der Anzahl der $(n-2-k)$ -Kanten: $e_k = e_{n-2-k}$.

Daher ist es ausreichend, k -Kanten für $k \leq \frac{n-2}{2}$ zu untersuchen.

Schranken für k -Kanten für $k \leq \frac{n-2}{2}$ wurden von Erdős et al. in [7] untersucht. Die folgenden Lemmata 1, 2 und 3 und Proposition 1 gehen auf diese Publikation zurück. Wir geben sie hier allerdings so an, wie Felsner sie in seinem Buch [8] in Kapitel 4.1 formuliert hat.

Sei $p \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest, und sei l eine orientierte Gerade, die durch p in eine Vorderhälfte und eine Hinterhälfte aufgeteilt wird. Man lasse l im Uhrzeigersinn um p rotieren. Dabei sprechen wir von einem *Aus-Ereignis*, wenn die Vorderhälfte von l eine von p ausgehende k -Kante bedeckt und von einem *Ein-Ereignis*, wenn die Hinterhälfte von l eine zu p hin verlaufende k -Kante bedeckt. Es gilt dann das nachfolgende Lemma.

Lemma 1 (Abwechslungslemma). *Aus-Ereignisse und Ein-Ereignisse wechseln sich während der Rotation von l um p ab.*

Beweis. Siehe [8] Kapitel 4.1, Lemma 4.1.

Aus dem Abwechslungslemma folgt direkt (vergleiche [8]):

Zu jedem Punkt ist die gleiche Anzahl einkommender und ausgehender k -Kanten inzident. Insbesondere ist die Anzahl der zu einem einzelnen Punkt inzidenten k -Kanten gerade.

Mit Hilfe des Abwechslungslemmas lässt sich das folgende Lemma beweisen.

Lemma 2. *Es sei $a \in \mathbb{N}$. Sei l eine orientierte Gerade, die einen einzelnen Punkt p von \mathcal{P} enthält. Wenn es von der positiven Seite von l her a einkommende Kanten bei p gibt, dann gibt es entweder $a-1$ oder a oder $a+1$ von p ausgehende Kanten in die negative Seite von l hinein. Für $k < \frac{n-1}{2}$ gilt folgendes:*

Wenn die positive Seite von l höchstens k Punkte enthält, dann beträgt die Anzahl der von p ausgehenden, in die negative Seite hineinreichenden k -Kanten $a + 1$.

Wenn beide Seiten von l mehr als k Punkte enthalten, dann beträgt die Anzahl der von p ausgehenden, in die negative Seite hineinreichenden k -Kanten a .

Wenn die negative Seite von l höchstens k Punkte enthält, dann beträgt die Anzahl der von p ausgehenden, in die negative Seite hineinreichenden k -Kanten $a - 1$.

Beweis. Im Beweis wird Lemma 1 benutzt, siehe [8] Kapitel 4.1, Lemma 4.2.

Für das folgende Lemma sei l eine orientierte, zu \mathcal{P} disjunkte Gerade, die \mathcal{P} in eine linke Menge \mathcal{S} und eine rechte Menge $\overline{\mathcal{S}}$ zerlegt. $e_k(l)$ sei die Anzahl der k -Kanten (p, q) , welche l von links nach rechts schneiden, d.h. mit $p \in \mathcal{S}$ und $q \in \overline{\mathcal{S}}$.

Lemma 3 (Lemma von Lovász). Sei $|\mathcal{S}| = s$. Gilt $0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$, dann ist
$$e_k(l) = \min(k + 1, s, n - s).$$

Beweis. Siehe [8] Kapitel 4.1, Lemma 4.3.

Mit dem Lemma von Lovász lässt sich die nachfolgende Proposition beweisen. Für die Bedeutung der Notation 'Groß-O' (Landau-Symbol) siehe Definition 5.

Proposition 1. Eine Menge von n Punkten in der Ebene hat höchstens $O(n\sqrt{k})$ k -Kanten.

Beweis. Siehe [8] Kapitel 4.1, Proposition 4.4.

In Kapitel 2.1 werden wir die Lemmata 1, 2 und 3 und Proposition 1 auf orientierte Matroide übertragen.

Die obere Schranke $E_{k-1} \leq kn$ für die Anzahl der $(< k)$ -Kanten wurde von Noga Alon und Ervin Györi in [3] angegeben, auch sie lässt sich in die allgemeinere Struktur der orientierten Matroide übertragen (Kapitel 2.2).

In [7] werden auch untere Schranken für die Anzahl der k -Kanten angegeben, die sich auf orientierte Matroide erweitern lassen. Dies ist das Thema von Kapitel 2.3.

Die untere Schranke $E_k \geq 3\binom{k+2}{2}$, die Felsner in [8] angibt, stammt aus einer Publikation von László Lovász et al. [12]. Oswin Aichholzer et al. präsentierten 2009 einen einfacheren Beweis in [1]. Diesen sowie weitere Ergebnisse aus [1] wollen wir in Kapitel 2.4 ebenfalls auf orientierte Matroide erweitern.

1.2 Birch-Partitionen

Sei in diesem Abschnitt stets $N \in \mathbb{N}$.

Satz 1, Satz 2 und Vermutung 1 stammen ursprünglich aus der Arbeit von Brian John Birch, [4]. Wir geben sie hier in dem Stil an, wie Günter M. Ziegler sie in seinem Artikel [18] formuliert hat.

Wir geben zunächst den Satz von Birch an.

Satz 1 (Satz von Birch). $3N$ Punkte in der Ebene bestimmen immer N Dreiecke, die einen Punkt gemeinsam haben.

Beweis. Siehe [4] Theorem 1.

Wir illustrieren dies in Bild 2.

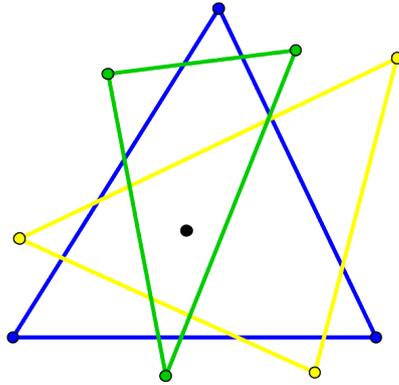


Bild 2. Eine Birch-Partition für 9 Punkte in der Ebene. Ein Birch-Punkt ist schwarz dargestellt.

Die folgende Definition stammt aus einem Aufsatz von Stefan Hell, siehe [10].

Definition 8. Sei \mathcal{X} eine Menge von $N(d + 1)$ Punkten im \mathbb{R}^d . Wir nennen einen Punkt $p \in \mathbb{R}^d$ einen Birch-Punkt von \mathcal{X} , wenn es eine Partition von \mathcal{X} in N Teilmengen der Kardinalität $d + 1$ derart gibt, dass p in der konvexen Hülle jeder Teilmenge enthalten ist. Die Partition von \mathcal{X} nennen wir eine Birch-Partition für p . Die Anzahl der ungeordneten Birch-Partitionen für p bezeichnen wir mit $B_p(\mathcal{X})$.

Birch gibt in [4] auch bereits die scharfe Version seines Satzes an:

Satz 2. $3N - 2$ Punkte in der Ebene kann man immer in N Teilmengen aufteilen, deren konvexe Hüllen einen Punkt gemeinsam haben.

Beweis. Siehe [4] Theorem 1*.

Hier ist es so, dass die N Teilmengen entweder bis auf eine, die nur ein Element enthält, dreielementig sind, oder bis auf zwei, die jeweils zwei Elemente enthalten, dreielementig sind. Es liegt somit entweder ein Punkt in den konvexen Hüllen von $N - 1$ Dreiecken, oder der Schnittpunkt von zwei Strecken liegt in den konvexen Hüllen von $N - 2$ Dreiecken.

Birch vermutete in [4], dass sich dieser Satz auf die Dimension d verallgemeinern lässt.

Vermutung 1 (Vermutung von Birch). $(d + 1)N - d$ Punkte im \mathbb{R}^d lassen sich immer in N Teilmengen aufteilen, deren konvexe Hüllen sich schneiden.

Diese Vermutung hat Helge Tverberg 1966 in seinem Aufsatz [16] bewiesen. Sie ist seither als Satz von Tverberg bekannt.

Hell gibt in [10] die folgende untere Schranke für die Anzahl der Birch-Partitionen an. Eine Punktmenge \mathcal{P} befinde sich in allgemeiner Lage in Bezug auf den Ursprung 0, wenn

sich $\mathcal{P} \cup \{0\}$ in allgemeiner Lage befindet (vergleiche Definition 6).

Satz 3. *Seien $d, N \in \mathbb{N}, d \geq 1$ und $N \geq 2$. Sei \mathcal{X} eine Menge von $N(d+1)$ Punkten im \mathbb{R}^d in allgemeiner Lage in Bezug auf den Ursprung 0. Dann gilt für $B_0(\mathcal{X})$:*

(i) $B_0(\mathcal{X})$ ist gerade.

(ii) $B_0(\mathcal{X}) > 0 \Rightarrow B_0(\mathcal{X}) \geq N!$.

Beweis. Siehe [10] Theorem 2.

Ein d -Simplex ist nach Definition 6 die konvexe Hülle von $d+1$ Punkten in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^d . In der Doktorarbeit von Hell [11] findet sich der folgende Satz.

Satz 4. *Sei \mathcal{X} eine Menge von n Punkten im \mathbb{R}^d derart, dass $n - d$ gerade ist. \mathcal{X} befinde sich in allgemeiner Lage in Bezug auf den Ursprung 0. Dann ist die Anzahl der d -Simplexes, die den Ursprung enthalten, gerade.*

Beweis. Siehe [11] Theorem 1.12.

Satz 3 werden wir in Kapitel 3.1 für bestimmte orientierte Matroide angeben. Satz 4 wird das Thema von Kapitel 3.2 sein.

1.3 Orientierte Matroide

Die orientierten Matroide führen wir anhand eines Beispiels ein. Für eine exakte Einführung verweisen wir auf die 'Bibel der orientierten Matroide' von Anders Björner et al. [5], die uns als Referenz für dieses Unterkapitel dient.

Sei \mathcal{P} eine Menge von fünf Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage (vergleiche Definition 6), siehe Bild 3.

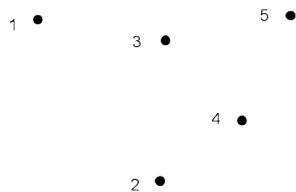


Bild 3. Fünf Punkte in allgemeiner Lage.

Durch diese fünf Punkte ist in eindeutiger Art und Weise ein orientiertes Matroid \mathcal{O}_0 definiert. Für orientierte Matroide gibt es verschiedene Axiomensysteme. Wir wollen uns zunächst mit dem der *Cocircuits* befassen. Davor benötigen wir noch ein paar Begriffe.

Definition 9. *Ein Vorzeichenvektor X ist eine Abbildung von einer endlichen Menge E in die Menge $\{-, 0, +\}$. Für $X(e)$ schreiben wir kurz X_e . Die Menge $\text{supp}(X) := \{e \in E | X_e \neq 0\}$ heißt der Support oder der Träger des Vorzeichenvektors X . X^+ bezeichne die Teilmenge von E , deren Elemente in X einen positiven Eintrag haben,*

X^- die Teilmenge von E , deren Elemente in X einen negativen Eintrag haben. Das Negative $-X$ bezeichne den Vorzeichenvektor, der durch das Umkehren aller Vorzeichen von X entsteht. Die Komposition $X \circ Y$ zweier Vorzeichenvektoren X und Y sei definiert durch $(X \circ Y)^+ = X^+ \cup (Y^+ \setminus X^-)$ und $(X \circ Y)^- = X^- \cup (Y^- \setminus X^+)$. $\mathbf{0}$ bezeichne den Nullvektor.

Es folgt die Definition eines orientierten Matroids über die Menge seiner Cocircuits:

Definition 10. Eine Familie $\mathcal{D} \in \{-, 0, +\}^E$ von Vorzeichenvektoren ist die Menge der Cocircuits eines orientierten Matroids mit der Grundmenge E , wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\mathbf{0} \notin \mathcal{D}$
- (ii) $X \in \mathcal{D} \Rightarrow -X \in \mathcal{D}$
- (iii) $\forall X, Y \in \mathcal{D} : \text{supp}(X) \subseteq \text{supp}(Y) \Rightarrow X = Y$ oder $X = -Y$
- (iv) $\forall X, Y \in \mathcal{D}$ mit $X \neq -Y$ und $\forall e \in X^+ \cap Y^- \exists Z \in \mathcal{D} : Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) \setminus \{e\}$
und $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) \setminus \{e\}$.

Für weitere Axiomensysteme, mit denen sich ein orientiertes Matroid definieren lässt, siehe [5], Kapitel 3.

Die Cocircuits von \mathcal{O}_0 lassen sich aus Bild 3 folgendermaßen ablesen: Durch je zwei der Punkte ist eine Gerade definiert, die durch diese beiden Punkte geht. Die Einträge des entsprechenden Cocircuits sind nun zwei Nullen in den Koordinaten der beiden Punkte, die Koordinaten der Punkte auf der einen Seite der Geraden bekommen ein Plus, die Koordinaten der Punkte auf der anderen Seite der Geraden ein Minus.

Durch eine solche Gerade sind zwei Cocircuits von \mathcal{O}_0 definiert, wobei der eine das Negative des anderen ist. Damit sind die Cocircuits von \mathcal{O}_0

$$00 + ++, 0 + 0 + -, 0 + -0-, 0 + + + 0, +00 - -, +0 + 0+, +0 + -0, + + 00-, \\ + -0 - 0, + + +00.$$

sowie deren Negative.

Offenbar entspricht jeder k -Kante von \mathcal{P} ein Cocircuit von \mathcal{O}_0 mit k positiven Einträgen. Wir wollen einen solchen Cocircuit einen k -Cocircuit von \mathcal{O}_0 nennen. Die exakte Definition folgt in Kapitel 2.

Eine Darstellung eines orientierten Matroids wie in Bild 3 nennt man eine *Typ-II-Repräsentierung* oder eine Repräsentierung als *(Pseudo)-Punktkonfiguration*. Eine exakte Definition werden wir weiter unten angeben.

Nicht jedes orientierte Matroid besitzt eine Typ-II-Repräsentierung, vergleiche [5], Kapitel 5.3.

Eine andere Möglichkeit, orientierte Matroide darzustellen, sind *Pseudosphärenarrangements*. Ein Pseudosphärenarrangement ist ein System von Pseudosphären der Dimension $d - 1$ auf der d -dimensionalen Sphäre $S^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$. Der Vorsatz 'Pseudo' soll ausdrücken, dass 'leichte Deformationen' an den Sphären zugelassen werden, vergleiche z.B. Bild 4 (nächste Seite).

Unser orientiertes Matroid \mathcal{O}_0 sieht in der Darstellung als Pseudosphärenarrangement folgendermaßen aus:

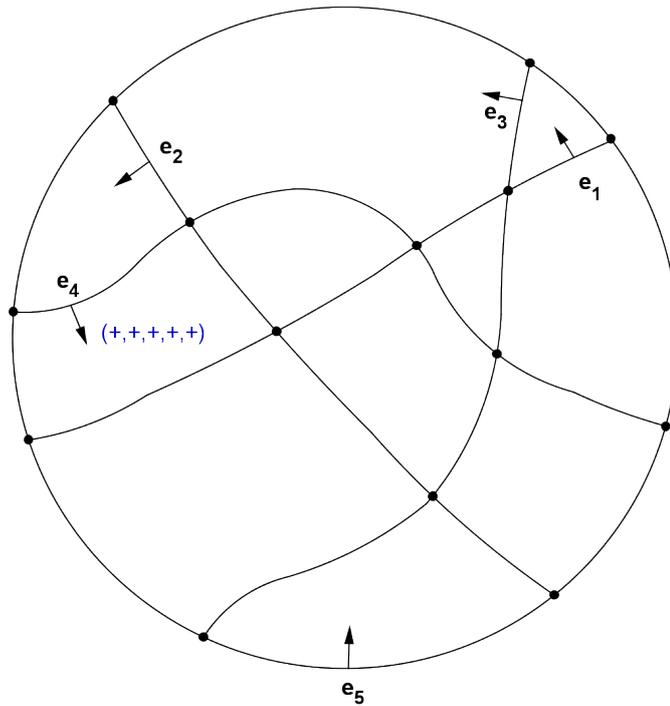


Bild 4. Das orientierte Matroid \mathcal{O}_0 als Pseudosphärenarrangement.

Die fünf Pseudosphären sind hier fünf Pseudokreise auf der Kugeloberfläche S^2 (von der wir in Bild 4 nur eine Hälfte sehen). Die Schnittpunkte der Pseudokreise sind genau die Cocircuits von \mathcal{O}_0 . Sie haben in den Koordinaten der Pseudokreise, auf denen sie liegen, jeweils eine Null, in den Koordinaten der Pseudokreise, auf deren positiven Seiten sie sich befinden, ein Plus, und in den Koordinaten der Pseudokreise, auf deren negativen Seiten sie liegen, ein Minus.

Eine Darstellung eines orientierten Matroids als Pseudosphärenarrangement nennt man auch eine *Typ-I-Repräsentierung*. Nach dem topologischen Darstellungssatz von Folkman und Lawrence [9] besitzt jedes orientierte Matroid eine Typ-I-Repräsentierung.

Für den Rang r eines orientierten Matroids gilt $r = d + 1$, wobei d die Dimension der Sphäre S^d ist, auf der es sich als Pseudosphärenarrangement darstellen lässt. \mathcal{O}_0 aus unserem Beispiel hat somit den Rang 3, da es sich als Arrangement von Pseudokreisen auf S^2 darstellen lässt.

Für die folgende Definition siehe [13] von Jürgen Richter-Gebert und Günter M. Ziegler, Seite 124.

Definition 11. Ein orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang r auf der endlichen Menge E heißt uniform, wenn die Kardinalitäten der Supports aller seiner Cocircuits gleich $|E| - r + 1$ sind.

Da im uniformen Fall durch jede $|E| - r + 1$ -elementige Teilmenge von E genau zwei Cocircuits von \mathcal{O} bestimmt sind (je ein Cocircuit D und sein Negatives $-D$), gelangen wir leicht zu folgender Beobachtung.

Beobachtung 2. Ein uniformes orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang r auf einer endlichen Menge E besitzt genau $2\binom{|E|}{r-1} = 2\binom{|E|}{d}$ Cocircuits.

Wir wollen noch einige weitere Begriffe definieren, die wir später benötigen.

Linienarrangement (gerade Linien) besitzt.

In Kapitel 3 werden wir die Darstellung eines azyklischen orientierten Matroids vom Rang 3 als Pseudopunktconfiguration benötigen. Hierzu folgt die Definition aus [14].

Definition 13. Sei V eine Punktmenge in \mathbb{P} . Ein Pseudolinienarrangement $\mathcal{A}(V)$ heißt eine Pseudopunktconfiguration, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) L_∞ ist eine Pseudolinie von $\mathcal{A}(V)$.
- (b) V ist eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in $\mathbb{P} \setminus L_\infty$.
- (c) Jede Pseudolinie $L \neq L_\infty$ ist zu mindestens zwei Punkten von V inzident.
- (d) Je zwei Punkte von V sind zu einer Pseudolinie von $\mathcal{A}(V)$ inzident. Die Punkte von V liegen nicht alle auf derselben Pseudolinie von $\mathcal{A}(V)$.

Für eine Definition einer allgemeinen Pseudopunktconfiguration vom Rang r siehe [5], Definition 5.3.1.

In Kapitel 3.1.2 werden wir den Begriff eines *Circuits* eines orientierten Matroids benötigen. Die Circuits sind Covektoren mit minimalen Support. Geometrisch lässt sich dies folgendermaßen interpretieren:

In einem Pseudosphärenarrangement entsprechen die Circuits minimalen Systemen von geschlossenen Hemnisphären, die die gesamte Sphäre überdecken. Ein Circuit von \mathcal{O}_0 ist z.B. $(-, -, +, 0, -)$, was bedeutet, dass die Vereinigung der negativen Seite von e_1 , der negativen Seite von e_2 , der positiven Seite von e_3 und der negativen Seite von e_5 die gesamte Kugeloberfläche S^2 überdecken.

Die Axiome für Circuits sind die gleichen wie für Cocircuits, siehe Definition 10. Wir geben sie dennoch in Definition 22 in Kapitel 3.1.2 explizit an. Für genauere Informationen zu Circuits verweisen wir erneut auf [5], Kapitel 1.2 oder Kapitel 3.4.

In Kapitel 3.4 von [5] geht es um das zu einem orientierten Matroid \mathcal{O} duale orientierte Matroid \mathcal{O}^* . Insbesondere sind die Circuits von \mathcal{O} die Cocircuits von \mathcal{O}^* , und es gilt: Die Summe des Rangs von \mathcal{O} und des Rangs von \mathcal{O}^* ist gleich $|E|$. Mit Definition 11 gelangen wir dann zu folgender Beobachtung.

Beobachtung 3. Die Supports aller Circuits eines uniformen orientierten Matroids \mathcal{O} vom Rang r auf einer endlichen Menge E haben die Kardinalität $r + 1$. Somit besitzt \mathcal{O} genau $2 \binom{|E|}{r+1}$ Circuits.

Typ-I- und Typ-II-Repräsentierungen von orientierten Matroiden nennt man zueinander *polare* geometrische Anordnungen.

Wir werden in den nächsten Kapiteln das Übertragen von Eigenschaften von (Pseudo)-Punktconfigurationen auf Pseudolinienarrangements oder Pseudosphärenarrangements *Polarisieren* nennen, in der gleichen Bedeutung verwenden wir den Zusatz *polar* bei Sätzen oder Lemmata.

Kapitel 2

k -Mengen und orientierte Matroide

In diesem Kapitel werden wir einige Schranken, die für k -Kanten bewiesen wurden, auf orientierte Matroide übertragen. In Abschnitt 2.1 geht es um die obere Schranke $O(n\sqrt{k})$ aus Proposition 1. In Abschnitt 2.2 beweisen wir eine obere Schranke für die Anzahl der ($< k$)-Cocircuits, die wir auch auf höhere Dimensionen übertragen. Die nächsten beiden Abschnitte handeln von unteren Schranken, einmal für die k -Cocircuits und einmal für die ($\leq k$)-Cocircuits.

Anfangs hatten wir fast ausschließlich mit azyklischen orientierten Matroiden gearbeitet. Diese besitzen ein positives Top $T = (+, \dots, +)$ (vergleiche Definition 12). Vergleicht man andere Covektoren (Definition 12) mit T , reicht es aus, von positiven und negativen Einträgen dieser Covektoren zu sprechen. Die Pseudosphären eines orientierten Matroids haben natürlich eine positive und eine negative Seite.

Um die Ergebnisse allgemeiner zu halten, haben wir das positive Top T durch ein beliebiges, beschränktes Top T ersetzt. Vergleichen wir nun die Einträge der übrigen Covektoren mit denen von T , so sprechen wir von *guten* Einträgen, wenn die Einträge der Covektoren mit denen von T übereinstimmen, und von *schlechten* Einträgen, wenn die Covektoren zu den Einträgen von T negative Einträge haben. Die Seite einer Pseudosphäre, auf der T liegt, heißt entsprechend gut, die andere schlecht.

Zum besseren Verständnis kann man sich T stets als das positive Top, die guten Einträge als die positiven, die schlechten Einträge als die negativen Einträge, die guten Seiten als die positiven und die schlechten Seiten als die negativen Seiten vorstellen. In den Bildern und Beispielen in diesem Kapitel werden stets azyklische orientierte Matroide verwendet.

Zunächst wollen wir die k -Cocircuits formal definieren.

Definition 14. Sei \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang r auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$. Sei $r = d + 1$ und sei $k \in \{0, 1, \dots, n - d\}$. Sei $T \in \mathcal{T}$ ein beschränktes Top von \mathcal{O} . Wir nennen einen Cocircuit von \mathcal{O} einen k -Cocircuit, wenn er in k Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmt.

Mit $\mathcal{E}_k(E)$ bezeichnen wir die Menge der Cocircuits von \mathcal{O} , die höchstens in k Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmen:

$$\mathcal{E}_k(E) := \{D \in \mathcal{D} \mid |\{e \in E \mid D_e = T_e\}| \leq k\}.$$

Wir nennen diese ($\leq k$)-Cocircuits. $E_k(E)$ sei die Kardinalität von $\mathcal{E}_k(E)$.

Nennen wir also die Einträge eines Cocircuits D , in denen er mit T übereinstimmt, gut, so ist D ein k -Cocircuit, wenn er k gute Einträge besitzt.

Eine *Facette* des Tops T ist ein zu T inzidenter Covektor, der in genau einer Koordinate eine Null hat.

In den Abschnitten 2.2 bis 2.4 werden wir den Begriff der *extremalen* Pseudolinie und den Begriff des *extremalen* Pseudokreises benötigen.

Definition 15. *Eine Pseudolinie oder ein Pseudokreis heißt extremal, wenn sie oder er eine Facette des Tops T definiert. Allgemein heißt eine Pseudosphäre extremal, wenn sie eine Facette von T definiert. Zwei Cocircuits heißen benachbart, wenn sie zu derselben Pseudolinie oder zu demselben Pseudokreis inzident sind und wenn kein weiterer Cocircuit zwischen ihnen liegt.*

Für einen Cocircuit D bezeichnen wir mit $\mu(D)$ die Anzahl der Koordinaten, in denen D und T übereinstimmen. Proposition 2 gilt sowohl für Pseudolinien, als auch für Pseudokreise.

Proposition 2. *Seien D_1 und D_2 zwei benachbarte Cocircuits, die zu der Pseudolinie oder dem Pseudokreis f inzident sind. Dann gilt:*

- a) $\mu(D_1)$ und $\mu(D_2)$ unterscheiden sich höchstens um den Betrag eins.
- b) Ist f extremal, und sind weder sowohl D_1 als auch D_2 zu T noch sowohl D_1 als auch D_2 zu $-T$ inzident, unterscheiden sich $\mu(D_1)$ und $\mu(D_2)$ genau um den Betrag eins.

Beweis. a) Beim Schritt von D_1 nach D_2 wird zunächst in einer Koordinate eine Null zu einem Plus oder einem Minus, wenn wir D_1 verlassen. Dadurch könnte $\mu(D_2)$ um eins größer werden als $\mu(D_1)$. Dann wird in einer anderen Koordinate ein Plus oder ein Minus zu einer Null, wenn wir D_2 erreichen. Hierdurch könnte $\mu(D_2)$ um eins kleiner werden als $\mu(D_1)$. Insgesamt können sich $\mu(D_1)$ und $\mu(D_2)$ somit höchstens um den Betrag eins unterscheiden.

b) f definiert als extremale Pseudolinie oder als extremaler Pseudokreis sowohl eine Facette von T als auch eine Facette von $-T$. Für einen zu f und $-T$ inzidenten Cocircuit D ist $\mu(D) = 0$, für sein Negatives $-D$, das zu T und f inzident ist, gilt $\mu(-D) = n - 2$. Da auf f zwischen D und $-D$ $n - 2$ Cocircuits liegen, folgt wegen Teil a) die Behauptung. \square

Korollar 1 gilt ebenfalls sowohl für Pseudolinien als auch für Pseudokreise.

Korollar 1. a) *Zu jeder extremalen Pseudolinie oder jedem extremalen Pseudokreis f sind genau $2(k + 1)$ ($\leq k$)-Cocircuits inzident.*

b) *Zu jeder extremalen Pseudolinie oder jedem extremalen Pseudokreis sind genau zwei k -Cocircuits inzident.*

Beweis. a) ($\leq k$)-Cocircuits sind zunächst die beiden 0-Cocircuits, die die Ecken der durch f definierten Facette des Tops $-T$ sind. Hinzu kommen gemäß Proposition 2 b) die ersten k Cocircuits, die man in beiden Richtungen passiert, wenn man sich auf f von $-T$ nach T bewegt.

b) Die Behauptung folgt aus Teil a), wenn man für k nacheinander die Werte $0, 1, \dots$ einsetzt. \square

2.1 Eine obere Schranke für die Anzahl der k -Cocircuits

2.1.1 Orientierte Matroide vom Rang 3

In diesem Abschnitt geben wir die polaren Versionen der Lemmata 1, 2 und 3 und von Proposition 1 aus Kapitel 1.1 an. Es sind dies die Lemmata 4, 5 und 6 sowie Satz 5. Die Beweise orientieren sich an den in Kapitel 1.1 referenzierten Beweisen aus dem Buch [8] von Stefan Felsner, Kapitel 4.1.

Sei \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$, repräsentiert durch ein Arrangement von Pseudokreisen auf S^2 . Sei T ein beliebiges, aber festes Top von \mathcal{O} . Ein Cocircuit von \mathcal{O} ist nach Definition 14 ein k -Cocircuit, wenn er in k Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmt. Dies sind wie oben eingeführt die guten Koordinaten, die zu den Koordinaten von T negativen sind die schlechten Koordinaten.

Sei \mathcal{L} die Menge der Covektoren von \mathcal{O} (siehe Definition 12), und sei $X \in \mathcal{L}$. $\lambda(X)$ bezeichne die Anzahl der guten Einträge des Covektors X . Sei $e \in E$ ein beliebiger, aber fester Pseudokreis.

Proposition 3. *Wir betrachten die alternierende Folge der zu e inzidenten Cocircuits und Kanten. Sei D ein zu e inzidenter Cocircuit und seien X_1 und X_2 die beiden Kanten von e , die zu D inzident sind. Der Wert von $\lambda(X_1)$ unterscheidet sich genau um den Betrag eins vom Wert von $\lambda(X_2)$.*

Beweis. Da \mathcal{O} uniform ist, schneiden sich in jedem Cocircuit genau zwei Pseudokreise. Wechseln wir von X_1 nach D , wird in einer Koordinate ein guter bzw. ein schlechter Eintrag zu einer Null. Wechseln wir von D nach X_2 , wird in derselben Koordinate die Null zu einem schlechten bzw. einem guten Eintrag.

Da $\lambda(X_2)$ im ersten Fall um eins kleiner und im zweiten Fall um eins größer ist als $\lambda(X_1)$, folgt die Behauptung. \square

Sei k im Folgenden beliebig, aber fest. Sei $f \in E \setminus \{e\}$ ein Pseudokreis, so dass einer der beiden Schnittpunkte von f und e ein k -Cocircuit D ist. Wir wählen eine beliebige, aber feste Bewegungsrichtung auf e . Wir nennen das Paar (D, e) ein k -Ein-Ereignis, wenn wir, während wir D in der gewählten Richtung passieren, von der schlechten Seite von f auf die gute Seite von f wechseln. Umgekehrt nennen wir (D, e) ein k -Aus-Ereignis, wenn wir, während wir D passieren, von der guten Seite von f auf die schlechte Seite von f wechseln.

Lemma 4 (Abwechslungslemma[polar]). *Auf dem Pseudokreis e wechseln sich k -Ein-Ereignisse und k -Aus-Ereignisse ab.*

Beweis. Vergleiche auch den Beweis von Lemma 4.1 in [8]. Wir bewegen uns auf e in einer beliebigen Richtung. Sei D' ein Cocircuit auf e , den wir passieren, und sei f' der Pseudokreis, der sich mit e in D' schneidet. Seien X_1 die zu D' und e inzidente Kante vor D' und X_2 die zu D' und e inzidente Kante hinter D' . Nach Proposition 3 unterscheidet sich der Wert von $\lambda(X_2)$ genau um den Betrag eins von dem Wert von $\lambda(X_1)$. Wechseln wir, während wir D' passieren, von der guten Seite von f' auf die schlechte Seite von f' , so wird $\lambda(X)$ um eins kleiner, $\lambda(X) \rightarrow \lambda(X) - 1$. Entsprechend wird $\lambda(X)$ um eins größer, wenn wir, während wir D' passieren, von der schlechten Seite von f' auf die gute Seite von f' wechseln, $\lambda(X) \rightarrow \lambda(X) + 1$.

Bei einem k -Ein-Ereignis wächst $\lambda(X)$ von k auf $k+1$. Zwischen zwei k -Ein-Ereignissen muss der Wert von $\lambda(X)$ wieder auf k zurückgehen. Das geschieht erstmalig, wenn sich

der Wert von $\lambda(X)$ von $k + 1$ auf k verringert, und dies entspricht einem k -Aus-Ereignis.

Genauso zeigt man, dass zwischen zwei k -Aus-Ereignissen immer ein k -Ein-Ereignis liegen muss. Beides zusammen ergibt das behauptete Abwechseln von k -Ein- und k -Aus-Ereignissen. \square

Korollar 2. *Zu jedem Pseudokreis ist die gleiche Anzahl von k -Ein-Ereignissen und k -Aus-Ereignissen inzident. Insbesondere ist die Anzahl der zu einem Pseudokreis inzidenten k -Cocircuits gerade.*

Korollar 2 ist eine Folgerung aus dem Abwechslungslemma aus Kapitel 4.1 des Buches [8] von Felsner, das sich wegen Lemma 4 auf orientierte Matroide übertragen lässt.

Zwei Cocircuits D_1 und D_2 von \mathcal{O} heißen nach Definition 15 *benachbart*, wenn sie zu demselben Pseudokreis inzident sind und wenn kein weiterer Cocircuit zwischen ihnen liegt. Offenbar sind mit D_1 und D_2 auch deren Negative $-D_1$ und $-D_2$ benachbart.

Lemma 5. *Sei e ein beliebiger, aber fester Pseudokreis aus E und seien die beiden benachbarten Cocircuits D_1 und D_2 zu e inzident. Seien Y die Kante zwischen D_1 und D_2 und $-Y$ die Kante zwischen $-D_1$ und $-D_2$. Wir teilen e in zwei Hälften, indem wir e in Y sowie in $-Y$ aufschneiden. Die linke Hälfte von e sei die Hälfte, die D_1 und $-D_2$ enthält.*

Sei $a \in \mathbb{N}$. Bewegen wir uns entlang e in der Richtung, in der wir von Y ausgehend direkt D_1 erreichen, und sind zu der linken Hälfte von e a k -Aus-Ereignisse inzident, dann sind entweder $a - 1$, a oder $a + 1$ k -Ein-Ereignisse zu der linken Hälfte von e inzident.

Gilt $k < \frac{n-1}{2}$, so gilt auch folgendes:

- (i) *Hat Y höchstens k gute Einträge, dann ist die Anzahl der zu der linken Hälfte von e inzidenten k -Ein-Ereignisse $a + 1$.*
- (ii) *Hat Y sowohl mehr als k gute als auch mehr als k schlechte Einträge, dann ist die Anzahl der zu der linken Hälfte von e inzidenten k -Ein-Ereignisse a .*
- (iii) *Sei $a > 0$. Hat Y höchstens k schlechte Einträge, dann ist die Anzahl der zu der linken Hälfte von e inzidenten k -Ein-Ereignisse $a - 1$.*

Beweis. Vergleiche den Beweis von Lemma 4.2 in [8]. Wir bewegen uns von Y in Richtung D_1 . Wie im Beweis des Abwechslungslemmas entspricht einem k -Ein-Ereignis ein Anstieg von $\lambda(X)$ von k auf $k + 1$ und einem k -Aus-Ereignis eine Verringerung von $\lambda(X)$ von $k + 1$ auf k .

(i) Da Y höchstens k gute Einträge hat, muss das erste Ereignis auf der linken Seite von e ein k -Ein-Ereignis sein ($\lambda(X)$ wächst zunächst von k auf $k + 1$, was einem k -Ein-Ereignis entspricht).

Y hat höchstens k gute Einträge, daher hat $-Y$ höchstens k schlechte Einträge und somit mindestens $n - 1 - k$ gute Einträge ($-Y$ hat als Kante $n - 1$ von Null verschiedene Einträge). Wegen $k < \frac{n-1}{2}$ gilt $n - 1 - k > \frac{n-1}{2} > k$. $-Y$ hat daher mehr als k gute Einträge. Das letzte Ereignis, bevor wir die linke Hälfte von e verlassen, muss auch ein k -Ein-Ereignis sein, da $\lambda(X)$, bis wir $-Y$ erreicht haben, auf $k + 1$ oder mehr angestiegen sein muss und die Änderung von k auf $k + 1$ einem k -Ein-Ereignis entspricht.

Wir haben auf der linken Hälfte von e also als erstes und als letztes ein k -Ein-Ereignis

(Für $a = 0$ sind diese identisch). Nach dem Abwechslungslemma[polar] wechseln sich auf e k -Ein-Ereignisse und k -Aus-Ereignisse ab, daher ist die Anzahl der zu der linken Hälfte von e inzidenten k -Ein-Ereignisse um eins größer als die Anzahl der zu der linken Hälfte von e inzidenten k -Aus-Ereignisse.

(ii) Da Y mehr als k gute Einträge hat, muss das erste Ereignis auf der linken Seite von e ein k -Aus-Ereignis sein ($\lambda(X)$ verringert sich zunächst von $k + 1$ auf k , was einem k -Aus-Ereignis entspricht).

Y hat sowohl mehr als k gute als auch mehr als k schlechte Einträge, daher hat $-Y$ mehr als k gute Einträge. Das letzte Ereignis, bevor wir die linke Hälfte von e verlassen, muss daher ein k -Ein-Ereignis sein, da $\lambda(X)$, bis wir $-Y$ erreicht haben, auf $k + 1$ oder mehr angestiegen sein muss und die Änderung von k auf $k + 1$ einem k -Ein-Ereignis entspricht.

Wir haben auf der linken Hälfte von e also als erstes ein k -Aus-Ereignis und als letztes ein k -Ein-Ereignis (Für $a = 0$ haben wir keines von beiden, $\lambda(X)$ unterschreitet nie den Wert $k + 1$). Nach dem Abwechslungslemma[polar] wechseln sich auf e k -Ein-Ereignisse und k -Aus-Ereignisse ab, daher sind zu der linken Hälfte von e gleich viele k -Ein-Ereignisse und k -Aus-Ereignisse inzident.

(iii) Wir vertauschen die Bezeichnungen von Y und $-Y$, von D_1 und $-D_2$ und von D_2 und $-D_1$. Damit kehren wir auch unsere Bewegungsrichtung um, bewegen uns aber weiter auf der linken Hälfte von e . k -Ein-Ereignisse werden dann zu k -Aus-Ereignissen und umgekehrt. Aussage (iii) kann nun aus Aussage (i) gefolgert werden. \square

Wir wollen nun den Spezialfall betrachten, wenn die Anzahl n der Pseudokreise gerade ist und wenn $k = \frac{n-2}{2}$ gilt. In diesem Fall enthält ein k -Cocircuit gleich viele gute und schlechte Einträge. Daher ist das Negative eines k -Cocircuits wieder ein k -Cocircuit. Diese speziellen Cocircuits wollen wir *balancierte Cocircuits* nennen.

Sei D ein balancierter Cocircuit. Dann nennen wir das Paar $(D, -D)$ ein *balanciertes Cocircuitpaar*.

Das nachfolgende Korollar 3 folgt Felsner in [8] aus Lemma 4.2.

Aus Lemma 5 folgt für die balancierten Cocircuitpaare:

Korollar 3. *Sei \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$, und sei n gerade. Dann ist zu jedem Pseudokreis von \mathcal{O} eine ungerade Anzahl von balancierten Cocircuitpaaren inzident.*

Beweis. Sei e ein Pseudokreis von \mathcal{O} und sei Y eine Kante, die auf e liegt. Wie in Lemma 5 schneiden wir e in Y und in $-Y$ auf. Wegen $k = \frac{n-2}{2}$ ist der zweite Fall von Lemma 5 ausgeschlossen, Y kann nicht gleichzeitig mehr als $\frac{n-2}{2}$ gute und mehr als $\frac{n-2}{2}$ schlechte Einträge haben.

Es ist ausreichend, die balancierten Cocircuits auf der linken Hälfte von e zu zählen, also eine Komponente der balancierten Cocircuitpaare, da sich auf der rechten Hälfte von e aus Symmetriegründen stets die zweiten Komponenten befinden. Wir können somit ein balanciertes Cocircuitpaar eindeutig mit seiner zur linken Hälfte von e inzidenten Komponente identifizieren. Die Anzahl der zur linken Hälfte von e inzidenten balancierten Cocircuits ist die Summe der zur linken Hälfte von e inzidenten k -Ein-Ereignisse und k -Aus-Ereignisse.

Zur linken Hälfte von e ist daher sowohl beim ersten $(2a + 1)$ als auch beim dritten Fall von Lemma 5 $(2a - 1)$ eine ungerade Anzahl von balancierten Cocircuits und somit zu e eine ungerade Anzahl von balancierten Cocircuitpaaren inzident. \square

Nach Definition 9 sind der positive Teil eines Tops T' von \mathcal{O} die Menge $(T')^+ = \{e \in E | (T')_e = +\}$ und der negative Teil von T' die Menge $(T')^- = \{e \in E | (T')_e = -\}$. Entsprechend definieren wir den guten Teil $(T')^g$ von T' als $(T')^g = \{e \in E | (T')_e = T_e\}$ und den schlechten Teil $(T')^s$ von T' als $(T')^s = \{e \in E | (T')_e = -T_e\}$.

Wir betrachten Partitionen der Menge E in eine Menge S und eine Menge $\bar{S} := E \setminus S$. Wir nennen das Paar (S, \bar{S}) eine *erlaubte Partition*, wenn es ein Top T' von \mathcal{O} gibt, so dass gilt: $S = (T')^g$ und $\bar{S} = (T')^s$. T' sei dann das die Partition (S, \bar{S}) definierende Top.

\mathcal{O} ist uniform, daher schneiden sich in jedem Cocircuit genau zwei Pseudokreise. Je zwei Pseudokreise schneiden sich genau zweimal, in einem Cocircuit und in dessen Negativem. Schließen wir den Fall n gerade, $k = \frac{n-2}{2}$, aus, so kann das Negative eines k -Cocircuits kein k -Cocircuit sein. Sind dann p und q die beiden Pseudokreise, die sich in einem k -Cocircuit D schneiden, so können wir D eindeutig mit dem Paar (p, q) identifizieren.

Sei \mathcal{T} die Menge der Tople von \mathcal{O} (vergleiche Definition 12). Sei weiter der *Topegraph* von \mathcal{O} der Graph (vergleiche Definition 1), dessen Ecken die Elemente von \mathcal{T} und dessen Kanten diejenigen Kanten sind, die jeweils zwischen zwei benachbarten Topen liegen. Sei die *Separationsmenge* $sep(T_1, T_2)$ zweier Tople T_1, T_2 die Menge der Elemente von E , in denen T_1 und T_2 unterschiedliche Einträge haben. Sei der *Abstand* $d(T_1, T_2)$ von T_1 und T_2 im Topegraph die Länge des kürzesten Weges (siehe Definition 2) von T_1 nach T_2 . Sei $\epsilon_k(S, \bar{S})$ die Anzahl der k -Cocircuits (p, q) mit $p \in S$ und $q \in \bar{S}$.

Lemma 6 (Lemma von Lovász[polar]). *Sei (S, \bar{S}) eine erlaubte Partition der Menge E und sei $|S| = s$. Gilt $0 \leq k < \frac{n-2}{2}$, dann ist $\epsilon_k(S, \bar{S}) = \min\{2(k+1), 2s, 2(n-s)\}$.*

Beweis. Wir definieren zunächst eine Folge von Topen, die das Top T' enthält. Jedes Top dieser Folge definiert eine erlaubte Partition von E . Dann untersuchen wir, wie sich ϵ_k vom vorherigen zum nächsten Folgenglied verändert. Zum Schluss wenden wir Lemma 5 an und untersuchen wie dort 3 Fälle.

Sei T' das die Partition (S, \bar{S}) definierende Top. Wir zeigen zunächst, dass es stets eine aufsteigende Folge Σ von Topen von \mathcal{O} , die T' enthält, mit folgenden Eigenschaften gibt: Das erste Folgenglied ist das zu T' negative Top T_0 . Jedes Folgenglied hat im Vergleich zu seinem Vorgänger einen guten Eintrag mehr und einen schlechten Eintrag weniger. Zu zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern ist jeweils eine gemeinsame Kante inzident, sie sind also benachbart. Das letzte Folgenglied ist das Top T , das wir in der Folge Σ mit T_n bezeichnen wollen.

Behauptung 1. Sei $T' \in \mathcal{T} \setminus \{T_0, T_n\}$. Dann existiert ein Weg der Länge n von T_0 nach T_n , der über T' läuft.

Beweis. Nach Proposition 4.2.3 aus dem Buch 'Oriented Matroids' [5] ist der Abstand $d(T_0, T') = sep(T_0, T')$ und $d(T', T_n) = sep(T', T_n) = n - sep(T_0, T')$. Also leistet die Verkettung eines kürzesten (T_0, T') -Weges mit einem kürzesten (T', T_n) -Weg das Gewünschte. \triangle

Bild 6 auf der nächsten Seite zeigt ein Beispiel für einen solchen Weg für $T' = T_2$.

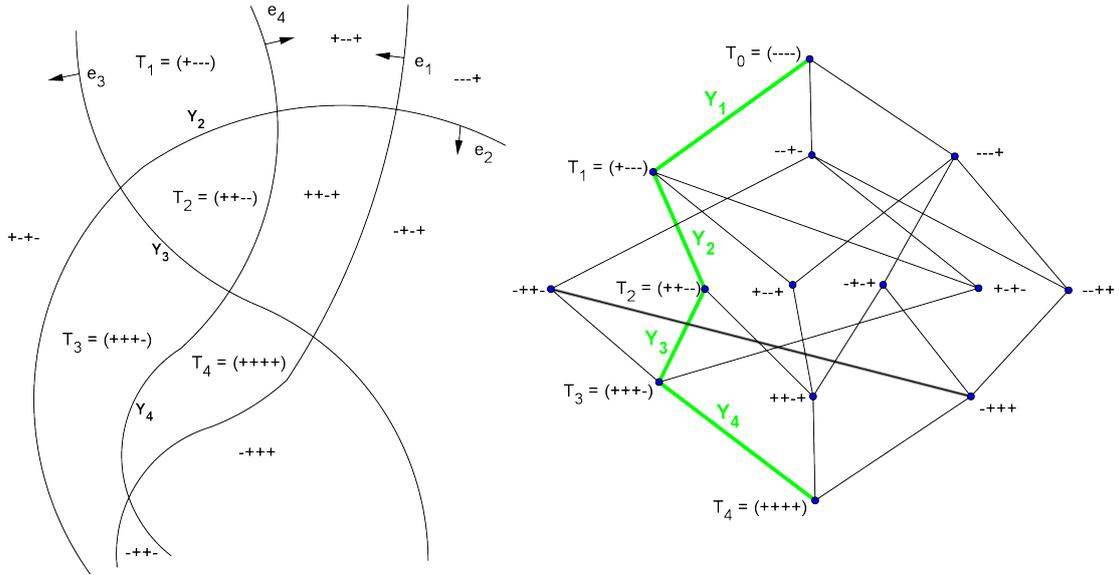


Bild 6. Ausschnitt aus einem Arrangement von vier Pseudokreisen und zugehöriger Topograph. Der Weg von T_0 nach T_4 ist grün eingezeichnet.

Fügen wir in der Folge Σ jeweils zwischen zwei aufeinanderfolgende Topen die zu ihnen inzidente Kante ein, so erhalten wir eine alternierende Folge Σ' von $n + 1$ Topen und n Kanten:

$$T_0, Y_1, T_1, \dots, T_{n-1}, Y_n, T_n.$$

Die Topen T_0, \dots, T_n definieren die erlaubten Partitionen $(S_0, \overline{S_0}), \dots, (S_n, \overline{S_n})$. Seien e_1, \dots, e_n die Pseudokreise, auf denen die Kanten Y_1, \dots, Y_n liegen. Aus der Definition von Σ' ergibt sich, dass T_i in den Koordinaten e_1, \dots, e_i einen guten Eintrag hat (e_1, \dots, e_i wurden bisher überquert). Daher gilt $S_i = \{e_1, \dots, e_i\}$, $\overline{S}_i = \{e_{i+1}, \dots, e_n\}$ und $|S_i| = i$. Wir untersuchen, wie sich $\epsilon_k(S_i, \overline{S}_i)$ für $i = 0, \dots, n$ verändert.

Y_1 hat als Kante des zu T negativen Tops T_0 null gute Einträge, Y_2 hat, da inzwischen e_1 überquert wurde, einen guten Eintrag usw. Allgemein hat Y_i $i - 1$ gute Einträge, denn wir haben, wenn wir bei Y_i angekommen sind, die Pseudokreise e_1, \dots, e_{i-1} überquert. Damit hat Y_i $n - i$ schlechte Einträge. Diejenigen Koordinaten, in denen Y_i einen guten Eintrag hat, sind daher gerade die Elemente von $S_i \setminus \{e_i\}$. Die Koordinaten, in denen Y_i einen schlechten Eintrag hat, sind somit die Elemente von \overline{S}_i . Wir schneiden e_i in Y_i und in $-Y_i$ auf und bewegen uns von Y_i nach $-Y_i$ einmal entlang der rechten und einmal entlang der linken Hälfte von e_i .

Behauptung 2. Jedem zu e_{i+1} inzidenten k -Aus-Ereignis entspricht ein k -Cocircuit der Form (p', e_{i+1}) mit $p', e_{i+1} \in S_{i+1}$, und jedem zu e_{i+1} inzidenten k -Ein-Ereignis entspricht ein k -Cocircuit der Form (e_{i+1}, p'') mit $e_{i+1} \in S_{i+1}$ und $p'' \in \overline{S}_{i+1}$.

Beweis. Wir haben den Fall $k = \frac{n-2}{2}$ ausgeschlossen, daher kann das Negative eines k -Cocircuits kein k -Cocircuit sein. Darum kann es auf e_{i+1} höchstens so viele k -Aus-Ereignisse (k -Ein-Ereignisse) geben, wie Y_{i+1} gute (schlechte) Einträge hat. Der Grund dafür ist, dass nur bei den Pseudokreisen, die in Y_{i+1} einen guten (schlechten) Eintrag haben, ein Wechsel von ihrer guten (schlechten) Seite auf ihre schlechte (gute) Seite stattfindet. Da die Pseudokreise, in denen Y_{i+1} einen guten (schlechten) Eintrag hat, gerade die

Elemente von $S_{i+1} \setminus \{e_{i+1}\}$ ($\overline{S_{i+1}}$) sind, folgt Behauptung 2. △

Folgerung 1. Vergleicht man $\epsilon_k(S_{i+1}, \overline{S_{i+1}})$ mit $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$, so fällt für jedes zu e_{i+1} inzidente k -Aus-Ereignis ein k -Cocircuit weg, der in $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$ noch gezählt wurde, in $\epsilon_k(S_{i+1}, \overline{S_{i+1}})$ aber nicht mehr.

Des Weiteren kommt für jedes zu e_{i+1} inzidente k -Ein-Ereignis ein k -Cocircuit dazu, der in $\epsilon_k(S_{i+1}, \overline{S_{i+1}})$ gezählt wird, in $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$ aber noch nicht.

Im Folgenden sagen wir, dass beim Schritt von i nach $i+1$ ein k -Cocircuit *dazukommt*, wenn ein k -Cocircuit in $\epsilon_k(S_{i+1}, \overline{S_{i+1}})$ gezählt wird, in $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$ aber noch nicht. Umgekehrt sagen wir, dass beim Schritt von i nach $i+1$ ein k -Cocircuit *wegfällt*, wenn ein k -Cocircuit in $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$ noch gezählt wird, in $\epsilon_k(S_{i+1}, \overline{S_{i+1}})$ aber nicht mehr.

Wie viele k -Cocircuits wegfallen und dazukommen, wird durch Lemma 5 bestimmt (da die Festlegung, welche Seite die linke Seite ist, in Lemma 5 willkürlich war, lässt sich Lemma 5 sowohl auf die rechte als auch auf die linke Seite eines Pseudokreises anwenden). Hierzu werden wir weiter unten die drei Fälle von Lemma 5 unterscheiden.

Es gilt $\epsilon_k(S_0, \overline{S_0}) = 0$, da das zu T negative Top T_0 eine Partition mit $S_0 = \emptyset$ definiert. Für die durch T_1 definierte Partition $(S_1, \overline{S_1})$ gilt $S_1 = \{e_1\}$. Schneiden wir e_1 in Y_1 und in $-Y_1$ auf und bewegen uns auf e_1 von Y_1 nach $-Y_1$, können wir den ersten Fall von Lemma 5 anwenden. Da Y_1 neben einer Null nur schlechte Einträge hat, sind zu jeder der beiden Hälften von e_1 null k -Aus-Ereignisse inzident. Zu jeder Hälfte muss daher ein k -Ein-Ereignis inzident sein, somit gilt $\epsilon_k(S_1, \overline{S_1}) = 2$.

Es folgen nun allgemein die drei Fälle von Lemma 5.

Fall 1: Y_i hat $i-1$ gute Einträge, sei daher zunächst $i \leq k+1$. Nach dem ersten Fall von Lemma 5 ist die Anzahl der zu einer Hälfte von e_i inzidenten k -Ein-Ereignisse um eins größer als die Anzahl der zu dieser Hälfte von e_i inzidenten k -Aus-Ereignisse. Beim Schritt von i nach $i+1$ ist somit wegen Folgerung 1 die Anzahl der k -Cocircuits, die dazukommen, um zwei (zwei Hälften) größer als die Anzahl der k -Cocircuits, die wegfallen. Daher wird bei jedem Schritt von i nach $i+1$ der Wert von $\epsilon_k(S_{i+1}, \overline{S_{i+1}})$ um zwei größer im Vergleich zum Wert von $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$. Wegen $\epsilon_k(S_1, \overline{S_1}) = 2$ gilt in diesem Bereich stets $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i}) = 2i$.

Fall 2: Gilt $k+1 < i < n-k$, so findet der zweite Fall von Lemma 5 Anwendung: Zu jeder der beiden Hälften von e_i sind gleich viele k -Ein-Ereignisse und k -Aus-Ereignisse inzident. Beim Schritt von i nach $i+1$ ist dann nach Folgerung 1 die Anzahl der k -Cocircuits, die dazukommen, gleich der Anzahl der k -Cocircuits, die wegfallen. Daher bleibt beim Schritt von i nach $i+1$ der Wert von $\epsilon_k(S_{i+1}, \overline{S_{i+1}})$ im Vergleich zum Wert von $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$ gleich. Da für $i = k+1$ der Wert von $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$ auf $2(k+1)$ angestiegen ist, bleibt $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$ nun konstant auf diesem Wert.

Fall 3: Sei zuletzt $i \geq n-k$ (Y_i hat $n-i$ schlechte Einträge). Nach dem dritten Fall von Lemma 5 ist die Anzahl der zu einer Hälfte von e_i inzidenten k -Ein-Ereignisse um eins kleiner als die Anzahl der zu dieser Hälfte von e_i inzidenten k -Aus-Ereignisse. Somit ist wegen Folgerung 1 beim Schritt von i nach $i+1$ die Anzahl der k -Cocircuits, die dazukommen, um zwei kleiner als die Anzahl der k -Cocircuits, die wegfallen. Hier wird daher bei jedem Schritt von i nach $i+1$ der Wert von $\epsilon_k(S_{i+1}, \overline{S_{i+1}})$ um zwei kleiner im Vergleich zum Wert von $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i})$. Nach Fall 2 gilt $\epsilon_k(S_{n-k-1}, \overline{S_{n-k-1}}) = 2(k+1)$, nach Fall 3 gilt dann $\epsilon_k(S_{n-k}, \overline{S_{n-k}}) = 2k = 2(n - (n-k))$. Allgemein gilt somit in diesem Bereich $\epsilon_k(S_i, \overline{S_i}) = 2(n-i)$.

Da für ein i $T_i = T'$ gilt (und somit $i = s$), folgt die Behauptung. \square

Mit Hilfe des Lemmas von Lovász[polar] können wir die folgende obere Schranke für die Anzahl der k -Cocircuits angeben:

Satz 5. *Sei \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$, und sei $k < \frac{n-2}{2}$. Dann hat \mathcal{O} höchstens $4n\sqrt{k+1}$ k -Cocircuits.*

Beweis. Wir arbeiten wieder mit der Folge erlaubter Partitionen aus dem Beweis des Lemmas von Lovász[polar]. Jeder k -Cocircuit von \mathcal{O} wird für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ in $\epsilon_k(S_i, \overline{S}_i)$ gezählt (für $i = 0$ und $i = n$ haben wir jeweils keine echte Partition, da $S_0 = \emptyset$ und $\overline{S}_n = \emptyset$ ist). Nach dem Lemma von Lovász[polar] kann \mathcal{O} somit nicht mehr als $2(n-1)(k+1)$ k -Cocircuits besitzen. Wir identifizieren jeden k -Cocircuit von \mathcal{O} mit dem Paar (e_r, e_s) mit $r, s \in \{1, \dots, n\}$ und $r < s$.

Wir betrachten zunächst diejenigen k -Cocircuits (e_r, e_s) , für die $(s-r) \geq \sqrt{k+1}$ gilt. Wir wollen diese 'lange' k -Cocircuits nennen. Von diesen langen k -Cocircuits kann es nur höchstens $2(n-1)\sqrt{k+1}$ geben, da jeder in mindestens $\sqrt{k+1}$ der Partitionen gezählt wird.

Für die übrigen 'kurzen' k -Cocircuits (e_r, e_s) gilt $(s-r) < \sqrt{k+1}$. Zu jedem Pseudokreis e_m von \mathcal{O} können höchstens $2\sqrt{k+1}$ der kurzen k -Cocircuits inzident sein, da e_m überhaupt nur zu höchstens $2\sqrt{k+1}$ Cocircuits inzident ist, die die Eigenschaften der kurzen k -Cocircuits haben: zu $(e_l, e_m), \dots, (e_{m-1}, e_m)$ mit $(m-l) < \sqrt{k+1}$ und zu $(e_m, e_{m+1}), \dots, (e_m, e_l)$ mit $(l-m) < \sqrt{k+1}$. Die Anzahl der kurzen k -Cocircuits ist somit durch $2n\sqrt{k+1}$ beschränkt.

Damit ist insgesamt die Anzahl der k -Cocircuits von \mathcal{O} höchstens $4n\sqrt{k+1}$. \square

Auch für den Fall n gerade, $k = \frac{n-2}{2}$, lässt sich das Lemma von Lovász[polar] anwenden. Hierfür werden nicht die k -Cocircuits, sondern die balancierten Cocircuitpaare gezählt. Ist $(D, -D)$ ein balanciertes Cocircuitpaar und sind p und q die Pseudokreise, die sich in D und in $-D$ schneiden, so identifizieren wir in diesem Fall das Paar $(D, -D)$ mit dem Paar (p, q) . Im Beweis betrachten wir dann stets nur die linke Seite eines Pseudokreises. Ein balanciertes Cocircuitpaar wird mit der Komponente identifiziert, die sich auf dieser linken Seite befindet.

Mit einem zum Beweis von Satz 5 analogen Beweis erhält man eine obere Schranke für die Anzahl der balancierten Cocircuits von $4n\sqrt{k+1}$, mit $k = \frac{n-2}{2}$ ist das $(2n)^{\frac{3}{2}}$.

2.1.2 Ansätze für höhere Dimensionen

Das Abwechslungslemma[polar] aus Kapitel 2.1.1 lässt sich auf orientierte Matroide vom Rang r erweitern. Wir untersuchen zunächst Rang 4-orientierte Matroide.

Sei \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 4 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$, repräsentiert durch ein Arrangement von Pseudosphären in S^3 . Sei T ein beliebiges, festes Top. Die gute Seite einer Pseudosphäre ist die Seite, auf der T liegt, die schlechte die andere. Ein Cocircuit von \mathcal{O} ist wie in Kapitel 2.1.1 ein k -Cocircuit, wenn er in k Koordinaten gute Einträge hat.

\mathcal{L} bezeichne wieder die Menge der Covektoren von \mathcal{O} . Sei $X \in \mathcal{L}$. $\lambda(X)$ bezeichne die Anzahl der guten Einträge des Covektors X . Die Schnittmenge zweier Pseudosphären e_1 und e_2 aus E ist, da \mathcal{O} uniform ist, stets ein Pseudokreis. Wir bezeichnen ihn mit dem Paar (e_1, e_2) . Die beiden Schnittpunkte von (e_1, e_2) mit einer weiteren, zu e_1 und e_2 verschiedenen Pseudosphäre aus E sind offenbar stets ein Cocircuit von \mathcal{O} und sein Negatives.

Wir formulieren eine zu Proposition 3 analoge Proposition für den Rang 4. Seien dazu $e_1, e_2 \in E$ zwei beliebige, aber feste Pseudosphären.

Proposition 4. *Wir betrachten die alternierende Folge der zu (e_1, e_2) inzidenten Cocircuits und Kanten. Sei D ein zu (e_1, e_2) inzidenter Cocircuit und seien X_1 und X_2 die beiden Kanten von (e_1, e_2) , die zu D inzident sind. Der Wert von $\lambda(X_1)$ unterscheidet sich genau um den Betrag eins vom Wert von $\lambda(X_2)$.*

Beweis. Da wir, während wir mit (e_1, e_2) eine zu e_1 und e_2 verschiedene Pseudosphäre schneiden, stets von ihrer guten auf ihre schlechte Seite wechseln oder umgekehrt, kann der Beweis analog zum Beweis von Proposition 3 erfolgen. Es muss nur e durch (e_1, e_2) ersetzt und der erste Satz weggelassen werden. \square

Sei k im Folgenden beliebig, aber fest. Sei $f \in E \setminus \{e_1, e_2\}$ eine Pseudosphäre, so dass einer der beiden Schnittpunkte von f, e_1 und e_2 ein k -Cocircuit D ist. Wir wählen eine beliebige, aber feste Bewegungsrichtung auf (e_1, e_2) . Wir nennen analog zu Kapitel 2.1.1 das Tripel (D, e_1, e_2) ein k -Ein-Ereignis, wenn wir, während wir D in der gewählten Richtung passieren, von der schlechten Seite von f auf die gute Seite von f wechseln. Umgekehrt nennen wir (D, e_1, e_2) ein k -Aus-Ereignis, wenn wir, während wir D passieren, von der guten Seite von f auf die schlechte Seite von f wechseln.

Lemma 7 (Abwechslungslemma[polar, Rang 4]). *Auf dem Pseudokreis (e_1, e_2) wechseln sich k -Ein-Ereignisse und k -Aus-Ereignisse ab.*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Abwechslungslemmas[polar] (Lemma 4). Wir ersetzen lediglich e durch (e_1, e_2) , Pseudokreis durch Pseudosphäre und Proposition 3 durch Proposition 4.

Lemma 5 lässt sich genauso auf den Pseudokreis (e_1, e_2) anwenden, $e \in E$ wird durch (e_1, e_2) mit $e_1, e_2 \in E$ ersetzt.

Als Nächstes soll das Abwechslungslemma für beliebigen Rang r angegeben werden.

Sei dafür \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang r auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$, repräsentiert durch ein Arrangement von Pseudosphären in S^d mit $r = d + 1$. Sei T erneut ein beliebiges, festes Top. Ein Cocircuit von \mathcal{O} ist wieder ein k -Cocircuit, wenn er in k Koordinaten einen guten Eintrag hat.

Sei $X \in \mathcal{L}$. $\lambda(X)$ bezeichne analog zum Rang 4 die Anzahl der guten Einträge des Covektors X . Die Schnittmenge von $m := r - 2$ Pseudosphären e_1, \dots, e_m aus E ist, da \mathcal{O} uniform ist, stets ein Pseudokreis. Wir bezeichnen ihn mit dem m -Tupel (e_1, \dots, e_m) . Die beiden Schnittpunkte von (e_1, \dots, e_m) mit einer weiteren, zu e_1, \dots, e_m verschiedenen Pseudosphäre aus E sind wie beim Rang 4 stets ein Cocircuit von \mathcal{O} und sein Negatives.

Wir formulieren nun eine zu Proposition 3 und Proposition 4 analoge Proposition für den Rang r . Seien dazu $e_1, \dots, e_m \in E$ m beliebige, aber feste Pseudosphären.

Proposition 5. *Wir betrachten die alternierende Folge der zu (e_1, \dots, e_m) inzidenten Cocircuits und Kanten. Sei D ein zu (e_1, \dots, e_m) inzidenter Cocircuit und seien X_1 und X_2 die beiden Kanten von (e_1, \dots, e_m) , die zu D inzident sind. Der Wert von $\lambda(X_1)$ unterscheidet sich genau um den Betrag eins vom Wert von $\lambda(X_2)$.*

Beweis. Da wir, während wir mit (e_1, \dots, e_m) eine zu e_1, \dots, e_m verschiedene Pseudosphäre schneiden, stets von ihrer guten auf ihre schlechte Seite wechseln oder umgekehrt, kann der Beweis wieder analog zum Beweis von Proposition 3 erfolgen. Es muss hier e durch (e_1, \dots, e_m) ersetzt und der erste Satz weggelassen werden. \square

Sei k im Folgenden beliebig, aber fest. Sei $f \in E \setminus \{e_1, \dots, e_m\}$ eine Pseudosphäre, so dass einer der beiden Schnittpunkte von f und (e_1, \dots, e_m) ein k -Cocircuit D ist. Wir wählen eine beliebige, aber feste Bewegungsrichtung auf (e_1, \dots, e_m) . Wir nennen analog zum Rang 4 das $(r - 1)$ -Tupel (D, e_1, \dots, e_m) ein k -*Ein-Ereignis*, wenn wir, während wir D in der gewählten Richtung passieren, von der schlechten Seite von f auf die gute Seite von f wechseln. Umgekehrt nennen wir (D, e_1, \dots, e_m) ein k -*Aus-Ereignis*, wenn wir, während wir D passieren, von der guten Seite von f auf die schlechte Seite von f wechseln.

Lemma 8 (Abwechslungslemma[polar, Rang r]). *Auf dem Pseudokreis (e_1, \dots, e_m) wechseln sich k -Ein-Ereignisse und k -Aus-Ereignisse ab.*

Beweis. Der Beweis erfolgt wieder analog zum Beweis des Abwechslungslemmas[polar]. Es wird e durch (e_1, \dots, e_m) , Pseudokreis durch Pseudosphäre und Proposition 3 durch Proposition 5 ersetzt.

Lemma 5 lässt sich analog auf den Rang r erweitern.

Mit dem Lemma von Lovász[polar] ist die Verallgemeinerung allerdings schwieriger. Für den polaren Fall hat Emo Welzl in [17] den Satz von Welzl angegeben. Auch dieser lässt sich in einer etwas anderen Interpretation polarisieren. Die nachfolgenden Überlegungen orientieren sich eher an der Art und Weise, wie Felsner den Satz von Welzl in [8] (Kapitel 4.2, Fact 0 bis Fact 5 und Theorem 4.7) eingeführt und angegeben hat. Wir behalten die dort benutzten Bezeichnungen bei, arbeiten also für $j \in \{0, 1, \dots, n - d\}$ mit j -Cocircuits und verwenden k ausnahmsweise in einer anderen Bedeutung, als Index, siehe weiter unten.

Wir bezeichnen den Pseudokreis, der die Schnittmenge der Pseudosphären e_1, \dots, e_m ist, mit $h := (e_1, \dots, e_m)$. Wir schneiden h an zwei antipodalen Kanten auf. Eine dieser Kanten habe bezüglich aller zu h inzidenten Kanten eine minimale Anzahl von guten Einträgen, die andere hat entsprechend eine maximale Anzahl von guten Einträgen. Wir wählen eine beliebige, aber feste Hälfte von h aus und bezeichnen diese mit $h/2$. $\bar{h}_j = \bar{h}_j(E)$ sei die Anzahl der j -Cocircuits, zu denen $h/2$ inzident ist.

Definiert h eine Kante des zu T negativen Tops $-T$, so sind zu dieser Kante und somit zu h zwei 0-Cocircuits inzident. Da wir h an der Kante mit den wenigsten guten Einträgen aufschneiden, ist zu $h/2$ in diesem Fall ein 0-Cocircuit inzident.

Damit gilt (vergleiche Fact 0 in [8]): $\bar{h}_0 \leq 1$. (1)

Wir definieren $s^0 = \sum_{j=0}^{n-d} \bar{h}_j$. Jeder Cocircuit auf $h/2$ ist ein j -Cocircuit für ein bestimmtes $j \in \{0, \dots, n - d\}$. Daher ist s^0 lediglich die Anzahl der Cocircuit, die auf $h/2$ liegen.

Wir definieren weiter $s^1 = \sum_{j=0}^{n-d} j \bar{h}_j$. Hier werden Paare (D, e) gezählt, wobei D ein zu

$h/2$ inzidenter Cocircuit ist, der auf der guten Seite von e liegt.

Allgemein definieren wir $s^k = \sum_{j=0}^{n-d} \binom{j}{k} \bar{h}_j$. Hier werden Paare $(D, \{f_1, \dots, f_k\})$ gezählt, wobei D ein zu $h/2$ inzidenter Cocircuit ist und $\{f_1, \dots, f_k\}$ eine Menge von k Pseudosphären, auf deren guten Seiten D liegt.

Proposition 6. *Die Vektoren $(\bar{h}_0, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_{n-d})$ und $(s^0, s^1, \dots, s^{n-d})$ bestimmen einander vollständig.*

Beweis. Im Beweis werden Inversionsformeln für Folgen mit Binominalkoeffizienten verwendet. Siehe [8], Kapitel 4.2, Fact 1 oder auch [17], Seite 3, Formel (1).

Wir ersetzen eine zu e_1, \dots, e_m verschiedene Pseudosphäre e von \mathcal{O} durch eine Pseudosphäre e' derart, dass das so entstandene orientierte Matroid, das wir mit \mathcal{O}' bezeichnen, uniform ist, und dass T auf der gleichen Seite von e und e' liegt.

Für die nächste Proposition vergleiche Fact 2 in [8].

Proposition 7. *Der Vektor $(\bar{h}_0, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_{n-d})$ ist in \mathcal{O} und in \mathcal{O}' gleich.*

Beweis. Da \mathcal{O}' uniform ist, ist die Anzahl der Cocircuits, die auf $h/2$ liegen, in \mathcal{O} und in \mathcal{O}' gleich.

Seien (h, e) der Cocircuit, in dem sich $h/2$ und e schneiden und (h, e') der Cocircuit, in dem sich $h/2$ und e' schneiden. Für jeden guten Eintrag, den ein zu $h/2$ inzidenter Cocircuit durch das Ersetzen von e durch e' weniger hat, hat der Cocircuit (h, e') einen guten Eintrag mehr als der Cocircuit (h, e) . Entsprechend hat für jeden guten Eintrag, den ein zu $h/2$ inzidenter Cocircuit durch das Ersetzen von e durch e' mehr hat, der Cocircuit (h, e') einen guten Eintrag weniger als der Cocircuit (h, e) . Daher ist die Summe der guten Einträge aller zu $h/2$ inzidenten Cocircuits in \mathcal{O} und in \mathcal{O}' gleich. Siehe hierzu auch Bild 7 auf der nächsten Seite.

Das Ersetzen von e durch e' können wir uns auch als Verschieben von e entlang $h/2$ zur Position von e' vorstellen. Jedesmal, wenn e dabei einen zu $h/2$ inzidenten Cocircuit D passiert, werden die Einträge von D und (h, e) vertauscht. Somit sind zu $h/2$ in \mathcal{O} und in \mathcal{O}' die gleichen Cocircuits inzident, nur in einer anderen Reihenfolge angeordnet.

Es folgt unmittelbar aus der Definition des Vektors $(s^0, s^1, \dots, s^{n-d})$, dass dieser in \mathcal{O} und in \mathcal{O}' gleich ist. Die Behauptung folgt durch Anwendung von Proposition 6. \square

Bild 7 auf der nächsten Seite zeigt ein Beispiel für das Ersetzen der Pseudosphäre e durch die Pseudosphäre e' in einem azyklischen orientierten Matroid. Das positive Top T und das negative Top $-T$ sind nur skizziert.

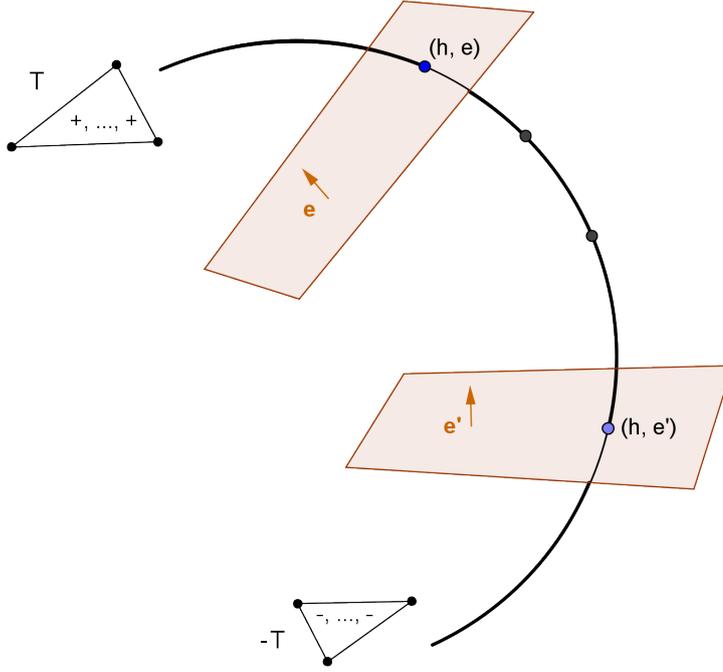


Bild 7. Die Pseudosphäre e wird durch die Pseudosphäre e' ersetzt.

Das orientierte Matroid \mathcal{O}^* auf der Menge E^* gehe aus \mathcal{O} durch Weglassen der Pseudosphäre e hervor. Es gilt somit $|E^*| = |E| - 1$.

Proposition 8. Es gilt
$$\sum_{e \in E \setminus \{e_1, \dots, e_m\}} \bar{h}_j(E^*) = (n - d - j)\bar{h}_j + (j + 1)\bar{h}_{j+1} .$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Fact 4 aus [8]. Auf der linken Seite der Gleichung werden alle Paare (e, D) gezählt, wobei e ein Element aus $E \setminus \{e_1, \dots, e_m\}$ ist und D ein j -Cocircuit von \mathcal{O}^* , der auf $h/2$ liegt. Diese Paare sind von einer der beiden folgenden Arten:

Erstens ist D ein j -Cocircuit von \mathcal{O} und liegt auf der schlechten Seite von e . Jeder j -Cocircuit auf $h/2$ liegt auf den schlechten Seiten von $n - d - j$ Pseudosphären.

Zweitens ist D ein $(j + 1)$ -Cocircuit von \mathcal{O} . Dann liegt D auf der guten Seite von e . Es gibt $(j + 1)\bar{h}_{j+1}$ solcher Paare. \square

Proposition 9. $\bar{h}_j(E) \geq \bar{h}_j(E \setminus \{e\})$ für alle $e \in E \setminus \{e_1, \dots, e_m\}$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Fact 5 aus [8]. Wir wählen ein beliebiges, festes $e \in E \setminus \{e_1, \dots, e_m\}$ aus. Dann ersetzen wir e durch eine Pseudosphäre e' , die so angeordnet sei, dass die zu $h/2$ inzidenten Cocircuits ganz auf der schlechten Seite von e' liegen und dass das neu entstandene orientierte Matroid \mathcal{O}' uniform ist. Die Grundmenge von \mathcal{O}' sei E' . Wegen Proposition 7 gilt dann $\bar{h}_j(E) = \bar{h}_j(E')$.

Sei $E'' = E' \setminus \{e'\}$ und sei \mathcal{O}'' das orientierte Matroid mit der Grundmenge E'' . Sei nun D ein zu $h/2$ inzidenter j -Cocircuit von \mathcal{O}'' . Bedingt durch die Wahl von e' liegt D auf der schlechten Seite von e' . Somit ist D auch ein j -Cocircuit von \mathcal{O}' . Daher gilt $\bar{h}_j(E' \setminus \{e'\}) \leq \bar{h}_j(E')$. Wegen $E' \setminus \{e'\} = E \setminus \{e\}$ und wegen $\bar{h}_j(E) = \bar{h}_j(E')$ (Proposition 7) erhalten wir $\bar{h}_j(E \setminus \{e\}) \leq \bar{h}_j(E)$. \square

Satz 6 (Satz von Welzl[polar]). Sei \mathcal{O} ein azyklisches, uniformes orientiertes Matroid vom Rang r auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$. Sei $h = (e_1, \dots, e_m)$ derjenige Pseudokreis, der die Schnittmenge der m Pseudosphären $e_1, \dots, e_m \in E$ ist. Dann erfüllt \bar{h}_j folgende Ungleichung:

$$\bar{h}_j \leq \binom{j+d-1}{j} = \binom{j+d-1}{d-1}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 4.7 aus [8]. Wir kombinieren Proposition 8 und Proposition 9 und erhalten:

$$n\bar{h}_j \geq (n-d+1)\bar{h}_j \geq (n-d-j)\bar{h}_j + (j+1)\bar{h}_{j+1}.$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\bar{h}_{j+1} \leq \frac{j+d}{j+1}\bar{h}_j.$$

Wir wenden nun vollständige Induktion über j an. Den Induktionsanfang bildet $\bar{h}_0 \leq 1$, siehe (1) auf Seite 21, unten.

Im Induktionsschritt folgt wegen

$$\bar{h}_{j+1} \leq \frac{j+d}{j+1} \bar{h}_j \leq \frac{j+d}{j+1} \frac{(j+d-1)!}{j! (d-1)!} = \frac{(j+d)!}{(j+1)! (d-1)!} = \frac{(j+d)}{j+1}$$

die Behauptung. □

Mit Hilfe von Satz 6 lässt sich eine obere Schranke für die Anzahl der j -Cocircuits in Rang r -orientierten Matroiden angeben. Da diese allerdings schlechter ist als die Schranke für die ($< j$)-Cocircuits, die wir in Kapitel 2.2.3 angeben werden, wollen wir an dieser Stelle darauf verzichten.

2.2 Eine obere Schranke für die Anzahl der ($< k$)-Cocircuits

2.2.1 Orientierte Matroide vom Rang 3

In diesem Unterkapitel polarisieren wir die untere Schranke $E_{k-1} \leq kn$ von Noga Alon und Ervin Györi [3].

Ein orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang 3 sei in diesem Abschnitt stets durch ein Arrangement von Pseudokreisen repräsentiert.

Sei T ein beliebiges, festes Top eines uniformen orientierten Matroids \mathcal{O} vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$. Seien $j, k, l \in \{0, \dots, n-2\}$. Sei für einen Cocircuit D von \mathcal{O} $\mu(D)$ wie vor Proposition 2 eingeführt die Anzahl der Koordinaten, in denen D und T übereinstimmen. Für einen k -Cocircuit D von \mathcal{O} gilt offenbar $\mu(D) = k$. Wir beobachten, dass das Negative eines k -Cocircuits ein $(n-2-k)$ -Cocircuit ist ($(n-2)$ von Null verschiedene Koordinaten, davon k schlecht). Offenbar ist die Anzahl der k -Cocircuits gleich der Anzahl der $(n-2-k)$ -Cocircuits.

Nach Definition 14 ist $\mathcal{E}_{k-1}(E)$ die Menge der Cocircuits von \mathcal{O} , die in weniger als k Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmen. Wir nennen diese ($< k$)-Cocircuits. $E_{k-1}(E)$ ist die Kardinalität von $\mathcal{E}_{k-1}(E)$. Ein ($> (n-2-k)$)-Cocircuit sei ein Cocircuit, der in mehr als $(n-2-k)$ Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmt.

Proposition 10. *Ist ein Pseudokreis $f \in E$ inzident zu einem j -Cocircuit und gilt $j < l < n - 2 - j$, so ist f auch inzident zu mindestens zwei l -Cocircuits.*

Beweis. Sei $f \in E$ zu einem j -Cocircuit D inzident. Dann ist f auch inzident zu dessen Negativem $-D$, einem $(n - 2 - j)$ -Cocircuit. Wir bewegen uns auf f von D nach $-D$.

Seien D_1 und D_2 zu f inzidente Cocircuits und liege auf f zwischen D_1 und D_2 kein weiterer Cocircuit. Sei D' ein beliebiger zu f inzidenter Cocircuit. Wegen Proposition 2 a) unterscheiden sich $\mu(D_1)$ und $\mu(D_2)$ höchstens um den Betrag eins. Daher muss $\mu(D')$ zwischen D und $-D$ alle Werte zwischen j und $(n - 2 - j)$ durchlaufen.

Darum liegt auf dem Weg von D nach $-D$ auf f für jedes $l \in]j, n - 2 - j[$ mindestens ein l -Cocircuit.

Da es gleichgültig ist, in welcher Richtung wir uns von D nach $-D$ bewegen, ist f für $j < l < n - 2 - j$ zu mindestens zwei l -Cocircuits inzident. \square

Nun können wir zeigen:

Satz 7. *Für jedes uniforme orientierte Matroid \mathcal{O} vom Rang 3 mit der Grundmenge E , $|E| = n$ und $0 < k < \frac{n}{2}$ gilt:*

$$E_{k-1}(E) \leq kn.$$

Beweis. Der Beweis orientiert sich an Remarks. 1. im Aufsatz [3] von Noga Alon und Ervin Györi. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Sei $n \neq 2k + 1$. Sei $f \in E$ ein beliebiger Pseudokreis. Da \mathcal{O} uniform ist (vergleiche Definition 11), ist f inzident zu $2(n-1)$ Cocircuits. Ist f inzident zu einem $(< k)$ -Cocircuit und gilt $k \leq l \leq n - 2 - k$, so ist f nach Proposition 10 auch inzident zu mindestens zwei l -Cocircuits.

Wir zählen die Sorten von l -Cocircuits, zu denen f inzident sein muss, falls f zu einem $(< k)$ -Cocircuit (und somit auch zu dessen Negativem, einem $(> (n - 2 - k))$ -Cocircuit) inzident ist. Von den $(n - 1)$ verschiedenen Sorten (für $k = 0$ bis $k = n - 2$) subtrahieren wir hierfür $2k$ Sorten (k für $j = 0$ bis $j = k - 1$ und k weitere für $j = n - 1 - k$ bis $j = n - 2$). Somit muss f für $k \leq l \leq n - 2 - k$ zu $(n - 1 - 2k)$ Sorten von l -Cocircuits inzident sein. Also ist f zu $2(n - 1 - 2k)$ Cocircuits inzident (Proposition 10), die keine $(< k)$ -Cocircuits oder $(> (n - 2 - k))$ -Cocircuits sind. Daher können maximal

$$2(n - 1) - 2(n - 1 - 2k) = 4k$$

$(< k)$ -Cocircuits oder $(> (n - 2 - k))$ -Cocircuits zu f inzident sein. Da die Anzahl der j -Cocircuits gleich der Anzahl der $(n - 2 - j)$ -Cocircuits ist, ist auch die Anzahl der $(< k)$ -Cocircuits gleich der Anzahl der $(> (n - 2 - k))$ -Cocircuits. Daher sind maximal $2k$ $(< k)$ -Cocircuits zu f inzident. Wir haben n Pseudokreise, und da \mathcal{O} uniform ist, sind zu jedem Cocircuit genau zwei Pseudokreise inzident. $f \in E$ war beliebig gewählt, daher gilt:

$$E_{k-1}(E) \leq kn.$$

Fall 2: Sei $n = 2k + 1$. Dann ist $k = \frac{n-1}{2}$, und die $(< k)$ -Cocircuits sind, da $n - 1$ gerade ist, genau diejenigen Cocircuits, die in höchstens $\frac{n-3}{2}$ Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmen. Alle Cocircuits haben in zwei Koordinaten eine Null, $n - 2$ Koordinaten bleiben für positive und negative Einträge übrig. Da $n - 2$ ungerade

ist und $n - 2 = \frac{n-3}{2} + \frac{n-1}{2}$ gilt, sind die ($< k$)-Cocircuits von \mathcal{O} genau die Hälfte aller Cocircuits von \mathcal{O} . Die andere Hälfte sind wegen Definition 10 (ii) gerade die zu den ($< k$)-Cocircuits negativen Cocircuits, also die ($> (n - 2 - k)$)-Cocircuits. Da \mathcal{O} uniform ist, hat \mathcal{O} genau $n(n - 1)$ Cocircuits (vergleiche Beobachtung 2), die Hälfte davon, $\frac{n(n-1)}{2}$, sind ($< k$)-Cocircuits. Aus $\frac{n(2k+1-1)}{2} = kn$ folgt die Behauptung. \square

Einen Pseudokreis nennen wir nach Definition 15 *extremal*, wenn er eine Facette des Tops T definiert.

Anmerkung 1. Wir betrachten ein uniformes orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang 3, bei dem alle n Pseudokreise extremal sind. Zu jedem dieser Pseudokreise sind nach Korollar 1 a) genau $2k$ ($< k$)-Cocircuits inzident.

Da \mathcal{O} uniform ist, sind zu jedem Cocircuit genau zwei Pseudokreise inzident. Wir haben n Pseudokreise, somit ist die Anzahl der ($< k$)-Cocircuits von \mathcal{O} genau kn .

Daher ist die angegebene Schranke bestmöglich.

2.2.2 Orientierte Matroide vom Rang 4

Wir wollen nun eine Rang 4-Version der unteren Schranke $E_{k-1} \leq kn$ angeben.

Der Aufbau ist der gleiche wie im vorangegangenen Abschnitt, die Beweise werden aber wegen der Unterschiede in z.B. der Anzahl der Sorten von k -Cocircuits trotzdem angegeben. So gibt es im uniformen Fall (Definition 11) bei konstantem n im Rang 4 eine Sorte weniger wie im Rang 3, was einfach daher kommt, dass sich in einem Cocircuit D drei statt zwei Pseudosphären schneiden und so eine weniger für positive und negative Einträge von D übrigbleibt.

Ein orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang 4 sei in diesem Abschnitt stets durch ein Pseudosphärenarrangement repräsentiert.

Sei T ein beliebiges, festes Top eines uniformen orientierten Matroids \mathcal{O} vom Rang 4 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$. Seien $j, k, l \in \{0, \dots, n - 3\}$. Sei $\mu(D)$ für einen Cocircuit D von \mathcal{O} wie in Kapitel 2.2.1 definiert. Wir beobachten, dass das Negative eines k -Cocircuits ein $(n - 3 - k)$ -Cocircuit ist ($(n - 3)$ von Null verschiedene Koordinaten, davon k schlecht). Offenbar ist die Anzahl der k -Cocircuits gleich der Anzahl der $(n - 3 - k)$ -Cocircuits.

Die ($< k$)-Cocircuits seien wie in Kapitel 2.2.1 definiert. Ein ($> (n - 3 - k)$)-Cocircuit sei ein Cocircuit, der in mehr als $(n - 3 - k)$ Koordinaten einen guten Eintrag hat.

Ein Pseudokreis $h = (e_1, e_2)$ sei wie in Kapitel 2.1.2 die Schnittmenge der beiden Pseudosphären $e_1, e_2 \in E$. Wir benötigen zunächst noch eine zu Proposition 2 a) analoge Proposition für den Pseudokreis h .

Proposition 11. *Seien D_1 und D_2 zwei benachbarte Cocircuits, die zu dem Pseudokreis h inzident sind. Dann unterscheiden sich $\mu(D_1)$ und $\mu(D_2)$ höchstens um den Betrag eins.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Proposition 2 a).

Mit Proposition 11 können wir Proposition 12 beweisen.

Proposition 12. *Ist der Pseudokreis h inzident zu einem j -Cocircuit und gilt $j < l < n - 3 - j$, so ist h auch inzident zu mindestens zwei l -Cocircuits.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Proposition 10. Sei h zu einem j -Cocircuit D inzident. Dann ist h auch inzident zu dessen Negativem $-D$, einem $(n-3-j)$ -Cocircuit. Wir bewegen uns auf h von D nach $-D$.

Seien D_1 und D_2 zu h inzidente Cocircuits und liege auf h zwischen D_1 und D_2 kein weiterer Cocircuit. Sei D' ein beliebiger zu h inzidenter Cocircuit. Wegen Proposition 11 unterscheiden sich $\mu(D_1)$ und $\mu(D_2)$ höchstens um den Betrag eins. Daher muss $\mu(D')$ zwischen D und $-D$ alle Werte zwischen j und $(n-3-j)$ durchlaufen.

Darum liegt auf dem Weg von D nach $-D$ auf h für jedes $l \in]j, n-3-j[$ mindestens ein l -Cocircuit.

Da es gleichgültig ist, in welcher Richtung wir uns von D nach $-D$ bewegen, ist h für $j < l < n-3-j$ zu mindestens zwei l -Cocircuits inzident. \square

Damit können wir zeigen:

Satz 8. *Für jedes uniforme orientierte Matroid \mathcal{O} vom Rang 4 mit der Grundmenge E , $|E| = n$ und $0 < k < \frac{n-1}{2}$ gilt:*

$$E_{k-1}(E) \leq \frac{1}{3}n(n-1)k.$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 7. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Sei $n \neq 2k+2$. Seien $e_1, e_2 \in E$ zwei beliebige Pseudosphären, und sei $h = (e_1, e_2)$. Da \mathcal{O} uniform ist, ist h inzident zu $2(n-2)$ Cocircuits. Ist h inzident zu einem $(< k)$ -Cocircuit und gilt $k \leq l \leq n-3-k$, so ist h nach Proposition 12 auch inzident zu mindestens zwei l -Cocircuits.

Wir zählen die Sorten von l -Cocircuits, zu denen h inzident sein muss, falls h zu einem $(< k)$ -Cocircuit (und somit auch zu dessen Negativem, einem $(> (n-3-k))$ -Cocircuit) inzident ist. Von den $(n-2)$ verschiedenen Sorten (für $k=0$ bis $k=n-3$) subtrahieren wir hierfür $2k$ Sorten (k für $j=0$ bis $j=k-1$ und k weitere für $j=n-2-k$ bis $j=n-3$). Somit muss h für $k \leq l \leq n-3-k$ zu $(n-2-2k)$ Sorten von l -Cocircuits inzident sein. Also ist h zu $2(n-2-2k)$ Cocircuits inzident (Proposition 12), die keine $(< k)$ -Cocircuits oder $(> (n-3-k))$ -Cocircuits sind. Daher können maximal

$$2(n-2) - 2(n-2-2k) = 4k$$

$(< k)$ -Cocircuits oder $(> (n-3-k))$ -Cocircuits zu h inzident sein. Da die Anzahl der j -Cocircuits gleich der Anzahl der $(n-3-j)$ -Cocircuits ist, ist auch die Anzahl der $(< k)$ -Cocircuits gleich der Anzahl der $(> (n-3-k))$ -Cocircuits. Daher sind maximal $2k$ $(< k)$ -Cocircuits zu h inzident. Wir haben n Pseudosphären, und jeder Pseudokreis ist die Schnittmenge von jeweils zwei Pseudosphären. Es gibt in \mathcal{O} somit $\frac{1}{2}n(n-1)$ Pseudokreise $h = (e_1, e_2)$ mit $e_1, e_2 \in E$. Da \mathcal{O} uniform ist (Definition 11), sind zu jedem Cocircuit genau drei Pseudosphären inzident. Jeder Cocircuit liegt somit auch auf drei der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Pseudokreise. Insgesamt gilt daher:

$$E_{k-1}(E) \leq \frac{1}{3}n(n-1)k.$$

Fall 2: Sei $n = 2k+2$. Dann ist $k = \frac{n-2}{2}$, und die $(< k)$ -Cocircuits sind, da n gerade ist, genau diejenigen Cocircuits, die in höchstens $\frac{n-4}{2}$ Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmen. Alle Cocircuits haben in drei Koordinaten eine Null, $n-3$ Ko-

ordinaten bleiben für positive und negative Einträge übrig. Da $n - 3$ ungerade ist und $n - 3 = \frac{n-4}{2} + \frac{n-2}{2}$ gilt, sind die $(< k)$ -Cocircuits von \mathcal{O} genau die Hälfte aller Cocircuits von \mathcal{O} . Die andere Hälfte sind wegen Definition 10 (ii) gerade die zu den $(< k)$ -Cocircuits negativen Cocircuits, also die $(> (n - 3 - k))$ -Cocircuits. Da \mathcal{O} uniform ist, hat \mathcal{O} genau $\frac{1}{3}n(n - 1)(n - 2)$ Cocircuits (Beobachtung 2), die Hälfte davon, $\frac{1}{6}n(n - 1)(n - 2)$, sind $(< k)$ -Cocircuits. Aus $\frac{1}{6}n(n - 1)(2k + 2 - 2) = \frac{1}{3}n(n - 1)k$ folgt die Behauptung. \square

2.2.3 Orientierte Matroide vom Rang r

Wir wollen jetzt die Schranke aus den beiden vorangegangenen Unterkapiteln verallgemeinern. Die Anzahl der Sorten von möglichen k -Cocircuits wird bei allgemeinem Rang r oder allgemeiner Dimension $d = r - 1$ (und konstantem n) immer kleiner, da Cocircuits im uniformen Fall, den wir betrachten wollen, die Schnittpunkte von d Pseudosphären sind.

Ein orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang r sei in diesem Abschnitt stets durch ein Pseudosphärenarrangement repräsentiert.

Sei T ein beliebiges, festes Top eines uniformen orientierten Matroids \mathcal{O} vom Rang r auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$. Seien $j, k, l \in \{0, \dots, n - d\}$. Sei für einen Cocircuit D von \mathcal{O} $\mu(D)$ wie im letzten Abschnitt definiert. Wir beobachten, dass das Negative eines k -Cocircuits ein $(n - d - k)$ -Cocircuit ist ($(n - d)$ von Null verschiedene Koordinaten, davon k schlecht). Offenbar ist die Anzahl der k -Cocircuits gleich der Anzahl der $(n - d - k)$ -Cocircuits.

Wir betrachten in diesem Abschnitt neben den $(< k)$ -Cocircuits die $(> (n - d - k))$ -Cocircuits. Ein $(> (n - d - k))$ -Cocircuit sei ein Cocircuit, der in mehr als $(n - d - k)$ Koordinaten einen guten Eintrag hat.

Sei $m = r - 2$. Ein Pseudokreis $h = (e_1, \dots, e_m)$ sei wie in Kapitel 2.1.2 die Schnittmenge der m Pseudosphären $e_1, \dots, e_m \in E$.

Wir benötigen wie im letzten Abschnitt eine zu Proposition 2 a) analoge Proposition für den Pseudokreis h . Danach geben wir die zu Proposition 12 analoge Proposition 14 an.

Proposition 13. *Seien D_1 und D_2 zwei benachbarte Cocircuits, die zu dem Pseudokreis h inzident sind. Dann unterscheiden sich $\mu(D_1)$ und $\mu(D_2)$ höchstens um den Betrag eins.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Proposition 2 a).

Proposition 14. *Ist der Pseudokreis h inzident zu einem j -Cocircuit und gilt $j < l < n - d - j$, so ist h auch inzident zu mindestens zwei l -Cocircuits.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu den Beweisen der Propositionen 10 und 12. Sei h zu einem j -Cocircuit D inzident. Dann ist h auch inzident zu dessen Negativem $-D$, einem $(n - d - j)$ -Cocircuit. Wir bewegen uns auf h von D nach $-D$.

Seien D_1 und D_2 zu h inzidente Cocircuits und liege auf h zwischen D_1 und D_2 kein weiterer Cocircuit. Sei D' ein beliebiger zu h inzidenter Cocircuit. Wegen Proposition 13 unterscheiden sich $\mu(D_1)$ und $\mu(D_2)$ höchstens um den Betrag eins. Daher muss $\mu(D')$ zwischen D und $-D$ alle Werte zwischen j und $(n - d - j)$ durchlaufen.

Darum liegt auf dem Weg von D nach $-D$ auf h für jedes $l \in]j, n - d - j[$ mindestens ein l -Cocircuit.

Da es gleichgültig ist, in welcher Richtung wir uns von D nach $-D$ bewegen, ist h für $j < l < n - d - j$ zu mindestens zwei l -Cocircuits inzident. \square

Wir können zeigen:

Satz 9. *Für jedes uniforme orientierte Matroid \mathcal{O} vom Rang r mit der Grundmenge E , $|E| = n$ und $0 < k < \frac{n-d+2}{2}$ gilt:*

$$E_{k-1}(E) \leq \frac{2k}{d} \binom{n}{d-1}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu den Beweisen der Sätze 7 und 8. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Sei $n \neq 2k + d - 1$. Seien $e_1, \dots, e_m \in E$ m beliebige Pseudosphären, und sei $h = (e_1, \dots, e_m)$. Da \mathcal{O} uniform ist, ist h inzident zu $2(n - m)$ Cocircuits. Ist h inzident zu einem $(< k)$ -Cocircuit und gilt $k \leq l \leq n - d - k$, so ist h nach Proposition 14 auch inzident zu mindestens zwei l -Cocircuits.

Wir zählen die Sorten von l -Cocircuits, zu denen h inzident sein muss, falls h zu einem $(< k)$ -Cocircuit (und somit auch zu dessen Negativem, einem $(> (n - d - k))$ -Cocircuit) inzident ist. Von den $(n - d + 1)$ verschiedenen Sorten (für $k = 0$ bis $k = n - d$) subtrahieren wir hierfür $2k$ Sorten (k für $j = 0$ bis $j = k - 1$ und k weitere für $j = n - d + 1 - k$ bis $j = n - d$). Somit muss h für $k \leq l \leq n - d - k$ zu $(n - d + 1 - 2k)$ Sorten von l -Cocircuits inzident sein. Also ist h zu $2(n - d + 1 - 2k)$ Cocircuits inzident (Proposition 14), die keine $(< k)$ -Cocircuits oder $(> (n - d - k))$ -Cocircuits sind. Daher können maximal

$$2(n - d + 1) - 2(n - d + 1 - 2k) = 4k$$

$(< k)$ -Cocircuits oder $(> (n - d - k))$ -Cocircuits zu h inzident sein. Da die Anzahl der j -Cocircuits gleich der Anzahl der $(n - d - j)$ -Cocircuits ist, ist auch die Anzahl der $(< k)$ -Cocircuits gleich der Anzahl der $(> (n - d - k))$ -Cocircuits. Daher sind maximal $2k$ $(< k)$ -Cocircuits zu h inzident. Wir haben n Pseudosphären, und jeder Pseudokreis ist die Schnittmenge von jeweils m Pseudosphären. Es gibt in \mathcal{O} somit $\binom{n}{m}$ Pseudokreise $h = (e_1, \dots, e_m)$ mit $e_1, \dots, e_m \in E$. Da \mathcal{O} uniform ist (Definition 11), sind zu jedem Cocircuit genau d Pseudosphären inzident. Jeder Cocircuit liegt somit auch auf d der $\binom{n}{m}$ Pseudokreise. Insgesamt gilt daher:

$$E_{k-1}(E) \leq \frac{2k}{d} \binom{n}{m} = \frac{2k}{d} \binom{n}{d-1}.$$

Fall 2: Sei $n = 2k + d - 1$. Dann ist $k = \frac{n-d+1}{2}$, und die $(< k)$ -Cocircuits sind, da $(n - d)$ ungerade ist, genau diejenigen Cocircuits, die in höchstens $\frac{n-d-1}{2}$ Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmen. Alle Cocircuits haben in d Koordinaten eine Null, $n - d$ Koordinaten bleiben für positive und negative Einträge übrig. Da $n - d$ ungerade ist und $n - d = \frac{n-d-1}{2} + \frac{n-d+1}{2}$ gilt, sind die $(< k)$ -Cocircuits von \mathcal{O} genau die Hälfte aller Cocircuits von \mathcal{O} . Die andere Hälfte sind wegen Definition 10 (ii) gerade die zu den $(< k)$ -Cocircuits negativen Cocircuits, also die $(> (n - d - k))$ -Cocircuits. Da \mathcal{O} uniform ist, hat \mathcal{O} genau $2\binom{n}{d}$ Cocircuits (Beobachtung 2), die Hälfte davon, $\binom{n}{d}$, sind $(< k)$ -Cocircuits. Aus $\binom{n}{d} = \binom{n}{d-1} \frac{n-d+1}{d} = \binom{n}{d-1} \frac{2k+d-1-d+1}{d}$ folgt die Behauptung. \square

2.3 Eine untere Schranke für die Anzahl der k -Cocircuits

In diesem Kapitel werden Lemma 3.1, Corollary 3.2, Theorem 3.3 aus Kapitel 3 des Aufsatzes [7] von Paul Erdős et al. und bis auf Theorem 4.3 und Theorem 4.14 (die in anderer Form Satz 5 und den Schlussbemerkenungen in Kapitel 2.1.1 entsprechen) alle Lemmata und Sätze aus Kapitel 4 von [7] polarisiert.

Das orientierte Matroid \mathcal{O} vom Rang 3 habe die gleichen Eigenschaften wie in Kapitel 2.1.1.

Wir wollen uns zunächst fragen, zu wie vielen der n Pseudokreise von \mathcal{O} k -Cocircuits inzident sind. Nach Korollar 1 b) sind zu jedem extremalen Pseudokreis genau zwei k -Cocircuits inzident. Für einen beliebigen Pseudokreis gilt Lemma 9:

Lemma 9. *Sei $k \leq \frac{n-2}{2}$. Zu einen Pseudokreis $e \in E$ ist genau dann ein k -Cocircuits inzident, wenn auf e eine Kante liegt, die höchstens k gute oder k schlechte Einträge hat.*

Beweis. Vergleiche [7], Lemma 3.1. Hat die zu e inzidente Kante höchstens k schlechte Einträge, arbeiten wir stattdessen mit der zu ihr negativen Kante, die aus Symmetriegründen ebenfalls auf e liegt und höchstens k gute Einträge hat.

Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung ist offensichtlich, da zu jedem zu e inzidenten k -Cocircuit D eine auf e liegende Kante inzident ist, die in k Koordinaten gute Einträge hat. Es ist dies die Kante auf der schlechten Seite des Pseudokreises, der sich mit e in D schneidet.

Nun wollen wir zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist. Sei dazu X ein zu e inzidenter Covektor. Sei Y die zu e inzidente Kante mit höchstens k guten Einträgen. Wir betrachten wie in Proposition 3 die alternierende Folge der zu e inzidenten Cocircuits und Kanten. $\lambda(X)$ ist wie gewohnt die Anzahl der guten Einträge von X . Auf e durchläuft dabei $\lambda(X)$ wegen Proposition 3 alle Werte zwischen k (bei Y) und $n - k - 1$ (bei $-Y$). Wie im Beweis des Abwechslungslemmas[polar] (Lemma 4) schließen wir, dass beim Wechsel von $\lambda(X)$ von k auf $k + 1$ ein zu e inzidenter k -Cocircuit liegt. \square

Wegen Korollar 2 ist die Anzahl der zu einem Pseudokreis inzidenten k -Cocircuits gerade. Ist also zu einem Pseudokreis ein k -Cocircuit inzident, so sind zu diesem Pseudokreis mindestens zwei k -Cocircuits inzident.

Ist n gerade und gilt $k = \frac{n-2}{2}$, so folgt aus Lemma 9 für die balancierten Cocircuits (vergleiche Corollary 3.2 in [7]):

Korollar 4. *Zu jedem Pseudokreis sind mindestens zwei balancierte Cocircuits (oder ein balanciertes Cocircuitpaar) inzident.*

Die minimale Anzahl der Pseudokreise, zu denen k -Cocircuits inzident sind, gibt die nachfolgende Proposition an.

Proposition 15. *Für $k \leq \frac{n-2}{2}$ sind zu mindestens $2k + 3$ der Pseudokreise von \mathcal{O} k -Cocircuits inzident.*

Beweis. Vergleiche Theorem 3.3 aus [7]. Sei e ein beliebiger extremaler Pseudokreis. Sei X ein zu e inzidenter Covektor. Wir betrachten wie in Proposition 3 die alternierende Folge der zu e inzidenten Cocircuits und Kanten. Auf e durchläuft dabei wegen Proposition 3 $\lambda(X)$ alle Werte zwischen 0 (am Top $-T$) und $n - 1$ (am Top T). Also existiert eine zu e inzidente Kante Y , die wenigstens $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ gute und schlechte Einträge hat. Zu Y wiederum ist ein Top T' inzident, das mindestens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gute und schlechte Einträge hat.

Wir bezeichnen wie im Beweis des Lemmas von Lovász[polar] (Lemma 6) das Top $-T$ mit T_0 und das Top T mit T_n und betrachten den Topographen von \mathcal{O} . Dann existiert wegen Behauptung 1 im Beweis des Lemmas von Lovász[polar] ein Weg von T_0 nach T_n , der über T' läuft. Seien dabei wieder e_1, \dots, e_n die Pseudokreise, auf denen die Kanten Y_1, \dots, Y_n liegen.

Dann liegen auf e_1, \dots, e_{k+1} bzw. auf e_{n-k}, \dots, e_n Kanten, die höchstens k gute bzw. k schlechte Einträge haben. Damit sind wegen Lemma 9 zu jedem dieser $2k+2$ Pseudokreise k -Cocircuits inzident. Zu e sind k -Cocircuits inzident, weil e extremal ist. Insgesamt sind also zu $2k+3$ Pseudokreisen k -Cocircuits inzident. \square

Korollar 5. *Sei \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$, und sei $k < \frac{n-2}{2}$. Dann hat \mathcal{O} mindestens $2k+3$ k -Cocircuits.*

Beweis. Vergleiche Theorem 4.1 in [7]. Nach Proposition 15 sind zu mindestens $2k+3$ der Pseudokreise von \mathcal{O} k -Cocircuits inzident. Aus Korollar 2 folgt, dass zu jedem dieser Pseudokreise mindestens zwei k -Cocircuits inzident sind. \mathcal{O} ist uniform, daher sind zu jedem Cocircuit genau zwei Pseudokreise inzident. Insgesamt muss es also mindestens $2k+3$ k -Cocircuits geben. \square

Als Nächstes wollen wir angeben, wie viele k -Cocircuits maximal zu einem Pseudokreis inzident sein können.

Proposition 16. *Sei \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$, und sei $k < \frac{n-2}{2}$. Dann sind zu einem einzelnen Pseudokreis von \mathcal{O} höchstens $2k+2$ k -Cocircuits inzident.*

Beweis. Vergleiche Theorem 4.2 in [7]. Sei $e \in E$ ein beliebiger Pseudokreis, zu dem k -Cocircuits inzident sind. Wegen $k \neq \frac{n-2}{2}$ kann das Negative eines k -Cocircuits kein k -Cocircuit sein.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Sei n im ersten Fall ungerade. Dann kann e mit den verbliebenen $n-1$ Pseudokreisen nicht mehr als $n-1$ k -Cocircuits bilden. Wegen Proposition 10 sind dann zu e , wenn $k < l < \frac{n-2}{2} < n-2-k$ gilt, mindestens je zwei l -Cocircuits inzident. Also bleiben noch genau $n-1-2(\frac{n-1}{2}-(k+1)) = 2k+2$ Pseudokreise übrig, mit denen e einen k -Cocircuit bilden kann (vergleiche auch den Beweis von Satz 7, wobei hier nur die Hälfte der Sorten der j -Cocircuits, also für $0 \leq j < \frac{n-2}{2}$, betrachtet wird).

Sei n im zweiten Fall gerade. Wegen Korollar 4 bildet e dann mit mindestens einem Pseudokreis ein balanciertes Cocircuitpaar, so dass nur noch höchstens $n-2$ Pseudokreise übrig bleiben, mit denen e k -Cocircuits bilden könnte. Hier lassen wir die halbierenden Cocircuits außen vor und betrachten $\frac{n-2}{2}$ der Sorten von j -Cocircuits (für $0 \leq j < \frac{n-2}{2}$). Analog zum ersten Fall ist e , wenn $k < l < \frac{n-2}{2} < n-2-k$ gilt, jeweils mindestens zu zwei l -Cocircuits inzident. Hier bleiben nun ebenfalls $n-2-2(\frac{n-2}{2}-(k+1)) = 2k+2$ Pseudokreise übrig, mit denen e k -Cocircuits bilden kann. \square

Die nächste Definition ist die polare Version von Definition 4.4 aus [7].

Definition 16. *Wir bezeichnen mit $c_{n,k}$ die maximale Anzahl der k -Cocircuits eines uniformen orientierten Matroids \mathcal{O} vom Rang 3 mit der Grundmenge E , $|E| = n$. Betrachten*

wir balancierte k -Cocircuitpaare, bezeichnen wir deren maximale Anzahl mit $c_n = \frac{1}{2}c_{2n,n-1}$.

Lemma 10. *Ist zu einem Pseudokreis e kein k -Cocircuits inzident, so liegen alle k -Cocircuits auf der schlechten Seite von e .*

Beweis. Wir führen die Annahme, dass ein k -Cocircuit D auf der guten Seite von e liegt, zum Widerspruch.

D hat k gute Einträge, daher ist zu D ein Top T' inzident, das genau k gute Einträge hat. Es ist dies das zu D inzidente Top, das auf den schlechten Seiten der beiden Pseudokreise liegt, die sich in D schneiden. Wir betrachten wie im Beweis des Lemmas von Lovász[polar] (Lemma 6) den Topographen von \mathcal{O} , dessen Ecken die Tope von \mathcal{O} und dessen Kanten die Kanten sind, die jeweils zwischen zwei benachbarten Topen liegen. Nach Proposition 4.2.3 aus dem Buch 'Oriented Matroids' [5] existiert ein kürzester Weg von T' zum Top $-T$. Da T' auf der guten und $-T$ auf der schlechten Seite von e liegen, muss eine Kante auf diesem Weg auf e liegen. Weil T' k gute Einträge hat und die Anzahl der guten Einträge der Kanten auf dem Weg nach $-T$ stets weniger werden, kann diese Kante auch nur höchstens k gute Einträge haben. Nach Lemma 9 ist dann zu e ein k -Cocircuit inzident. \square

Proposition 17. *Sei $k \neq \frac{n-2}{2}$. Dann gilt für die maximale Anzahl $c_{n,k}$ der k -Cocircuits eines uniformen orientierten Matroids \mathcal{O} vom Rang 3 mit der Grundmenge E , $|E| = n$:*

$$c_{2n,2k+1} \geq 2c_{n,k} + n.$$

Beweis. Vergleiche den Beweis von Theorem 4.5 in [7]. Wir zeigen zunächst folgendes: Ist die Anzahl der k -Cocircuits von \mathcal{O} maximal, dann sind zu jedem Pseudokreis von \mathcal{O} mindestens zwei k -Cocircuits inzident.

Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, zu $e \in E$ sei kein k -Cocircuit inzident (die Anzahl der zu einem Pseudokreis inzidenten k -Cocircuits ist nach Korollar 2 gerade). Wegen Lemma 10 bedeutet dies, dass alle k -Cocircuits von \mathcal{O} auf der schlechten Seite von e liegen.

Bewegen wir einen k -Cocircuit von der schlechten auf die gute Seite von e (und sein Negatives von der guten Seite von e auf die schlechte Seite von e), so fällt ein k -Cocircuit weg, es kommen aber zwei (Korollar 2) zu e inzidente k -Cocircuits hinzu, was der Annahme widerspricht, dass die Anzahl der k -Cocircuits von \mathcal{O} maximal ist.

Somit sind zu jedem $e \in E$ zwei k -Cocircuits inzident.

Wir wählen zu jedem $e \in E$ einen beliebigen, aber festen k -Cocircuit D aus. Wir konstruieren ein orientiertes Matroid \mathcal{O}' mit der Grundmenge E' , $|E'| = 2n$, wie folgt:

Wir spalten jeden Pseudokreis e aus E in zwei Pseudokreise e' und e'' auf, die 'sehr eng' beieinander liegen, zwischen e' und e'' liegen z.B. keine Cocircuits. e' und e'' sind so orientiert, wie vorher e orientiert war. Der eine Schnittpunkt D' von e' und e'' liegt der Stelle 'sehr nahe', an der vorher D lag, der andere ist sein Negatives $-D'$. Aus jedem Pseudokreis, auf dessen guter Seite D gelegen hat, sind dann zwei Pseudokreise geworden, auf deren guten Seiten nun D' liegt. Ist weiter h der Pseudokreis gewesen, mit dem sich e in D geschnitten hat, so liegt nun D' auf der guten Seite von genau einem der beiden Pseudokreise h' und h'' , in die h aufgespalten wurde. Daher ist D' ein $(2k+1)$ -Cocircuit

von \mathcal{O}' (vergleiche hierzu auch Bild 8).

Wir betrachten weiter die vier Cocircuits, in denen sich e' , e'' , h' und h'' schneiden und die in der Nähe von D liegen. Wir bezeichnen sie mit (e', h') , (e'', h') , (e', h'') und (e'', h'') . Wie D' liegen alle diese vier Cocircuits auf zweimal so vielen guten Seiten von Pseudokreisen wie vorher D . Zwei dieser vier Cocircuits sind $(2k + 1)$ -Cocircuits von \mathcal{O}' , da sie noch zusätzlich genau einen guten Eintrag haben. Seien dies o.E. (e'', h') und (e'', h'') , vergleiche Bild 8. (e'', h') liegt auf der guten (hier positiven) Seite von h'' und (e'', h'') auf der guten (hier positiven) Seite von e' . Die beiden übrigen Cocircuits liegen stets auf zwei guten (hier positiven) bzw. zwei schlechten (hier negativen) Seiten der Pseudokreise e' , e'' , h' und h'' .

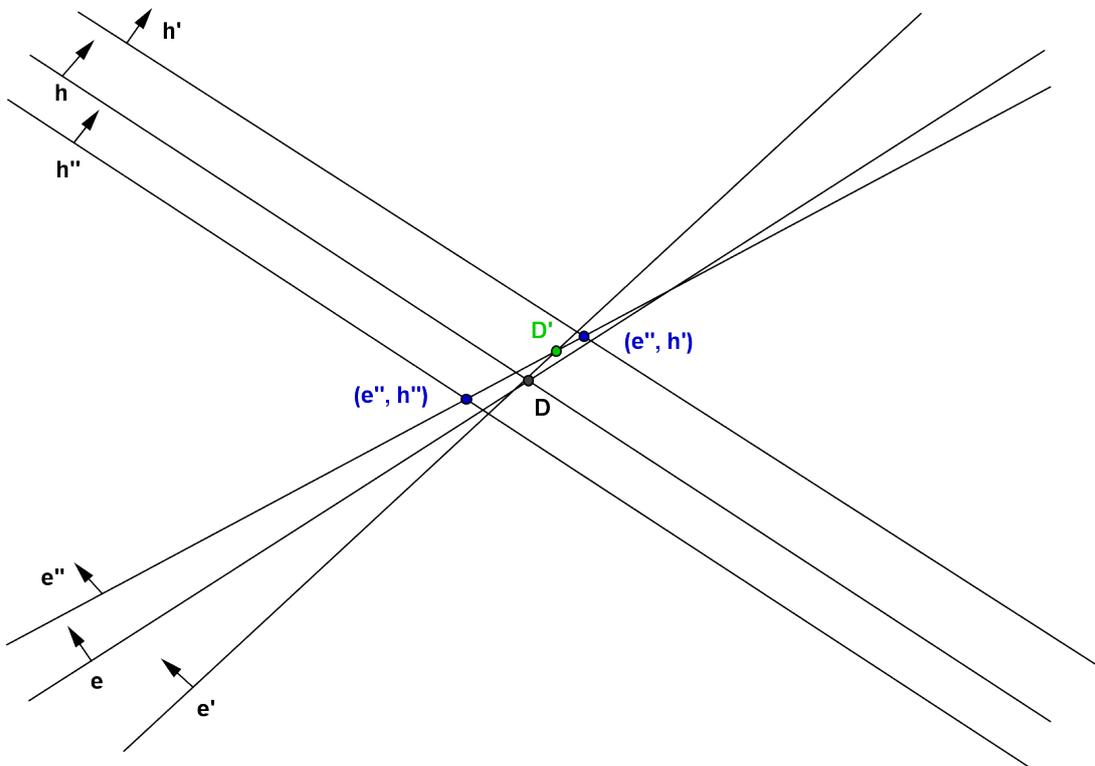


Bild 8. (e'', h') und (e'', h'') sind $(2k + 1)$ -Cocircuits von \mathcal{O}' .

Insgesamt kommen auf jeden der n ausgewählten k -Cocircuits von \mathcal{O} somit drei $(2k + 1)$ -Cocircuits von \mathcal{O}' .

Wir wenden uns den restlichen k -Cocircuits von \mathcal{O} zu. Sei D_1 ein solcher k -Cocircuit und sei D_1 einer der beiden Schnittpunkte der Pseudokreise e_1 und h_1 . Dann sind zwei der vier in \mathcal{O}' neu entstandenen Cocircuits (e'_1, h'_1) , (e'_1, h''_1) , (e''_1, h'_1) und (e''_1, h''_1) , die alle in der Nähe von D_1 liegen, $(2k + 1)$ -Cocircuits (vergleiche Bild 9 auf der nächsten Seite). Die übrigen beiden liegen stets auf zwei schlechten (hier negativen) bzw. zwei guten (hier positiven) Seiten der Pseudokreise e'_1, e''_1, h'_1 und h''_1 .

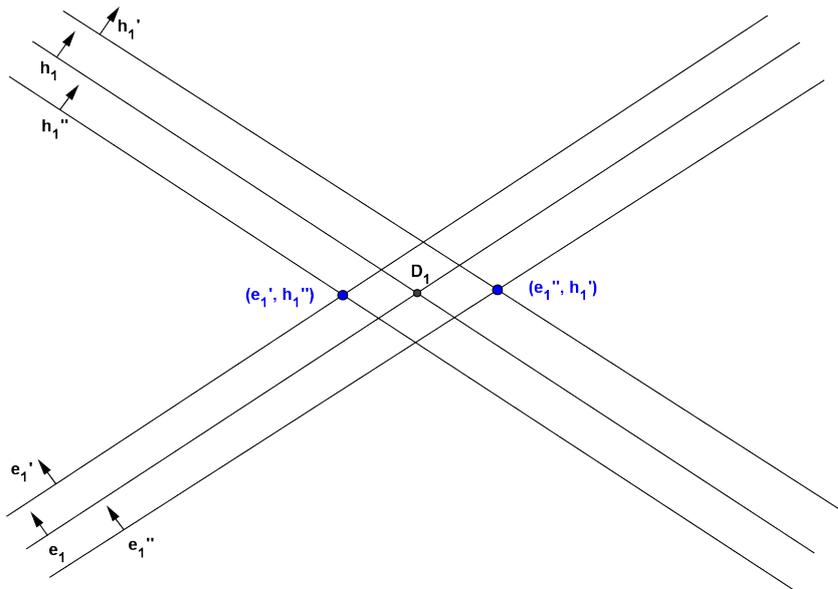


Bild 9. In diesem Beispiel sind (e_1', h_1'') und (e_1'', h_1') die beiden $(2k + 1)$ -Cocircuits von \mathcal{O}' .

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, kommen auf jeden k -Cocircuit von \mathcal{O} zwei $(2k + 1)$ -Cocircuits von \mathcal{O}' und zusätzlich noch auf die n ausgewählten k -Cocircuits von \mathcal{O} je ein weiterer $(2k + 1)$ -Cocircuit von \mathcal{O}' , woraus die Behauptung folgt. \square

Um eine zu Proposition 17 analoge Proposition für balancierte Cocircuitpaare angeben zu können, müssen wir sicherstellen, dass man ein festes balanciertes Cocircuitpaar immer nur mit genau einem der zwei zu ihm inzidenten Pseudokreise identifiziert. Es gilt $c_1 = 1$ und $c_2 = 3$, so dass sich dieses Ziel mit orientierten Matroiden mit zwei oder vier Pseudokreisen nicht erreichen lässt ($c_1 = 1$ bei zwei Pseudokreisen ist klar, bei vier Pseudokreisen ist das Top T entweder ein Dreieck oder ein Viereck, wodurch im ersten Fall drei und im zweiten Fall vier der sechs Cocircuitpaare extremal sind und somit keine balancierten Cocircuitpaare sein können). Im Folgenden werden wir zeigen, dass es für $2n \geq 6$ funktioniert. Bild 10 gibt zunächst als Beispiel für den Fall $n = 3$ ein azyklisches orientiertes Matroid mit sechs balancierten Cocircuitpaaren an.

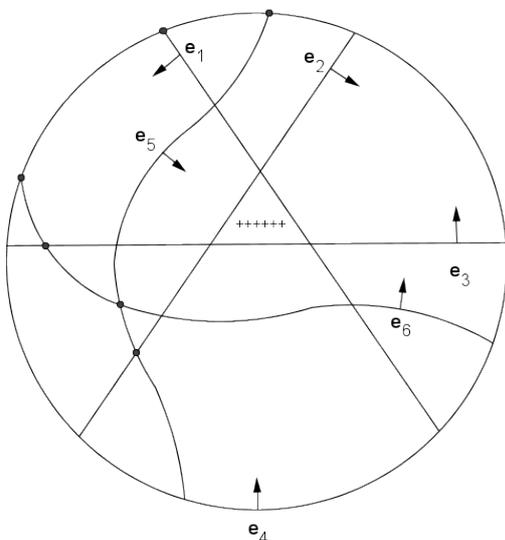


Bild 10. Ein Arrangement von sechs Pseudokreisen mit genau sechs balancierten Cocircuitpaaren. Von jedem Paar ist ein balancierter Cocircuit als schwarzer Punkt eingezeichnet.

Lemma 11. *Seien \mathcal{O} und \mathcal{O}' uniforme orientierte Matroide vom Rang 3 auf den Grundmengen E , $|E| = 2n$ und E' , $|E'| = 2n + 2$. Sei $n \geq 3$. Dann gilt: $c_{n+1} \geq c_n + 2$.*

Beweis. Vergleiche den Beweis von Lemma 4.6 in [7]. Wir können annehmen, dass \mathcal{O} c_n balancierte Cocircuitpaare hat. Wir ‘verschieben‘ das Arrangement von Pseudokreisen, durch das \mathcal{O} repräsentiert wird, auf der Kugeloberfläche S^2 derart, dass sich alle balancierten Cocircuits entweder in der Nähe des Südpols oder in der Nähe des Nordpols befinden. Insbesondere befinde sich das Negative eines balancierten Cocircuits, der sich in der Nähe des Nordpols befindet, in der Nähe des Südpols und umgekehrt.

Wir fügen zu \mathcal{O} zwei Pseudokreise h_1 und h_2 so hinzu, dass sich sowohl h_1 als auch h_2 in der Nähe des Äquators befinden, und dass der Südpol auf der positiven Seite von h_1 und auf der negativen Seite von h_2 liegt.

Dann ist jeder balancierte Cocircuit von \mathcal{O} auch ein balancierter Cocircuit von \mathcal{O}' mit $E' = E \cup \{h_1, h_2\}$. Die beiden Schnittpunkte von h_1 und h_2 werden so gewählt, dass sie keine balancierten Cocircuits sind. Daher ist nach Korollar 4 jeweils zu h_1 und zu h_2 ein neues balanciertes Cocircuitpaar inzident, und es folgt die Behauptung. \square

Das folgende Korollar ist die polare Version von Corollary 4.7 aus [7].

Korollar 6. *Gilt $n \geq 3$, so gilt auch $c_n \geq 2n$.*

Beweis. Bild 10 zeigt für $n = 3$ ein uniformes orientiertes Matroid mit sechs balancierten Cocircuitpaaren. Daher folgt mit Lemma 11 die Behauptung. \square

Für ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 mit einer geraden Anzahl $2n$ von Pseudokreisen definieren wir den Graphen G_n (vergleiche Definition 1, für die Komponente eines Graphen Definition 2) seiner balancierten Cocircuitpaare und der zu ihnen inzidenten Pseudokreise. Dabei seien die Ecken von G_n die Pseudokreise von \mathcal{O} und die Kanten die zu den Pseudokreisen inzidenten Cocircuitpaare.

Proposition 18. *Jede Komponente von G_n hat eine gerade Anzahl von Ecken.*

Beweis. Nach Korollar 3 ist zu jedem Pseudokreis von \mathcal{O} (zu jeder Ecke von G_n) eine ungerade Anzahl von balancierten Cocircuitpaaren (Kanten) inzident. Daher muss, da jede Kante zu zwei Ecken inzident ist, jede Komponente von G_n eine gerade Anzahl von Ecken haben. \square

Lemma 12. *Sei \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E , $|E| = 2n$, und sei $n \geq 3$. Dann hat jede Komponente von G_n mindestens sechs Ecken.*

Beweis. Vergleiche Lemma 4.8 in [7]. Nach Proposition 18 hat jede Komponente von G_n eine gerade Anzahl von Ecken.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, eine Komponente G_n' von G_n habe nicht mehr als vier Ecken. Sei $i \in \{1, 2\}$. Wir setzen $G_n = G_n' \cup G_n''$, wobei G_n' $2i \leq 4$ und G_n'' die restlichen $2n - 2i$ Ecken hat. Dann kann G_n' höchstens $2i - 1$ (wegen $c_1 = 1$ und $c_2 = 3$) und G_n'' höchstens c_{n-i} Kanten haben. Das würde aber $c_n \leq c_{n-i} + 2i - 1$ implizieren, was im Widerspruch zu Lemma 11 steht. \square

Lemma 13. Sei $n \geq 3$. Im Graphen G_n mit $2n$ Ecken und einer maximalen Anzahl c_n von Kanten ist es möglich, mit jeder Ecke e eine Kante $(D^e, -D^e)$ zu identifizieren, so dass mit $(D^e, -D^e) \neq (D^h, -D^h)$ auch stets $e \neq h$ gilt.

Beweis. Vergleiche den Beweis von Lemma 4.9 aus [7]. Die Komponente G_n' von G_n definiere das orientierte Matroid \mathcal{O}' , das durch Einschränkung von \mathcal{O} auf die Pseudokreise entsteht, die die Ecken von G_n' sind. \mathcal{O}' hat wegen Proposition 18 eine gerade Anzahl von Pseudokreisen.

Nach Lemma 12 und Korollar 6 (angewendet auf \mathcal{O}') hat jede Komponente G_n' von G_n mindestens so viele Kanten wie Ecken. Sie muss daher einen Kreis K (siehe Definition 3) enthalten. Seien $i, s \in \mathbb{N}$. Ordnen wir die Ecken von K nacheinander an, etwa in der Form e_1, e_2, \dots, e_s mit $e_{s+1} = e_1$, können wir mit jeder Ecke e_i die Kante (e_i, e_{i+1}) identifizieren. Gibt es Ecken von G_n' , die nicht in K enthalten sind, so gibt es unmittelbar benachbarte Ecken h von Ecken e_i aus K . Mit jedem solchen Nachbarn identifizieren wir die Kante (h, e_i) . Haben wir durch dieses Vorgehen noch immer nicht alle Ecken von G_n' ausgeschöpft, so gibt es zusätzliche Ecken, die wiederum unmittelbare Nachbarn der Ecken h sind usw. Sind keine Ecken von G_n' mehr übrig, gehen wir mit allen weiteren Komponenten von G_n genauso vor. \square

Proposition 19. Gilt $n \geq 3$, so gilt auch $c_{2n} \geq 2c_n + 2n$.

Beweis. Vergleiche den Beweis von Theorem 4.10 in [7]. Wir benutzen Lemma 13, um mit jedem Pseudokreis einen anderen balancierten Cocircuit zu identifizieren. Der Beweis kann dann analog zum Beweis von Proposition 17 verlaufen, mit $k = n - 1$ und $2k + 1 = 2n - 1$, und wir erhalten:

$$c_{4n, 2n-1} \geq 2c_{2n, n-1} + 4n,$$

da das Negative eines balancierten Cocircuits wieder ein balancierter Cocircuit ist.

Da nach Definition 16 für balancierte Cocircuitpaare $c_n = \frac{1}{2}c_{2n, n-1}$ und $c_{2n} = \frac{1}{2}c_{4n, 2n-1}$ gilt, folgt die Behauptung. \square

Wenden wir Proposition 17 und Proposition 19 m -mal an, so erhalten wir folgendes Korollar (vergleiche [7], Corollary 4.11):

Korollar 7. a) $c_{2^m n, 2^m(k+1)-1} \geq 2^m c_{n, k} + m2^{m-1}n$.

b) Gilt $n \geq 3$, so auch $c_{2^m n} \geq 2^m c_n + m2^m n$.

Proposition 20. Für ein uniformes orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang 3 mit sechs Pseudokreisen gilt: $c_3 = 6$.

Beweis. Wegen Beobachtung 2 hat \mathcal{O} genau dreißig Cocircuits. Das Top T könnte ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck oder ein Sechseck sein.

Im besten Fall ist das Top T ein Dreieck. Dann sind drei der fünfzehn (bis auf die negativen) Cocircuits von \mathcal{O} 0-Cocircuits (und ihre negativen 4-Cocircuits). Zu jedem der drei extremalen Pseudokreise e_1, e_2 und e_3 von \mathcal{O} , die zu diesen 0-Cocircuits inzident sind, sind nach Korollar 1 b) zwei 1-Cocircuits inzident, die nicht doppelt gezählt werden können, da sich e_1, e_2 und e_3 ausschließlich am Top T und am Top $-T$ schneiden. Somit kommen zu den drei 0-Cocircuits noch sechs 1-Cocircuits (ihre Negativen sind 3-Cocircuits) dazu, die keine balancierten Cocircuits sein können (vergleiche auch Bild 10

auf Seite 34). Insgesamt können also höchstens sechs Cocircuits (mit ihren Negativen) balancierte Cocircuitpaare sein. Bild 10 zeigt, dass es ein orientiertes Matroid \mathcal{O} mit der maximalen Anzahl von sechs balancierten Cocircuitpaaren gibt.

Ist das Top T ein Viereck, könnten zwar zwei der acht zu den extremalen Pseudokreisen inzidenten 1-Cocircuits doppelt gezählt werden (die zwei Schnittpunkte der vier extremalen Pseudokreise, die nicht am Top T liegen), es bleiben aber noch sechs übrig, so dass es hier nur noch höchstens fünf balancierte Cocircuitpaare geben kann.

Die beiden Fälle, in denen das Top T ein Fünfeck oder ein Sechseck ist, werden analog gezeigt. \square

Satz 10. Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: $c_n > \frac{1}{2}n \log_2(\frac{2n}{3})$.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 4.12 in [7]. Er wird der Vollständigkeit halber angegeben.

Die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ lassen sich durch Einsetzen leicht überprüfen. Für $n \geq 3$ liefern Korollar 7 b) und Proposition 20:

$$c_{3 \cdot 2^m} \geq 2^m c_3 + 3m \cdot 2^m = 3 \cdot 2^m(2 + m). \quad (1)$$

Wir wählen m so, dass $3 \cdot 2^m \leq n < 3 \cdot 2^{m+1}$ gilt, dann ist $m + 1 > \log_2(\frac{n}{3})$ und $3 \cdot 2^m > \frac{n}{2}$, so dass wir mit Ungleichung (1)

$$c_n \geq c_{3 \cdot 2^m} > \frac{1}{2}n \log_2(\frac{2n}{3})$$

erhalten. \square

Die untere Schranke aus Satz 10 lässt sich auf beliebiges $c_{n,k}$, also als untere Schranke für die Anzahl der k -Cocircuits, verallgemeinern. Wir setzen hierfür $n \geq 3(k + 1)$.

Lemma 14. a) Gilt $m \geq 2$, so gilt auch $c_{m,0} = m$.

b) Somit gilt für alle $m \geq 3$ und alle $l \in \mathbb{N}$: $c_{2^l m, 2^l - 1} \geq (l + 2)2^{l-1}m$.

Beweis. Vergleiche den Beweis von Lemma 4.15 in [7].

a) Sämtliche 0-Cocircuits sind Ecken des Tops $-T$, das bei m Pseudokreisen höchstens m Ecken haben kann.

b) Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über l . Für $l = 0$ ist die Aussage nach Teil a) richtig. Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass die Aussage für l gilt und zeigen, dass sie dann auch für $l + 1$ richtig ist.

$$c_{2^{l+1} \cdot m, 2^{l+1} - 1} = c_{2^{l+1} \cdot m, 2(2^l - 1) + 1} \geq \quad (\text{Proposition 17})$$

$$2c_{2^l \cdot m, 2^l - 1} + 2^l m \geq \quad (\text{Induktionsvoraussetzung})$$

$$2(l + 2)2^{l-1}m + 2^l m =$$

$$((l + 1) + 2)2^l m. \quad \square$$

Lemma 15. Gilt $n \geq 3(2^l - 1)$, so gilt auch $c_{n, 2^l - 1} \geq (l + 2)2^{l-1} \lfloor \frac{n}{2^l} \rfloor$.

Beweis. Vergleiche Lemma 4.17 aus [7]. Wir wählen $m = \lfloor \frac{n}{2^l} \rfloor$. Den Beweis von Lemma

14 b) können wir uns auch so vorstellen, dass wir von $c_{m,0} = m$ ausgehen und Proposition 17 l -mal anwenden. Wir können also von einem orientierten Matroid \mathcal{O}' mit m Pseudokreisen ausgehen, die alle Kanten des Tops T (und damit auch des Tops $-T$) definieren. Wie im Beweis von Proposition 17 wird jeder der m Pseudokreise in zwei Pseudokreise aufgespalten. Dieser Prozess wird so oft wiederholt, bis wir ein orientiertes Matroid \mathcal{O} mit $2^l m$ Pseudokreisen haben. Nach Lemma 14 b) hat \mathcal{O} maximal $(l+2)2^{l-1}m$ (2^{l-1}) -Cocircuits. Das Top T von \mathcal{O} können wir uns vorstellen wie das (beliebige, feste) Top T' von \mathcal{O}' , nur dass sich dort, wo die m Ecken von T' waren, nun m Ansammlungen von jeweils $(l+2)2^{l-1}$ Cocircuits von \mathcal{O} befinden, die sehr eng beieinander liegen.

T liege in der Nähe des Nordpols, $-T$ in der Nähe des Südpols. $n - 2^l m$ Pseudokreise ordnen wir so an, dass sie nahe am Äquator liegen, und erhalten so das orientierte Matroid \mathcal{O}^* mit n Pseudokreisen. Alle (2^{l-1}) -Cocircuits von \mathcal{O} , die nahe $-T$ liegen, haben dann in den $n - 2^l m$ neuen Pseudokreisen einen schlechten Eintrag und sind daher auch (2^{l-1}) -Cocircuits von \mathcal{O}^* .

Somit hat \mathcal{O}^* mindestens genauso viele $(2^l - 1)$ -Cocircuits wie \mathcal{O} , nämlich $(l+2)2^{l-1}m = (l+2)2^{l-1}\lfloor \frac{n}{2^l} \rfloor$. □

Lemma 16. $c_{n+2,k+1} \geq c_{n,k} + 4$.

Beweis. Vergleiche Lemma 4.18 in [7]. Der Beweis verläuft vollkommen analog zum Beweis von Lemma 11.

Satz 11. Gilt $n \geq 3(k+1)$, so auch $c_{n,k} \geq \frac{1}{2}(n-3k) \log_2(2k+2)$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 4.19 in [7]. Er wird der Vollständigkeit halber angegeben.

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wir stellen k dar als $k = 2^l - 1 + a$ mit $0 \leq a < 2^l$, und n als $n = 2^l m + 2a + b$ mit $0 \leq b < 2^l$. Dann gilt $2^{l+1} > k+1$, woraus $l+2 > \log_2(2k+2)$ folgt. Es ist weiter $2^l m = n - 2a - b \geq n - 3(2^l - 1) \geq n - 3k$. Nach a -maliger Anwendung von Lemma 16 erhalten wir: $c_{n,k} \geq c_{2^l m + b, 2^l - 1} + 4a$. Wir können weiter $c_{n,k}$ mit $c_{2^l m, 2^l - 1}$ aus Lemma 14 b) von unten her abschätzen, da wir b so gewählt haben, dass wir Lemma 15 anwenden können. Insgesamt haben wir also:

$$c_{n,k} \geq (l+2)2^{l-1}m \geq \frac{1}{2}(n-3k) \log_2(2k+2). \quad \square$$

2.4 Eine untere Schranke für die Anzahl der ($\leq k$)-Cocircuits

In diesem Abschnitt geben wir polare Versionen von Sätzen aus der Publikation [1] von Oswin Aichholzer et al. an. Wir verwenden die Begriffe 'gut' und 'schlecht' hier in einer anderen Bedeutung, daher verzichten wir auf Ausdrucksweisen wie gute Einträge, schlechte Einträge usw.

Ein orientiertes Matroid \mathcal{O} vom Rang 3 sei in diesem Abschnitt stets durch ein Pseudolinienarrangement repräsentiert.

Sei T ein beschränktes Top eines uniformen orientierten Matroids \mathcal{O} auf einer endlichen Menge E vom Rang 3. Eine Pseudolinie ist nach Definition 15 *extremal*, wenn sie

eine Facette von T enthält. Seien $h_1, h_2, h_3 \in E$ extremal, wir nennen diese dann ein *extremales Dreieck*. Sei $D_i = h_j \cap h_l$ der Cocircuit auf dem Schnittpunkt zweier extremaler Pseudolinien mit $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. D_i heißt *gut*, wenn $(D_i)_{h_i} = T_{h_i}$ ist und für mindestens die Hälfte aller Einträge in D_i gilt $(D_i)_{h_m} = T_{h_m}$ oder wenn $(D_i)_{h_i} = -T_{h_i}$ ist und für mindestens die Hälfte aller Einträge in D_i gilt $(D_i)_{h_m} = -T_{h_m}$ mit $m = 1, \dots, |E|$. Ein extremales Dreieck ist *gut*, wenn seine drei Cocircuits gut sind.

Wir sagen, eine Pseudolinie $e \in E \setminus \{h_1, h_2, h_3\}$ ist gut für D_i , wenn D_i und T auf der gleichen Seite von e liegen und $(D_i)_{h_i} = T_{h_i}$ ist bzw. wenn e D_i von T trennt und $(D_i)_{h_i} = -T_{h_i}$ ist.

Proposition 21. a) Eine Pseudolinie ist stets für mindestens zwei Cocircuits eines extremalen Dreiecks gut.

b) In einem extremalen Dreieck sind stets mindestens zwei Cocircuits gut.

Beweis. a) Ein extremales Dreieck zerlegt die Ebene in 7 Gebiete, ein Innengebiet, drei Gebiete, die mit dem Dreieck eine Kante teilen und drei Gebiete, die das Dreieck nur in einer Ecke berühren. Da alle drei extremalen Pseudolinien des Dreiecks facettendefinierend für T sind, kann T nur im Innengebiet oder einem der drei Außengebiete, die mit dem Dreieck eine Kante teilen, liegen. Im letzteren Fall liege diese Kante o.E. auf h_1 .

Sei $e \in E \setminus \{h_1, h_2, h_3\}$ eine beliebige Pseudolinie. Falls e das Dreieck nicht schneidet, liegen mit T auch D_1, D_2 und D_3 auf der gleichen Seite von e , also ist e mindestens gut für D_2 und D_3 . Wenn e das Dreieck schneidet, so betrachten wir zwei Fälle. Liegen D_2 und D_3 auf der gleichen Seite von e , so liegt auf dieser Seite auch die Facette von T definiert durch h_1 und damit auch T . Also ist e gut für D_2 und D_3 . Im anderen Fall können wir annehmen, dass D_1 und D_2 auf der gleichen Seite von e liegen. Liegt T im Innengebiet des Dreiecks, so folgt wie eben, dass e gut für D_1 und D_2 ist. Andernfalls muss e , da h_2 und h_3 facettendefinierend für T sind, D_1 und D_2 von T trennen, also ist T gut für D_1 und D_3 (siehe Bild 11 auf der nächsten Seite).

Damit haben wir Behauptung a) gezeigt.

b) Aus Teil a) folgt:

$$|\{(e, D_i) \mid e \text{ ist nicht gut für } D_i, e \in E \setminus \{h_1, h_2, h_3\}, i = 1, 2, 3\}| \leq |E| - 3 .$$

Da eine Ecke D_i nicht gut ist, wenn

$$|\{(e, D_i) \mid e \text{ ist nicht gut für } D_i, e \in E \setminus \{h_1, h_2, h_3\}\}| \geq \frac{|E|}{2} \text{ gilt,}$$

folgt Behauptung b). □

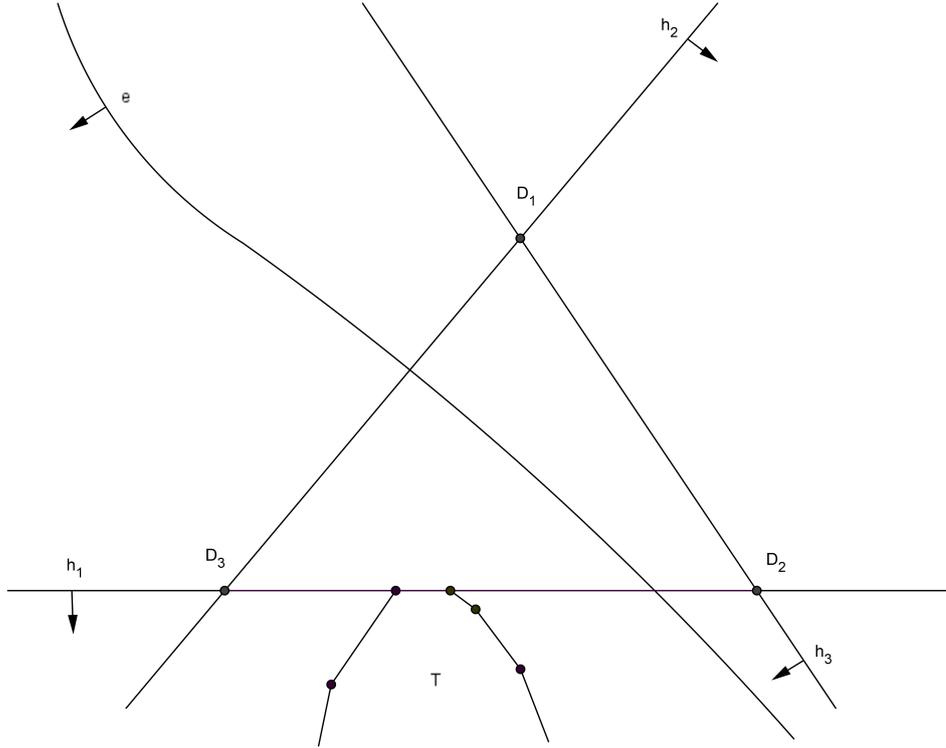


Bild 11. e muss T von D_1 und D_2 trennen, sonst könnte h_2 keine Facette von T definieren.

Nun können wir zeigen:

Lemma 17. *Ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 hat stets ein gutes Dreieck.*

Beweis. Vergleiche den Beweis von Lemma 3 in [1]. Sei Δ ein beliebiges extremales Dreieck aus extremalen Pseudolinien $h_1, h_2, h_3 \in E$. Wir nehmen an, dass Δ nicht gut ist. Nach Proposition 21 b) sind dann mindestens zwei der drei Cocircuits von Δ gut. D_1 sei der eine schlechte Cocircuit.

Es sei $E' = \{e \in E \mid e \text{ ist nicht gut für } D_1 \text{ in } \Delta\}$. Bezüglich der Lage von T zu D_1 und h_1 sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegen T und D_1 auf der gleichen Seite von h_1 , so ist jede Pseudolinie, die T und D_1 trennt, ein Element von E' . Da T beschränkt und \mathcal{O} uniform ist, muss mindestens ein Element von E' eine Facette von T definieren und somit extremal sein. Im anderen Fall teilt sich T im Außengebiet eine Kante mit h_1 (Bild 11). Hier sind alle Pseudolinien, die außerhalb von Δ liegen, Elemente von E' . Da T beschränkt ist, definiert mindestens ein Element von E' eine Facette von T , ist also extremal. Diese Facette liegt zwischen der von h_2 und der von h_3 definierten Facette von T . Damit haben wir gezeigt, dass E' mindestens eine extremale Pseudolinie enthält.

h_2 und h_3 werden beibehalten, h_1 wird durch eine andere extremale Pseudolinie $h_1' \in E'$ ersetzt. Dadurch entsteht ein neues extremales Dreieck Δ' mit den Ecken D_1, D_2' und D_3' . D_1 ist in dem neuen Dreieck ein guter Cocircuit, da $(D_1)_{h_1'} = -(D_1)_{h_1}$ ist und somit alle Koordinaten, die in Δ für D_1 schlecht waren, in Δ' für D_1 gut sind. Sind D_2' und D_3' auch gut, sind wir fertig. Wenn nicht, wiederholen wir die gleiche Prozedur. Es sei dann o.E. D_2' schlecht.

Die Pseudolinien, die in Δ für D_1 gut waren, sind in Δ' für D_1 schlecht. Nach Proposition 21 a) müssen sie dann sowohl für D_2' als auch für D_3' gut sein. Daher können nur diejenigen Pseudolinien für D_2' in Δ' schlecht sein, die für D_1 in Δ schlecht waren. Somit

gilt :

$$E'' := \{e \in E \mid e \text{ ist nicht gut für } D_2' \text{ in } \Delta'\} \subset E'.$$

E'' hat mindestens ein Element weniger als E' , weil $h_1' \in E'$ nicht zu E'' gehört. Somit werden die Kardinalitäten der Teilmengen von Pseudolinien aus E , die wir betrachten, bei jedem Schritt mindestens um eins kleiner, und dieser Prozess endet mit einem guten Dreieck. \square

$\mathcal{E}_k(E)$ ist nach Definition 14 die Menge der $(\leq k)$ -Cocircuits von \mathcal{O} , also die Menge der Cocircuits, die höchstens in k Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmen. $E_k(E)$ ist die Kardinalität von $\mathcal{E}_k(E)$.

Satz 12. *Für jedes uniforme orientierte Matroid \mathcal{O} vom Rang 3 mit der Grundmenge E , $|E| = n$ und $0 \leq k < \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ gilt:*

$$E_k(E) \geq 3 \binom{k+2}{2}.$$

Beweis. Vergleiche den Beweis von Theorem 4 in [1]. Der Beweis wird mittels Induktion über n geführt. Lemma 17 garantiert die Existenz eines guten Dreiecks $\Delta = \{h_1, h_2, h_3\}$ aus extremalen Pseudolinien.

Für $E' := E \setminus \Delta$ betrachten wir einen Cocircuit $D \in \mathcal{E}_{k-2}(E')$. Analog zum Beweis von Proposition 21 a) zerlegt Δ die Ebene in 7 Gebiete, in denen D liegen kann. Wir treffen die gleichen Vereinbarungen wie im ersten Abschnitt des Beweises von Proposition 21 a).

Um zu zeigen, dass D nicht auf der gleichen Seite von h_1, h_2 und h_3 wie das Top T liegen kann, führen wir einen Widerspruchsbeweis. Dann muss D in dem Gebiet liegen, in dem auch T liegt. Dazu sind zwei Fälle zu unterscheiden: T kann erstens im Innengebiet liegen und zweitens in dem Gebiet, das sich mit h_1 eine Kante teilt. Wegen $D \in \mathcal{E}_{k-2}(E')$ müssen sich mindestens $\frac{n}{2}$ der Koordinaten von D von den Koordinaten von T unterscheiden.

Im ersten Fall liegt D , da h_1, h_2 und h_3 facettendefinierend für T sind, zwischen T und einem der drei Cocircuits von Δ . Sei dieser Cocircuit o.E. D_1 . Eine Pseudolinie, in deren Koordinate D ein anderes Vorzeichen hat als T , muss somit D und D_1 von T trennen. Eine solche Pseudolinie ist schlecht für D_1 . Für $D \in \mathcal{E}_{k-2}(E')$ wären somit mindestens $\frac{n}{2}$ Pseudolinien schlecht für D_1 , und wir haben einen Widerspruch zu der Voraussetzung, dass D_1 ein guter Cocircuit ist.

Liegt D im zweiten Fall in dem Bereich, der disjunkt zu h_1 ist (T ist beschränkt), trennen alle Pseudolinien, in deren Koordinaten D ein anderes Vorzeichen hat als T , Δ und T von D (siehe Bild 12 auf der nächsten Seite). Diese Pseudolinien sind schlecht für D_1 , was analog zum Widerspruch führt. Ansonsten kann D nur noch zwischen T und D_2 oder D_3 liegen, falls diese Bereiche nicht zu T gehören (Bild 12). T liege dann o.E. zwischen T und D_2 . Hier trennen alle Pseudolinien, in deren Koordinaten D ein anderes Vorzeichen hat als T , D_2 und D von T , sind also schlecht für D_2 , und wir erhalten ebenso einen Widerspruch.

Somit haben wir gezeigt, dass D nicht auf der gleichen Seite von h_1, h_2 und h_3 liegen kann wie T . Daher gilt: $D \in \mathcal{E}_k(E)$.

Wir wollen nun weiter mit $\mathcal{E}\Delta_k(E)$ die Menge der $(\leq k)$ -Cocircuits von \mathcal{O} bezeichnen, die inzident sind zu Pseudolinien von Δ . Dann haben wir:

$$\mathcal{E}_{k-2}(E') \cup \mathcal{E}\Delta_k(E) \subset \mathcal{E}_k(E). \quad (1)$$

Zu jeder der drei extremalen Pseudolinien h_1, h_2 und h_3 sind nach Korollar 1 a) $2(k+1)$ ($\leq k$)-Cocircuits inzident.

Wir beobachten, dass höchstens drei Cocircuits aus $\mathcal{E}\Delta_k(E)$ inzident zu zwei Pseudolinien von Δ sein können (dies sind die drei Ecken D_1, D_2 und D_3 von Δ), und dass die Vereinigung in der Gleichung (1) disjunkt ist.

Insgesamt haben wir, indem wir die Induktionsvoraussetzung benutzen

$$E_k(E) \geq E_{k-2}(E') + 3 + 6k \geq 3\binom{k}{2} + 3 + 6k = 3\binom{k+2}{2}. \quad (2) \quad \square$$

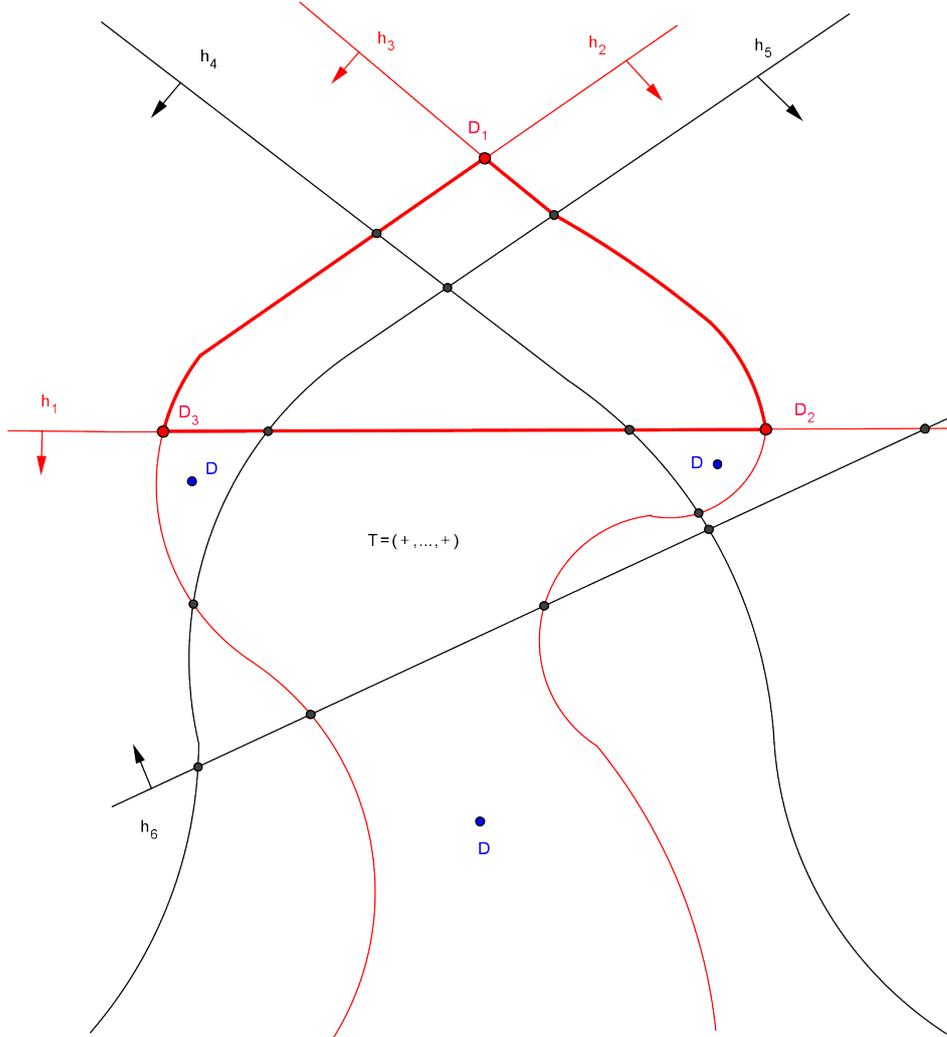


Bild 12. D muss in einem der drei angegebenen Bereiche liegen, um in den Koordinaten h_1, h_2 und h_3 ein Plus zu haben. Δ ist rot und mit breiteren Linien dargestellt.

Ein k -Cocircuit von \mathcal{O} ist nach Definition 14 ein Cocircuit, der in k Koordinaten mit den Koordinaten von T übereinstimmt.

Korollar 8. Sei $0 \leq k < \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$. Seien \mathcal{O} ein uniformes orientiertes Matroid vom Rang 3 mit der Grundmenge E , $|E| = n$, $\Delta = \{h_1, h_2, h_3\}$ ein gutes Dreieck und $E' = E \setminus \Delta$. Ist $E_k(E) = 3\binom{k+2}{2}$, dann gilt

- a) $E_{k-2}(E') = 3\binom{k}{2}$.
- b) Ein k -Cocircuit von E ist entweder ein $(k-2)$ -Cocircuit von E' oder ist inzident zu einer Pseudolinie von Δ .

Beweis. Der Beweis verläuft vollkommen analog zum Beweis von Corollary 5 aus [1]. Wir geben ihn der Vollständigkeit halber an.

Gilt $E_k(E) = 3\binom{k+2}{2}$, so werden aus den beiden Ungleichheitszeichen in Gleichung (2) zwei Gleichheitszeichen. Daher ist $E_{k-2}(E') = 3\binom{k}{2}$, und aus Gleichung (1) wird $\mathcal{E}_{k-2}(E') \cup \mathcal{E}\Delta_k(E) = \mathcal{E}_k(E)$ (disjunkte Vereinigung), was trivialerweise Teil b) impliziert. \square

Satz 13. Sei $0 \leq k < \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$. Gilt $E_k(E) = 3\binom{k+2}{2}$, dann ist das Top T ein Dreieck.

Beweis. Vergleiche den Beweis von Theorem 6 in [1]. Wir beweisen den Satz durch Induktion über k . Für $k = 0$ muss nichts bewiesen werden, also sei $k = 1$. Nach Voraussetzung ist dann $E_1(E) = 9$. Sei i die Anzahl der extremalen Pseudolinien von \mathcal{O} . Wegen Korollar 1 b) gibt es i 0-Cocircuits und mindestens i 1-Cocircuits (zwei pro extremaler Pseudolinie, aber jeder könnte zweimal gezählt werden). Daher gilt $E_1(E) = 9 \geq 2i$ und darum $i \leq 4$.

Wir wollen zeigen, dass $i = 3$ gilt und führen dazu die Annahme $i = 4$ zum Widerspruch. Gilt $i = 4$, können höchstens zwei 1-Cocircuits zweimal gezählt werden. Dies sind diejenigen 1-Cocircuits, die zu den zwei Paaren von extremalen Pseudolinien inzident sind, die sich nicht am Rand des Top $-T$ schneiden (wegen $k = 1 < \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ muss $n \geq 6$ gelten, daher kann das Negative eines 1-Cocircuits kein 1-Cocircuit sein). Wir haben somit $4 + 8 - 2 = 10$ (≤ 1)-Cocircuits und können schließen: Gilt $E_1 = 9$, so ist das Top T ein Dreieck.

Für den allgemeinen Fall $k \geq 2$ sei $\Delta = \{h_1, h_2, h_3\}$ das durch Lemma 17 garantierte gute Dreieck, und sei weiter $E' = E \setminus \Delta$. Sei \mathcal{O}' das orientierte Matroid mit der Grundmenge E' , und sei T' das Top von \mathcal{O}' , in dem T enthalten ist (siehe Bild 13 auf der nächsten Seite).

Wegen Korollar 8 a) gilt $E_{k-2}(E') = 3\binom{k}{2}$, und als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass das Top T' ein Dreieck ist. Wir bezeichnen dieses Dreieck mit $\Delta' := \{h_1', h_2', h_3'\}$, und nach Induktionsvoraussetzung gilt offenbar $\Delta' = T'$.

Wegen Korollar 8 b), insbesondere wegen $\mathcal{E}_{k-2}(E') \cup \mathcal{E}\Delta_k(E) = \mathcal{E}_k(E)$ (disjunkte Vereinigung) aus dem Beweis von Korollar 8 b), kann kein $(k-1)$ -Cocircuit von E' ein ($\leq k$)-Cocircuit von E sein. Daher muss jeder $(k-1)$ -Cocircuit von E' in mindestens zwei Koordinaten von Δ das gleiche Vorzeichen haben wie das Top T .

Sei $\mathcal{D}\Delta'_{k-1}(E')$ die Menge der sechs $(k-1)$ -Cocircuits von E' , die zu den drei extremalen Pseudolinien von Δ' inzident sind (diese Cocircuits sind in Bild 13 blau dargestellt). Jedes Element von $\mathcal{D}\Delta'_{k-1}(E')$ muss in zwei Koordinaten von Δ' das gleiche Vorzeichen wie T oder, anders ausgedrückt, in zwei Koordinaten von Δ' das negative Vorzeichen von $-T$ haben. Es muss daher zwölf Paare geben von Elementen von $\mathcal{D}\Delta'_{k-1}(E')$ und Pseudolinien aus Δ , so dass die Pseudolinie das Element von $\mathcal{D}\Delta'_{k-1}(E')$ von $-T$ trennt.

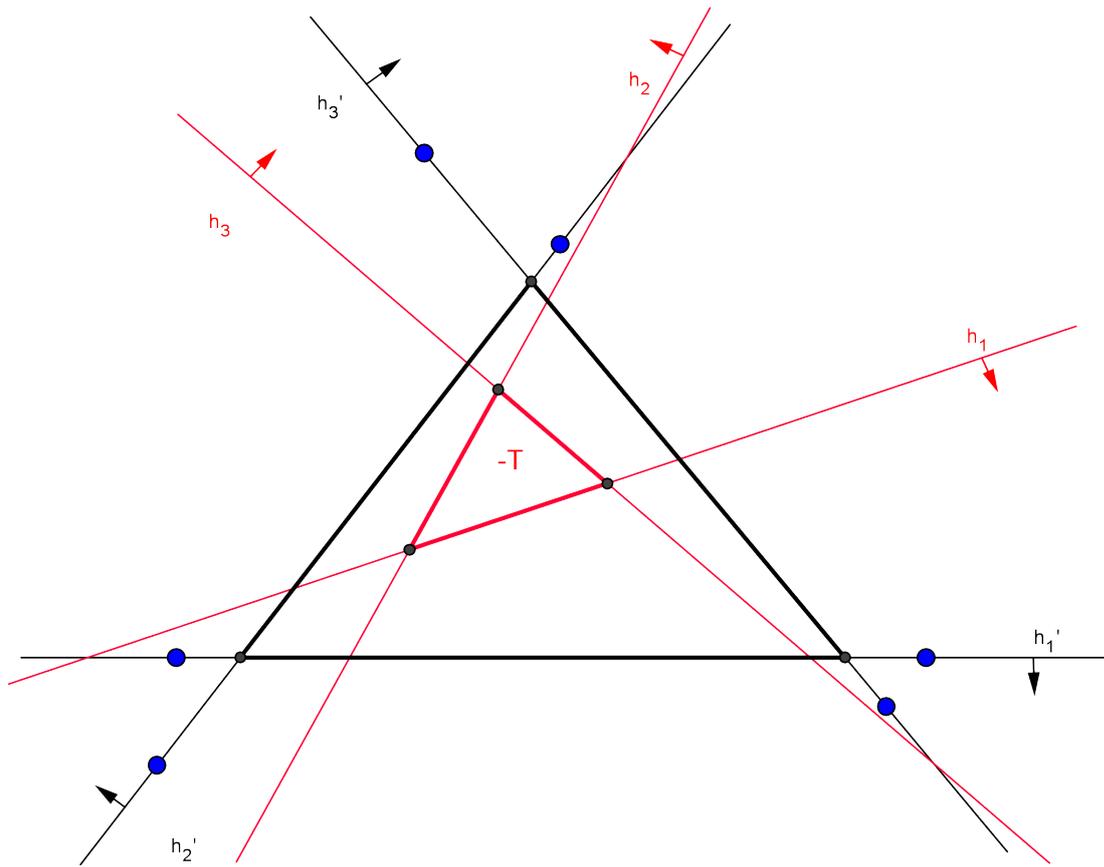


Bild 13. Jede Pseudolinie von Δ trennt vier $(k - 1)$ -Cocircuits von E' von $-T$.

Da jede Pseudolinie aus Δ facettendefinierend für $-T$ ist, kann sie nur höchstens vier Elemente von $\mathcal{D}\Delta'_{k-1}(E')$ von $-T$ trennen. Es muss 12 Paare geben, daher muss jede Pseudolinie aus Δ die maximale Anzahl von vier Elementen von $\mathcal{D}\Delta'_{k-1}(E')$ auf der Seite haben, auf der nicht $-T$ liegt. Die Pseudolinien von Δ können somit nur wie in Bild 13 dargestellt angeordnet sein und das Top $-T$ (und damit auch T) muss ein Dreieck sein. \square

Kapitel 3

Birch-Partitionen und orientierte Matroide

In diesem Kapitel verallgemeinern wir Satz 3 aus Kapitel 1.2 auf Pseudopunktkonfigurationen. Dabei wird sowohl auf Methoden zurückgegriffen, die Stefan Hell beim Beweis dieses Satzes in [10] benutzt, als auch auf Methoden von Jean-Pierre Roudneff aus [14].

Anschließend werden die Ergebnisse polarisiert und (für realisierbare orientierte Matroide, vergleiche Kapitel 1.3) auf den Rang r erweitert.

Zum Schluss verallgemeinern und polarisieren wir noch eine Aussage über Simplices, in deren konvexer Hülle ein Punkt liegt.

3.1 Eine untere Schranke für die Anzahl der Birch-Partitionen

3.1.1 Pseudopunktkonfigurationen

Sei \mathcal{O} ein azyklisches orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge V , $|V| = n$, und sei \mathcal{O} repräsentiert durch die Pseudopunktconfiguration $\mathcal{A}(V)$. $\mathcal{A}(V)$ sei so definiert wie in Definition 13. Jean-Pierre Roudneff definiert in [14] eine *elementare Transformation* τ als entweder die Umkehrung eines Dreiecks oder die Kreuzung einer Pseudolinie durch einen Punkt (vergleiche auch Bild 18 auf Seite 49 und Bild 15 auf Seite 47). Keine Ecke des Dreiecks darf hierbei ein Punkt aus V sein.

Die folgenden beiden Definitionen stammen von Jean-Pierre Roudneff, siehe [14], Seite 191.

Definition 17. *Wir sagen, dass sich die Punkte von V in allgemeiner Lage (in Bezug auf die Pseudopunktconfiguration $\mathcal{A}(V)$) befinden, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Jede Pseudolinie $L \neq L_\infty$ enthält genau zwei Punkte von V .*
- (ii) *Kreuzen sich drei Pseudolinien L_1, L_2, L_3 aus $\mathcal{A}(V)$ im gleichen Punkt y , dann gilt $y \in V$ (also $L_1 = yz_1, L_2 = yz_2, L_3 = yz_3$ für drei paarweise verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in V$).*

Definition 18. *Seien eine Pseudopunktconfiguration $\mathcal{A}(V)$, eine Teilmenge W von V und ein Punkt $x \in \mathbb{P}$ gegeben. Wir sagen, dass x zu der konvexen Hülle von W (in Bezug auf $\mathcal{A}(V)$) gehört, wenn jeder Pfad von x nach L_∞ eine Kante $\{y, z\}$ mit $y, z \in W$ berührt. Wir benutzen die Bezeichnung $\text{conv}(W)$ für die konvexe Hülle von W .*

Wir identifizieren mit einer dreielementigen Teilmenge V' von V das Dreieck, das von den Elementen von V' aufgespannt wird.

Sei V^* eine endliche Menge mit $V \subset V^*$ und $|V^*| = n+1$ und gelte $V^* \setminus V = \{x\}$. $\mathcal{A}(V)$ und $\mathcal{A}(V^*)$ seien in allgemeiner Lage. $\mathcal{A}(V)$ sei zusammengesetzt aus den Pseudolinien von $\mathcal{A}(V^*)$, die x nicht enthalten. Wir sagen dann, $\mathcal{A}(V^*)$ ist eine *Punkterweiterung* von $\mathcal{A}(V)$ um den Punkt x .

Definition 19 verallgemeinert Definition 8 aus Kapitel 1.2.

Definition 19. Sei $|V| = n = 3N$ für ein $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Sei $x \in \mathcal{A}(V^*)$ der Punkt, um den $\mathcal{A}(V^*)$ $\mathcal{A}(V)$ erweitert. x heißt ein *Birch-Punkt* von V , wenn es eine Partition von V in N Teilmengen V_1, V_2, \dots, V_N derart gibt, dass $|V_i| = 3$ und $x \in \text{conv}(V_i)$ für $i = 1, \dots, N$ gilt. Die Partition von V heißt eine *Birch-Partition* für x . $B_x(\mathcal{A})$ sei die Anzahl der ungeordneten Birch-Partitionen für x .

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lemma 7 aus dem Aufsatz [10] von Stefan Hell für die Dimension 2.

Lemma 18. Sei $X \subset V^* \setminus \{x\}$ eine Menge von vier Punkten der Pseudopunktkonfiguration $\mathcal{A}(V^*)$ in allgemeiner Lage und sei $X \cup \{x\}$ in allgemeiner Lage. Dann ist die Anzahl der Dreiecke mit Eckpunkten in X , in deren konvexen Hüllen x liegt, entweder 0 oder 2.

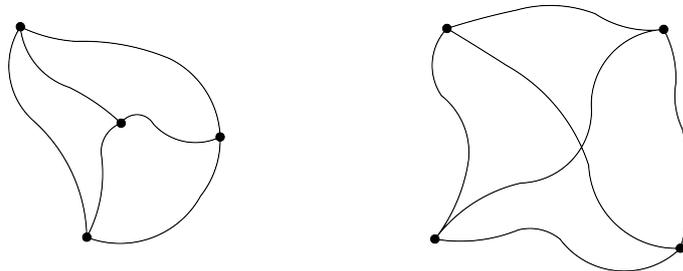


Bild 14. Zwei Möglichkeiten, wie vier Punkte in einer Pseudopunktkonfiguration angeordnet sein können.

Beweis. Wir betrachten nur die vier Punkte aus X und ihre sechs Verbindungskanten. Durch diese Konfiguration sind stets vier Dreiecke mit Eckpunkten in X bestimmt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Im ersten Fall liegt ein Punkt in der konvexen Hülle der drei übrigen Punkte (Bild 14 links). Diese Konfiguration zerlegt die Ebene in vier Gebiete, ein Außengebiet und drei Innengebiete. Liegt der Punkt x im Außengebiet, ist er in keinem der vier Dreiecke mit Eckpunkten in X enthalten. Liegt x in einem der drei Innengebiete, so ist er in dem Dreieck, das dieses Innengebiet definiert, sowie in der Vereinigung der drei Innengebiete, die auch eines der vier Dreiecke definiert, enthalten, also insgesamt in genau zwei Dreiecken mit Eckpunkten in X .

Im zweiten Fall liegt kein Punkt in der konvexen Hülle von drei anderen Punkten (Bild 14 rechts). Diese Konfiguration zerlegt die Ebene in fünf Gebiete, ein Außengebiet und vier Innengebiete. Liegt x im Außengebiet, so ist er wie im ersten Fall in keinem der vier Dreiecke mit Eckpunkten in X enthalten. Liegt x in einem der vier Innengebiete, so ist er in genau zwei Dreiecken mit Eckpunkten in X enthalten, weil jedes Innengebiet die Schnittmenge von genau zwei Dreiecken mit Eckpunkten in X ist. \square

Anmerkung: Geht die Pseudopunktconfiguration $\mathcal{A}'(V^*)$ aus $\mathcal{A}(V^*)$ durch eine elementare Transformation τ hervor, so meinen wir mit einer Veränderung von $B_x(\mathcal{A})$ im Folgenden stets einen Unterschied des Wertes von $B_x(\mathcal{A})$ im Vergleich zum Wert von $B_x(\mathcal{A}')$.

Das folgende Bild ist aus dem Aufsatz [14], Figure 2, von Jean-Pierre Roudneff entliehen.

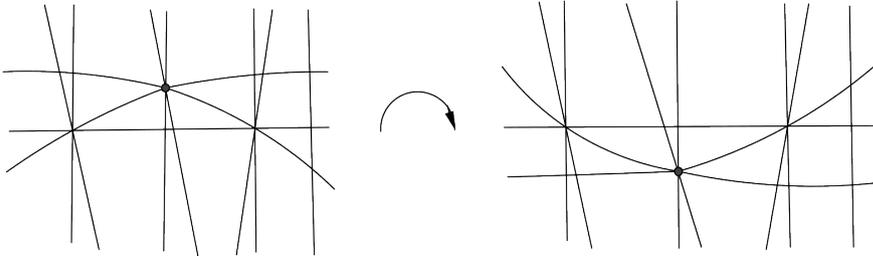


Bild 15. Beispiel für die Kreuzung einer Pseudolinie durch einen Punkt.

Lemma 19. Sei $|V| = n = 3N$, $N \geq 2$. Ist $B_x(\mathcal{A})$ gerade und geht $\mathcal{A}'(V^*)$ aus $\mathcal{A}(V^*)$ durch eine elementare Transformation τ , die die Kreuzung einer Pseudolinie durch einen Punkt aus V^* ist (siehe Bild 15), hervor, so ist auch $B_x(\mathcal{A}')$ gerade.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 2 i) aus [10]. Er wird durch vollständige Induktion über $N \geq 2$ geführt.

Sei zunächst $N = 2$, also $|V| = 6$. Wir zeigen in der Fallunterscheidung weiter unten, dass sich für jede elementare Transformation τ , die die Kreuzung einer Pseudolinie durch einen Punkt aus V^* ist, die Parität von $B_x(\mathcal{A})$ nicht ändert.

Wir betrachten die Menge aller Dreiecke S , die drei Punkte aus V als Eckpunkte haben und die den Punkt x in ihrer konvexen Hülle enthalten. Wechselt x durch τ von einer Seite einer Pseudolinie auf die andere, so kann sich diese Menge verändern (durch andere Ecken von $\mathcal{A}(V^*)$, die durch τ von einer Seite einer Pseudolinie auf die andere wechseln, wird diese Menge nicht verändert). Sei für beliebige, feste $y, z \in V$ $K := \{y, z\}$ die Kante mit den Endpunkten y und z . x überquere durch τ die Kante K . Für alle Dreiecke, die K nicht als Kante enthalten, ändert sich nichts. Ist S von der Art $K \cup \{v\}$ für ein $v \in V \setminus K$, so gilt folgendes:

$x \in \text{conv}(S)$ vor der Anwendung von τ gdw $x \notin \text{conv}(S)$ nach der Anwendung von τ .

Eine Birch-Partition besteht aus einem Dreieck S und seinem Komplement \bar{S} in V -das wegen $|V| = 6$ ebenfalls ein Dreieck ist-, so dass x in der konvexen Hülle von S und in der konvexen Hülle von \bar{S} enthalten ist. Die durch τ verursachte Veränderung von $B_x(\mathcal{A})$ kann daher nur von Partitionen kommen, die K als Kante von S oder von \bar{S} enthalten. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Fall 1: Die Komplemente aller Dreiecke, die K als Kante enthalten, enthalten x nicht in ihrer konvexen Hülle. Dann verändert sich $B_x(\mathcal{A})$ nicht, da die Menge aller Birch-Partitionen gleich bleibt.

Fall 2: Wir nehmen an, dass K nicht Kante eines Dreiecks S ist, so dass $\{S, \bar{S}\}$ eine

Birch-Partition ist, und dass nach der Anwendung von τ eine Birch-Partition entsteht. Wir zeigen, dass Birch-Partitionen in Paaren entstehen.

Die neu entstandene Birch-Partition bestehe aus $S = K \cup \{v_1\}$ und dem Komplement \bar{S} von S in V für $v_1 \in V \setminus K$. Wegen Lemma 18 gibt es genau zwei Dreiecke in $\bar{S} \cup \{v_1\}$ derart, dass x in der konvexen Hülle von beiden enthalten ist. Das eine ist \bar{S} , sei S^* das andere (vergleiche auch Bild 16).

Nach unserer Annahme gilt $x \notin \text{conv}(\bar{S}^*)$ vor der Anwendung von τ , da \bar{S}^* von der Gestalt $\bar{S}^* = K \cup \{v_2\}$ für ein $v_2 \in V \setminus K$ sein muss. Die Menge $\{S^*, \bar{S}^*\}$ ist also unsere zweite Birch-Partition, da $x \in \text{conv}(\bar{S}^*)$ nach der Anwendung von τ gilt.

Um zu zeigen, dass es keine drei Birch-Partitionen geben kann, führen wir einen Widerspruchsbeweis. Seien die drei neuen Birch-Partitionen von der Art $S_1 = K \cup \{v_1\}$, $S_2 = K \cup \{v_2\}$ und $S_3 = K \cup \{v_3\}$ mit $v_1, v_2, v_3 \in V \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen. $x \in \text{conv}(\bar{S}_i)$ für $i = 1, 2, 3$ auf der einen und $|\cup_{i=1}^3 \bar{S}_i| = 4$ (wegen $K \not\subset \bar{S}_i$ für $i = 1, 2, 3$) auf der anderen Seite widerspricht Lemma 18.

Daher sind die beiden neuen Birch-Partitionen von der Art $K \cup \{v_1\}$ und $K \cup \{v_2\}$, mit $v_1, v_2 \in V \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen.

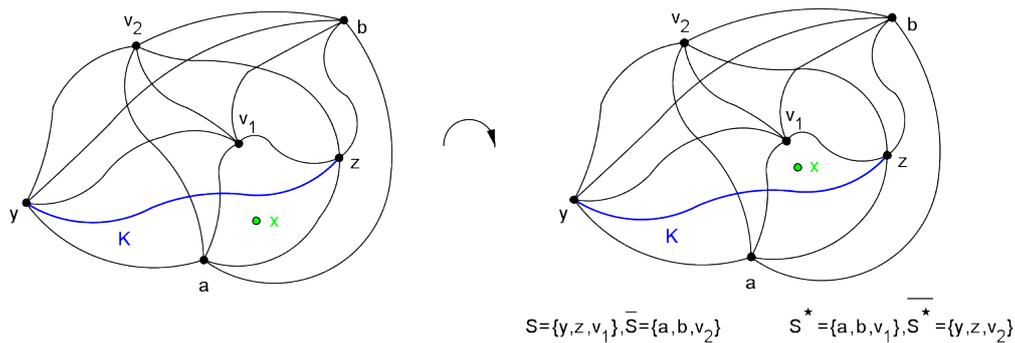


Bild 16. So könnten im Fall 2 die sechs Punkte angeordnet sein. Durch τ überquert x die Kante K .

Fall 3: Dies ist der umgekehrte Fall von Fall 2. Wir nehmen an, dass es vor der Anwendung von τ genau zwei Birch-Partitionen der Art $K \cup \{v_1\}$ und $K \cup \{v_2\}$, $v_1, v_2 \in V \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen gibt. Beide verschwinden, nachdem x K überquert hat. Neue Birch-Partitionen entstehen nicht, weil es dafür ein weiteres Dreieck $K \cup \{v_3\}$ mit $v_3 \in V \setminus K$ geben müsste, dessen konvexe Hülle x enthält. Dieses kann es aber wegen Lemma 18 nicht geben.

Fall 4: Als letztes nehmen wir an, dass es vor der Anwendung von τ genau eine Birch-Partition der Art $S = K \cup \{v\}$, $v \in V \setminus K$, zusammen mit dem Komplement \bar{S} von S in V gibt. Diese Birch-Partition verschwindet, und eine neue entsteht:

Es gilt $x \notin \text{conv}(S)$ nach der Anwendung von τ , so dass $\{S, \bar{S}\}$ verschwindet. Wie in Fall 2 gibt es genau zwei Dreiecke in $\bar{S} \cup \{v\}$ derart, dass x in der konvexen Hülle von beiden enthalten ist. Das eine ist \bar{S} , sei S^* das andere (siehe hierzu auch Bild 17 auf der nächsten Seite). Nach unserer Annahme gilt vor der Anwendung von τ $x \notin \text{conv}(\bar{S}^*)$, da \bar{S}^* von der Gestalt $\bar{S}^* = K \cup \{v'\}$ für ein $v' \in V \setminus K$ sein muss. Da nach der Anwendung von τ $x \in \text{conv}(\bar{S}^*)$ gilt, ist $\{S^*, \bar{S}^*\}$ unsere neue Birch-Partition.

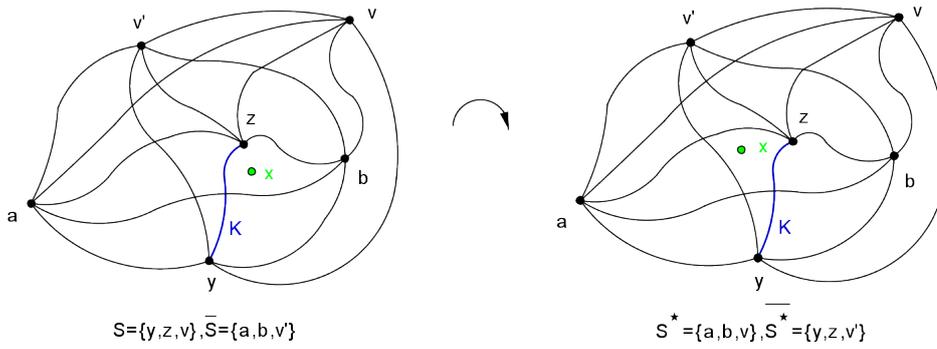


Bild 17. Mögliche Anordnung der sechs Punkte im Fall 4. x überquert durch τ die Kante K .

Für den Induktionsschritt sei $N \geq 3$ und sei $p \in V$ ein Punkt aus V . Seien F_1, F_2, \dots, F_l mit $l \in \mathbb{N}$ alle Dreiecke, die p als Ecke enthalten und die zu einer Birch-Partition von x in N Teilmengen vervollständigt werden können. Somit gilt für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ $x \in \text{conv}(F_i)$. Notiert man für jedes F_i , $i \in \{1, \dots, l\}$, die Anzahl der Birch-Partitionen, die F_i enthalten, und summiert man diese Anzahlen von 1 bis l , so ist das Ergebnis genau $B_x(\mathcal{A})$, die Anzahl der Birch-Partitionen für x : Es werden alle gezählt und keine wird mehrmals gezählt.

Für jedes F_i gilt: Lässt man F_i weg, bleibt eine Birch-Partition für x in $N - 1$ Teilmengen übrig. Es existiert somit für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ eine Bijektion zwischen den Birch-Partitionen der Konfiguration, bei der F_i weggelassen wurde, und den Birch-Partitionen der Konfiguration, die F_i enthält. Nach der Induktionsannahme gilt für jedes weggelassene F_i :

Ist die Anzahl der Birch-Partitionen von x in $N - 1$ Teilmengen vor der Anwendung von τ gerade, so auch hinterher. Unter der Voraussetzung, dass $B_x(\mathcal{A})$ gerade ist, ist dann auch $B_x(\mathcal{A}')$ als Summe mit ausschließlich geraden Summanden gerade. \square

Das folgende Bild ist ebenfalls aus dem Aufsatz [14], Figure 1, von Jean-Pierre Roudneff entliehen.

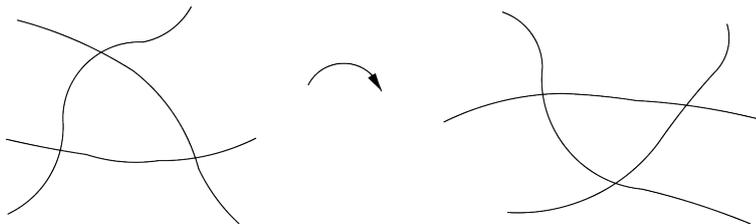


Bild 18. Die Umkehrung eines Dreiecks.

Lemma 20. Sei $|V| = n = 3N$, $N \geq 2$. Ist $B_x(\mathcal{A})$ gerade und geht $\mathcal{A}'(V^*)$ aus $\mathcal{A}(V^*)$ durch eine elementare Transformation τ , die die Umkehrung eines Dreiecks ist (siehe Bild 18), hervor, so ist auch $B_x(\mathcal{A}')$ gerade.

Beweis. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 19, aber für allgemeines N , überlegt man sich, dass $B_x(\mathcal{A})$ sich nur dann ändern kann, wenn der Birch-Punkt x durch τ von einer Seite einer Pseudolinie auf die andere wechselt. Dies kann durch die Umkehrung eines Dreiecks in $\mathcal{A}(V^*)$ nicht passieren, da hierfür nur Dreiecke zugelassen sind, die keinen Punkt aus V^* enthalten.

Somit ändert sich durch die Umkehrung eines Dreiecks $B_x(\mathcal{A})$ nicht, der Wert von $B_x(\mathcal{A}')$ ist gleich dem Wert von $B_x(\mathcal{A})$. \square

Aus Lemma 19 und Lemma 20 folgt:

Korollar 9. *Sei $|V| = n = 3N$, $N \geq 2$. Ist $B_x(\mathcal{A})$ gerade und geht $\mathcal{A}'(V^*)$ aus $\mathcal{A}(V^*)$ durch eine elementare Transformation τ hervor, so ist auch $B_x(\mathcal{A}')$ gerade.*

Proposition 22. *Sei $|V| = n = 3N$, $N \geq 2$. $B_x(\mathcal{A})$ ist stets gerade.*

Beweis. Nach Theorem 3.1 [14] lassen sich zwei beliebige Pseudopunktfigurationen $\mathcal{A}(V^*)$ und $\mathcal{A}'(V^*)$ durch eine endliche Folge von elementaren Transformationen ineinander überführen. Mit dieser Methode lässt sich stets eine Konfiguration erreichen, in der x kein Birch-Punkt und daher $B_x(\mathcal{A}') = 0$ ist (x lässt sich durch eine endliche Folge von elementaren Transformationen beliebig nahe an den Rand des Arrangements bringen, so dass x kein Birch-Punkt mehr ist). Man wendet Theorem 3.1 [14] erneut an, um wieder die ursprüngliche Konfiguration zu erhalten. Aus Korollar 9 folgt dann die Behauptung. \square

Mit Hilfe von Proposition 22 können wir eine untere Schranke für die Anzahl der Birch-Partitionen angeben.

Satz 14. *Sei $|V| = n = 3N$, $N \geq 2$. Dann gilt:*

$$B_x(\mathcal{A}) > 0 \Rightarrow B_x(\mathcal{A}) \geq N! \quad .$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 2 ii) aus [10]. Er wird durch vollständige Induktion über $N \geq 2$ geführt.

Den Fall $N = 2$ garantiert uns Proposition 22: $B_x(\mathcal{A})$ ist gerade, also gilt

$$B_x(\mathcal{A}) > 0 \Rightarrow B_x(\mathcal{A}) \geq 2 = N! \quad .$$

Sei nun $N \geq 3$ und $B_x(\mathcal{A}) > 0$. Dann gibt es eine Birch-Partition F_1, F_2, \dots, F_N . Lassen wir in dieser Birch-Partition für $i \in \{1, \dots, N\}$ ein F_i weg, bleibt eine Birch-Partition für x in $N - 1$ Teilmengen übrig. Nach der Induktionsannahme hat die Vereinigungsmenge von $(N - 1)$ -vielen F_i 's mindestens $(N - 1)!$ Birch-Partitionen. Insbesondere gibt es $(N - 1)!$ Birch-Partitionen von V in N Teilmengen, die mit F_1 beginnen. Sei p ein Element von F_1 .

Für jedes Paar F_1, F_i mit $i \in \{2, 3, \dots, N\}$ wollen wir mit \mathcal{A}_i das Pseudolinienarrangement bezeichnen, das aus \mathcal{A} hervorgeht, wenn alle Pseudolinien weggelassen werden, die Punkte aus $V \setminus (F_1 \cup F_i)$ enthalten. Dann haben wir für jedes Paar F_1, F_i wieder $B_x(\mathcal{A}_i) > 0$, so dass es nach Proposition 22 eine zweite Birch-Partition $\tilde{F}_1^i, \tilde{F}_i$ von $F_1 \cup F_i$ geben muss. Wir nehmen o.E. $p \in \tilde{F}_1^i$ an. Die N Mengen $F_1, \tilde{F}_1^2, \tilde{F}_1^3, \dots, \tilde{F}_1^N$ sind durch ihre Konstruktion bedingt paarweise verschieden. Jede von ihnen liefert nach der Induktionsannahme $(N - 1)!$ Birch-Partitionen von V . Daraus folgt die Behauptung. \square

3.1.2 Pseudosphärenarrangements

Orientierte Matroide vom Rang 3

Wir polarisieren in diesem Unterkapitel Schritt für Schritt die Ergebnisse des letzten Abschnitts.

Sei \mathcal{O} ein uniformes, azyklisches orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$, und sei \mathcal{O} repräsentiert durch ein Arrangement von Pseudokreisen.

Für die folgende Definition siehe z.B. [5], Kapitel 9.1. Sie geht auf Michel Las Vergnas, einen der Autoren von [5] zurück.

Definition 20 (Las Vergnas). Die konvexe Hülle in \mathcal{O} einer Teilmenge A von E sei definiert als:

$\text{conv}_{\mathcal{O}}(A) := A \cup \{e \in E \mid \text{es gibt einen Circuit } X \text{ von } \mathcal{O} \text{ mit } X^- = \{e\} \text{ und } X^+ \subseteq A\}$.

Sei E^* eine endliche Menge mit $E \subset E^*$ und $|E^*| = n + 1$ und gelte $E^* \setminus E = \{x\}$. Sei \mathcal{O}^* ein uniformes, azyklisches orientiertes Matroid vom Rang 3 auf der Menge E^* . \mathcal{O} sei die Einschränkung von \mathcal{O}^* auf E . Wir sagen dann, \mathcal{O}^* ist eine *Erweiterung* von \mathcal{O} um das Element x .

Definition 21. Sei $|E| = n = 3N$ für ein $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Sei $x \in E^*$ das Element, um das E^* E erweitert. x heißt ein *Birch-Element* von E , wenn es eine Partition von E in N Teilmengen E_1, E_2, \dots, E_N derart gibt, dass $|E_i| = 3$ und $x \in \text{conv}_{\mathcal{O}^*}(E_i)$ für $i = 1, \dots, N$ gilt. Die Partition von E heißt eine *Birch-Partition* für x . $B_x(E^*)$ sei die Anzahl der ungeordneten Birch-Partitionen für x .

Wir sagen, ein Dreieck wird von drei Pseudokreisen *berandet*, wenn es auf den positiven Seiten der drei Pseudokreise liegt. Seien $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ und gelte $e_i, e_j, e_l \in E$. Mit der Menge $\{e_i, e_j, e_l\}$ bezeichnen wir im Folgenden das Dreieck, das von den Pseudokreisen e_i, e_j und e_l berandet wird. Ein Pseudokreis x liegt nach Definition 20 in der konvexen Hülle von e_i, e_j und e_l , wenn das von e_i, e_j und e_l berandete Dreieck ganz auf der positiven Seite von x liegt.

Lemma 21. Sei $F \subset E$ eine vierelementige Teilmenge von E und sei $F \cup \{x\}$ die Grundmenge eines uniformen, azyklischen orientierten Matroids vom Rang 3. Dann ist die Anzahl der Dreiecke, die sowohl von drei Pseudokreisen aus F berandet sind, als auch ganz auf der positiven Seite von x liegen, entweder 0 oder 2.

Beweis. Sei $F = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Wir nennen ein Dreieck *positiv*, wenn es von drei Pseudokreisen aus F berandet wird. Liegt kein positives Dreieck auf der positiven Seite von x , sind wir fertig.

Im Folgenden nehmen wir an, dass mindestens ein positives Dreieck ganz auf der positiven Seite von x liegt. Wir werden durch Fallunterscheidung zeigen, dass es dann stets noch genau ein weiteres positives Dreieck gibt, das ganz auf der positiven Seite von x liegt.

Sei das eine positive Dreieck auf der positiven Seite von x o. E. $\{e_1, e_2, e_3\}$. Da die Bezeichnungen von e_1, e_2 und e_3 beliebig sind, gibt es vier Möglichkeiten, wo der vierte Pseudokreis e_4 liegen kann:

Fall 1: Der Pseudokreis e_4 geht durch das Dreieck $\{e_1, e_2, e_3\}$ hindurch und ist wie in Bild 19 (nächste Seite) links orientiert. Dann sind $\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\{e_2, e_3, e_4\}$ die einzigen

beiden positiven Dreiecke auf der positiven Seite von x , $\{e_1, e_2, e_4\}$ und $\{e_1, e_3, e_4\}$ liegen teilweise auf der negativen Seite von x .

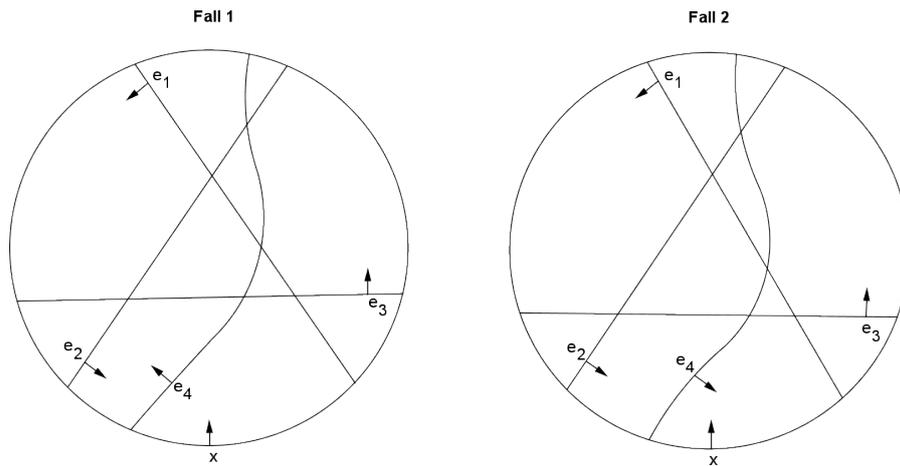


Bild 19. Die ersten beiden Fälle.

Fall 2: Der Pseudokreis e_4 geht durch das Dreieck $\{e_1, e_2, e_3\}$ hindurch und ist wie in Bild 19 rechts orientiert. Dann sind $\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\{e_1, e_3, e_4\}$ die einzigen beiden positiven Dreiecke auf der positiven Seite von x , $\{e_1, e_2, e_4\}$ und $\{e_2, e_3, e_4\}$ liegen teilweise auf der negativen Seite von x .

Fall 3: Der Pseudokreis e_4 geht nicht durch das Dreieck $\{e_1, e_2, e_3\}$ hindurch und ist wie in Bild 20 links orientiert. Dann sind $\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\{e_2, e_3, e_4\}$ die einzigen beiden positiven Dreiecke auf der positiven Seite von x , $\{e_1, e_2, e_4\}$ und $\{e_1, e_3, e_4\}$ liegen teilweise auf der negativen Seite von x .

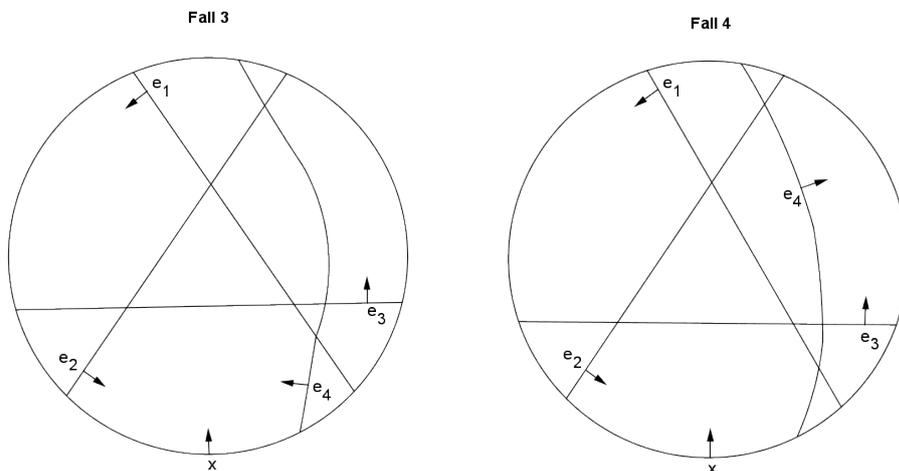


Bild 20. Die Fälle 3 und 4.

Fall 4: Der Pseudokreis e_4 geht nicht durch das Dreieck $\{e_1, e_2, e_3\}$ hindurch und ist wie in Bild 20 rechts orientiert. Dann ist $\{e_1, e_2, e_3\}$ das einzige positive Dreieck auf der positiven Seite von x , $\{e_1, e_2, e_4\}$, $\{e_1, e_3, e_4\}$ und $\{e_2, e_3, e_4\}$ liegen ganz oder teilweise auf der negativen Seite von x .

Da diese Anordnung aber kein azyklisches orientiertes Matroid ist, können wir diesen Fall ausschließen.

Somit liegen auf der positiven Seite von x stets null oder zwei positive Dreiecke. □

Dem Umkehren eines Dreiecks (siehe Bild 18 auf Seite 49) in einem Pseudolinienarrangement entspricht das Umkehren von zwei Dreiecken in dem zugehörigen Pseudosphärenarrangement. Der Einfachheit halber wollen wir aber auch bei Pseudosphärenarrangements von der Umkehrung *eines* Dreiecks sprechen.

Anmerkung: Geht das Pseudosphärenarrangement $\mathcal{A}'(E^*)$ aus $\mathcal{A}(E^*)$ durch eine elementare Transformation τ , die die Umkehrung eines Dreiecks ist, hervor, so meinen wir mit einer Veränderung von $B_x(E^*)$ im Folgenden stets einen Unterschied des Wertes von $B_x(E^*)$ im Vergleich zum Wert von $B_x'(E^*)$, wobei $B_x'(E^*)$ die Anzahl der Birch-Partitionen im veränderten Pseudosphärenarrangement $\mathcal{A}'(E^*)$ bezeichnet.

Wir nennen einen Bereich von S^2 von zwei Pseudokreisen $h_1, h_2 \in E$ *berandet*, wenn er auf den positiven Seiten von h_1 und h_2 liegt.

Lemma 22. *Sei $|E| = n = 3N$, $N \geq 2$. Ist $B_x(E^*)$ gerade und geht $\mathcal{A}'(E^*)$ aus $\mathcal{A}(E^*)$ durch eine elementare Transformation τ , die die Umkehrung eines Dreiecks ist, hervor, so ist auch $B_x'(E^*)$ gerade.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 19. Er wird durch vollständige Induktion über $N \geq 2$ geführt.

Sei zunächst $N = 2$, also $|E| = 6$. Wir zeigen in der Fallunterscheidung weiter unten, dass sich für jede elementare Transformation τ , die die Umkehrung eines Dreiecks ist, die Parität von $B_x(E^*)$ nicht ändert.

Wir betrachten die Menge aller Dreiecke S , die von drei Pseudokreisen aus E berandet sind und die ganz auf der positiven Seite von x liegen. Wechselt eine Ecke eines solchen Dreiecks, also ein Cocircuit von \mathcal{O}^* , durch τ von der positiven Seite von x auf die negative Seite von x oder von der negativen Seite von x auf die positive Seite von x , so kann sich diese Menge verändern. Sei für beliebige, feste $h_1, h_2 \in E$ $K := \{Y, -Y\} := \{h_1, h_2\}$ das Paar der antipodalen Cocircuits Y und $-Y$, in denen sich h_1 und h_2 schneiden. Durch τ wechsele Y auf die Seite von x , auf der vorher $-Y$ war, und entsprechend $-Y$ auf die Seite von x , auf der vorher Y war. Für alle Dreiecke, die weder Y noch $-Y$ als Ecke enthalten, ändert sich nichts. Ist S von der Art $K \cup \{e\}$ für ein $e \in E \setminus K$ und liegt der Bereich von S^2 , der von h_1 und h_2 berandet wird, fast vollständig auf der positiven Seite von x (vergleiche Bild 21 auf der nächsten Seite), so gilt folgendes:

S liegt ganz auf der positiven Seite von x vor der Anwendung von τ gdw
 S liegt nicht ganz auf der positiven Seite von x nach der Anwendung von τ .

Eine Birch-Partition besteht aus einem Dreieck S und seinem Komplement \bar{S} in E -das wegen $|E| = 6$ ebenfalls ein Dreieck ist-, so dass sowohl S als auch \bar{S} ganz auf der positiven Seite von x liegen. Die durch τ verursachte Veränderung von $B_x(E^*)$ kann daher nur von Partitionen kommen, in denen Y oder $-Y$ eine Ecke von S oder eine Ecke von \bar{S} ist. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Fall 1: Die Komplemente aller Dreiecke, die Y oder $-Y$ als Ecke enthalten, liegen nicht ganz auf der positiven Seite von x . Dann verändert sich $B_x(E^*)$ nicht, da die Menge aller Birch-Partitionen gleich bleibt.

Fall 2: Wir nehmen an, dass weder Y noch $-Y$ Ecke eines Dreiecks S sind, so dass $\{S, \bar{S}\}$ eine Birch-Partition ist, und dass nach der Anwendung von τ eine Birch-Partition entsteht. Wir zeigen, dass Birch-Partitionen in Paaren entstehen.

Die neu entstandene Birch-Partition bestehe aus $S = K \cup \{e_1\}$ und dem Komplement \bar{S} von S in E für $e_1 \in E \setminus K$. Wegen Lemma 21 gibt es genau zwei von je drei Pseudokreisen aus $\bar{S} \cup \{e_1\}$ berandete Dreiecke, die ganz auf der positiven Seite von x liegen. Das eine ist \bar{S} , sei S^* das andere (vergleiche auch Bild 21).

Nach unserer Annahme liegt \bar{S}^* vor der Anwendung von τ nicht ganz auf der positiven Seite von x , da \bar{S}^* von der Gestalt $\bar{S}^* = K \cup \{e_2\}$ für ein $e_2 \in E \setminus K$ sein muss. Die Menge $\{S^*, \bar{S}^*\}$ ist also unsere zweite Birch-Partition, da \bar{S}^* nach der Anwendung von τ ganz auf der positiven Seite von x liegt.

Um zu zeigen, dass es keine drei Birch-Partitionen geben kann, führen wir einen Widerspruchsbeweis. Seien die drei neuen Birch-Partitionen von der Art $S_1 = K \cup \{e_1\}$, $S_2 = K \cup \{e_2\}$ und $S_3 = K \cup \{e_3\}$ mit $e_1, e_2, e_3 \in E \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen. Der Umstand, dass einerseits \bar{S}_i für $i = 1, 2, 3$ ganz auf der positiven Seite von x liegt, andererseits wegen $K \not\subset \bar{S}_i$ für $i = 1, 2, 3$ aber $|\cup_{i=1}^3 \bar{S}_i| = 4$ gilt, widerspricht Lemma 21.

Daher sind die beiden neuen Birch-Partitionen von der Art $K \cup \{e_1\}$ und $K \cup \{e_2\}$, mit $e_1, e_2 \in E \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen.

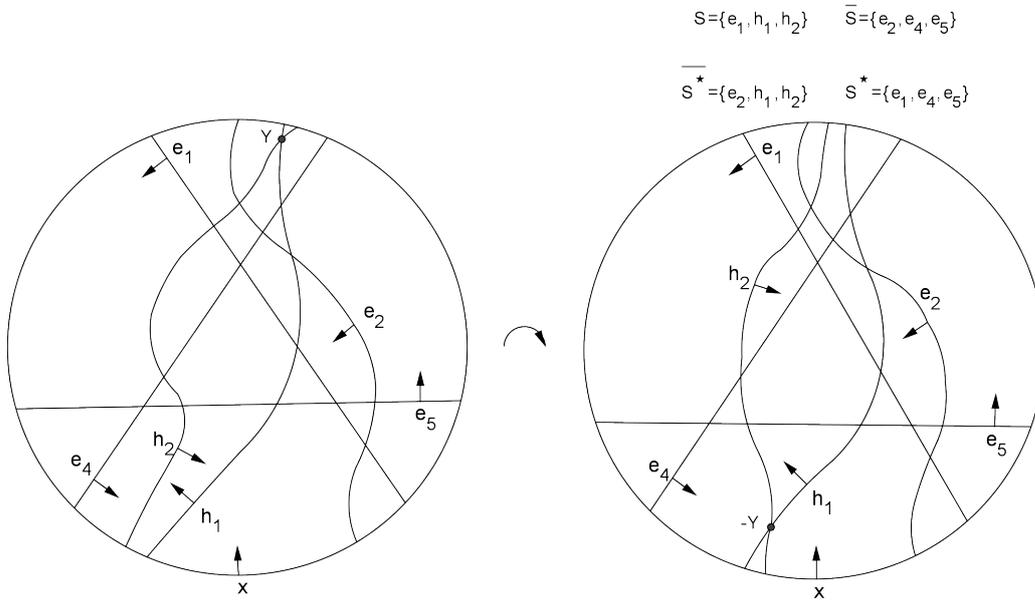


Bild 21. So könnten im Fall 2 die sechs Pseudokreise angeordnet sein. Durch τ überqueren Y und $-Y$ den Kreis x .

Fall 3: Dies ist der umgekehrte Fall von Fall 2. Wir nehmen an, dass es vor der Anwendung von τ genau zwei Birch-Partitionen der Art $K \cup \{e_1\}$ und $K \cup \{e_2\}$, $e_1, e_2 \in E \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen gibt. Beide verschwinden, nachdem Y und $-Y$ x überquert haben. Neue Birch-Partitionen entstehen nicht, weil es dafür ein weiteres Dreieck $K \cup \{e_3\}$ mit $e_3 \in E \setminus K$ geben müsste, das ganz auf der positiven Seite von x liegt. Dieses kann es aber wegen Lemma 21 nicht geben.

Fall 4: Als letztes nehmen wir an, dass es vor der Anwendung von τ genau eine Birch-Partition der Art $S = K \cup \{e\}$, $e \in E \setminus K$, zusammen mit dem Komplement \bar{S} von S in E gibt. Diese Birch-Partition verschwindet, und eine neue entsteht:

S liegt nach der Anwendung von τ nicht ganz auf der positiven Seite von x , so dass $\{S, \bar{S}\}$ verschwindet. Wie in Fall 2 gibt es genau zwei Dreiecke in $\bar{S} \cup \{e\}$ derart, dass beide ganz auf der positiven Seite von x liegen. Das eine ist \bar{S} , sei S^* das andere (siehe hierzu auch Bild 22 auf der nächsten Seite). Nach unserer Annahme liegt \bar{S}^* vor der Anwendung

von τ nicht ganz auf der positiven Seite von x , da $\overline{S^*}$ von der Gestalt $\overline{S^*} = K \cup e'$ für ein $e' \in E \setminus K$ sein muss. Da $\overline{S^*}$ nach der Anwendung von τ ganz auf der positiven Seite von x liegt, ist $\{S^*, \overline{S^*}\}$ unsere neue Birch-Partition.

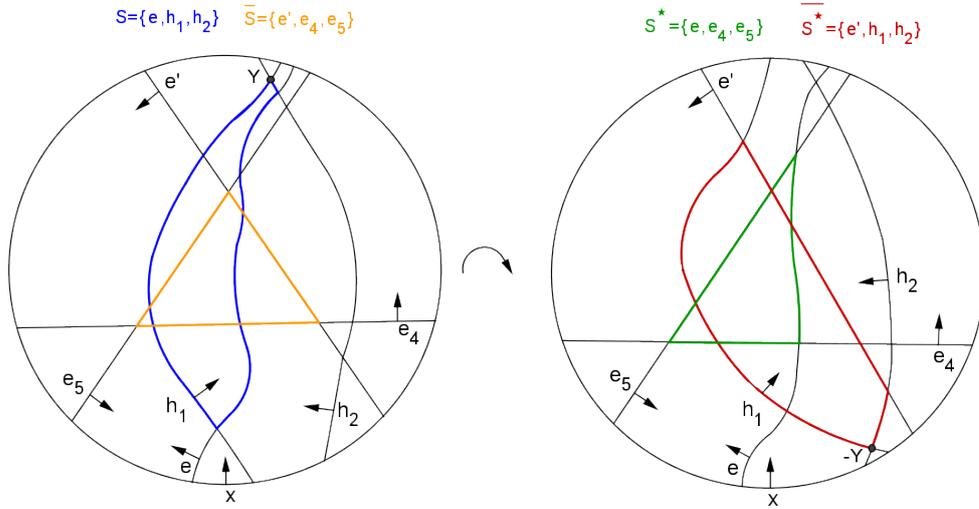


Bild 22. Mögliche Anordnung der sechs Pseudokreise im Fall 4. Y und $-Y$ überqueren durch τ den Kreis x .

Für den Induktionsschritt sei $N \geq 3$ und sei $t \in E$ ein Pseudokreis aus E . Seien F_1, F_2, \dots, F_l mit $l \in \mathbb{N}$ alle Dreiecke, die von t und zwei weiteren Pseudokreisen aus E berandet sind und die zu einer Birch-Partition von x in N Teilmengen vervollständigt werden können. Somit liegt für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ F_i ganz auf der positiven Seite von x . Notiert man für jedes F_i , $i \in \{1, \dots, l\}$, die Anzahl der Birch-Partitionen, die F_i enthalten, und summiert man diese Anzahlen von 1 bis l , so ist das Ergebnis genau $B_x(E^*)$, die Anzahl der Birch-Partitionen für x : Es werden alle gezählt und keine wird mehrmals gezählt.

Für jedes F_i gilt: Lässt man F_i weg, bleibt eine Birch-Partition für x in $N - 1$ Teilmengen übrig. Es existiert somit für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ eine Bijektion zwischen den Birch-Partitionen des Arrangements, bei dem F_i weggelassen wurde, und den Birch-Partitionen des Arrangements, das F_i enthält. Nach der Induktionsannahme gilt für jedes weggelassene F_i :

Ist die Anzahl der Birch-Partitionen von x in $N - 1$ Teilmengen vor der Anwendung von τ gerade, so auch nach der Anwendung von τ . Unter der Voraussetzung, dass $B_x(E^*)$ gerade ist, ist dann auch $B_x'(E^*)$ als Summe mit ausschließlich geraden Summanden gerade. \square

Proposition 23. Sei $|E| = n = 3N$, $N \geq 2$. Dann ist $B_x(E^*)$ stets gerade.

Beweis. Nach Corollary 3.3 [14] lassen sich zwei beliebige Pseudosphärenarrangements $\mathcal{A}(E^*)$ und $\mathcal{A}'(E^*)$, die uniforme orientierte Matroide vom Rang 3 repräsentieren, durch eine endliche Folge von Dreiecksumkehrungen ineinander überführen. Mit dieser Methode lässt sich stets ein Arrangement erreichen, in der x kein Birch-Element und daher $B_x(E^*) = 0$ ist (x lässt sich durch eine endliche Folge von Dreiecksumkehrungen stets so positionieren, dass sich kein von drei Pseudokreisen von E berandetes Dreieck auf der positiven Seite von x befindet). Man wendet Corollary 3.3 [14] erneut an, um wieder die ursprüngliche Konfiguration zu erhalten. Aus Lemma 22 folgt dann die Behauptung. \square

Mit Hilfe von Proposition 23 können wir eine untere Schranke für die Anzahl der

Birch-Partitionen angeben. Dies ist die polare Version von Satz 14 und somit auch (für die Dimension $d = 2$) von Satz 3 aus Kapitel 1.2, der von Stefan Hell [10] stammt.

Satz 15. *Sei $|E| = n = 3N$, $N \geq 2$. Dann gilt:*

$$B_x(E^*) > 0 \Rightarrow B_x(E^*) \geq N! \quad .$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 14. Er wird durch vollständige Induktion über $N \geq 2$ geführt.

Den Fall $N = 2$ garantiert uns Proposition 23: $B_x(E^*)$ ist gerade, also gilt

$$B_x(E^*) > 0 \Rightarrow B_x(E^*) \geq 2 = N! \quad .$$

Sei nun $N \geq 3$ und $B_x(E^*) > 0$. Dann gibt es eine Birch-Partition F_1, F_2, \dots, F_N . Lassen wir in dieser Birch-Partition für $i \in \{1, \dots, N\}$ ein F_i weg, bleibt eine Birch-Partition für x in $N - 1$ Teilmengen übrig. Nach der Induktionsannahme hat die Vereinigungsmenge von $(N - 1)$ -vielen F_i 's mindestens $(N - 1)!$ Birch-Partitionen. Insbesondere gibt es $(N - 1)!$ Birch-Partitionen von E in N Teilmengen, die mit F_1 beginnen. Sei t ein Element von F_1 .

Für jedes Paar F_1, F_i mit $i \in \{2, 3, \dots, N\}$ wollen wir mit E_i^* die Grundmenge des orientierten Matroids bezeichnen, das aus \mathcal{O}^* hervorgeht, wenn alle Pseudokreise weggelassen werden, die Elemente von $E \setminus (F_1 \cup F_i)$ sind. Dann haben wir für jedes Paar F_1, F_i wieder $B_x(E_i^*) > 0$, so dass es nach Proposition 23 eine zweite Birch-Partition $\tilde{F}_1^i, \tilde{F}_i^i$ von $F_1 \cup F_i$ geben muss. Wir nehmen o.E. $t \in \tilde{F}_1^i$ an. Die N Mengen $F_1, \tilde{F}_1^2, \tilde{F}_1^3, \dots, \tilde{F}_1^N$ sind durch ihre Konstruktion bedingt paarweise verschieden. Jede von ihnen liefert nach der Induktionsannahme $(N - 1)!$ Birch-Partitionen von E . Daraus folgt die Behauptung. \square

Orientierte Matroide vom Rang r

Sei \mathcal{O} ein uniformes, azyklisches orientiertes Matroid vom Rang r , $r = d + 1$, auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$. Sei \mathcal{O} repräsentiert durch ein Arrangement von Pseudosphären.

Wie in Kapitel 1.3 erwähnt, können orientierte Matroide auch über ihre Circuits definiert werden:

Definition 22. *Eine Familie $\mathcal{C} \in \{-, 0, +\}^E$ von Vorzeichenvektoren ist die Menge der Circuits eines orientierten Matroids mit der Grundmenge E , wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- (i) $\mathbf{0} \notin \mathcal{C}$
- (ii) $X \in \mathcal{C} \Rightarrow -X \in \mathcal{C}$
- (iii) $\forall X, Y \in \mathcal{C} : \text{supp}(X) \subseteq \text{supp}(Y) \Rightarrow X = Y$ oder $X = -Y$
- (iv) $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ mit $X \neq -Y$ und $\forall e \in X^+ \cap Y^- \exists Z \in \mathcal{C} : Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) \setminus \{e\}$
und $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) \setminus \{e\}$.

Wir wollen für die Circuits eine andere Schreibweise benutzen als für die Cocircuits. Wir schreiben einen Circuit X als Menge der Elemente von E , die in X einen von Null verschiedenen Eintrag haben, wobei die Elemente mit negativen Einträgen mit einem Querstrich ('overline') versehen werden. Z.B. ist der Circuit, der in e_1 und e_2 ein Plus, in e_3 und e_4 ein Minus und sonst nur Nullen hat, dann $\{e_1, e_2, \overline{e_3}, \overline{e_4}\}$.

Definition 20 (konvexe Hülle) gilt genauso für orientierte Matroide vom Rang r .

Sei E^* eine endliche Menge mit $E \subset E^*$ und $|E^*| = n + 1$ und gelte $E^* \setminus E = \{x\}$. Sei \mathcal{O}^* ein uniformes, azyklisches orientiertes Matroid vom Rang r auf der Menge E^* . \mathcal{O} sei die Einschränkung von \mathcal{O}^* auf E . Wir sagen dann, \mathcal{O}^* ist eine *Erweiterung* von \mathcal{O} um das Element x .

Die folgende Definition erweitert Definition 21 auf den Rang r .

Definition 23. Sei $|E| = n = rN$ für ein $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Sei $x \in E^*$ das Element, um das E^* E erweitert. x heißt ein *Birch-Element* von E , wenn es eine *Partition* von E in N Teilmengen E_1, E_2, \dots, E_N derart gibt, dass $|E_i| = r$ und $x \in \text{conv}_{\mathcal{O}^*}(E_i)$ für $i = 1, \dots, N$ gilt. Die *Partition* von E heißt eine *Birch-Partition* für x . $B_x(E^*)$ sei die Anzahl der ungeordneten *Birch-Partitionen* für x .

Wir sagen, ein d -Simplex wird von $r = d + 1$ Pseudosphären berandet, wenn er auf den positiven Seiten der r Pseudosphären liegt. Seien $i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ und gelte $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r} \in E$. Mit der Menge $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}\}$ bezeichnen wir im Folgenden den d -Simplex, der von den Pseudosphären $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}$ berandet wird. Eine Pseudosphäre x liegt nach Definition 20 in der konvexen Hülle von $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}$, wenn der von $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}$ berandete d -Simplex ganz auf der positiven Seite von x liegt.

Lemma 23. Sei $F \subset E$ eine $r+1$ -elementige Teilmenge von E und sei $F' := F \cup \{x\}$ die Grundmenge eines uniformen, azyklischen orientierten Matroids \mathcal{O}' vom Rang r . Dann ist die Anzahl der d -Simplices, die sowohl von r Pseudosphären aus F berandet sind, als auch ganz auf der positiven Seite von x liegen, höchstens 2.

Beweis. Sei $F = \{e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}\}$. Wir nennen einen d -Simplex *positiv*, wenn er von r Pseudosphären aus F berandet wird. Ist die Anzahl der positiven d -Simplices auf der positiven Seite von x 0 oder 1, ist die Behauptung offenbar richtig.

Wir nehmen an, dass es zwei positive d -Simplices S_1 und S_2 gibt, die ganz auf der positiven Seite von x liegen. Seien o.E. $S_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ und $S_2 = \{e_2, e_3, \dots, e_{r+1}\}$. Die Circuits, die durch $S_1 \cup \{x\}$ und $S_2 \cup \{x\}$ bestimmt sind, sind $X := \{e_1, e_2, \dots, e_r, \overline{x}\}$, $Y := \{e_2, e_3, \dots, e_{r+1}, \overline{x}\}$ sowie $-X$ und $-Y$ (Die Kardinalität jedes Circuits eines uniformen orientierten Matroids vom Rang r ist nach Beobachtung 3 gleich $r + 1$).

Die Anzahl der Circuits von \mathcal{O}' ist, da \mathcal{O}' uniform ist, nach Beobachtung 3 gleich $2\binom{r+2}{r+1} = 2(r+2)$. \mathcal{O}' besitzt also wegen Definition 22 (ii) $r+2$ Circuits sowie deren Negative.

X und Y (sowie deren Negative) sind bereits bestimmt, es bleiben somit noch r Circuits (und deren Negative) übrig.

Wir wenden das Circuitaxiom (iv) aus Definition 22 an, das man auch als *schwache Elimination* bezeichnet. Danach existiert zu jedem $e \in X^+ \cap -Y^-$ ein Circuit Z von \mathcal{O}' mit $Z^+ \subseteq (X^+ \cup -Y^+) \setminus \{e\}$ und $Z^- \subseteq (X^- \cup -Y^-) \setminus \{e\}$.

Setzen wir für e nacheinander die $r-1$ Werte e_2, e_3, \dots, e_r ein, so garantiert uns die schwache Elimination die Existenz der $r-1$ Circuits Z_2, Z_3, \dots, Z_r . Wegen der schwachen Elimination gilt für $i \in \{2, 3, \dots, r\}$:

$$Z_i^+ \subseteq \{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_r, x\} \quad (\star)$$

$$Z_i^- \subseteq \{e_2, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{r+1}, x\}$$

Im uniformen Fall sind wegen Beobachtung 3 die Kardinalitäten der Supports aller Circuits eines orientierten Matroids vom Rang r gleich $r + 1$. Für jedes $i \in \{2, 3, \dots, r\}$ wurde e_i aus dem Support von Z_i 'eliminiert'. Wegen (\star) und wegen $|F' \setminus \{e_i\}| = r + 1$ gilt daher $\text{supp}(Z_i) = F' \setminus \{e_i\}$ für $i = 2, 3, \dots, r$.

Seien $i, j \in \{2, 3, \dots, r\}$ und $i \neq j$. Wegen $F' \setminus \{e_i\} \neq F' \setminus \{e_j\}$ sind dann auch Z_i und Z_j verschieden. Somit sind für $i = 2, 3, \dots, r$ durch Z_i $r - 1$ paarweise verschiedene Circuits definiert. Nimmt man die zu den Z_i negativen Circuits $-Z_i$ dazu, so sind es $2(r - 1)$ paarweise verschiedene Circuits.

Wegen der möglichen Verteilung der Elemente von $F' \setminus \{e_i\}$ auf Z_i^+ und Z_i^- (siehe (\star)) gilt für jedes $i \in \{2, 3, \dots, r\}$:

Z_i (und auch $-Z_i$) kann kein Circuit sein, bei dem x als einzige Koordinate negativ ist.

Somit haben wir $2(r - 1)$ paarweise verschiedene Circuits von \mathcal{O}' , von denen keiner einen positiven d -Simplex definieren kann, der ganz auf der positiven Seite von x liegt. Hinzu kommen noch die beiden Circuits Z_x und $-Z_x$ mit $\text{supp}(Z_x) = \text{supp}(-Z_x) = F' \setminus \{x\} = F$ mit der gleichen Eigenschaft.

Insgesamt können daher $2r$ Circuits von \mathcal{O}' keinen positiven d -Simplex definieren, der ganz auf der positiven Seite von x liegt.

S_1 und S_2 sind durch X und Y definiert, $-X$ und $-Y$ können daher keinen solchen d -Simplex definieren.

Da \mathcal{O}' genau $2(r + 2)$ Circuits besitzt, kann es in \mathcal{O}' somit höchstens zwei d -Simplices geben, die sowohl von r Pseudosphären aus F berandet sind, als auch ganz auf der positiven Seite von x liegen. \square

Lemma 24. *Sei $F \subset E$ eine $r + 1$ -elementige Teilmenge von E und sei $F' := F \cup \{x\}$ die Grundmenge eines uniformen, azyklischen orientierten Matroids \mathcal{O}' vom Rang r . Dann ist die Anzahl der d -Simplices, die sowohl von r Pseudosphären aus F berandet sind, als auch ganz auf der positiven Seite von x liegen, entweder 0 oder 2.*

Beweis. Es werden die gleichen Vereinbarungen getroffen wie am Anfang des Beweises von Lemma 23. Liegt kein positiver d -Simplex ganz auf der positiven Seite von x , sind wir fertig.

Im Folgenden nehmen wir an, dass mindestens ein positiver d -Simplex (o.E. $S_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$) ganz auf der positiven Seite von x liegt. Wegen Lemma 23 ist es ausreichend zu zeigen, dass es dann stets noch einen weiteren positiven d -Simplex gibt, der ganz auf der positiven Seite von x liegt. Aus Symmetriegründen liegt stets genau einer der beiden Schnittpunkte von je r Pseudosphären aus F auf der positiven Seite von x . Bezüglich der Lage von e_{r+1} unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: Die Pseudosphäre e_{r+1} geht durch S_1 hindurch. Es liegt dann stets ein positiver Covektor (siehe Definition 12) so auf der positiven Seite von x , dass er x nicht berührt. Dann ist durch e_{r+1} und $r - 1$ Elemente von S_1 stets noch ein weiterer positiver d -Simplex S_2 bestimmt, der ganz auf der positiven Seite von x liegt. S_2 kann nur aus dem Teil von S_1 bestehen, der auf der positiven Seite von e_{r+1} liegt. Bild 23 auf der nächsten Seite zeigt ein Beispiel für $r = 4$ mit $e_{r+1} = e_5$ unter der Annahme, dass e_5 'nach oben', also wie e_4 , orientiert ist. Es ist hier $S_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$.

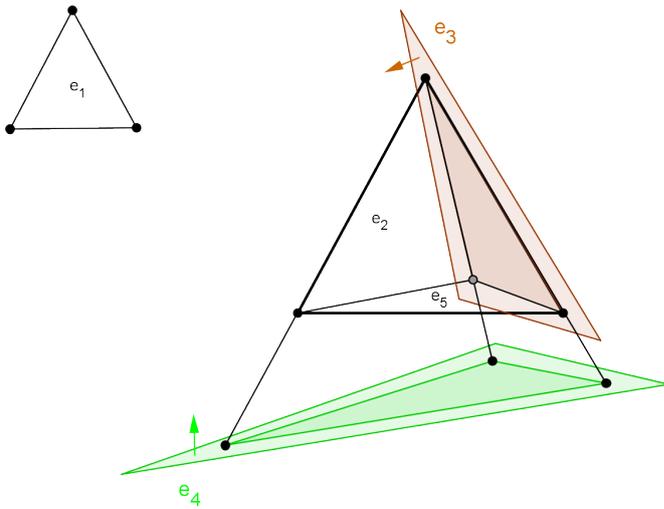


Bild 23. Von den fünf Pseudoebenen sind e_3 und e_4 beispielhaft dargestellt. e_1 sei diejenige Ebene, auf der die 'vordere' Seite des positiven Tetraeders $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ liegt.

Zu dem Teil von S_1 auf der positiven Seite von e_{r+1} kann noch ein Bereich hinzukommen, der auf der negativen Seite der Pseudosphäre aus S_1 liegt, die in S_2 durch e_{r+1} ersetzt wird. Ein Beispiel hierfür, wieder für $r = 4$, ist in Bild 24 skizziert. e_5 ist 'nach unten' orientiert, und es ist $S_2 = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$.

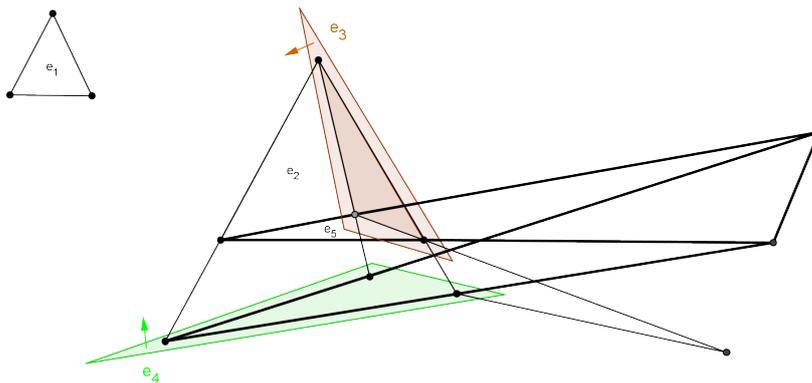


Bild 24. Gleiche Bezeichnung wie in Bild 23, jedoch ist die Orientierung von e_5 umgekehrt.

Zwei weitere Beispiele für mögliche Anordnungen für $r = 4$ sind in den Bildern 25 und 26 (nächste Seite) dargestellt, wobei die Orientierung von e_5 in Bild 26 umgekehrt ist wie in Bild 25.

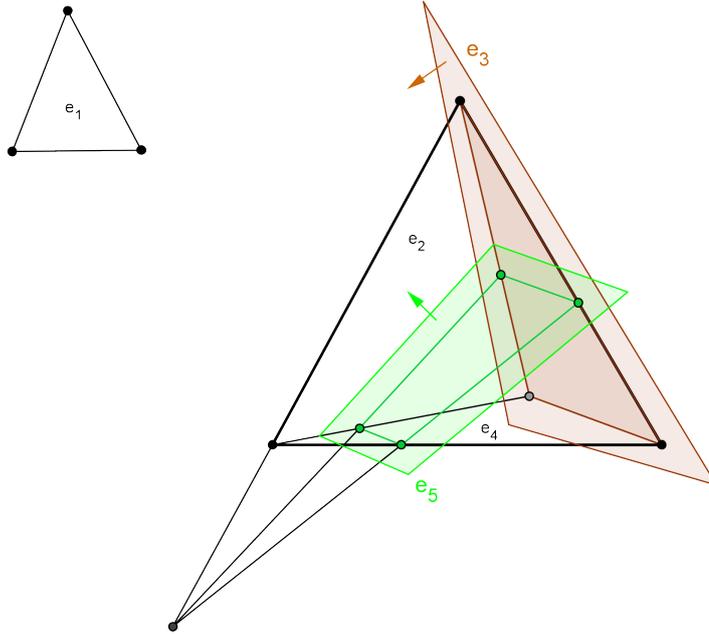


Bild 25. Hier ist $\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ der zweite positive Tetraeder.

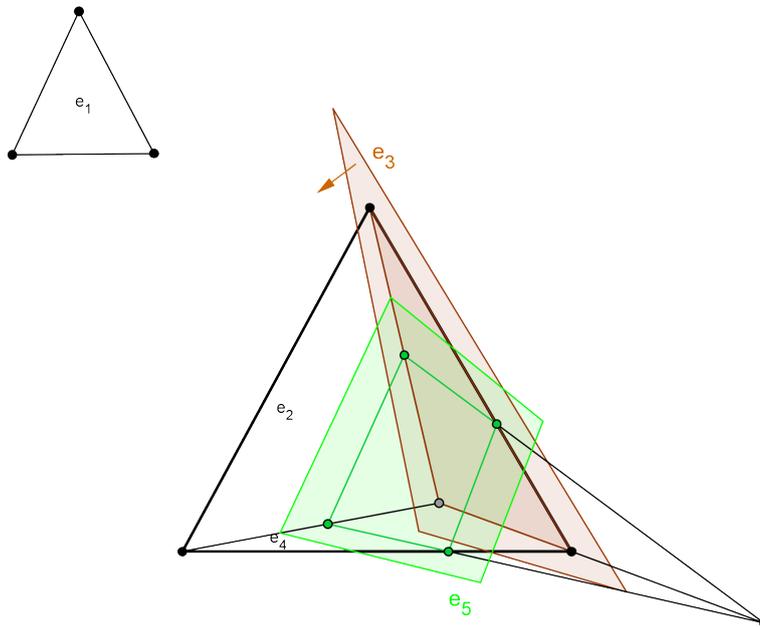


Bild 26. In dieser Anordnung ist $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ der zweite positive Tetraeder.

Fall 2: Die Pseudosphäre e_{r+1} geht nicht durch S_1 hindurch, und S_1 liegt auf der positiven Seite von e_{r+1} . Auch hier liegt ein positiver Covektor so auf der positiven Seite von x , dass er x nicht berührt. Daher gibt es stets einen zweiten positiven d -Simplex S_2 , der ganz auf der positiven Seite von x liegt. Dieser besteht aus S_1 erweitert um einen

Bereich, der von e_{r+1} begrenzt wird. Als Beispiel für den Rang 4 kann wieder Bild 23 dienen, wenn man die Bezeichnungen von e_4 und e_5 vertauscht, die beide in die gleiche Richtung orientiert sind.

Fall 3: Die Pseudosphäre e_{r+1} geht nicht durch S_1 hindurch, und S_1 liegt auf der negativen Seite von e_{r+1} . Hier gibt es keinen positiven Covektor und auch keinen zweiten positiven d -Simplex, der ganz auf der positiven Seite von x liegt. Da diese Anordnung aber kein azyklisches orientiertes Matroid ist, können wir diesen Fall ausschließen.

Somit liegen auf der positiven Seite von x stets null oder zwei positive d -Simplices. \square

Der Umkehrung von zwei Dreiecken im Rang 3 entspricht eine *Mutation* im allgemeinen Rang r . Genau wie bei der Umkehrung von zwei Dreiecken wird bei einer Mutation ein Cocircuit von einer Seite einer Pseudosphäre auf die andere 'geschoben' (und sein Negatives in umgekehrter Richtung über die Pseudosphäre bewegt). Vergleiche zu Mutationen [5], Kapitel 7.3.

Wir nennen einen Bereich von S^d von $d = r - 1$ Pseudosphären $h_1, \dots, h_{r-1} \in E$ berandet, wenn er auf den positiven Seiten von h_1, h_2, \dots, h_{r-1} liegt.

Das folgende Lemma ist die Verallgemeinerung von Lemma 22 auf den Rang r . Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 22.

Da wir in Lemma 25 orientierte Matroide vom allgemeinen Rang r zugrunde legen, ist dieses Lemma auch eine polare Version von Theorem 2 i) von Stefan Hell aus [10]. Im Beweis von Lemma 25 werden erneut Methoden des Beweises von Theorem 2 i) [10] verwendet.

Lemma 25. *Sei $|E| = n = rN$, $N \geq 2$. Ist $B_x(E^*)$ gerade und geht $\mathcal{A}'(E^*)$ aus $\mathcal{A}(E^*)$ durch eine Mutation τ hervor, so ist auch $B_x'(E^*)$ gerade.*

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion über $N \geq 2$ geführt.

Sei zunächst $N = 2$, also $|E| = 2r$. Wir zeigen in der Fallunterscheidung weiter unten, dass sich für jede Mutation τ die Parität von $B_x(E^*)$ nicht ändert.

Wir betrachten die Menge aller d -Simplices S , die von r Pseudosphären aus E berandet sind und die ganz auf der positiven Seite von x liegen. Wechselt eine Ecke eines solchen d -Simplex, also ein Cocircuit von \mathcal{O}^* , durch τ von der positiven Seite von x auf die negative Seite von x oder von der negativen Seite von x auf die positive Seite von x , so kann sich diese Menge verändern. Sei für beliebige, feste $h_1, h_2, \dots, h_{r-1} \in E$ $K := \{Y, -Y\} := \{h_1, h_2, \dots, h_{r-1}\}$ das Paar der antipodalen Cocircuits Y und $-Y$, in denen sich h_1, \dots, h_{r-1} schneiden. Durch τ wechsele Y auf die Seite von x , auf der vorher $-Y$ war, und entsprechend $-Y$ auf die Seite von x , auf der vorher Y war. Für alle d -Simplices, die weder Y noch $-Y$ als Ecke enthalten, ändert sich nichts. Ist S von der Art $K \cup \{e\}$ für ein $e \in E \setminus K$ und liegt der Bereich von S^d , der von h_1, \dots, h_{r-1} berandet ist, fast vollständig auf der positiven Seite von x (vergleiche den Beweis von Lemma 22), so gilt folgendes:

S liegt ganz auf der positiven Seite von x vor der Anwendung von τ gdw
 S liegt nicht ganz auf der positiven Seite von x nach der Anwendung von τ .

Eine Birch-Partition besteht aus einem d -Simplex S und seinem Komplement \bar{S} in E -das wegen $|E| = 2r$ ebenfalls ein d -Simplex ist-, so dass sowohl S als auch \bar{S} ganz auf der positiven Seite von x liegen. Die durch τ verursachte Veränderung von $B_x(E^*)$ kann

daher nur von Partitionen kommen, in denen Y oder $-Y$ eine Ecke von S oder eine Ecke von \overline{S} ist. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Fall 1: Die Komplemente aller d -Simplices, die Y oder $-Y$ als Ecke enthalten, liegen nicht ganz auf der positiven Seite von x . Dann verändert sich $B_x(E^*)$ nicht, da die Menge aller Birch-Partitionen gleich bleibt.

Fall 2: Wir nehmen an, dass weder Y noch $-Y$ Ecke eines d -Simplex S sind, so dass $\{S, \overline{S}\}$ eine Birch-Partition ist, und dass nach der Anwendung von τ eine Birch-Partition entsteht. Wir zeigen, dass Birch-Partitionen in Paaren entstehen.

Die neu entstandene Birch-Partition bestehe aus $S = K \cup \{e_1\}$ und dem Komplement \overline{S} von S in E für $e_1 \in E \setminus K$. Wegen Lemma 24 gibt es genau zwei von je r Pseudosphären aus $\overline{S} \cup \{e_1\}$ berandete d -Simplices, die ganz auf der positiven Seite von x liegen. Der eine ist \overline{S} , sei S^* der andere.

Nach unserer Annahme liegt $\overline{S^*}$ vor der Anwendung von τ nicht ganz auf der positiven Seite von x , da $\overline{S^*}$ von der Gestalt $\overline{S^*} = K \cup \{e_2\}$ für ein $e_2 \in E \setminus K$ sein muss. Die Menge $\{S^*, \overline{S^*}\}$ ist also unsere zweite Birch-Partition, da $\overline{S^*}$ nach der Anwendung von τ ganz auf der positiven Seite von x liegt.

Um zu zeigen, dass es keine drei Birch-Partitionen geben kann, führen wir einen Widerspruchsbeweis. Seien die drei neuen Birch-Partitionen von der Art $S_1 = K \cup \{e_1\}$, $S_2 = K \cup \{e_2\}$ und $S_3 = K \cup \{e_3\}$ mit $e_1, e_2, e_3 \in E \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen. Der Umstand, dass einerseits $\overline{S_i}$ für $i = 1, 2, 3$ ganz auf der positiven Seite von x liegt, andererseits wegen $K \not\subset \overline{S_i}$ für $i = 1, 2, 3$ aber $|\cup_{i=1}^3 \overline{S_i}| = r + 1$ gilt, widerspricht Lemma 24.

Daher sind die beiden neuen Birch-Partitionen von der Art $K \cup \{e_1\}$ und $K \cup \{e_2\}$, mit $e_1, e_2 \in E \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen.

Fall 3: Dies ist der umgekehrte Fall von Fall 2. Wir nehmen an, dass es vor der Anwendung von τ genau zwei Birch-Partitionen der Art $K \cup \{e_1\}$ und $K \cup \{e_2\}$, $e_1, e_2 \in E \setminus K$, zusammen mit ihren Komplementen gibt. Beide verschwinden, nachdem Y und $-Y$ x überquert haben. Neue Birch-Partitionen entstehen nicht, weil es dafür einen weiteren d -Simplex $K \cup \{e_3\}$ mit $e_3 \in E \setminus K$ geben müsste, der ganz auf der positiven Seite von x liegt. Diesen kann es aber wegen Lemma 24 nicht geben.

Fall 4: Als letztes nehmen wir an, dass es vor der Anwendung von τ genau eine Birch-Partition der Art $S = K \cup \{e\}$, $e \in E \setminus K$, zusammen mit dem Komplement \overline{S} von S in E gibt. Diese Birch-Partition verschwindet, und eine neue entsteht:

S liegt nach der Anwendung von τ nicht ganz auf der positiven Seite von x , so dass $\{S, \overline{S}\}$ verschwindet. Wie in Fall 2 gibt es genau zwei d -Simplices in $\overline{S} \cup \{e\}$ derart, dass beide ganz auf der positiven Seite von x liegen. Der eine ist \overline{S} , sei S^* der andere. Nach unserer Annahme liegt $\overline{S^*}$ vor der Anwendung von τ nicht ganz auf der positiven Seite von x , da $\overline{S^*}$ von der Gestalt $\overline{S^*} = K \cup \{e'\}$ für ein $e' \in E \setminus K$ sein muss. Da $\overline{S^*}$ nach der Anwendung von τ ganz auf der positiven Seite von x liegt, ist $\{S^*, \overline{S^*}\}$ unsere neue Birch-Partition.

Für den Induktionsschritt sei $N \geq 3$ und sei $t \in E$ eine Pseudosphäre aus E . Seien F_1, F_2, \dots, F_l mit $l \in \mathbb{N}$ alle d -Simplices, die von t und $r - 1$ weiteren Pseudosphären aus E berandet sind und die zu einer Birch-Partition von x in N Teilmengen vervollständigt werden können. Somit liegt für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ F_i ganz auf der positiven Seite von x . Notiert man für jedes F_i , $i \in \{1, \dots, l\}$, die Anzahl der Birch-Partitionen, die F_i enthalten,

und summiert man diese Anzahlen von 1 bis l , so ist das Ergebnis genau $B_x(E^*)$, die Anzahl der Birch-Partitionen für x : Es werden alle gezählt und keine wird mehrmals gezählt.

Für jedes F_i gilt: Lässt man F_i weg, bleibt eine Birch-Partition für x in $N - 1$ Teilmengen übrig. Es existiert somit für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ eine Bijektion zwischen den Birch-Partitionen des Arrangements, bei dem F_i weggelassen wurde, und den Birch-Partitionen des Arrangements, das F_i enthält. Nach der Induktionsannahme gilt für jedes weggelassene F_i :

Ist die Anzahl der Birch-Partitionen von x in $N - 1$ Teilmengen vor der Anwendung von τ gerade, so auch nach der Anwendung von τ . Unter der Voraussetzung, dass $B_x(E^*)$ gerade ist, ist dann auch $B_x'(E^*)$ als Summe mit ausschließlich geraden Summanden gerade. \square

Corollary 3.3 aus dem Aufsatz von Roudneff [14] wird auch als Homotopiesatz für orientierte Matroide vom Rang 3 bezeichnet (vergleiche z. B. [5], Seite 269). Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf beliebigen Rang r gilt als offenes Problem. Roudneff und Sturmfels haben eine Lösung für den Fall gefunden, dass das betrachtete orientierte Matroid realisierbar ist, siehe hierzu [15], Theorem 3.7.

Es folgt eine Proposition, die Proposition 23 für realisierbare orientierte Matroide verallgemeinert.

Proposition 24. *Sei \mathcal{O} ein uniformes, azyklisches, realisierbares orientiertes Matroid vom Rang r mit der Grundmenge E , $|E| = n = rN$, und sei $N \geq 2$. Dann gilt: $B_x(E^*)$ ist stets gerade.*

Beweis. Nach Theorem 3.7 aus dem Aufsatz [15] lassen sich zwei beliebige realisierbare Pseudosphärenarrangements $\mathcal{A}(E^*)$ und $\mathcal{A}'(E^*)$ durch eine endliche Folge von Mutationen, die die Realisierbarkeit erhalten, ineinander überführen. Mit dieser Methode lässt sich stets ein Arrangement erreichen, in der x kein Birch-Element und daher $B_x(E^*) = 0$ ist (x lässt sich durch eine endliche Folge von Mutationen stets so positionieren, dass sich kein von r Pseudosphären von E berandeter d -Simplex auf der positiven Seite von x befindet). Man wendet Theorem 3.7 [15] erneut an, um wieder die ursprüngliche Konfiguration zu erhalten. Aus Lemma 25 folgt dann die Behauptung. \square

Satz 15 lässt sich somit auch nur auf realisierbare orientierte Matroide erweitern.

Satz 16. *Sei \mathcal{O} ein uniformes, azyklisches, realisierbares orientiertes Matroid vom Rang r mit der Grundmenge E , $|E| = n = rN$, und sei $N \geq 2$. Dann gilt:*

$$B_x(E^*) > 0 \Rightarrow B_x(E^*) \geq N! \quad .$$

Beweis. Der Beweis verläuft vollkommen analog zum Beweis von Satz 15. Es wird lediglich auf Proposition 23 statt auf Proposition 24 verwiesen und Pseudokreis durch Pseudosphäre ersetzt.

3.2 Simplices, die einen Punkt enthalten

Die Doktorarbeit von Stefan Hell enthält einen Satz über die Parität der Anzahl der d -Simplices im \mathbb{R}^d , die den Ursprung enthalten. Vergleiche [11], Theorem 1.12. Diesen Satz übertragen wir im Unterkapitel 3.2.1 auf orientierte Matroide vom Rang 3, hier repräsentiert durch Pseudopunktfigurationen.

Die Ergebnisse werden dann im Unterkapitel 3.2.2 für bestimmte orientierte Matroide vom Rang r polarisiert.

3.2.1 Pseudopunktkonfigurationen

Sei \mathcal{O} ein azyklisches orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge V , $|V| = n$ und sei \mathcal{O} repräsentiert durch die Pseudopunktconfiguration $\mathcal{A}(V)$. $\mathcal{A}(V)$ sei so definiert wie in Definition 13, und es sollen die gleichen Vereinbarungen getroffen werden wie in Kapitel 3.1.1 (elementare Transformation τ , Definition 17 für die allgemeine Lage, Definition 18 für die konvexe Hülle usw. bis Definition 19).

Wir wollen im Folgenden mit $z_x(\mathcal{A})$ die Anzahl der Dreiecke mit Eckpunkten aus V bezeichnen, in deren konvexer Hülle x liegt.

Anmerkung: Geht die Pseudopunktconfiguration $\mathcal{A}'(V^*)$ aus $\mathcal{A}(V^*)$ durch eine elementare Transformation τ hervor, so meinen wir mit einer Veränderung von $z_x(\mathcal{A})$ im Folgenden stets einen Unterschied des Wertes von $z_x(\mathcal{A})$ im Vergleich zum Wert von $z_x(\mathcal{A}')$.

Lemma 26. *Sei $|V| = n$ gerade. Ist $z_x(\mathcal{A})$ gerade und geht $\mathcal{A}'(V^*)$ aus $\mathcal{A}(V^*)$ durch eine elementare Transformation τ , die die Kreuzung einer Pseudolinie durch einen Punkt aus V^* ist (siehe Bild 15 auf Seite 47), hervor, so ist auch $z_x(\mathcal{A}')$ gerade.*

Beweis. Der Anfang dieses Beweises verläuft analog zum Anfang des Beweises von Lemma 19. Der spätere Verlauf orientiert sich am Beweis von Theorem 1.12 aus [11].

Wir betrachten die Menge aller Dreiecke S , die drei Punkte aus V als Eckpunkte haben und die den Punkt x in ihrer konvexen Hülle enthalten. Wechselt x durch τ von einer Seite einer Pseudolinie auf die andere, so kann sich diese Menge verändern (durch andere Ecken von $\mathcal{A}(V^*)$, die durch τ von einer Seite einer Pseudolinie auf die andere wechseln, wird diese Menge nicht verändert). Sei für beliebige, feste $y, z \in V$ $K := \{y, z\}$ die Kante mit den Endpunkten y und z . x überquere durch τ die Kante K . Für alle Dreiecke, die K nicht als Kante enthalten, ändert sich nichts. Ist S von der Art $K \cup \{v\}$ für ein $v \in V \setminus K$, so gilt folgendes:

$x \in \text{conv}(S)$ vor der Anwendung von τ gdw $x \notin \text{conv}(S)$ nach der Anwendung von τ .

Weil die konvexe Hülle eines Dreiecks, das K als Kante enthält, auf genau einer der beiden Seiten von K liegt, gilt:

Vor der Anwendung von τ liegt x in den konvexen Hüllen einer bestimmten Anzahl m von Dreiecken S mit $S = K \cup \{v\}$, $v \in V \setminus K$. Nach der Anwendung von τ ist x in keiner dieser konvexen Hüllen mehr enthalten, dafür aber in den konvexen Hüllen der restlichen Dreiecke S der Art $S = K \cup \{v\}$, $v \in V \setminus K$.

Insgesamt gibt es $n - 2$ Dreiecke, die als Eckpunkte die beiden Punkte aus K sowie einen weiteren Punkt aus $V \setminus K$ haben. Liegt der Punkt x vor der Anwendung von τ in den konvexen Hüllen von m solcher Dreiecke, so liegt er nach der Anwendung von τ in den konvexen Hüllen von $n - 2 - m$ Dreiecken dieser Art. $z_x(\mathcal{A})$ ändert sich somit genau um $|n - 2 - 2m|$, was für gerades n ebenfalls gerade ist. \square

Lemma 27. *Sei $|V| = n$. Ist $z_x(\mathcal{A})$ gerade und geht $\mathcal{A}'(V^*)$ aus $\mathcal{A}(V^*)$ durch eine elementare Transformation τ , die die Umkehrung eines Dreiecks ist (siehe Bild 18 auf Seite 49), hervor, so ist auch $z_x(\mathcal{A}')$ gerade.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 20. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 26 überlegt man sich, dass $z_x(\mathcal{A})$ sich nur dann ändern kann, wenn der Punkt x durch τ von einer Seite einer Pseudolinie auf die andere wechselt. Dies kann durch die Umkehrung eines Dreiecks in $\mathcal{A}(V^*)$ nicht passieren, da hierfür nur Dreiecke zugelassen sind, die keinen Punkt aus V^* enthalten.

Somit ändert sich durch die Umkehrung eines Dreiecks $z_x(\mathcal{A})$ nicht, der Wert von $z_x(\mathcal{A}')$ ist gleich dem Wert von $z_x(\mathcal{A})$. \square

Aus Lemma 26 und Lemma 27 folgt (vergleiche auch Korollar 9):

Korollar 10. *Sei $|V| = n$ gerade. Ist $z_x(\mathcal{A})$ gerade und geht $\mathcal{A}'(V^*)$ aus $\mathcal{A}(V^*)$ durch eine elementare Transformation τ hervor, so ist auch $z_x(\mathcal{A}')$ gerade.*

Satz 17. *Sei $|V| = n$ gerade. Dann ist $z_x(\mathcal{A})$ stets gerade.*

Beweis. Vergleiche den Beweis von Proposition 22. Nach Theorem 3.1 [14] lassen sich zwei beliebige Pseudopunktanordnungen $\mathcal{A}(V^*)$ und $\mathcal{A}'(V^*)$ durch eine endliche Folge von elementaren Transformationen ineinander überführen. Mit dieser Methode lässt sich x beliebig nahe an den Rand des Arrangements bewegen. So kann man stets eine Konfiguration erreichen, in der x nicht in der konvexen Hülle eines Dreiecks mit Eckpunkten in V liegt, also $z_x(\mathcal{A}') = 0$ gilt. Man wendet Theorem 3.1 [14] erneut an, um wieder die ursprüngliche Konfiguration zu erhalten. Aus Korollar 10 folgt dann die Behauptung. \square

3.2.2 Pseudosphärenarrangements

Wir polarisieren Schritt für Schritt die Ergebnisse des letzten Abschnitts.

Sei \mathcal{O} ein uniformes, azyklisches orientiertes Matroid vom Rang r , $r = d + 1$, auf einer endlichen Menge E , $|E| = n$ und sei \mathcal{O} repräsentiert durch ein Pseudosphärenarrangement. Es sollen die gleichen Vereinbarungen getroffen werden wie in Kapitel 3.1.2 (Definition 20 für die konvexe Hülle bei allgemeinem Rang r , Erweiterung von E um ein Element auf Seite 57 oben, Mutation τ auf Seite 61 oben).

Wir wollen im Folgenden mit $z_x(E)$ die Anzahl der d -Simplices bezeichnen, die von r Pseudosphären aus E berandet sind und ganz auf der positiven Seite von x liegen.

Anmerkung: Geht das Pseudosphärenarrangement $\mathcal{A}'(E^*)$ aus $\mathcal{A}(E^*)$ durch eine Mutation τ hervor, so meinen wir mit einer Veränderung von $z_x(E^*)$ im Folgenden stets einen Unterschied des Wertes von $z_x(E^*)$ im Vergleich zum Wert von $z_x'(E^*)$.

Lemma 28. *Sei $|E| = n$ und sei $n - d$ gerade. Ist $z_x(E^*)$ gerade und geht $\mathcal{A}'(E^*)$ aus $\mathcal{A}(E^*)$ durch eine Mutation τ hervor, so ist auch $z_x'(E^*)$ gerade.*

Beweis. Der Beweis verläuft einerseits analog zum Beweis von Lemma 26, andererseits auch ähnlich wie der Beweis von Lemma 25.

Wir betrachten die Menge aller d -Simplices S , die von r Pseudosphären aus E berandet sind und die ganz auf der positiven Seite von x liegen. Wechselt ein Cocircuit X (und sein Negatives $-X$) durch τ von einer Seite einer Pseudosphäre auf die andere, so kann sich diese Menge verändern. Wir definieren nun in Analogie zum Beweis von Lemma 25 ein antipodales Cocircuitpaar, das wir wieder mit K bezeichnen wollen. Sei für beliebige,

festen $h_1, h_2, \dots, h_{r-1} \in E$ $K := \{Y, -Y\} := \{h_1, h_2, \dots, h_{r-1}\}$ das Paar der antipodalen Cocircuits Y und $-Y$, in denen sich h_1, h_2, \dots, h_{r-1} schneiden. Durch τ wechsle Y auf die Seite von x , auf der vorher $-Y$ war, und entsprechend $-Y$ auf die Seite von x , auf der vorher Y war.

Für alle Simplices, die weder Y noch $-Y$ als Ecke enthalten, ändert sich nichts. Ist S von der Art $K \cup \{e\}$ für ein $e \in E \setminus K$ und liegt der Bereich von S^d , der von h_1, h_2, \dots, h_{r-1} berandet wird, fast vollständig auf der positiven Seite von x , so gilt folgendes:

S liegt ganz auf der positiven Seite von x vor der Anwendung von τ gdw
 S liegt nicht ganz auf der positiven Seite von x nach der Anwendung von τ .

Als Beispiel für die Lage von K bei einem orientierten Matroid vom Rang 3 dient noch einmal Bild 21 auf Seite 54, wobei wir nicht auf die Birch-Partitionen achten. Der Bereich von S^2 , der von h_1 und h_2 berandet wird, liegt fast vollständig auf der positiven Seite von x . Vor der Anwendung von τ liegt Y ebenfalls dort, nach der Anwendung von τ $-Y$.

Vor der Anwendung von τ liegen eine bestimmte Anzahl m von d -Simplices S mit $S = K \cup \{e\}$, $e \in E \setminus K$, ganz auf der positiven Seite von x . Nach der Anwendung von τ liegen alle diese Simplices nicht mehr ganz auf der positiven Seite von x , dafür aber die restlichen Simplices S der Art $S = K \cup \{e\}$, $e \in E \setminus K$.

Insgesamt gibt es $n-d$ d -Simplices, die als Eckpunkte die d Punkte aus K sowie einen weiteren Punkt aus $E \setminus K$ haben. Liegen vor der Anwendung von τ m solcher d -Simplices ganz auf der positiven Seite von x , so sind es nach der Anwendung von τ $n-d-m$ d -Simplices dieser Art. $z_x(\mathcal{A})$ ändert sich somit genau um $|n-d-2m|$, was für gerades $n-d$ ebenfalls gerade ist. □

Satz 18. Sei $|E| = n$, $n-d$ gerade und sei \mathcal{O} realisierbar. Dann ist $z_x(E^*)$ stets gerade.

Beweis. Nach Theorem 3.7 [15] lassen sich zwei beliebige realisierbare Pseudosphärenanordnungen $\mathcal{A}(E^*)$ und $\mathcal{A}'(E^*)$ durch eine endliche Folge von Mutationen, die die Realisierbarkeit erhalten, ineinander überführen. Mit dieser Methode lässt sich stets eine Anordnung erreichen, in der kein von r Pseudosphären aus E berandeter d -Simplex ganz auf der positiven Seite von x liegt, also $z_x'(E^*) = 0$ gilt. Man wendet Theorem 3.7 [15] erneut an, um wieder die ursprüngliche Konfiguration zu erhalten. Aus Lemma 28 folgt dann die Behauptung. □

Korollar 11. Sei \mathcal{O} ein uniformes, azyklisches orientiertes Matroid vom Rang 3 auf einer endlichen Menge E . Dann ist $z_x(E^*)$ stets gerade.

Beweis. Wir können hier statt des Homotopiesatzes Theorem 3.7 aus [15] den Homotopiesatz Corollary 3.3 aus [14] anwenden, der auch für nicht-realisierbare orientierte Matroide gilt. □

Literaturverzeichnis

- [1] **Aichholzer, Oswin; García, Jesús; Orden, David; Ramos, Pedro**
New results on lower bounds for the number of $(\leq k)$ -facets, European J. Combinatorics, 30 (2009), 1568-1574.
- [2] **Aigner, Martin**
Diskrete Mathematik, Friedr. Vieweg und Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006.
- [3] **Alon, Noga; Györi, Ervin**
The number of small semispaces of a finite set of points in the plane, J. Combinatorial Theory, Ser. A, 41 (1986), 154-157.
- [4] **Birch, Brian John**
On $3N$ points in a plane, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 55 (1959), 289-293.
- [5] **Björner, Anders; Las Vergnas, Michel; Sturmfels, Bernd; White, Neil; Ziegler, Günter M.**
Oriented Matroids, Cambridge University Press 1993, 1999.
- [6] **Bland, Robert G.; Las Vergnas, Michel**
Orientability of matroids, J. Combinatorial Theory, Ser. B, 25 (1978), 94-123.
- [7] **Erdős, Paul; Lovász, László; Simmons, A.; Straus, Ernst G.**
Dissection graphs of planar point sets, A Survey of Combinatorial Theory, North-Holland, 1973, 139-149.
- [8] **Felsner, Stefan**
Geometric Graphs and Arrangements, Friedr. Vieweg und Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2004.
- [9] **Folkman, Jon; Lawrence, James**
Oriented matroids, J. Combinatorial Theory, Ser. B, 25 (1978), 199-236.
- [10] **Hell, Stephan**
On the number of Birch-Partitions, Discrete and Computational Geometry, 40 (2008), 586-594.
- [11] **Hell, Stephan**
Tverberg-type theorems and the Fractional Helly property, PhD thesis, TU Berlin, 2006, online publication <http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2006/1416/>.
- [12] **Lovász, László; Vesztergombi, Katalin; Wagner, Uli; Welzl, Emo**
Convex quadrilaterals and k -sets, in Towards a Theory of Geometric Graphs, J. Pach, ed., Contemp. Math., Amer. Math. Soc., 2004, 139-148.

- [13] **Richter-Gebert, Jürgen; Ziegler, Günter M.**
Oriented Matroids, CRC Handbook on Discrete and Computational Geometry (J.E. Goodman, J. O'Rourke, eds.), CRC Press, Boca Raton, New York (1997), 111-132.
- [14] **Roudneff, Jean-Pierre**
Tverberg-type Theorems for Pseudoconfigurations of Points in the Plane, European J. Combinatorics, 9 (1988), 189-198.
- [15] **Roudneff, Jean-Pierre; Sturmfels, Bernd**
Simplicial cells in arrangements and mutations of oriented matroids, Geometriae Dedicata, 27 (1988), 153-170.
- [16] **Tverberg, Helge**
A generalisation of Radon's theorem, J. London Math. Soc., 41 (1966), 123-128.
- [17] **Welzl, Emo**
Entering and Leaving j -Facets, Discr. and Comput. Geom., 25 (2001), 351-364.
- [18] **Ziegler, Günter M.**
 $3N$ bunte Punkte in der Ebene, MDMV, 18 (2010), 164-170.