

FERNUNIVERSITÄT IN HAGEN

Fakultät für Mathematik und Informatik

# Lösungskonzepte kooperativer Spiele mit Koalitionsstrukturen

Diplomarbeit  
am Lehrgebiet Diskrete Mathematik und Optimierung  
(Korrigierte Fassung vom 8. Juli 2016)

vorgelegt von  
Manfred Besner  
Matrikelnummer: 6934765

Themensteller und Betreuer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler  
Abgabetermin: 12. März 2016

# Danksagung

Ganz herzlich möchte ich mich bei Prof. Dr. Winfried Hochstättler für die hervorragende und anspruchsvolle Betreuung bedanken. Sein Engagement für das Fach Mathematik und alle Mathematikstudenten an der FernUni Hagen, nicht zuletzt in den Diskussionsforen, haben mich das ganze Studium hindurch in meinen eigenen Anstrengungen immer positiv und motivierend begleitet. Auch dafür ein großes Dankeschön.

# Kurzreferat

In der vorliegenden Arbeit wird, ausgehend von der Harsanyi-Dividenden-Darstellung der Weighted-Shapley-Values, eine neue Klasse von  $TU$ -Values in Dividenden-Darstellung eingeführt, die die Weighted-Shapley-Values zusätzlich auf zur Koalitionsfunktion proportionale Varianten erweitert. Wir erhalten so u. a. ein proportionales Analogon zum (symmetrischen) Shapley-Value. Eine weitere neue Klasse gewichtet nicht nur mit Gewichten und Koalitionswerten von Einerkoalitionen, sondern von allen Koalitionen, die einen Spieler enthalten, ähnlich dem Proportional-Value ([Ortmann 2000]), allerdings in Dividenden-Darstellung. Auch diese Klasse enthält den Shapley-Value. Neu ist hier das Konzept der Value-Dividenden, die unter anderem eine äquivalente Charakterisierung des Shapley-Values zu der aus [Myerson 1980], Erfüllung des Balanced-Contributions-Axiom in Verbindung mit der Pareto-Optimalität, erlauben.

Die  $TU$ -Values aus dem ersten inhaltlichen Kapitel werden, mit Erweiterung der Myersonschen Graphen-Koalitionsfunktion zu einer Hypergraphen-Koalitionsfunktion, zu neuen Hypergraphen-Values modifiziert, wobei die erste Klasse von ihnen den Myerson-Value enthält. Anhand eines Beispiels von [Deng und Papadimitriou 1994] wird untersucht, inwieweit mit diesen Values Spiele auf Graphen und Hypergraphen effizient lösbar sind.

Der Hauptteil der Arbeit liegt auf Lösungskonzepten von Level-Structures, das sind hierarchisch aufgebaute Folgen von Partitionen, in denen von Stufe zu Stufe die Zusammenarbeit steigt und somit die Anzahl der Komponenten sinkt. Mithilfe von Algorithmen erweitern wir die anfangs entwickelten  $TU$ -Values zu  $LS$ -Values, die den Level-Structure-Value ([Winter 1989]) einschließen. Auch für den Proportional-Value ([Ortmann 2000]) geben wir eine Level-Structure-Variante an, wobei sich allgemein alle Pareto-effizienten  $TU$ -Values erweitern lassen, sogar Kombinationen von unterschiedlichen  $TU$ -Values. Als Nebenprodukt erhalten wir eine neue kompaktere Charakterisierung des Proportional- $CS$ -Values aus [Huettner 2015]. Mit der Algorithmus-Variante für Nested-Partitions, das ist eine spezielle Koalitionsbildung innerhalb der Level-Structures, ist eine effiziente Auszahlungsberechnung möglich, wenn der Grad der Level-Structure begrenzt ist. Zusätzlich werden weitere neue Klassen von  $LS$ -Values in Dividendenform eingeführt, wobei zwei den Level-Structure-Value einschließen und die dritte den Shapley-Value enthält.

Zum Abschluss stellen wir einen Ansatz vor, der allgemein auf beliebige, für die Spielsituation relevante, Koalitionsbildungen anwendbar ist. Dabei wird bei der Auszahlungsberechnung mit den neu eingeführten  $TU$ - und  $LS$ -Values in Dividendenform eine relevante Koalitionsfunktion verwendet. Es wird gezeigt, dass, wenn die Anzahl der relevanten Koalitionen durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt ist, eine effiziente Auszahlungsberechnung möglich ist.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzreferat</b>	<b>iii</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problem . . . . .	1
1.2 Aufgabenstellung . . . . .	2
<b>2 Definitionen, Sätze und Vereinbarungen</b>	<b>3</b>
<b>3 TU-Values</b>	<b>10</b>
3.1 Infrage kommende $TU$ -Values . . . . .	10
3.2 Weighted-Shapley-Values . . . . .	10
3.3 Der Proportional-Shapley-Value . . . . .	12
3.4 $f$ -Weighted-Shapley-Values . . . . .	15
3.5 Der Proportional-Value . . . . .	17
3.6 Der Totally-Proportional-Shapley-Value . . . . .	17
3.7 Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Values . . . . .	22
3.8 Eine neue äquivalente Charakterisierung der $f$ -Weighted-Shapley-Values . .	24
3.9 Komplexitätsbetrachtungen von $TU$ -Values . . . . .	27
<b>4 Graphen und Hypergraphen</b>	<b>28</b>
4.1 Ein Spiel auf Graphen und Hypergraphen . . . . .	28
4.2 Lösung des Spiels mit $f$ -Weighted-Shapley-Values-For-Hypergraphs . . . .	30
4.3 Lösung des Spiels mit Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Values-For-Hypergraphs	31
4.4 Komplexitätsbetrachtungen von Hypergraphen-Values . . . . .	34
<b>5 Level-Structures</b>	<b>37</b>
5.1 Nested-Partitions . . . . .	37
5.2 Algorithmus zur Berechnung des Level-Structure-Values . . . . .	40
5.3 Der Nested-Partitions-Shapley-Value . . . . .	43
5.3.1 Beispiel für Level-Structures . . . . .	46
5.3.2 Eine explizite Darstellung des Nested-Partitions-Shapley-Values . .	48
5.3.3 Ergänzung zum Beispiel für Level-Structures . . . . .	50

5.4	Erweiterte $f$ -Weighted-Shapley-Values . . . . .	50
5.4.1	Beispiel mit dem Proportional-Nested-Partitions-Shapley-Value . .	53
5.5	Weitere sukzessiv definierte $LS$ -Values . . . . .	55
5.5.1	Der Proportional-Value- $LS$ -Value . . . . .	55
5.6	Komplexitätsbetrachtungen der bisher untersuchten $LS$ -Values . . . . .	62
5.7	$f$ -Weighted- $LS$ -Shapley-Values . . . . .	66
5.7.1	$f$ -Weighted- $ILS$ -Shapley-Values . . . . .	66
5.7.2	$f$ -Weighted- $ALS$ -Shapley-Values . . . . .	72
5.7.3	$f$ -Weighted- $SLS$ -Shapley-Values . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Relevante Koalitionen</b>	<b>78</b>
6.1	Komplexitätsbetrachtungen für relevante Koalitionen . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>88</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>89</b>

# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$ A $	Die Kardinalität einer Menge $A$
$[x], \lceil x \rceil$	Untere bzw. obere Gaußklammer
$2^N$	Die Menge aller Teilmengen von $N$
$\mathcal{C}_{\underline{P}}$	Die Menge aller Komponenten $C^\ell \in P^\ell$ , $P^\ell \in \underline{P}$ , für $0 \leq \ell \leq h$ ,
$C^\ell(i)$	Die Komponente des $\ell$ -ten Levels $P^\ell$ von $\underline{P}$ , die Spieler $i$ enthält
$C_q^\ell$	Die $q$ -te Komponente des $\ell$ -ten Levels $P^\ell \in \underline{P}$
$\bar{C}_S(i)$	Die Komponente $C^m(i)$ mit $m = \max_{0 \leq \ell \leq h-1, C^\ell(i) \subseteq S} \ell$ (5.7.15)
$\bar{C}_S$	Die Menge $\{\bar{C}_S(j) : j \in S\}$ (5.7.15)
$\check{C}_T^\ell(i)$	Die Koalition, die die Schnittmenge $C^\ell(i) \cap T$ ist (5.7.8)
$\check{C}_{T,i}^\ell$	Die Menge $\{C^\ell \cap T : C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), C^\ell \cap T \neq \emptyset\}$ (5.7.8)
$CF$ – Spiel	Ein Spiel $(N, v)$ zusammen mit einer Conference-Structure (2.0.10)
$CO$ – Spiel	Ein Spiel $(N, v)$ zusammen mit einer Cooperation-Structure (2.0.10)
$\Delta_v(T)$	Die Harsanyi-Dividende (2.0.6) der Koalition $T$ im Spiel $v$
$\mathcal{G}^N$	Die Menge aller $TU$ -Spiele der Spielermenge $N$
$\mathcal{G}_{++}^N$	Die Menge aller positiven $TU$ -Spiele der Spielermenge $N$
$\mathcal{GLS}^N$	Die Menge aller $LS$ -Spiele der Spielermenge $N$
$(IA)$	Induktionsannahme
$H$	Eine Menge von Hyperkanten (2.0.10)
$H^N$	Die Menge aller Hyperkanten auf $N$ (2.0.10)
$H _T$	Die Restriktion der Hyperkantenmenge $H$ auf $T \subseteq N$ (2.0.10)
$K_T$	Koeffizienten für die Berechnung von $Sh^{LS}$ bzw. $Sh^{NP}$ (5.3.4)
$L$	Eine Menge von Kanten (2.0.10)
$\mathcal{LS}^N$	Die Menge aller Level-Structures $\underline{P}$ auf $N$
$\mu$	Der Myerson-Value (2.20)
$N^\ell$	Die Indexmenge $N^\ell = \{1, \dots, m(\ell)\}$ der Komponenten eines Levels $P^\ell = \{C_1^\ell, \dots, C_{m(\ell)}^\ell\}$
$N_q^\ell$	Die Indexmenge $\{s \in N^\ell : C_s^\ell \subseteq C_q^{\ell+1}\}$
$N _C$	Grundlegende Spielermenge der Spieler $i \in N$ einer Komponente $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$

$(N, H)$	Eine Conference-Structure bzw. ein Hypergraph
$(N, L)$	Eine Cooperation-Structure bzw. ein Graph
$(N, v)$	Ein $TU$ -Spiel, auch kurz $v$
$(N, v, P)$	Ein $CS$ -Spiel, auch kurz $(v, P)$
$(N, v, \underline{P})$	Ein $LS$ -Spiel, auch kurz $(v, \underline{P})$
$\mathcal{N}$	Die Gesamtheit aller Spieler
$\mathcal{NR}$	Die Menge der nicht relevanten Koalitionen (5.3.1)
$O(f(n))$	Groß- $O$ -Notation bzw. Landau-Symbol
$Ow$	Der Owen-Value (2.5 )
$\psi$	Der Proportional-Value (2.3, 2.4)
$\psi^{LS}$	Der Proportional-Value- $LS$ -Value (5.5.1)
$\psi^{NP}$	Der Proportional-Value- $NP$ -Value (5.5.7)
$\varpi$	Der Owen-Type-Proportional-Value (2.0.3)
$\mathcal{P}^N$	Die Menge aller Partitionen von $N$
$P(i)$	Diejenige Komponente der Partition $P$ , der Spieler $i$ angehört
$P(N, H)$	Eine Partition von $N$ in maximal zusammenhängende Teilhypergraphen
$\underline{P}$	Eine Level-Structure, eine Folge von Partitionen auf $N$
$P^\ell$	Der $\ell$ -te Level von $\underline{P}$ bzw. die $\ell$ -te Partition der Folge $\underline{P} = (P^0, P^1, \dots, P^h)$
$P _T$	Die Restriktion einer Partition auf $N$ auf eine Partition auf $T \subseteq N$ durch Elimination der Spieler von $N \setminus T$ , gegeben mit $P _T = \{C \cap T   C \in P\} \setminus \{\emptyset\}$
$\underline{P} _T$	Die Restriktion einer Level-Structure auf $N$ auf eine Level-Structure auf $T \subseteq N$ durch $\underline{P} _T = (P^0 _T, P^1 _T, \dots, P^h _T)$ mit $(T, v _T, \underline{P} _T)$ als Restriktion des $LS$ -Spiels $(N, v, \underline{P})$ durch eine Teilmenge $T \subseteq N$
$\underline{P}/P^\ell$	Die Level-Structure, die von $\underline{P}$ induziert wird, wenn wir die Komponenten von $P^\ell$ als Spieler betrachten
$Q_{f(v,w),T}$	Das totale $f$ -gewichtete Anteilsverhältnis (3.7.1)
$Q_{f(v,w),T}^{ALS}$	Das $fA$ -gewichtete Anteilsverhältnis (5.7.8)
$Q_{f(v,w),T}^H$	Das totale für Hypergraphen $f$ -gewichtete Anteilsverhältnis (4.3.1)
$Q_{f(v,w),T}^{ILS}$	Das $fI$ -gewichtete Anteilsverhältnis (5.7.1)
$Q_{f(v,w),T}^{SLS}$	Das $fS$ -gewichtete Anteilsverhältnis (5.7.15)
$Q_{v,T}$	Das total zu $v$ proportionale Anteilsverhältnis (3.6.1)
$\mathbb{R}_{++}$	Die positiven reellen Zahlen
$\mathcal{R}, \underline{\mathcal{R}}$	Die Menge der relevanten Koalitionen (6.0.1)
$Sh$	Der Shapley-Value (2.2)
$Sh_i(v)$	Die Shapley-Auszahlung für den Spieler $i$ (analog für alle Values)

$Sh^f$	Der zu $f(v, w)$ zugehörige $f$ -Weighted-Shapley-Value (3.4.1)
$Sh^{fALS}$	Der $f$ -Weighted- <i>ALS</i> -Shapley-Value (5.7.8)
$Sh^{fH}$	Der $f$ -Weighted-Shapley-Value-For-Hypergraphs (4.2.1)
$Sh^{fLLS}$	Der $f$ -Weighted- <i>ILS</i> -Shapley-Value (5.7.1)
$Sh^{fSLS}$	Der $f$ -Weighted- <i>SLS</i> -Shapley-Value (5.7.15)
$Sh^H$	Der Shapley-Value-For-Hypergraphs (4.2.2)
$Sh^{LS}$	Der Level-Structure-Value (2.0.15)
$Sh^{NP}$	Der Nested-Partitions-Shapley-Value (5.3.1)
$Sh^p$	Der Proportional-Shapley-Value (3.3.1 )
$Sh^{pH}$	Der Proportional-Shapley-Value-For-Hypergraphs (siehe nach 4.2.1)
$Sh^{pNP}$	Der Proportional-Nested-Partitions-Shapley-Value (5.4.1)
$Sh^{p\bar{w}}$	Der Proportional-Weighted-Shapley-Value (3.2.8)
$Sh^{tf}$	Der zu $f(v, w)$ zugehörige Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Value (3.7.1)
$Sh^{tfH}$	Der Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Value-For-Hypergraphs (4.3.1)
$Sh^{tfR}$	Der Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Value-For-Relevant-Coalitions (6.0.3)
$Sh^{tp}$	Der Totally-Proportional-Shapley-Value (3.6.1)
$Sh^{tpH}$	Der Totally-Proportional-Shapley-Value-For-Hypergraphs (4.3.3)
$Sh^{ts}$	Der Totally-Symmetric-Shapley-Value (3.7.5)
$Sh^{tsH}$	Der Totally-Symmetric-Shapley-Value-For-Hypergraphs (4.3.3)
$Sh^w$	Der zu $w$ zugehörige Weighted-Shapley-Value (3.2.1 )
$\Theta_{\varphi_i(v)}, \Theta_{\varphi_i(v)}^{LS}$	Die zum Value $\varphi(v)$ für den Spieler $i$ zugehörige Value- bzw. <i>LS</i> -Value-Dividende (3.6.3), (5.7.11)
$t(F_r), t(W_r),$ $t(Z_r)$	Anzahl der Elementaroperationen innerhalb der For-Schleife, der While-Schleife und der Zuweisung von Zeile $r$ (2.0.18)
$v$	Die Koalitionsfunktion $v$ , manchmal auch kurz für das <i>TU</i> -Spiel $(N, v)$
$v^H$	Die Hypergraphenkoalitionsfunktion (2.19)
$v^{NP}$	Eine von $v$ induzierte Koalitionsfunktion für Nested-Partitions (5.3.6)
$v^R, v^{\underline{R}}$	Die relevante Koalitionsfunktion (6.0.1)
$(v, \underline{P})$	Ein <i>LS</i> -Spiel, auch $(N, v, \underline{P})$
$v/P^\ell$	Das auf der Partition $P^\ell$ definierte Zwischenspiel $(N^\ell, v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell)$ mit den Komponenten von $P^\ell$ als Spielern
$v _T$	Restriktion oder Einschränkung von $v$ auf die Menge $T$
$w$	Ein Vektor von positiven Gewichten
$w_i, w_T$	Koordinaten eines Gewichtsvektors $w$ , die Gewichte der Spieler $i$ bzw. $T$

# Abbildungsverzeichnis

5.1	Baum mit ausgezeichneter Wurzel . . . . .	37
5.2	Atomare Partition . . . . .	37
5.3	Partitionen auf Ebene 1 . . . . .	38
5.4	Partitionen auf Ebene 2 . . . . .	38
5.5	Nested-Partitions . . . . .	39
5.6	Geschachtelte Partitionen auf einem Baum mit Blättern in unterschiedlichen Ebenen . . . . .	39
5.7	Level-Structure . . . . .	40
5.8	Koalitionsstruktur des Rechenbeispiels . . . . .	46

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1. Problem

Ein großer Vorteil der kooperativen Spieltheorie gegenüber der in Anwendungen bisher viel weiter verbreiteten nichtkooperativen Spieltheorie besteht darin, dass man sich nicht um verfahrenstechnische Einzelheiten wie Strategien und Aktionen der einzelnen Spieler kümmern muss. So äußert sich Robert Aumann in einem Interview mit Eric van Damme [van Damme 1998]:

”And I agree with you that an important advantage of the cooperative theory is that it takes a broader, more fundamental view, that it is not so obsessed with procedural details; its fundamental parameters are the *capabilities* of players and coalitions.”

Statt sich mit Strategien, wie in der nichtkooperativen Spieltheorie, zu befassen, orientieren wir uns in der kooperativen Spieltheorie an der Auszahlung<sup>1</sup>. Dabei sind in den Anwendungen meist eindeutige Auszahlungen erwünscht. Wir betrachten deshalb nur punktwertige Lösungskonzepte, also eine Vorgehensweise, die immer genau zu einer einzigen Lösung führt. Greifen wir beispielsweise als zentrales Verfahren den Shapley-Value heraus. An ihm wird deutlich, zu welchem Problem es in der Praxis kommen kann. Gewöhnlich sind bei der Berechnung des Shapley-Values die Koalitionswerte aller möglichen Koalitionen der Akteure zu berücksichtigen. Bei  $n$  Akteuren sind dies (mit der leeren Menge)  $2^n$  viele Koalitionen. D.h. für den Shapley-Value ergibt sich im Allgemeinen eine exponentielle Laufzeit im Bezug zur Anzahl der Spieler. Es stellt sich die Frage, für welche Anwendungen dieses grundlegende Problem gelöst werden kann. Als Abhilfe wäre eventuell einerseits eine Reduzierung der Eingabelänge geeignet, in dem in bestimmten Einsatzbereichen nur praktisch relevante Koalitionen herangezogen werden müssen oder dass bei der Durchführung der Berechnung selbst nicht alle Koalitionen einzeln Verwendung finden. Vielversprechend erscheinen in diesem Zusammenhang Strukturen auf der Spielermenge wie Partitionen oder Graphen mit entsprechenden Lösungskonzepten, da hier nur ein Teil aller möglichen Koalitionen eine präferierte Stellung besitzen.

---

<sup>1</sup>Siehe gleiches Interview wie vorher [van Damme 1998].

## 1.2. Aufgabenstellung

In seinem Aufsatz "Values of games with a priori unions" [Owen 1977] stellt Guillermo Owen eine Verallgemeinerung des Shapley-Values auf Partitionen vor, den Owen-Value. Owen weist in diesem Aufsatz darauf hin, dass sein Value in dem Sinne erweitert werden könnte, indem er auch auf kleinere Untereinheiten der Komponenten und wieder auf noch kleinere Untereinheiten dieser Untereinheiten usw. angewendet wird. Auf diesen Gedanken macht auch Frank Huettner in seiner Bachelorarbeit [Huettner 2010] aufmerksam. Bezugnehmend auf Owen, schlägt Huettner für seinen Owen-Type-Proportional-Value eine analoge Verallgemeinerung ebenfalls auf solche Strukturen vor, die aus in sich immer tiefer verschachtelten Partitionen bestehen. Diese Erweiterungen des Owen- bzw. Owen-Type-Proportional-Values führen uns unmittelbar zur Aufgabenstellung:

Wir betrachten eine Menge von  $n$  Spielern, deren Organisationsstruktur durch einen Baum mit ausgezeichneter Wurzel (Definition 2.0.11) beschrieben werden kann. Wir denken z. B. an eine hierarchisch gegliederte Verbandsstruktur, mit Landes-, Kreis- und Ortsverbänden, eine entsprechend aufgebaute Vereins- oder Parteistruktur oder ähnliches. Die eigentlichen Spieler sind nur die Elemente der Einheiten, die keine weiteren Untereinheiten besitzen, im Baummodell also die Blätter des Baums. Die Auszahlung soll so gestaltet werden, dass am Anfang die oberste Einheit die Gesamtauszahlung besitzt und an alle nächstoberen Einheiten weiterreicht, diese geben ihre Anteile an die ihnen untergeordneten Einheiten weiter usw. bis am Schluss die Einzelspieler ihre Auszahlung erhalten. Um in Worten der Verbandsstruktur zu sprechen: Der Gesamtverband (Wurzel) schüttet seine Gewinne an die Landesverbände (Kinder der Wurzel) aus, dann übergibt jeder Landesverband seinen ihm zugewiesenen Anteil an die ihm zugeordneten Kreisverbände (Kinder der Kinder der Wurzel), die wiederum reichen ihre erhaltenen Anteile an die Ortsverbände weiter und zu guter Letzt erhalten alle Mitglieder (Blätter) ihre Auszahlung. Die Komplette Auszahlung wandert vollständig von der Wurzel durch den Baum zu den Blättern.

Um dieses Auszahlungsschema anzuwenden, bilden wir Partitionen im Sinne des oben aufgeführten erweiterten Owen-Values und ermitteln mit diesem innerhalb jeder Partition eine Auszahlung für die Elemente der einzelnen Komponenten. Die Auszahlungen der einzelnen Elemente bilden die jeweils zur Verfügung stehende Gesamtauszahlung für die Elemente der nächstkleineren Partitionen usw. bis am Ende alle Spieler ihre Auszahlung erhalten haben. Analog soll anschließend der Owen-Type Proportional Value anstatt des Owen-Values für eine Erweiterung verwendet werden. Ausgangspunkt dieser Arbeit war Professor Hochstätters Idee, dass es möglich sein müsste, durch diese Vorgehensweise die Auszahlungsberechnung in polynomialer Zeit im Verhältnis zur Anzahl  $n$  der Spieler zu ermitteln.

Des Weiteren untersuchen wir Graphen- und Hypergraphenstrukturen der Spielermenge, die eine effiziente Berechnung zulassen könnten. Zusätzlich wird in dieser Arbeit ein neuer Ansatz vorgestellt, der allgemein auf beliebige, für die Spielsituation relevante, Koalitionsbildungen anwendbar ist.

## Kapitel 2

# Definitionen, Sätze und Vereinbarungen

**Vereinbarung 2.0.1.** Den Begriff „**Koalitionsstruktur**“ aus dem Titel der Diplomarbeit interpretieren wir nicht, wie in der Literatur allgemein üblich, zwingend als die aus dem Englischen („coalition structure“) wörtlich übersetzte Bezeichnung für eine Partition der Spielermenge. Vielmehr fassen wir ihn allgemeiner auf. In dieser Arbeit verstehen wir darunter eine strukturierte Koalitionsbildung, d.h. von allen theoretisch möglichen Koalitionen werden nur bestimmte Koalitionen tatsächlich eingegangen oder es werden nur bestimmte Koalitionen als bedeutend angesehen, was sich in der Koalitionsfunktion niederschlägt.

Die folgenden Definitionen und Bezeichnungen entnehmen wir weitgehend aus einem Aufsatz von Frank Huettner [Huettner 2015], der in weiten Teilen auf seiner oben zitierten Bachelorarbeit aufbaut, deutsche Bezeichnungen gehen meist auf [Wiese 2005] zurück:

**Definitionen und Bezeichnungen 2.0.2.** Gegeben sei eine unendliche Menge  $\mathcal{N}$ , die Gesamtheit aller Spieler. Ein Koalitionsspiel  $(N, v)$  bei transferierbarem Nutzen (**TU-Spiel**) ist eine nichtleere und endliche Menge  $N \subseteq \mathcal{N}$  (die Spieler) zusammen mit einer Abbildung (**Koalitionsfunktion**)  $v$ ,

$$v \in \{f : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \mid f(\emptyset) = 0\},$$

in der englischsprachigen Literatur als „characteristic function“ bezeichnet. Hierbei bedeutet  $2^N$  die Menge aller Teilmengen von  $N$ . Die TU-Spiele (kurz nur Spiel), erhalten, wenn keine Verwechslungsgefahr mit der Koalitionsfunktion besteht, aus Vereinfachungsgründen ebenfalls das Symbol  $v$ . Die Menge aller TU-Spiele mit der Spielermenge  $N$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{G}^N$  und die Klasse aller TU-Spiele mit  $\mathcal{G}$ , die Menge aller positiven Spiele auf  $N$  mit  $\mathcal{G}_{++}^N = \{v \in \mathcal{G}^N : v(S) > 0 \text{ für alle } S \subseteq N, S \neq \emptyset\}$ . Teilmengen  $S \subseteq N$  nennen wir **Koalitionen** und für eine Koalition  $S$  heißt  $v(S)$  der **Wert** von  $S$ .

Eine **Partition**  $P$  ist eine Menge von nichtleeren, paarweise verschiedenen und  $N$  ausschöpfenden Teilmengen von  $N$ , die auch als **Coalition-Structure** bezeichnet wird. Die Menge aller Partitionen von  $N$  ist gegeben durch  $\mathcal{P}^N$ . Ein TU-Spiel zusammen mit einer Partition ergibt dann ein Partitions-Spiel oder **CS-Spiel**  $(N, v, P)$ , bzw. kurz  $(v, P)$  wenn  $N$  klar ist. Mit  $\mathcal{GP}$  bezeichnen wir die Menge aller CS-Spiele, mit  $\mathcal{GP}_{++}$  die Menge aller positiven CS-Spiele. Die Elemente einer Partition  $P$  heißen **Komponenten** und  $P(i) = C \in P$  ist diejenige Komponente, der ein Spieler  $i$  bei der Partition  $P$  angehört.

Für  $v \in \mathcal{G}^N$  und  $T \subseteq N$  bezeichnen wir das TU-Spiel  $v|_T$ , das mit  $(N, v)$  auf der Spielermenge  $T \subseteq N$  übereinstimmt, und somit Teilmengen von  $T$  dieselben Werte zuweist wie  $v$ , formal  $v|_T(S) = v(S)$  für alle  $S \subseteq T$ , als die **Restriktion** oder Einschränkung von  $v$  auf  $T$ . Aus einer Partition auf  $N$  folgt eine Partition auf  $T \subseteq N$  durch Elimination

der Spieler von  $N \setminus T$ , gegeben mit  $P|_T = \{C \cap T | C \in P\} \setminus \{\emptyset\}$ ,  $(v|_T, P|_T)$  ist dann die Restriktion des CS-Spiels  $(v, P)$  durch eine Teilmenge  $T \subseteq N$ . Ist klar, dass für eine Partition  $P_j$  nicht die Spielermenge  $N$  die Grundmenge ist, sprechen wir von  $P_j$  einfach als Partition und die grundlegende Spielermenge der Partition  $P_j$  bezeichnen wir mit  $N|_{P_j}$ . Jedes CS-Spiel  $(v, P)$  induziert ein **Zwischenspiel** mit den Komponenten von  $P$  als Spielern. Die zugehörige Koalitionsfunktion  $v/P$  ist gegeben durch

$$(v/P)(T) = v\left(\bigcup_{C \in T} C\right), \text{ für alle } T \subseteq P. \quad (2.1)$$

Als **TU-Value**, kurz nur **Value** oder punktwertiges **Lösungskonzept**, definieren wir einen Operator  $\phi$ , der allen  $v \in \mathcal{G}^N$  für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$  einen Auszahlungsvektor  $\phi(v) \in \mathbb{R}^{|N|}$  zuweist, mit der Bedeutung, dass  $\phi_i(v)$  die Auszahlung des Spielers  $i$  im TU-Spiel  $v$  ist. Wir definieren den **Shapley-Value**  $Sh$  [Shapley 1953b] in folgender Form:

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \quad (2.2)$$

für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$  und  $i \in N$ , wobei wir  $s := |S|$  und  $n := |N|$  gesetzt haben. Der **Proportional-Value**  $\psi$  nach [Ortmann 2000] bzw. [Feldman 1999] ist rekursiv definiert für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $S \subseteq N$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$  und  $i \in S$  durch

$$\psi_i(v|_S) = \frac{v(S)}{1 + \sum_{j \in S \setminus \{i\}} \frac{\psi_j(v|_{S \setminus \{i\}})}{\psi_i(v|_{S \setminus \{j\}})}} \text{ für } |S| > 1 \quad (2.3)$$

und

$$\psi_i(v|_{\{i\}}) = v(\{i\}) \text{ für } |S| = 1. \quad (2.4)$$

Ein **CS-Value** ist ein Operator  $\varphi$ , der  $(v, P)$  für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $P \in \mathcal{P}^N$  und  $v \in \mathcal{G}^N$  einen Auszahlungsvektor  $\varphi(v, P) \in \mathbb{R}^n$  zuweist. Der **Owen-Value**  $Ow$  [Owen 1977] ist dann mit  $b_{n,s} := \frac{1}{n} \binom{n-1}{s}^{-1}$  für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $P \in \mathcal{P}^N$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$  und  $i \in N$  gegeben durch

$$Ow_i(v, P) = \sum_{T \subseteq P \setminus P(i)} \sum_{S \subseteq P(i) \setminus \{i\}} b_{|P|, |T|} \cdot b_{|P(i)|, |S|} \cdot \left[ v\left(\bigcup_{C \in T} C \cup S \cup \{i\}\right) - v\left(\bigcup_{C \in T} C \cup S\right) \right]. \quad (2.5)$$

Auf den Owen-Value bezieht sich Huettner bei der Konstruktion seines Owen-Type-Proportional-Values [Huettner 2010], den er später Proportional-CS-Value [Huettner 2015] nennt:

**Definition 2.0.3.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ ,  $P \in \mathcal{P}^N$  und  $i \in N$  bezeichne  $\psi$  für das zugehörige TU-Spiel  $(N, v)$  den Proportional-Value (2.3, 2.4). Dann ist für alle  $i \in N$  der **Proportional-CS-Value**  $\varpi$  rekursiv gegeben durch

$$\varpi_i(v|_S, P|_S) = \frac{\psi_{P|_S(i)}((v|_S)/P|_S)}{1 + \sum_{j \in P|_S(i) \setminus \{i\}} \frac{\varpi_j(v|_{S \setminus \{i\}}, P|_{S \setminus \{i\}})}{\varpi_i(v|_{S \setminus \{j\}}, P|_{S \setminus \{j\}})}} \text{ für } |(P|_S(i))| \geq 2 \quad (2.6)$$

und

$$\varpi_i(v|_S, P|_S) = \psi_{\{i\}}((v|_S)/P|_S) \quad \text{für } P|_S(i) = \{i\}. \quad (2.7)$$

In der nachstehenden Definition beziehen wir uns auf [Huettner 2015]:

**Definition 2.0.4.** Lösungskonzepte für Koalitionsspiele  $(N, v)$ , für die, wenn  $|N| = 2$ ,  $i, j \in N, i \neq j$

$$\phi_i(v) = v(\{i\}) + \frac{1}{2}[v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})] \quad (2.8)$$

gilt, werden als **Standardlösungskonzepte** bezeichnet; gilt  $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$  und

$$\phi_i(v) = v(\{i\}) + \frac{v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})} v(\{i\}) = \frac{v(\{i, j\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})} v(\{i\}), \quad (2.9)$$

bezeichnen wir sie als **proportionale Lösungskonzepte**.

Shapley verwendet in [Shapley 1953b] eine besondere Art von Spielen:

**Definition 2.0.5.** Für jede Menge  $T \subseteq N, N \subseteq \mathcal{N}, T \neq \emptyset$ , sind die **Einmütigkeitsspiele** ("unanimity game")  $(N, u_T)$  definiert durch

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T \subseteq S, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.10)$$

In [Shapley 1953b] wird gezeigt, dass die Koalitionsfunktion  $v$  jedes Spiels  $(N, v) \in \mathcal{G}^N$  eindeutig als Linearkombination der Koalitionsfunktionen der Einmütigkeitsspiele mit

$$v = \sum_{\substack{T \subseteq N, \\ T \neq \emptyset}} \Delta_v(T) u_T \quad (2.11)$$

dargestellt werden kann, wobei die  $\Delta_v(T)$  durch

$$\Delta_v(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T|-|S|} v(S) \quad (2.12)$$

gegeben sind. Manchmal ist es günstig, ein Spiel nicht nur in der Darstellung mit einer Koalitionsfunktion zu betrachten. Harsanyi verwendet dafür die Koeffizienten aus Gleichung 2.11, sogenannte Dividenden [Harsanyi 1959], [Harsanyi 1963], die oft eine bessere Einsicht in die Struktur eines Spiels liefern:

**Definition 2.0.6.** (Nach [Macho-Stadler et al. 2010]) Für  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$  und Koalitionen  $S \subseteq N$  sind die **Harsanyi-Dividenden** (kurz **Dividenden**)  $\Delta_v(S)$  rekursiv gegeben durch

$$\Delta_v(S) = v(S) - \sum_{R \subset S} \Delta_v(R) \quad \text{für } |S| \geq 1 \quad \text{und} \quad (2.13)$$

$$\Delta_v(S) = 0 \quad \text{für } S = \emptyset. \quad (2.14)$$

Wir können eine Dividende als den tatsächlichen Beitrag interpretieren, den eine Koalition zum Koalitionswert dieser Koalition beiträgt. Dividenden für Koalitionen  $S$  mit  $\Delta_v(S) = 0$  tragen nichts bei, deshalb nennen wir sie **Dummy-Dividenden**. Wir sagen, ein Value  $\phi$  besitzt eine **Dividendendarstellung**, wenn für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$  für alle  $i \in N$  gilt

$$\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q(i, T, v) \Delta_v(T),$$

wobei  $Q(i, T, v)$  ein reeller Ausdruck ist, der von  $i$  und/oder  $T$  und/oder  $v$  abhängt. Die folgenden Axiome sind an [Wiese 2005] angelehnt:

**Axiom 2.0.7.** Ein Auszahlungsvektor  $\phi = (\phi_i)_{i \in N}$  erfüllt das **Pareto-Axiom** (oft auch Pareto-Effizienz oder nur Effizienz genannt) bzw. ist **Pareto-optimal**, falls gilt

$$\sum_{i \in N} \phi_i = v(N). \quad (2.15)$$

**Axiom 2.0.8.** Ein Value  $\varphi$  erfüllt das **Axiom über den unwesentlichen Spieler (Dummy Player)** genau dann, wenn jeder unwesentliche Spieler, d.h. jeder Spieler  $i \in N$ , der zu jeder Koalition  $S$  genau  $v(\{i\})$  beiträgt, also  $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ ,  $i \notin S$ ,  $S \subseteq N$ , den Wert seiner Einerkoalition erhält:

$$\varphi_i(v) = v(\{i\}). \quad (2.16)$$

Gilt zusätzlich  $v(\{i\}) = 0$ , so ist  $i$  auch ein **Nullspieler**.

**Axiom 2.0.9.** Das **Monotonie-Axiom bezüglich der großen Koalition** ist genau dann für einen Value  $\varphi$  erfüllt, wenn für zwei Koalitionswertfunktionen  $v$  und  $w$  mit

$$v(S) \begin{cases} = w(S), & \text{für } S \subsetneq N, \\ > w(S), & \text{für } S = N, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\varphi_i(v) \geq \varphi_i(w) \text{ für alle } i \in N \quad (2.18)$$

gilt.

In den anschließenden Definitionen folgen wir weitgehend [Casajus 2007]:

**Definitionen und Bezeichnungen 2.0.10.** Eine **Conference-Structure** ist für alle  $(N, v)$ ,  $N \subseteq \mathcal{N}$ , ein Hypergraph  $(N, H)$ , bei dem  $H$  ein Mengensystem von Teilmengen  $h \subseteq N$  ist, mit  $H \subseteq H^N = \{h \subseteq N : |h| \geq 2\}$ . Die Elemente  $h \in H$  nennen wir **Hyperkanten**, die Spieler  $i \in N$  auch **Knoten**. Die Größe einer Kante  $h$  entspricht der Anzahl der Knoten in der Hyperkante  $h$ .  $H|_T = \{h \in H : h \subseteq T\}$  ist die Restriktion von  $H$  auf eine Teilmenge  $T \subseteq N$  und der Hypergraph  $(T, H|_T)$  heißt Teilhypergraph. Ein Kantenzug auf einem Hypergraphen  $(N, H)$  von einem Knoten  $i \in N$  zu einem Knoten  $j \in N$  ist eine nicht leere alternierende Folge von Knoten aus  $N$  und Hyperkanten aus  $H$  ( $i = p_0, h_0, p_1, h_1, \dots, h_{m-1}, p_m = j$ ) in der Art, dass die Hyperkanten  $h_k$  die Knoten  $p_k$  und  $p_{k+1}$  für alle  $k \in \{0, \dots, m-1\}$  enthalten, ein Knoten  $i$  allein ist ein trivialer Kantenzug. Ein Teilhypergraph heißt zusammenhängend, wenn er für je zwei seiner (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Knoten  $i, j$  einen Kantenzug von  $i$  nach  $j$  besitzt.

Zu jedem Hypergraphen  $(N, H)$  gibt es eine Partition  $P(N, H)$  von  $N$  mit maximal zusammenhängenden Teilhypergraphen  $C$  als Elementen, die wir **Komponenten** nennen.

Ein Spezialfall einer Conference-Structure ist eine **Cooperation-Structure**. Das ist ein Hypergraph  $(N, L)$  mit  $L \subseteq L^N = \{h \subseteq N : |h| = 2\}$ , den wir **Graph** nennen, die Hyperkanten heißen **Kanten** und verbinden genau zwei Spieler.

Ein **CF-Spiel**  $(N, v, H)$  ist ein Spiel  $(N, v)$  zusammen mit einer Conference-Structure  $(N, H)$ , ein **CF-Value** ist ein Operator  $\varphi$ , der allen CF-Spielen  $(N, v, H)$  einen Auszahlungsvektor  $\varphi(N, v, H) \in \mathbb{R}^{|N|}$  zuweist. Entsprechend ist ein **CO-Spiel**  $(N, v, L)$  ein Spiel  $(N, v)$  zusammen mit einer Cooperation-Structure  $(N, v, L)$  und ein **CO-Value** ein Operator  $\varphi$ , der allen CO-Spielen  $(N, v, L)$  einen Auszahlungsvektor  $\varphi(N, v, L) \in \mathbb{R}^{|N|}$  zuweist.

Für jedes CF-Spiel  $(N, v, H)$  definieren wir ein TU-Spiel  $(N, v^H)$  durch eine **Hypergraphenkoalitionsfunktion**  $v^H$  mit

$$v^H(T) := \sum_{S \in P(T, H|_T)} v(S) \quad \text{für alle } T \subseteq N. \quad (2.19)$$

Dann ist der **Myerson-Value**  $\mu$  [Myerson 1977], mit  $L := H$  für  $|h| = 2$ , definiert durch

$$\mu(N, v, L) = Sh(N, v^L). \quad (2.20)$$

Bei den von uns benötigten allgemeinen Bäumen mit ausgezeichnete Wurzel beziehen wir uns auf [Güting 2003]:

**Definition 2.0.11.** Ein einzelner Knoten  $x$  ist ein Baum. Wenn  $x$  ein Knoten ist und  $T_1, \dots, T_k$  Bäume sind, dann ist auch das  $(k+1)$ -Tupel  $(x, T_1, \dots, T_k)$  ein Baum.

$x$  heißt Wurzel,  $T_i, i \in \{1, \dots, k\}$  Teilbaum. Die Wurzeln der Teilbäume  $T_i$  sind die Kinder von  $x$ ,  $x$  ist ihr Elternknoten. Knoten, die keine Kinder besitzen, nennen wir Blätter, Knoten, die Kinder desselben Elternknotens sind, Geschwister. Ein Pfad ist eine Folge von Knoten  $p_0, \dots, p_s$ , so dass für  $i \in \{0, \dots, s-1\}$  jeweils  $p_i$  Elternknoten von  $p_{i+1}$  ist. Die Knoten auf dem Pfad von der Wurzel zu einem Knoten  $p$  heißen Vorfahren, die Knoten auf Pfaden von  $p$  zu einem Blatt (Blätter eingeschlossen) Nachfahren von  $p$ . Jeder Teilbaum eines Baumes  $T$  besteht aus einem Knoten zusammen mit all seinen Nachfahren. Die Länge eines Pfades  $p_0, \dots, p_s$  ist  $s$ , die Höhe eines Baumes  $T$  ist die Länge eines längsten Pfades, der Grad eines Baumes ist die maximale Anzahl der Kinder eines Knotens im Baum.

Die folgende Definition ist an [Wiese 2005] angelehnt:

**Definition 2.0.12.** Eine Partition  $P_1$  heißt **feiner** als eine Partition  $P_2$ , falls  $P_1(i) \subseteq P_2(i)$  für alle  $i \in N$  gilt, sie heißt **echt feiner**, falls  $P_1(i) \subsetneq P_2(i)$  für mindestens ein  $i \in N$  gilt. Die feinste Partition ist die so genannte atomare Partition  $\{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ , die Partition  $\{\{1, \dots, n\}\}$ , die Spieler bilden die sogenannte **große Koalition** als einzige Komponente, heißt triviale Partition.

Eyal Winter hat in [Winter 1989] die Idee von Owen [Owen 1977] aufgegriffen, den Shapley- bzw. Owen-Value nicht nur auf eine einzelne Partition, sondern auf hierarchische Strukturen der Koalitionsbildung zu erweitern. Dazu benötigen wir folgende Definitionen, die wir überwiegend aus [Gómez-Rúa, Vidal-Puga 2011] übernehmen:

**Definitionen und Bezeichnungen 2.0.13.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$  besteht eine **Level-Structure**  $\underline{P}$  aus einer endlichen Folge  $\underline{P} = (P^0, P^1, \dots, P^h)$  von Partitionen auf  $N$  mit  $P^\ell \in \mathcal{P}^N$ ,  $h \geq 1$  und  $0 \leq \ell \leq h$ .  $P^0$  ist die atomare Partition und  $P^h$  die triviale Partition. Die einzelnen Folgenglieder  $P^\ell$  sprechen wir auch als Elemente der Level-Structure  $\underline{P}$  an, also  $P^\ell \in \underline{P}$ . Die Partition  $P^\ell$  wird als der  $\ell$ -te Level von  $\underline{P}$  bezeichnet. Dabei gilt für alle  $\ell \in \{0, 1, \dots, h-1\}$ , dass  $P^\ell$  feiner ist als  $P^{\ell+1}$ . Die Elemente einer Partition  $P^\ell = \{C_1^\ell, \dots, C_{m(\ell)}^\ell\}$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , nennen wir Komponenten und definieren dazu die Indexmenge  $N^\ell$  mit  $N^\ell = \{1, \dots, m(\ell)\}$ . Mit  $2^{N^\ell}$  bezeichnen wir die Menge aller Koalitionen, die die Komponenten  $C^\ell \in P^\ell$  miteinander bilden können. Die Menge  $\mathcal{C}_{\underline{P}}$  ist die Menge, die alle Komponenten  $C^\ell$  aus allen Levels  $P^\ell \in \underline{P}$ ,  $0 \leq \ell \leq h$  enthält.

Eine Level-Structure  $\underline{P}$  mit  $h+1$  Levels besitzt die Höhe  $h$ . Die grundlegende Spielermenge der Spieler  $i \in N$  einer Komponente  $C_j^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , bezeichnen wir mit  $N|_{C_j^\ell}$ , die Anzahl der Komponenten  $C_k^{\ell-1} \in P^{\ell-1}$  mit  $C_k^{\ell-1} \subseteq C_j^\ell$ ,  $\ell \geq 1$ , als Grad  $d_{C_j^\ell}$  der Komponente  $C_j^\ell$  und den maximalen Grad aller Komponenten der Partitionen  $P^\ell \in \underline{P}$ ,  $\ell \geq 1$ , als Grad  $d$  der Level-Structure  $\underline{P}$ .

Die Menge aller Level-Structures  $\underline{P}$  wird mit  $\mathcal{LS}$ , die Menge aller Level-Structures  $\underline{P}$  auf  $N$  wird mit  $\mathcal{LS}^N$  bezeichnet, ein TU-Spiel zusammen mit einer Level-Structure  $\underline{P}$  ergibt ein Level-Structure-Spiel oder LS-Spiel  $(N, v, \underline{P})$  bzw. kurz  $(v, \underline{P})$ . Mit  $\mathcal{GLS}^N$  bezeichnen wir die Menge aller, mit  $\mathcal{GLS}_{++}^N$  die Menge aller positiven LS-Spiele auf  $N$ .

Aus einer Level-Structure auf  $N$  folgt eine Level-Structure auf  $T \subseteq N$  durch Elimination der Spieler von  $N \setminus T$ , gegeben mit  $\underline{P}|_T = (P^0|_T, P^1|_T, \dots, P^h|_T)$ .  $(T, v|_T, \underline{P}|_T)$  ist dann die Restriktion des LS-Spiels  $(N, v, \underline{P})$  durch eine Teilmenge  $T \subseteq N$ . Für eine gegebene Partition  $P^\ell \in \underline{P}$  definieren wir  $\underline{P}/P^\ell$  als die Level-Structure, die von  $\underline{P}$  induziert wird, wenn wir die Komponenten von  $P^\ell$  als Spieler betrachten. In diesem Fall werden die Spieler von  $P^\ell$  durch die zugehörigen Indizes der Komponenten angesprochen, das Spiel selbst bezeichnen wir mit  $(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell)$ . D.h. wir können  $\underline{P}/P^\ell$  als die Level-Structure interpretieren, die man aus  $\underline{P}$  erhält, wenn die Kooperationen aus niedrigeren Levels als  $\ell$  gestrichen werden. Das Zwischenspiel  $(N^\ell, v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell)$  ist das Spiel  $v/P^\ell \in \mathcal{GLS}$ , das auf der Partition  $P^\ell$  definiert ist mit der Koalitionsfunktion

$$(v/P^\ell)(Q) = v\left(\bigcup_{q \in Q} C_q^\ell\right), \text{ für alle } Q \subseteq N^\ell. \quad (2.21)$$

Ein **LS-Value** ist ein Operator  $\varphi$ , der  $(v, \underline{P})$  für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  und  $v \in \mathcal{G}^N$  einen Auszahlungsvektor  $\varphi(v, \underline{P}) \in \mathbb{R}^{|N|}$ , zuweist.

Eine zusätzliche Definition aus [Winter 1989] ermöglicht es uns nun, den Level-Structure-Value axiomatisch einzuführen:

**Definition 2.0.14.** Sei  $\pi$  eine Permutation der Spielermenge  $N$  und  $P = (S^1, \dots, S^k)$  eine Partition. Dann bezeichnen wir mit  $\pi P$  die Partition  $(\pi S^1, \dots, \pi S^k)$ . Wenn  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$  eine Level-Structure ist, bezeichnen wir mit  $\pi \underline{P}$  die Level-Structure  $(\pi P^0, \dots, \pi P^h)$ . Für ein Spiel  $v \in \mathcal{G}^N$  ist  $\pi v$  das Spiel, in dem für jede Teilmenge  $S \subseteq N$   $\pi v(S) = v(\pi^{-1}S)$  gilt.

**Satz 2.0.15** ([Winter 1989]). Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  sei  $(v, \underline{P})$  ein LS-Spiel. Dann ist eindeutig ein LS-Value, bezeichnet als **Level-Structure-Value**  $Sh^{LS}$ ,

definiert, wenn folgende 5 Axiome erfüllt sind:

*Pareto-Axiom:* Für alle  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  und alle  $v \in \mathcal{G}^N$  gilt:  $\sum_{i \in N} Sh_i^{LS}(v, \underline{P}) = v(N)$ .

*Additivitäts-Axiom:* Seien  $v, w \in \mathcal{G}^N$  und  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$ .

Dann gilt:  $Sh^{LS}(v + w, \underline{P}) = Sh^{LS}(v, \underline{P}) + Sh^{LS}(w, \underline{P})$ .

*Symmetrie-Axiom:* Für alle  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  und für alle  $v \in \mathcal{G}^N$  gilt für jede Permutation  $\pi$  auf  $N$ :  $\pi Sh^{LS}(v, \underline{P}) = Sh^{LS}(\pi v, \pi \underline{P})$ .

*Symmetrie-Axiom*

*auf Komponenten:* Sei  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$  eine Level-Structure. Für jeden Level

$0 \leq \ell < h$  gilt für symmetrische Spieler  $S, T \in P^\ell$  im Spiel  $(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell)$ , wenn  $S$  und  $T$  Teilmengen der gleichen

Komponente in jedem Level  $P^j$  sind für  $j > \ell$ ,

$$\sum_{i \in S} Sh_i^{LS}(v, \underline{P}) = \sum_{i \in T} Sh_i^{LS}(v, \underline{P}).$$

*Nullspieler-Axiom:* Wenn  $i, i \in N$ , ein Nullspieler in  $v$  ist, d.h. für jede Teilmenge  $S \subseteq N$  gilt  $v(S) = v(S \cup \{i\})$ , dann erhält  $i$  eine Auszahlung von null, also  $Sh_i^{LS}(v, \underline{P}) = 0$ .

Der folgende Satz besagt, dass die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $N$ , die sich in einer Komponente eines Levels  $\ell$  einer Level-Structure befinden, beim Level-Structure-Value vollkommen unabhängig von der Koalitionsstruktur der niedrigeren Levels ist.

**Satz 2.0.16** ([Winter 1989]). Sei  $\underline{P}$  eine Level-Structure und  $P^\ell$  der  $\ell$ -te Level von  $\underline{P}$ . Dann gilt für jede Komponente  $C^\ell \in P^\ell$

$$Sh_{C^\ell}^{LS}(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell) = \sum_{i \in C^\ell} Sh_i^{LS}(v, \underline{P}). \quad (2.22)$$

**Bemerkung 2.0.17** ([Winter 1989]). Sei  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$  eine Level-Structure. Gilt  $h = 2$ , ist der Level-Structure-Value identisch mit dem Owen-Value  $Ow$  (2.5), gilt  $h = 1$  ist er identisch mit dem Shapley-Value  $Sh$  (2.2).

**Bezeichnung 2.0.18.** Mit  $t(A)$  bezeichnen wir die Anzahl der Elementaroperationen des Algorithmus  $A$ , mit  $t(F_r)$  die innerhalb der Schleifendurchläufe der For-Schleife von Zeile  $r$ , mit  $t(W_r)$  der While-Schleife von Zeile  $r$  und mit  $t(Z_r)$  die innerhalb der Zuweisung von Zeile  $r$ .

**Vereinbarung 2.0.19.** Im Allgemeinen bezeichnet man ein Problem als effizient lösbar, wenn es in polynomialer Zeit im Verhältnis zur Eingabegröße lösbar ist. Im Gegensatz dazu werden wir in dieser Arbeit ein Lösungskonzept, bzw. den dafür benutzten Algorithmus, angewendet auf ein Spiel, das als Eingabegröße die komplette Potenzmenge  $2^N$  verwendet, nicht als effizient betrachten. Bezeichnen wir einen Algorithmus eines Lösungskonzeptes als effizient, meinen wir immer, dass er in polynomialer Zeit in Bezug zur Anzahl  $n = |N|$  der Spieler, also in Zeit  $O(n^k)$  mit einer Konstanten  $k \geq 1$ , die Auszahlung berechnet.

## Kapitel 3

### ***TU-Values***

#### **3.1. Infrage kommende *TU-Values***

Wir schränken die für unsere Untersuchungen verwendeten *TU-Values* (also punktwertige Lösungskonzepte) auf bestimmte Eigenschaften ein. Wir wollen, dass das Lösungskonzept Pareto-optimal ist. Im Besonderen interessieren uns Standardlösungskonzepte und proportionale Lösungskonzepte (2.0.4).

Bei bestimmten Koalitionsstrukturen haben nur einige Koalitionen eine relevante Bedeutung. Dabei liefern die nichtrelevanten Koalitionen keinen positiven Beitrag im folgenden Sinn: Als tatsächlichen Beitrag einer Koalition  $S$  können wir den Anteil auffassen, der mit dem Koalitionswert  $v(S)$ , abzüglich aller tatsächlichen Beiträge aller echten Teilmengen von  $S$ , übereinstimmt. Dieser Interpretation eines tatsächlichen Beitrags entsprechen die Harsanyi-Dividenden  $\Delta_v$  (2.0.6): Der tatsächliche Beitrag einer Einerkoalition  $\{i\}$  ist gerade ihr Wert,  $\Delta_v(\{i\}) = v(\{i\})$ , und für jede Koalition  $S$ ,  $|S| > 1$ , ergibt sich rekursiv  $\Delta_v(S) = v(S) - \sum_{R \subsetneq S} \Delta_v(R)$ . Wenn nicht relevante Koalitionen einen tatsächlichen Beitrag von null liefern, sind ihre Harsanyi-Dividenden Dummy-Dividenden. Wie sich später herausstellt, ist es komplexitätsmäßig oft von Vorteil, wenn ein Value eine Dividenden-Darstellung besitzt. Wir können dann bei der Auszahlungsberechnung die Dummy-Dividenden sozusagen „links liegen lassen“. Deshalb liegt unser Hauptaugenmerk auf der Entwicklung von *TU-Values* in Dividenden-Darstellung.

#### **3.2. Weighted-Shapley-Values**

Bei vielen Anwendungen ist die Annahme von Symmetrie der Spieler für das zugrundeliegende Modell unrealistisch, z. B. wenn die Verhandlungsmacht oder das eingesetzte Kapital der Spieler unterschiedlich sind oder unterschiedlich große Gruppen selbst die Spieler sind. In [Shapley 1953a] befindet sich für solche Fälle, zusätzlich zum (symmetrischen) Shapley-Value, eine nicht symmetrische Verallgemeinerung, die Weighted-Shapley-Values:

**Definition 3.2.1.** (Nach [Macho-Stadler et al. 2010]) Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ . Dann ist für alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit einem Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i$ ,  $w_i > 0$  für alle  $i \in N$ , der zu  $w$  zugehörige **Weighted-Shapley-Value** ([Shapley 1953a])  $Sh^w$  gegeben durch

$$Sh_i^w(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{w_i}{\sum_{j \in S} w_j} \Delta_v(S) \quad \text{für alle } i \in N, \quad (3.1)$$

wobei die  $\Delta_v(S)$  die Harsanyi-Dividenden aus 2.0.6 bezeichnen.

Von Varianten mit Spielergewichten von Null sehen wir ab. Weighted-Shapley-Values wurden u. a. von [Kalai und Samet 1987] und [Hart und Mas-Colell 1989] axiomatisiert. In [Myerson 1980] ist sinngemäß folgendes Axiom aufgestellt:

**Axiom 3.2.2.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ , einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i$ ,  $w_i > 0$  für alle  $i \in N$ , alle  $S \subseteq N$  und alle Spieler  $i, j \in S$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ein Lösungskonzept  $\varphi$  das **Weighted-Balanced-Contributions-Axiom** genau dann, wenn gilt:

$$\frac{\varphi_i(v|_S) - \varphi_i(v|_{S \setminus \{j\}})}{w_i} = \frac{\varphi_j(v|_S) - \varphi_j(v|_{S \setminus \{i\}})}{w_j}. \quad (3.2)$$

Das heißt, die Auszahlung für den Spieler  $i$  ändert sich, wenn Spieler  $j$  nicht am Spiel teilnimmt, proportional im Verhältnis zu seinem Gewicht  $w_i$ , wie sich die Auszahlung für den Spieler  $j$  im Verhältnis zu dessen Gewicht  $w_j$  ändert, wenn Spieler  $i$  nicht am Spiel teilnimmt. In [Myerson 1980] wird dann gezeigt:

**Satz 3.2.3.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$  und  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  ein Vektor von Gewichten  $w_i$ ,  $w_i > 0$  für alle  $i \in N$ . Dann ist jeder TU-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und das Weighted-Balanced-Contributions-Axiom erfüllt, gleich dem zu  $w$  zugehörigen Weighted-Shapley-Value  $Sh^w$ .

Der Shapley-Value besitzt eine Darstellung in Dividendenform:

**Satz 3.2.4** ([Harsanyi 1959]). Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$  und  $i \in N$  gilt

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{\Delta_v(S)}{|S|}. \quad (3.3)$$

**Bemerkung 3.2.5.** Gleichung 3.3 zeigt, dass der (symmetrische) Shapley-Value einem Weighted-Shapley-Value entspricht, bei dem alle Gewichte  $w_i$ ,  $w_i > 0$ , gleich sind.

Nicht zuletzt aufgrund seiner zahlreichen und vielfältigen Axiomatisierungen (siehe z. B. [Shapley 1953a],[Shapley 1953b], [Young 1985], [Hart und Mas-Colell 1989], [Chun 1989]) gilt der Shapley-Value bei den meisten Spieltheoretikern und Wirtschaftswissenschaftlern als das Hauptlösungskonzept für TU-Spiele. Wir verwenden den Shapley-Value als Standardlösungskonzept: Der tatsächliche Beitrag, d.h. die Harsanyi-Dividende, jeder Koalition  $S \subseteq N$  wird symmetrisch, also gleichmäßig, auf alle Spieler, die sich in  $S$  befinden, aufgeteilt. Somit gilt für ein Zwei-Spieler-Spiel  $(\{i, j\}, v)$ ,  $i \neq j$ ,

$$\begin{aligned} Sh_i(v) &= \sum_{\substack{S \subseteq \{i, j\}, \\ S \ni i}} \frac{1}{|S|} \Delta_v(S) = \Delta_v(\{i\}) + \frac{1}{2} \Delta_v(\{i, j\}) \\ &= v(\{i\}) + \frac{1}{2} [v(\{i, j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})]. \end{aligned}$$

Das spezielle Weighted-Balanced-Contributions-Axiom für den Shapley-Value lautet dann

**Axiom 3.2.6.** (Nach [Myerson 1980]) Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , alle  $S \subseteq N$  und alle Spieler  $i, j \in S$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ein Lösungskonzept  $\varphi$  das **Balanced-Contributions-Axiom** genau dann, wenn gilt:

$$\varphi_i(v|_S) - \varphi_i(v|_{S \setminus \{j\}}) = \varphi_j(v|_S) - \varphi_j(v|_{S \setminus \{i\}}). \quad (3.4)$$

Das heißt, die Auszahlung für den Spieler  $i$  ändert sich, wenn Spieler  $j$  nicht am Spiel teilnimmt, um den gleichen Betrag, wie sich die Auszahlung für den Spieler  $j$  ändert, wenn Spieler  $i$  nicht am Spiel teilnimmt. Dann gilt als Spezialfall von Satz 3.2.3 für den Shapley-Value, was schon in [Myerson 1980] gezeigt wurde:

**Bemerkung 3.2.7.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$  und  $v \in \mathcal{G}^N$  ist jeder *TU*-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und das Balanced-Contributions-Axiom erfüllt, gleich dem Shapley-Value  $Sh$ .

In der Literatur fehlte bisher ein Value, der die Anteile der Dividenden auf alle Spieler einer Koalition proportional nach deren Einerkoalitionswert verteilt und ein proportionales Lösungskonzept ist. Dazu definieren wir einen Spezialfall der Weighted-Shapley-Values:

**Definition 3.2.8.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  und ein festes  $\bar{v} \in \mathcal{G}^N$  mit  $\bar{v}(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$  ist der zu  $\bar{v}$  zugehörige **Proportional-Weighted-Shapley-Value**  $Sh^{p\bar{v}w}$  definiert durch

$$Sh_i^{p\bar{v}w}(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{\bar{v}(\{i\})}{\sum_{j \in S} \bar{v}(\{j\})} \Delta_v(S) \quad \text{für alle } i \in N. \quad (3.5)$$

Für jedes Zwei-Spieler-Spiel  $(\{i, j\}, \bar{v})$ ,  $i \neq j$ , ergibt sich

$$\begin{aligned} Sh_i^{p\bar{v}w}(\bar{v}) &= \bar{v}(\{i\}) \sum_{\substack{S \subseteq \{i, j\}, \\ S \ni i}} \frac{\Delta_{\bar{v}}(S)}{\sum_{j \in S} \bar{v}(\{j\})} = \bar{v}(\{i\}) \left( 1 + \frac{\Delta_{\bar{v}}(\{i, j\})}{\bar{v}(\{i\}) + \bar{v}(\{j\})} \right) \\ &= \bar{v}(\{i\}) \left( \frac{\Delta_{\bar{v}}(\{i, j\}) + \bar{v}(\{i\}) + \bar{v}(\{j\})}{\bar{v}(\{i\}) + \bar{v}(\{j\})} \right) = \bar{v}(\{i\}) \frac{\bar{v}(\{i, j\})}{\bar{v}(\{i\}) + \bar{v}(\{j\})}. \end{aligned}$$

Da wir es in den Anwendungen typischerweise nur mit einem einzigen speziellen Problem zu tun haben (siehe z. B. [Hart und Mas-Colell 1989] oder [Neyman 1989]), verwenden wir für jede solche Anwendung immer genau eine Koalitionsfunktion  $v$  bzw. eine Restriktion davon und können  $\bar{v} := v$  setzen. Wie soeben vorgeführt, verhält sich der Proportional-Weighted-Shapley-Value in diesem Fall wie ein proportionales Lösungskonzept.

### 3.3. Der Proportional-Shapley-Value

Mit Theorem 2.11. aus [Ortmann 2000] wird indirekt gezeigt, dass es keinen Weighted-Shapley-Value geben kann, der ein proportionales Lösungskonzept ist. Wenn uns der Aspekt ein proportionales Lösungskonzept zu verwenden wichtiger ist, als die komplette Palette aller Axiome der Weighted-Shapley-Values zur Verfügung zu haben, z. B. wenn im selben Zusammenhang verschiedene Koalitionsfunktionen vorliegen, können wir folgenden neuen *TU*-Value verwenden.

**Definition 3.3.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$  und  $v \in \mathcal{G}^N$  mit  $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$  ist der **Proportional-Shapley-Value**  $Sh^p$  definiert durch

$$Sh_i^p(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} \Delta_v(S) \quad \text{für alle } i \in N. \quad (3.6)$$

**Bemerkung 3.3.2.** Aus dem Vergleich von Gleichung 3.6 mit Gleichung 3.3 folgt, dass der Proportional-Shapley-Value ein proportionales Analogon zum Shapley-Value darstellt: Der Shapley-Value verteilt den tatsächlichen Beitrag einer Koalition gleichmäßig, der Proportional-Shapley-Value proportional zum Koalitionswert jedes Mitglieds auf alle Mitglieder der Koalition.

**Bemerkung 3.3.3.** Der Proportional-Shapley-Value ist ein Pareto-optimales und proportionales Lösungskonzept.

*Beweis.* Wir zeigen die Pareto-Optimalität: Nach Definition 3.3.1 gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} Sh_i^p(v) &= \sum_{i \in N} \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} \Delta_v(S) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \sum_{i \in S} \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} \Delta_v(S) \\ &= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \Delta_v(S) \sum_{i \in S} \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} = \sum_{S \subseteq N} \Delta_v(S) \stackrel{2.13}{=} v(N). \end{aligned}$$

Wir verifizieren, dass  $Sh^p$  ein proportionales Lösungskonzept ist: Für ein Zwei-Spieler-Spiel  $(\{i, j\}, v)$ ,  $i \neq j$  ergibt sich mit dem Proportional-Shapley-Value

$$\begin{aligned} Sh_i^p(v) &= v(\{i\}) \sum_{\substack{S \subseteq \{i, j\}, \\ S \ni i}} \frac{\Delta_v(S)}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} = v(\{i\}) \left( 1 + \frac{\Delta_v(\{i, j\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})} \right) \\ &= v(\{i\}) \left( \frac{\Delta_v(\{i, j\}) + v(\{i\}) + v(\{j\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})} \right) = v(\{i\}) \frac{v(\{i, j\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 3.3.4.** Aus dem Vergleich von Definition 3.3.1 mit Definition 3.2.8 folgt, dass der Proportional-Shapley-Value  $Sh^p$  für eine spezielle Koalitionsfunktion  $v = \bar{v}$  identisch mit dem zu  $\bar{v}$  zugehörigen Proportional-Weighted-Shapley-Value  $Sh^{p\bar{w}}$  ist. Damit übernimmt der Proportional-Shapley-Value jedes Axiom eines Weighted-Shapley-Values, bei dem in der Formulierung nur eine Koalitionsfunktion  $v$  bzw. Restriktionen von  $v$  benutzt werden und bei dem ein zugehöriger Beweis existiert, der ebenfalls nur diese Koalitionsfunktion  $v$  bzw. Restriktionen von  $v$  verwendet, um zu zeigen, dass ein Weighted-Shapley-Value dieses Axiom erfüllt.

Für den Proportional-Shapley-Value existiert eine zum Balanced-Contributions-Axiom (Gleichung 3.4) analoge proportionale Eigenschaft:

**Axiom 3.3.5.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit  $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ , alle  $S \subseteq N$  und alle Spieler  $i, j \in S$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ein Lösungskonzept  $\varphi$  das **Proportional-Balanced-Contributions-Axiom** genau dann, wenn gilt:

$$\frac{\varphi_i(v|_S) - \varphi_i(v|_{S \setminus \{j\}})}{v(\{i\})} = \frac{\varphi_j(v|_S) - \varphi_j(v|_{S \setminus \{i\}})}{v(\{j\})}. \quad (3.7)$$

Das heißt, die Auszahlungsänderung für den Spieler  $i$ , proportional zum Einerkoalitionswert von  $i$ , ist gleich der Auszahlungsänderung des Spielers  $j$ , proportional zum Einerkoalitionswert des  $j$ , wenn jeweils der andere Spieler nicht teilnimmt. Damit gilt folgende Axiomatisierung des Proportional-Shapley-Values:

**Satz 3.3.6.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$  und alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit  $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$  ist jeder TU-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und das Proportional-Balanced-Contributions-Axiom 3.3.5 erfüllt, gleich dem Proportional-Shapley-Value  $Sh^p$ .

*Beweis.* Dass der Proportional-Shapley-Value Pareto-optimal ist, wurde schon in Bemerkung 3.3.3 bewiesen.

Wir zeigen, dass  $Sh^p$  das Proportional-Balanced-Contributions-Axiom erfüllt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{Sh_i^p(v|_S) - Sh_i^p(v|_{S \setminus \{j\}})}{v(\{i\})} &\stackrel{3.6}{=} \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ R \ni i}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} - \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ R \ni i, j \notin R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} \\ &= \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ \{i, j\} \subseteq R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} + \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ R \ni i, \\ j \notin R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} - \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ R \ni i, \\ j \notin R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} = \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ \{i, j\} \subseteq R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} \\ &= \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ \{i, j\} \subseteq R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} + \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ R \ni j, i \notin R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} - \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ R \ni j, i \notin R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} \\ &= \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ R \ni j}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} - \sum_{\substack{R \subseteq S, \\ R \ni j, i \notin R}} \frac{\Delta_v(R)}{\sum_{k \in R} v(\{k\})} \stackrel{3.6}{=} \frac{Sh_j^p(v|_S) - Sh_j^p(v|_{S \setminus \{i\}})}{v(\{j\})}. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit zeigen wir durch Induktion über die Anzahl  $n = |N|$  der Spieler. Seien dazu zwei beliebige Values  $\phi$  und  $\varphi$  gegeben, die beide Pareto-optimal sind und das Proportional-Balanced-Contributions-Axiom erfüllen.

*Induktionsanfang:*

Für  $n = 1$  ist nichts zu zeigen. Sei  $n = 2$ . Dann gilt wegen des Proportional-Balanced-Contributions-Axioms

$$\frac{\varphi_1(v) - \varphi_1(v|_{\{1\}})}{v(\{1\})} = \frac{\varphi_2(v) - \varphi_2(v|_{\{2\}})}{v(\{2\})} \Leftrightarrow \frac{\varphi_1(v) - v(\{1\})}{v(\{1\})} = \frac{\varphi_2(v) - v(\{2\})}{v(\{2\})} \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi_1(v)}{v(\{1\})} = \frac{\varphi_2(v)}{v(\{2\})} \quad \text{und analog für } \phi: \frac{\phi_1(v)}{v(\{1\})} = \frac{\phi_2(v)}{v(\{2\})}. \quad (3.9)$$

Zusammengefasst ergibt sich aus den beiden Gleichungen von 3.9

$$\frac{\varphi_1(v)}{\phi_1(v)} = \frac{\varphi_2(v)}{\phi_2(v)}. \quad (3.10)$$

Wegen der Pareto-Optimalität folgt aus 3.10

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1(v)}{\phi_1(v)} = \frac{v(N) - \varphi_1(v)}{v(N) - \phi_1(v)} &\Leftrightarrow \varphi_1(v)v(N) - \varphi_1(v)\phi_1(v) = \phi_1(v)v(N) - \varphi_1(v)\phi_1(v) \\ &\Leftrightarrow \varphi_1(v) = \phi_1(v) \text{ und daraus auch } \varphi_2(v) = \phi_2(v). \end{aligned} \quad (3.11)$$

*Induktionsschritt:*

Gelte jetzt die Aussage für ein beliebiges  $n - 1$ ,  $n - 1 \geq 2$  (IA). Dann folgt aus dem Proportional-Balanced-Contributions-Axiom

$$\frac{\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{N \setminus \{j\}})}{v(\{i\})} = \frac{\varphi_j(v) - \varphi_j(v|_{N \setminus \{i\}})}{v(\{j\})} \quad (3.12)$$

und

$$\frac{\phi_i(v) - \phi_i(v|_{N \setminus \{j\}})}{v(\{i\})} = \frac{\phi_j(v) - \phi_j(v|_{N \setminus \{i\}})}{v(\{j\})}. \quad (3.13)$$

Wir subtrahieren Gleichung 3.13 von Gleichung 3.12:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i(v) - \phi_i(v)}{v(\{i\})} - \frac{\varphi_i(v|_{N \setminus \{j\}}) - \phi_i(v|_{N \setminus \{j\}})}{v(\{i\})} &= \frac{\varphi_j(v) - \phi_j(v)}{v(\{j\})} - \frac{\varphi_j(v|_{N \setminus \{i\}}) - \phi_j(v|_{N \setminus \{i\}})}{v(\{j\})} \\ &\stackrel{(IA)}{\Leftrightarrow} \frac{\varphi_i(v) - \phi_i(v)}{v(\{i\})} = \frac{\varphi_j(v) - \phi_j(v)}{v(\{j\})} \\ &\Leftrightarrow \varphi_i(v) - \phi_i(v) = \frac{v(\{i\})}{v(\{j\})} [\varphi_j(v) - \phi_j(v)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da Gleichung 3.14 für beliebige  $i, j \in N$  mit  $i \neq j$  gilt, folgt aus Gleichung 3.14

$$\sum_{i \in N} [\varphi_i(v) - \phi_i(v)] = \left[ \sum_{i \in N \setminus j} \frac{v(\{i\})}{v(\{j\})} + 1 \right] [\varphi_j(v) - \phi_j(v)] \quad (3.15)$$

und, da die linke Seite von 3.15 wegen der Pareto-Optimalität gleich null ist,

$$\varphi_j(v) = \phi_j(v) \text{ für alle } j \in N \text{ mit } |N| = n. \quad (3.16)$$

Damit ist Satz 3.3.6 bewiesen.  $\square$

### 3.4. *f*-Weighted-Shapley-Values

Die Definition 3.3.1 des Proportional-Shapley-Values führt uns auf eine neue Klasse von *TU*-Values, von denen der Proportional-Shapley-Value ein Spezialfall ist. Statt der Einerkoalitionswerte  $v(\{i\})$ ,  $i \in N$ , können als Gewichte die Funktionswerte von reellwertigen Funktionen, die als Argumente den Einerkoalitionswert und ein positives Gewicht  $w_i$  eines Spielers  $i$  besitzen, verwendet werden:

**Definition 3.4.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit

- $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v(\{i\})$  beliebig, falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

und einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i, w_i^2 > 0$  für alle  $i \in N$ , ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige **f-Weighted-Shapley-Value**  $Sh^f$  definiert durch

$$Sh_i^{f(v,w)}(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{f(v(\{i\}), w_i)}{\sum_{j \in S} f(v(\{j\}), w_j)} \Delta_v(S) \quad \text{für alle } i \in N. \quad (3.17)$$

Zur Axiomatisierung der  $f$ -Weighted-Shapley-Values formulieren wir:

**Axiom 3.4.2.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit

- $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v(\{i\})$  beliebig, falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i, w_i > 0$  für alle  $i \in N$ , alle  $S \subseteq N$  und alle Spieler  $i, j \in S, i \neq j$ , erfüllt ein Lösungskonzept  $\varphi$  das **f-Weighted-Balanced-Contributions-Axiom** genau dann, wenn gilt

$$\frac{\varphi_i(v|_S) - \varphi_i(v|_{S \setminus \{j\}})}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\varphi_j(v|_S) - \varphi_j(v|_{S \setminus \{i\}})}{f(v(\{j\}), w_j)}. \quad (3.18)$$

Damit charakterisiert folgender Satz die  $f$ -Weighted-Shapley-Values:

**Satz 3.4.3.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit

- $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v(\{i\})$  beliebig, falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i, w_i > 0$  für alle  $i \in N$ , ist jeder TU-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und das  $f$ -Weighted-Balanced-Contributions-Axiom 3.4.2 erfüllt, ein zu  $f(v, w)$  zugehöriger  $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$ .

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich aus analogen Beweisen zum Proportional-Shapley-Value (Def. 3.3.1).  $\square$

**Bemerkung 3.4.4.** Bei den  $f$ -Weighted-Shapley-Values handelt es sich nicht um Weighted-Shapley-Values, vielmehr bilden die Weighted-Shapley-Values eine eigene Klasse innerhalb der Klasse der  $f$ -Weighted-Shapley-Values. Die zu  $w$  zugehörigen Weighted-Shapley-Values  $Sh^w$  entsprechen zu  $f(v, w)$  zugehörigen  $f$ -Weighted-Shapley-Values  $Sh^f$  mit  $f(v(\{i\}), w_i) := w_i$  für alle  $i \in N$ . Insbesondere ist der Shapley-Value  $Sh$  ein  $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$  mit  $f(v(\{i\}), w_i) := c, c > 0$ , für alle  $i \in N$ . Der Proportional-Shapley-Value  $Sh^p$  ist ein  $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$  mit  $f(v(\{i\}), w_i) := v(\{i\})$  für alle  $i \in N$ .

<sup>2</sup> Wenn  $f$  eine Abbildung in die positiven Zahlen ist, könnten beliebige Gewichte  $w_i \in \mathbb{R}$  benutzt werden. Wir gehen nicht weiter darauf ein.

### 3.5. Der Proportional-Value

Ortmann und Feldman haben zeitgleich unabhängig voneinander den Proportional-Value (2.3, 2.4) entwickelt ([Ortmann 2000] bzw. [Feldman 1999]). Ihre Idee dabei war, ein proportionales Lösungskonzept mit einer ähnlichen Axiomatisierung, wie die von Myerson für den Shapley-Value [Myerson 1980], durch ein analoges proportionales Axiom zum Balanced-Contributions-Axiom zu finden. Dabei verwendeten sie folgende Eigenschaft:

**Axiom 3.5.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , alle  $S \subseteq N$  und alle Spieler  $i, j \in S$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ein Value  $\varphi$  das **Preservation-Of-Ratios-Axiom** genau dann, wenn gilt:

$$\frac{\varphi_i(v|_S)}{\varphi_i(v|_{S \setminus \{j\}})} = \frac{\varphi_j(v|_S)}{\varphi_j(v|_{S \setminus \{i\}})}. \quad (3.19)$$

Ortmann deutet diese Eigenschaft so, dass der relative Beitrag eines Spielers  $j$  auf einer Restriktion  $v|_S$  für die Auszahlung des Spielers  $i$  gleich dem relativen Beitrag eines Spielers  $i$  für die Auszahlung des Spielers  $j$  auf derselben Restriktion ist. Durch dieses Axiom lässt sich der Proportional-Value kompakt charakterisieren:

**Satz 3.5.2** ([Ortmann 2000]). Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$  und  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$  ist jedes Lösungskonzept  $\varphi$ , das Pareto-optimal ist und das Preservation-Of-Ratios-Axiom erfüllt, gleich dem Proportional-Value  $\psi$  (2.3, 2.4).

### 3.6. Der Totally-Proportional-Shapley-Value

Wie wir in den Kapiteln 4 und 6 sehen werden, ist es oft von Vorteil, wenn ein Value eine Dividendendarstellung besitzt. Für den Proportional-Value ist eine solche nicht bekannt. Folgender neuer Value in Dividendendarstellung gewichtet so, dass jede Dividende einer Koalition  $T$ , an der ein Spieler  $i$  beteiligt ist, immer proportional zu allen seinen proportionalen Anteilen von Koalitionswerten von Koalitionen  $S$ , die Teilmengen von  $T$  sind ("totally-proportional"), in seine Auszahlung eingeht.

**Definition 3.6.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$  und alle  $i \in N$  definieren wir für alle  $T \subseteq N$ ,  $T \ni i$ , das **total zu  $v$  proportionale Anteilsverhältnis**  $Q_{v,T}$  eines Spielers  $i \in N$  an einer Dividende  $\Delta_v(T)$  rekursiv mit folgenden Ausdrücken:

$$Q_{v,T}(i) = \frac{\sum_{S \subseteq T, S \ni i} Q_{v,S}(i)v(S)}{\sum_{S \subseteq T} v(S)} \quad \text{für } |T| > 1 \quad \text{und} \quad (3.20)$$

$$Q_{v,T}(i) = 1 \quad \text{für } T = \{i\}. \quad (3.21)$$

Dann bezeichnen wir den TU-Value  $Sh^{tp}$ , gegeben durch

$$Sh_i^{tp}(v) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{v,T}(i)\Delta_v(T) \quad \text{für alle } i \in N, \quad (3.22)$$

als den **Totally-Proportional-Shapley-Value**.

**Satz 3.6.2.** Der Totally-Proportional-Shapley-Value besitzt folgende Eigenschaften:

- I.  $Sh^{tp}$  ist ein proportionales Lösungskonzept, ist
- II. Pareto-optimal, erfüllt
- III. das Axiom über den unwesentlichen Spieler,
- IV. das Monotonie-Axiom bezüglich der großen Koalition und ist
- V. homogen.

*Beweis.* I. Für  $|N| = 2$  ist der Totally-Proportional-Shapley-Value identisch mit dem Proportional-Shapley-Value und somit ein proportionales Lösungskonzept, denn es gilt

$$Sh_i^{tp}(v) = v(\{i\}) + \frac{v(\{i\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})} \Delta_v(i, j) = Sh_i^p(v).$$

II. Zunächst zeigen wir durch Induktion über  $t := |T|$ , dass für alle  $T \subseteq N$ ,  $T \neq \emptyset$ , gilt:

$$\sum_{i \in T} Q_{v,T}(i) = 1. \quad (3.23)$$

*Induktionsanfang:* Für  $t = 1$  ist nichts zu zeigen. Sei  $t = 2$ . Dann gilt mit  $T = \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T} Q_{v,T}(i) &= Q_{v,T}(1) + Q_{v,T}(2) \stackrel{3.20}{=} \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T \\ S \ni 1}} Q_{v,S}(1)v(S)}{\sum_{S \subseteq T} v(S)} + \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T \\ S \ni 2}} Q_{v,S}(2)v(S)}{\sum_{S \subseteq T} v(S)} \\ &= \frac{v(\{1\})}{v(\{1\}) + v(\{2\})} + \frac{v(\{2\})}{v(\{1\}) + v(\{2\})} = 1. \end{aligned}$$

*Induktionsschritt:* Gelte jetzt Gleichung 3.23 für ein beliebiges  $t - 1 \geq 2$  (IA). Dann folgt

$$\sum_{i \in T} Q_{v,T}(i) = \sum_{i \in T} \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T \\ S \ni i}} Q_{v,S}(i)v(S)}{\sum_{S \subseteq T} v(S)} = \sum_{S \subseteq T} \frac{\sum_{i \in S} Q_{v,S}(i)v(S)}{\sum_{S \subseteq T} v(S)} \stackrel{(IA)}{=} 1.$$

Daher gilt Gleichung 3.23 und es folgt aus Definition 3.6.1

$$\sum_{i \in N} Sh_i^{tp}(v) = \sum_{i \in N} \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \ni i}} Q_{v,T}(i) \Delta_v(T) = \sum_{T \subseteq N} \sum_{i \in T} Q_{v,T}(i) \Delta_v(T) \stackrel{3.23}{=} \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) = v(N),$$

und damit die Pareto-Optimalität.

III. Für einen unwesentlichen Spieler  $i \notin S$ ,  $S \subseteq N$  gilt nach Axiom 2.0.8

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\}) \Leftrightarrow \sum_{R \subseteq S \cup \{i\}} \Delta_v(R) = \sum_{R \subseteq S} \Delta_v(R) + \Delta_v(\{i\}).$$

Daraus folgt

$$\sum_{R \subseteq S \cup \{i\}} \Delta_v(R) - \sum_{R \subseteq S} \Delta_v(R) = \sum_{\substack{R \subseteq S \cup \{i\}, \\ R \ni i}} \Delta_v(R) = \Delta_v(\{i\}) \Rightarrow \sum_{\substack{R \subseteq S \cup \{i\}, \\ R \ni i, R \neq \{i\}}} \Delta_v(R) = 0.$$

Da die letzte Gleichung für alle  $S \subseteq N \setminus \{i\}$  gilt, folgt für einen unwesentlichen Spieler  $i$

$$\Delta_v(R) = 0 \text{ für alle } R \subseteq N \text{ mit } R \ni i \text{ und } R \neq \{i\}. \quad (3.24)$$

Damit erhalten wir

$$Sh_i^{tp}(v) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{v,T}(i) \Delta_v(T) = \Delta_v(\{i\}) = v(\{i\}), \text{ was zu zeigen war.}$$

IV. Wir beweisen die Monotonie bezüglich der großen Koalition (Axiom2.0.9). Es gelte

$$v(S) \begin{cases} = w(S), & \text{für } S \subsetneq N, \\ > w(S), & \text{für } S = N. \end{cases} \quad (3.25)$$

Für  $|N| = 1$  ist nichts zu zeigen. Sei nun  $|N| > 1$ . Dann folgt  $\Delta_v(S) = \Delta_w(S)$  für alle  $S \subsetneq N$  und damit wegen

$$\Delta_v(N) = v(N) - \sum_{S \subsetneq N} \Delta_v(S)$$

auch  $\Delta_v(N) > \Delta_w(N)$ . Deshalb ergibt sich

$$Sh_i^{tp}(v) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{v,T}(i) \Delta_v(T) > \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{v,T}(i) \Delta_w(T) = Sh_i^{tp}(w).$$

Damit ist die Monotonie bezüglich der großen Koalition gezeigt.

V. Ein Value  $\varphi$  ist **homogen**, wenn für alle  $v \in \mathcal{G}^N$  und für alle Skalare  $\alpha$  die Identität  $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$  gilt. Da der Definitionsbereich unseres Values eingeschränkt ist, gilt  $\alpha > 0$ . Wir zeigen durch Induktion über  $s := |S|$ , dass die Harsanyi-Dividenden homogen sind:

$$\Delta_{\alpha v}(S) = \alpha \Delta_v(S) \text{ für alle } S \subseteq N. \quad (3.26)$$

*Induktionsanfang:* Für die leere Menge ist nichts zu zeigen. Für  $s = 1$  gilt  $\Delta_{\alpha v}(\{i\}) = \alpha v(\{i\}) = \alpha \Delta_v(\{i\})$ . Sei  $s = 2$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha v}(\{i, j\}) &\stackrel{2.13}{=} \alpha v(\{i, j\}) - \sum_{R \subsetneq \{i, j\}} \Delta_{\alpha v}(R) = \alpha v(\{i, j\}) - \Delta_{\alpha v}(\{i\}) - \Delta_{\alpha v}(\{j\}) \\ &= \alpha v(\{i, j\}) - \alpha \Delta_v(\{i\}) - \alpha \Delta_v(\{j\}) = \alpha v(\{i, j\}) - \alpha \sum_{R \subsetneq \{i, j\}} \Delta_v(R) \\ &\stackrel{2.13}{=} \alpha \Delta_v(\{i, j\}). \end{aligned}$$

*Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass Gleichung 3.26 für ein beliebiges  $s \geq 2$  gilt (IA). Dann folgt für  $|T| = s + 1$

$$\Delta_{\alpha v}(T) \stackrel{2.13}{=} \alpha v(T) - \sum_{S \subsetneq T} \Delta_{\alpha v}(S) \stackrel{IA}{=} \alpha v(T) - \sum_{S \subsetneq T} \alpha \Delta_v(S) \stackrel{2.13}{=} \alpha \Delta_v(T).$$

Wir zeigen mit Induktion über  $t := |T|$ , dass für die total proportionalen Anteilsverhältnisse  $Q_{v,T}$  eines Spielers  $i \in T$ ,  $T \subseteq N$ , gilt:

$$Q_{\alpha v, T}(i) = Q_{v, T}(i). \quad (3.27)$$

*Induktionsanfang:* Für  $t = 1$  gilt  $Q_{\alpha v, T}(i) = 1 = Q_{v, T}(i)$ . Für  $t = 2$  gilt dann

$$Q_{\alpha v, T}(i) = \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T \\ S \ni i}} Q_{\alpha v, S}(i) \alpha v(S)}{\sum_{S \subseteq T} \alpha v(S)} = \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T \\ S \ni i}} Q_{v, S}(i) v(S)}{\sum_{S \subseteq T} v(S)} = Q_{v, T}(i).$$

*Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass Gleichung 3.27 für ein beliebiges  $S \subseteq N$ ,  $S \ni i$ ,  $|S| = s \geq 2$  gilt (IA). Dann folgt für  $T \subseteq N$ ,  $T \ni i$ ,  $|T| = s + 1$ ,

$$Q_{\alpha v, T}(i) = \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T \\ S \ni i}} Q_{\alpha v, S}(i) \alpha v(S)}{\sum_{S \subseteq T} \alpha v(S)} \stackrel{(IA)}{=} \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T \\ S \ni i}} Q_{v, S}(i) v(S)}{\sum_{S \subseteq T} v(S)} = Q_{v, T}(i).$$

Damit ist auch die Homogenität gezeigt und Satz 3.6.2 bewiesen.  $\square$

Zur Charakterisierung dieses Values führen wir neu zu definierende „Value-Dividenden“ ein. Die Harsanyi-Dividende einer Koalition  $S \subseteq N$  können wir als Mehrwert des Koalitionswertes der Koalition  $S$  gegenüber der Summe aller Mehrwerte der Koalitionswerte aller echten Teilmengen von  $S$  auffassen. Analog dazu definieren wir für jeden Spieler  $i$ ,  $i \in N$ , die zu  $\varphi(v)$  zugehörige Value-Dividende einer Koalition  $S \subseteq N$ ,  $S \ni i$ , als die Mehrauszahlung an den Spieler  $i$  im Spiel  $(v|_S)$  gegenüber der Summe aller Mehrauszahlungen an den Spieler  $i$  von allen Spielen  $(v|_R)$  mit  $R \subsetneq S$ ,  $R \ni i$ . Formal gilt:

**Definition 3.6.3.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , alle  $i \in N$ , alle Koalitionen  $S \subseteq N$  mit  $S \ni i$  und alle TU-Values  $\varphi$  sind die zu  $\varphi(v)$  zugehörigen **Value-Dividenden**  $\Theta_{\varphi_i(v)}(S)$  rekursiv gegeben durch

$$\Theta_{\varphi_i(v)}(S) = \varphi_i(v|_S) - \sum_{R \subsetneq S, R \ni i} \Theta_{\varphi_i(v)}(R) \quad \text{für } |S| > 1, \quad \text{und} \quad (3.28)$$

$$\Theta_{\varphi_i(v)}(S) = \varphi_i(v|_{\{i\}}) \quad \text{für } S = \{i\}. \quad (3.29)$$

Damit können wir, da  $Q_{v, T} > 0$  (siehe Definition 3.6.1) gilt, ein Axiom formulieren:

**Axiom 3.6.4.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , alle  $T \subseteq N$  und alle Spieler  $i, j \in T$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ein Lösungskonzept  $\varphi$  das **Totally-Proportional-Balanced-Value-Dividends-Axiom** genau dann, wenn

$$\frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{Q_{v, T}(i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{Q_{v, T}(j)} \quad (3.30)$$

gilt, wobei die  $Q_{v, T}$  die rekursiven Ausdrücke aus Definition 3.6.1 bezeichnen.

Dieses Axiom besagt, dass für zwei Spieler  $i, j$  einer Koalition  $T$  die Mehrauszahlung an den Spieler  $i$  im Spiel  $(v|_T)$  gegenüber der Summe aller seiner Mehrauszahlungen von allen Spielen  $(v|_S)$  auf echten Teilmengen  $S \subsetneq T$ , die den Spieler  $i$  enthalten, im Verhältnis zu der entsprechenden Mehrauszahlung an den Spieler  $j$ , gleich dem Verhältnis des total proportionalen Anteilsverhältnis  $Q_{v, T}$  des Spielers  $i$  an der Dividende  $\Delta_v(T)$  zu dem total proportionalen Anteilsverhältnis des Spielers  $j$  ist. Dann gilt folgender Satz:

**Satz 3.6.5.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$  und für alle  $i \in N$  ist jeder TU-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und das Totally-Proportional-Balanced-Value-Dividends-Axiom 3.6.4 erfüllt, gleich dem Totally-Proportional-Shapley-Value  $Sh^{tp}$ .

*Beweis.* Wir beweisen den Satz in drei Schritten:

I. Die Pareto-Optimalität von  $Sh^{tp}$  wurde schon in Satz 3.6.2 gezeigt.

II. Wir zeigen, dass  $Sh^{tp}$  das Totally-Proportional-Balanced-Value-Dividends-Axiom erfüllt: Dazu beweisen wir zuerst, dass für alle  $i \in N$ , alle  $T \subseteq N$ ,  $T \ni i$  mit  $|T| \geq 2$

$$\Theta_{Sh_i^{tp}(v)}(T) = Q_{v,T}(i)\Delta_v(T) \quad (3.31)$$

gilt. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Anzahl  $t = |T|$  der Spieler aus  $T$ :

*Induktionsanfang:* Sei  $T = \{i, j\}$ , also  $t = 2$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \Theta_{Sh_i^{tp}(v)}(T) &\stackrel{3.28}{=} Sh_i^{tp}(v|_T) - \sum_{S \subsetneq T, S \ni i} \Theta_{Sh_i^{tp}(v)}(S) \stackrel{3.22}{=} \sum_{S \subsetneq T, S \ni i} Q_{v,S}(i)\Delta_v(S) - v(\{i\}) \\ &= v(\{i\}) + \frac{v(\{i\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})} \Delta_v(T) - v(\{i\}) \stackrel{3.21}{=} \frac{Q_{v,\{i\}}(i)v(\{i\})}{\sum_{S \subsetneq T} v(S)} \Delta_v(T) \stackrel{3.20}{=} Q_{v,T}(i)\Delta_v(T). \end{aligned}$$

*Induktionsschritt:* Gelte jetzt die Aussage für ein beliebiges  $t - 1 \geq 2$  (IA). Dann folgt

$$\begin{aligned} \Theta_{Sh_i^{tp}(v)}(T) &\stackrel{3.28}{=} Sh_i^{tp}(v|_T) - \sum_{S \subsetneq T, S \ni i} \Theta_{Sh_i^{tp}(v)}(S) \\ &\stackrel{3.22, (IA)}{=} \sum_{S \subsetneq T, S \ni i} Q_{v,S}(i)\Delta_v(S) - \sum_{S \subsetneq T, S \ni i} Q_{v,S}(i)\Delta_v(S) = Q_{v,T}(i)\Delta_v(T). \end{aligned}$$

Damit gilt Gleichung 3.31 für alle  $i \in N$ , für alle  $T \subseteq N$ ,  $T \ni i$  mit  $|T| \geq 2$ . Wir erhalten

$$\frac{\Theta_{Sh_i^{tp}(v)}(T)}{Q_{v,T}(i)} = \frac{Q_{v,T}(i)\Delta_v(T)}{Q_{v,T}(i)} = \frac{Q_{v,T}(j)\Delta_v(T)}{Q_{v,T}(j)} = \frac{\Theta_{Sh_j^{tp}(v)}(T)}{Q_{v,T}(j)}. \quad (3.32)$$

Somit erfüllt  $Sh^{tp}$  das Totally-Proportional-Balanced-Value-Dividends-Axiom.

III. Die Eindeutigkeit zeigen wir durch Induktion über die Anzahl  $n = |N|$  der Spieler. Seien dazu zwei beliebige Values  $\phi$  und  $\varphi$  gegeben, die beide Pareto-optimal sind und das Totally-Proportional-Balanced-Value-Dividends-Axiom erfüllen.

*Induktionsanfang:* Sei  $n = 2$  und  $N = \{i, j\}$ . Dann gilt mit Axiom 3.6.4

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(\{i, j\})}{Q_{v,\{i,j\}}(i)} &= \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(\{i, j\})}{Q_{v,\{i,j\}}(j)} \stackrel{3.28, 3.6.1}{\Leftrightarrow} \frac{\varphi_i(v) - v(\{i\})}{\frac{v(\{i\})}{v(\{i\})+v(\{j\})}} = \frac{\varphi_j(v) - v(\{j\})}{\frac{v(\{j\})}{v(\{i\})+v(\{j\})}} \\ \Leftrightarrow \frac{\varphi_i(v)}{v(\{i\})} &= \frac{\varphi_j(v)}{v(\{j\})} \quad \text{und analog für } \phi: \frac{\phi_i(v)}{v(\{i\})} = \frac{\phi_j(v)}{v(\{j\})}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Zusammengefasst ergibt sich aus den beiden Gleichungen 3.33

$$\frac{\varphi_i(v)}{\phi_i(v)} = \frac{\varphi_j(v)}{\phi_j(v)}. \quad (3.34)$$

Wegen der Pareto-Optimalität folgt aus 3.34

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i(v)}{\phi_i(v)} &= \frac{v(N) - \varphi_i(v)}{v(N) - \phi_i(v)} \Leftrightarrow \varphi_i(v)v(N) - \varphi_i(v)\phi_i(v) = \phi_i(v)v(N) - \varphi_i(v)\phi_i(v) \\ &\Leftrightarrow \varphi_i(v) = \phi_i(v) \text{ und daraus auch } \varphi_j(v) = \phi_j(v). \end{aligned} \quad (3.35)$$

*Induktionsschritt:* Gelte jetzt die Aussage für ein beliebiges  $n - 1 \geq 2$  (IA). Dann folgt wegen des Totally-Proportional-Balanced-Value-Dividends-Axioms

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(N)}{Q_{v,N}(i)} &= \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(N)}{Q_{v,N}(j)} \\ \stackrel{3.28}{\Leftrightarrow} \frac{\varphi_i(v) - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \Theta_{\varphi_i(v)}(S)}{Q_{v,N}(i)} &= \frac{\varphi_j(v) - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni j}} \Theta_{\varphi_j(v)}(S)}{Q_{v,N}(j)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

und

$$\frac{\phi_i(v) - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \Theta_{\phi_i(v)}(S)}{Q_{v,N}(i)} = \frac{\phi_j(v) - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni j}} \Theta_{\phi_j(v)}(S)}{Q_{v,N}(j)}. \quad (3.37)$$

Wir subtrahieren Gleichung 3.37 von Gleichung 3.36:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i(v) - \phi_i(v)}{Q_{v,N}(i)} &- \frac{\sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \Theta_{\varphi_i(v)}(S) - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni i}} \Theta_{\phi_i(v)}(S)}{Q_{v,N}(i)} \\ &= \frac{\varphi_j(v) - \phi_j(v)}{Q_{v,N}(j)} - \frac{\sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni j}} \Theta_{\varphi_j(v)}(S) - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \ni j}} \Theta_{\phi_j(v)}(S)}{Q_{v,N}(j)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\stackrel{(IA)}{\Leftrightarrow} \frac{\varphi_i(v) - \phi_i(v)}{Q_{v,N}(i)} = \frac{\varphi_j(v) - \phi_j(v)}{Q_{v,N}(j)} \quad (3.39)$$

$$\Leftrightarrow \varphi_i(v) - \phi_i(v|_N) = \frac{Q_{v,N}(i)}{Q_{v,N}(j)} [\varphi_j(v) - \phi_j(v)]. \quad (3.40)$$

Da Gleichung 3.40 für beliebige  $i, j \in N$  mit  $i \neq j$  gilt, folgt aus Gleichung 3.40

$$\sum_{i \in N} [\varphi_i(v) - \phi_i(v)] = \left[ \sum_{i \in N \setminus j} \frac{Q_{v,N}(i)}{Q_{v,N}(j)} + 1 \right] [\varphi_j(v) - \phi_j(v)] \quad (3.41)$$

und, da die linke Seite von 3.41 wegen der Pareto-Optimalität gleich null ist,

$$\varphi_j(v) = \phi_j(v) \text{ für alle } j \in N \text{ mit } |N| = n. \quad (3.42)$$

Damit ist Satz 3.6.5 bewiesen.  $\square$

### 3.7. Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Values

Auch der Totally-Proportional-Shapley-Value ist ein Spezialfall einer neuen Klasse von *TU*-Values:

**Definition 3.7.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

und einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|2^N-2|}$  von Gewichten  $w_S, w_S > 0$  für alle  $S \subsetneq N, S \neq \emptyset$ , definieren wir für  $T \subseteq N, T \ni i$ , das **totale f-gewichtete Anteilsverhältnis**  $Q_{f(v,w),T}$  eines Spielers  $i \in N$  an einer Dividende  $\Delta_v(T)$  rekursiv mit folgenden Ausdrücken:

$$Q_{f(v,w),T}(i) = \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T \\ S \ni i}} Q_{f(v,w),S}(i) f(v(S), w_S)}{\sum_{\emptyset \neq S \subseteq T} f(v(S), w_S)} \quad \text{für } |T| > 1 \quad \text{und} \quad (3.43)$$

$$Q_{f(v,w),T}(i) = 1 \quad \text{für } T = \{i\}. \quad (3.44)$$

Dann bezeichnen wir den TU-Value  $Sh^{tf}$ , gegeben durch

$$Sh_i^{tf(v,w)}(v) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{f(v,w),T}(i) \Delta_v(T), \quad \text{für alle } i \in N, \quad (3.45)$$

als den zu  $f(v, w)$  zugehörigen **Totally-f-Weighted-Shapley-Value**.

Zur Axiomatisierung der Totally-f-Weighted-Shapley-Values formulieren wir:

**Axiom 3.7.2.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

und einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|2^N-2|}$  von Gewichten  $w_S, w_S > 0$  für alle  $S \subsetneq N, S \neq \emptyset$  und alle Spieler  $i, j \in T \subseteq N, i \neq j$ , erfüllt ein Lösungskonzept  $\varphi$  das **Totally-f-Weighted-Balanced-Value-Dividends-Axiom** genau dann, wenn gilt:

$$\frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{Q_{f(v,w),T}(i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{Q_{f(v,w),T}(j)}, \quad (3.46)$$

wobei die  $Q_{f(v,w),T}$  die rekursiven Ausdrücke aus Definition 3.7.1 bezeichnen.

Dann charakterisiert folgender Satz die Totally-f-Weighted-Shapley-Values:

**Satz 3.7.3.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

ist jedes Lösungskonzept  $\varphi$ , das Pareto-optimal ist und Axiom 3.7.2 erfüllt ein zu  $f(v, w)$  zugehöriger Totally-f-Weighted-Shapley-Value  $Sh^{tf}$ .

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich analog zu den Beweisen zum Totally-Proportional-Shapley-Value (Def. 3.6.1).  $\square$

**Bemerkung 3.7.4.** Die *Totally-f-Weighted-Shapley-Values* besitzen die Eigenschaften II. bis IV. aus Satz 3.6.2. Die Eigenschaft V. ist für homogene Funktionen  $f$  vom Grad  $r$ ,  $r$  beliebig, erfüllt. Das ergibt sich bei einer zu diesem Satz analogen Beweisführung.

**Bemerkung 3.7.5.** Der zu  $f(v, w)$  zugehörige *Totally-f-Weighted-Shapley-Value*  $Sh^{tf}$  mit  $f(v(T), w_T) := c$  für alle  $T \subsetneq N$ ,  $T \neq \emptyset$ , den wir den **Totally-Symmetric-Shapley-Value**  $Sh^{ts}$  nennen, ist gleich dem *Shapley-Value*  $Sh$ .

*Beweis.* Wir beweisen für zwei Koalitionen  $S_i, S_j \subseteq N$ ,  $S_i \ni i$ ,  $S_j \ni j$ ,  $|S_i| = |S_j|$ , durch Induktion über die Anzahl  $s = |S_i| = |S_j|$  der Spieler, die Identität  $Q_{c, S_i}(i) = Q_{c, S_j}(j)$ .

*Induktionsanfang:* Sei  $s = 1$ . Dann gilt

$$Q_{c, S_i}(i) \stackrel{3.44}{=} 1 = Q_{c, S_j}(j). \quad (3.47)$$

*Induktionsschritt:* Gelte jetzt die Aussage für ein beliebiges  $s \geq 1$  (IA). Dann folgt für zwei Koalitionen  $T_i, T_i \ni i$  und  $T_j, T_j \ni j$ ,  $T_i, T_j \subseteq N$ ,  $N \in \mathcal{N}$ , mit  $|T_i| = |T_j| = s + 1$

$$Q_{c, T_i}(i) \stackrel{3.43}{=} \frac{\sum_{S_i \subsetneq T_i, S_i \ni i} Q_{c, S_i}(i)c}{\sum_{\emptyset \neq S \subsetneq T_i} c} \stackrel{(IA)}{=} \frac{\sum_{S_j \subsetneq T_j, S_j \ni j} Q_{c, S_j}(j)c}{\sum_{\emptyset \neq S \subsetneq T_j} c} = Q_{c, T_j}(j). \quad (3.48)$$

Somit gilt die Aussage auch für  $T = T_i = T_j$  mit  $|T| \geq 2$ . Dann folgt aus Axiom 3.7.2  $\Theta_{\varphi_i(v)}(T) = \Theta_{\varphi_j(v)}(T)$  und daraus mit Bemerkung 3.8.2 aus dem folgenden Abschnitt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.7.6.** Der *Totally-Proportional-Shapley-Value*  $Sh^{tp}$  entspricht einem zu  $f(v, w)$  zugehörigen *Totally-f-Weighted-Shapley-Value*  $Sh^{tf}$  mit  $f(v(T), w_T) := v(T)$ ,  $v(T) > 0$  für alle  $T \subsetneq N$ ,  $T \neq \emptyset$ .

### 3.8. Eine neue äquivalente Charakterisierung der $f$ -Weighted-Shapley-Values

Mit den Value-Dividenden aus Definition 3.6.3 lassen sich eine ganze Reihe von TU-Values kompakt charakterisieren. Dazu definieren wir folgendes Axiom:

**Axiom 3.8.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit

- $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ , falls  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v(\{i\})$  beliebig, falls  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i$ ,  $w_i > 0$  für alle  $i \in N$ , alle  $T \subseteq N$  und alle Spieler  $i, j \in T$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ein Lösungskonzept  $\varphi$  das **f-Weighted-Balanced-Value-Dividends-Axiom** genau dann, wenn

$$\frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{f(v(\{j\}), w_j)} \quad (3.49)$$

gilt, wobei die  $\Theta_{\varphi_i(v)}$  die Value-Dividenden aus Definition 3.6.3 bezeichnen.

**Bemerkung 3.8.2.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit

- $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v(\{i\})$  beliebig, falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

und einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i, w_i > 0$  für alle  $i \in N$ , ist jedes Lösungskonzept  $\varphi$ , das Pareto-optimal ist und Axiom 3.8.1 erfüllt, ein zu  $f(v, w)$  zugehöriger  $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$  (Def. 3.4.1). Insbesondere ist jedes Lösungskonzept  $\varphi$ , das für alle  $T \subseteq N$ ,  $i, j \in T$ ,  $i \neq j$ , das **Balanced-Value-Dividends-Axiom**

$$\Theta_{\varphi_i(v)}(T) = \Theta_{\varphi_j(v)}(T) \quad (3.50)$$

erfüllt und Pareto-Optimal ist, gleich dem Shapley-Value  $Sh$ .

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich analog zu den Beweisen zum Totally-Proportional-Shapley-Value (Def. 3.6.1) oder aus folgendem Satz:  $\square$

**Satz 3.8.3.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit

- $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v(\{i\})$  beliebig, falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i, w_i > 0$  für alle  $i \in N$ , alle  $T \subseteq N$  und alle Spieler  $i, j \in T$ ,  $i \neq j$ , ist das  $f$ -Weighted-Balanced-Value-Dividends-Axiom 3.8.1 äquivalent zum  $f$ -Weighted-Balanced-Contributions-Axiom 3.4.2. Insbesondere ist das Balanced-Value-Dividends-Axiom äquivalent zum Balanced-Contributions-Axiom.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass ein Value  $\varphi$ , der Axiom 3.8.1 erfüllt, auch Axiom 3.4.2 erfüllt: Nach Gleichung 3.49 gilt für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $i, j \in N$ ,  $i \neq j$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(N)}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(N)}{f(v(\{j\}), w_j)} \\ \Leftrightarrow_{3.28} & \frac{\varphi_i(v) - \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \ni i}} \Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\varphi_j(v) - \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \ni j}} \Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{f(v(\{j\}), w_j)} \\ \Leftrightarrow & \frac{\varphi_i(v) - \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{j\} \\ T \ni i}} \Theta_{\varphi_i(v)}(T) - \sum_{\substack{T \subseteq N \\ \{i, j\} \subseteq T}} \Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{f(v(\{i\}), w_i)} \\ & = \frac{\varphi_j(v) - \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{i\} \\ T \ni j}} \Theta_{\varphi_j(v)}(T) - \sum_{\substack{T \subseteq N \\ \{i, j\} \subseteq T}} \Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{f(v(\{j\}), w_j)} \\ \Leftrightarrow_{3.49} & \frac{\varphi_i(v) - \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{j\} \\ T \ni i}} \Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\varphi_j(v) - \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{i\} \\ T \ni j}} \Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{f(v(\{j\}), w_j)} \\ \Leftrightarrow_{3.6.3} & \frac{\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{N \setminus \{j\}})}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\varphi_j(v) - \varphi_j(v|_{N \setminus \{i\}})}{f(v(\{j\}), w_j)}. \end{aligned}$$

Wir zeigen die Rückrichtung mit Induktion über die Anzahl  $n = |N|$  der Spieler.

*Induktionsanfang:* Sei  $n = 2$  und  $N = \{i, j\}$ . Dann gilt für einen Value  $\varphi$ , der das  $f$ -Weighted-Balanced-Contributions-Axiom 3.4.2 erfüllt

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{\{i\}})}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\varphi_j(v) - \varphi_j(v|_{\{j\}})}{f(v(\{j\}), w_j)} \\ \Leftrightarrow_{3.6.3} & \frac{\varphi_i(v) - \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \ni i}} \Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\varphi_j(v) - \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \ni j}} \Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{f(v(\{j\}), w_j)}. \\ \Leftrightarrow_{3.6.3} & \frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(N)}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(N)}{f(v(\{j\}), w_j)}. \end{aligned}$$

*Induktionsschritt:* Gelte jetzt die Aussage für ein beliebiges  $n - 1 \geq 2$  (IA). Dann folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{N \setminus \{j\}})}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\varphi_j(v) - \varphi_j(v|_{N \setminus \{i\}})}{f(v(\{j\}), w_j)} \\ \Leftrightarrow_{3.6.3} & \frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(N) + \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \ni i}} \Theta_{\varphi_i(v)}(T) - \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{j\} \\ T \ni i}} \Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{f(v(\{i\}), w_i)} \\ & = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(N) + \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \ni j}} \Theta_{\varphi_j(v)}(T) - \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus \{i\} \\ T \ni j}} \Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{f(v(\{j\}), w_j)} \\ \Leftrightarrow & \frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(N) + \sum_{\substack{T \subseteq N \\ \{i, j\} \subseteq T}} \Theta_{\varphi_i(v)}(T)}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(N) + \sum_{\substack{T \subseteq N \\ \{i, j\} \subseteq T}} \Theta_{\varphi_j(v)}(T)}{f(v(\{j\}), w_j)} \\ \Leftrightarrow_{(IA)} & \frac{\Theta_{\varphi_i(v)}(N)}{f(v(\{i\}), w_i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}(N)}{f(v(\{j\}), w_j)}. \end{aligned}$$

Da  $N$  beliebig war, ist die Äquivalenz gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 3.8.4.** Für beliebige Ausdrücke als Gewichtsfunktion ist ein „gewichtetes“ *Balanced-Contributions-Axiom* im Allgemeinen nicht äquivalent zum entsprechenden „gewichteten“ *Balanced-Value-Dividends-Axiom*. Der *Totally-Proportional-Shapley-Value* erfüllt zwar das *Totally-Proportional-Balanced-Value-Dividends-Axiom* 3.6.4, ein entsprechendes „*Totally-Proportional-Balanced-Contributions-Axiom*“ dagegen nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:

**Beispiel 3.8.5.** Gegeben sei das TU-Spiel  $(N, v)$  mit Spielermenge  $N = \{1, 2, 3\}$ . Die zugehörige Koalitionsfunktion  $v$  laute

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 1, & v(\{3\}) &= 1, & v(\{1, 3\}) &= 2, & v(\{1, 2, 3\}) &= 9. \\ v(\{2\}) &= 2, & v(\{1, 2\}) &= 4, & v(\{2, 3\}) &= 4, & & \end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit Definition 3.6.1  $Q_{v,N}(1) = \frac{5}{21}$ ,  $Q_{v,N}(2) = \frac{11}{21}$ ,

$$Sh_1^{tp}(v) = \frac{43}{21}, \quad Sh_2^{tp}(v) = \frac{103}{21}, \quad Sh_1^{tp}(v|_{\{1,3\}}) = 1, \quad Sh_2^{tp}(v|_{\{2,3\}}) = \frac{8}{3}.$$

Es folgt

$$\frac{Sh_1^{tp}(v) - Sh_1^{tp}(v|_{N \setminus \{2\}})}{Q_{v,N}(1)} = \frac{\frac{43}{21} - 1}{\frac{5}{21}} = \frac{22}{5} \neq \frac{47}{11} = \frac{\frac{103}{21} - \frac{8}{3}}{\frac{11}{21}} = \frac{Sh_2^{tp}(v) - Sh_2^{tp}(v|_{N \setminus \{1\}})}{Q_{v,N}(2)}.$$

### 3.9. Komplexitätsbetrachtungen von *TU*-Values

Alle von uns untersuchten *TU*-Values erfordern in der gegebenen Darstellungsweise im Allgemeinen als Eingabegröße die Koalitionswerte aller möglichen Koalitionen, die Teilmengen von  $N$  sind (bzw. die zugehörigen Harsanyi-Dividenden), also die komplette Potenzmenge  $2^N$  ohne die leere Menge. Die Autoren von [Deng und Papadimitriou 1994] schreiben dazu:

*”There is a catch, however: If the game is defined by the  $2^n$  coalition values, there may be little to be said about the computational complexity of the various solution concepts, because the input is already exponential in  $n$ , and thus, in most cases, the computational problems above can be solved very ”efficiently”.”*

Wir zeigen dazu für den Shapley-Value:

**Bemerkung 3.9.1.** *Jeder Algorithmus, der für ein Spiel  $v \in \mathcal{G}^N$  den Shapley-Value berechnet, benötigt im Allgemeinen alle Koalitionswerte von  $v$ . Eine effiziente Berechnung des Shapley-Values ist, wenn die Koalitionswerte unabhängig voneinander sind, nicht möglich.*

*Beweis.* Gegeben seien eine Spielermenge  $N \subseteq \mathcal{N}$  und zwei Koalitionswerte  $v_1, v_2 \in \mathcal{G}^N$ , deren Koalitionswerte jeweils unabhängig voneinander sind, mit  $v_1(S) = v_2(S)$  für alle Teilmengen  $S \subseteq N$ ,  $S \neq K \subseteq N$  und  $v_1(K) \neq v_2(K)$  für genau eine, aber beliebige, Koalition  $K$ . Dann gilt für den Shapley-Value nach Formel 2.2 für ein  $i \in K$  mit  $k := |K|$ ,  $s := |S|$ ,  $n := |N|$

$$\begin{aligned} & Sh_i(v_2) - Sh_i(v_1) \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v_2(S) - v_2(S \setminus \{i\})] - \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v_1(S) - v_1(S \setminus \{i\})] \\ &= \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} [v_2(K) - v_1(K)] \neq 0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

D.h. jeder Algorithmus, der den Shapley-Value berechnet, liefert für die beiden Koalitionswerte  $v_1, v_2$  ein unterschiedliches Ergebnis. Das bedeutet, da  $K$  beliebig war und die Koalitionswerte unabhängig voneinander sind, dass die Auszahlung eines Spieler  $i$  von jedem einzelnen Koalitionswert der  $2^{n-1}$  Koalitionen  $S \subseteq N$ , die einen Spieler  $i$  enthalten, abhängt. Somit müssen alle Koalitionswerte im Algorithmus mindestens einmal verwendet werden, erfordern also mindestens eine Elementaroperation, was für einen einzigen Spieler einer Laufzeit von  $O(2^{n-1})$  entspricht.  $\square$

In den folgenden Kapiteln bringen wir Koalitionsstrukturen, bei denen nicht immer alle theoretisch möglichen Koalitionen zur Auszahlungsberechnung verwendet werden müssen.

## Kapitel 4

# Graphen und Hypergraphen

In diesem Kapitel verzichten wir aus Platzgründen auf eine breitere Ausarbeitung, insbesondere auf eine Axiomatisierung.

### 4.1. Ein Spiel auf Graphen und Hypergraphen

Ein Autobahnnetz verbindet  $n$  Städte. Auf jeder Verbindung zwischen zwei Städten werden Einnahmen durch Mautgebühren generiert. Die Einnahmen sollen „fair“ auf die einzelnen Städte verteilt werden. Dies wäre eine Anwendung des folgenden Spiels  $I'$  aus [Deng und Papadimitriou 1994], das dort anschließend zweimal verallgemeinert wird:

*Spiel  $I'$* : Gegeben ist ein Graph  $G = (N, L)$ , dessen Kanten  $\{i, j\}$  ein ganzzahliges Gewicht  $v'(\{i, j\})$  besitzen. Die Autoren definieren ein Spiel dadurch, dass für jede Koalition  $S \subseteq N$  der Wert  $v'(S)$  gleich  $\sum_{\{i,j\} \subseteq S, \{i,j\} \in L} v'(\{i, j\})$  gesetzt wird und zeigen, dass der Shapley-Value für dieses Spiel mit  $Sh_i(v') = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in L} v'(\{i, j\})$ ,  $i \in N$ , in  $O(n^2)$  Zeit zu berechnen ist.

*Spiel  $II'$* : In einer ersten Verallgemeinerung des Spiels ist jetzt ein Hypergraph  $HG = (N, H)$  gegeben und der Wert  $v'(S)$  einer Koalition  $S$  ist die Summe der Gewichte aller  $\ell$ -elementigen Teilmengen  $h \subseteq S$ ,  $h \in H$ , mit  $\ell \geq 2$ . Wir haben also einen Hypergraphen mit Hyperkanten, die jeweils alle genau  $\ell$  Knoten besitzen.

*Spiel  $III'$* : Als letzte Erweiterung sind die Koalitionswerte  $v'(S)$  als Summe der Gewichte  $v'(h)$  von Teilmengen  $h \subseteq S$ ,  $h \in H$ , mit beliebig vielen Elementen gegeben. Die Hyperkanten können also unterschiedliche Größen besitzen. Dabei können wir die Anzahl der Teilmengen  $h$ , also der Hyperkanten, durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränken.

*Spiel  $I, II$  und  $III$* : Wir verallgemeinern die Koalitionsfunktion  $v'$  für die drei Spiele zu einer Koalitionsfunktion  $v$ : Jede Einerkoalition  $\{i\}$  erhält einen Koalitionswert  $v(\{i\}) \in \mathbb{R}$  und jede Hyperkante  $h \in H$  bekommt zusätzlich ein Gewicht  $\pi(h) \in \mathbb{R}$ , sodass gilt

$$v(S) := \sum_{i \in S} v(\{i\}) + w(S), \quad w(S) := \sum_{h \subseteq S, h \in H} \pi(h), \quad \text{für alle Koalitionen } S \subseteq N. \quad (4.1)$$

**Bemerkung 4.1.1.** Allgemein gilt für alle Teilmengen  $T \subseteq N$ , die nicht zusammenhängend sind, für die Hypergraphenkoalitionsfunktion  $v^H$  (2.19)  $\Delta_{v^H}(T) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $T \subseteq N$  beliebig. Dann gilt

$$\sum_{Q \subseteq T} \Delta_{v^H}(Q) \stackrel{2.13}{=} v^H(T) \stackrel{2.14}{=} \sum_{S \in P(T, H|_T)} v(S) \stackrel{2.19}{=} \sum_{S \in P(T, H|_T)} v^H(S) \stackrel{2.13}{=} \sum_{S \in P(T, H|_T)} \sum_{Q \subseteq S} \Delta_{v^H}(Q)$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \sum_{S \in P(T, H|_T)} \sum_{Q \subseteq S} \Delta_{v^H}(Q) + \sum_{\substack{Q \subseteq T, \\ Q \not\subseteq S \in P(T, H|_T)}} \Delta_{v^H}(Q) = \sum_{S \in P(T, H|_T)} \sum_{Q \subseteq S} \Delta_{v^H}(Q) \\
 &\Leftrightarrow \sum_{\substack{Q \subseteq T, \\ Q \not\subseteq S \in P(T, H|_T)}} \Delta_{v^H}(Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{v^H}(Q) = 0 \quad \text{für alle } Q \subseteq T, Q \not\subseteq S \in P(T, H|_T),
 \end{aligned}$$

da  $T$  beliebig war. □

**Satz 4.1.2.** Für die CF-Spiele I, II, III stimmt die Koalitionsfunktion  $v$  mit der Hypergraphenkoalitionsfunktion  $v^H$  (2.19) überein und es gilt

$$\Delta_{v^H}(S) = \Delta_v(S) = \begin{cases} v(S), & \text{falls } |S| = 1, \\ 0, & \text{falls } |S| \geq 2, S \notin H, \\ \pi(S), & \text{falls } |S| \geq 2, S \in H. \end{cases} \quad (4.2)$$

*Beweis.* Für alle Koalitionen  $T \subseteq N$  gilt

$$v^H(T) \stackrel{2.19}{=} \sum_{S \in P(T, H|_T)} v(S) \stackrel{4.1}{=} \sum_{S \in P(T, H|_T)} \sum_{i \in S} v(\{i\}) + \sum_{S \in P(T, H|_T)} \sum_{\substack{h \subseteq S, \\ h \in H}} \pi(h). \quad (4.3)$$

Nach Definition 2.0.10 ist  $P(T, H|_T)$  eine Partition von  $T$  mit maximal zusammenhängenden Komponenten. D.h. jede Kante  $h \subseteq T$ ,  $h \in H$ , befindet sich in genau einer dieser maximal zusammenhängenden Komponenten und wir erhalten aus Gleichung 4.3

$$v^H(T) = \sum_{i \in T} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \subseteq T, \\ h \in H}} \pi(h) \stackrel{4.1}{=} v(T) \quad \text{für alle } T \subseteq N. \quad (4.4)$$

Somit ist für  $|S| = 1$  nichts zu zeigen. Durch Induktion über die Anzahl  $s = |S|$  der Spieler zeigen wir nun für alle Koalitionen  $S \subseteq N$ , dass gilt

$$\Delta_v(S) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |S| \geq 2, S \notin H, \\ \pi(S), & \text{falls } |S| \geq 2, S \in H. \end{cases} \quad (4.5)$$

*Induktionsanfang:* Sei  $s = 2$ . Dann gilt

$$\Delta_v(S) \stackrel{2.13}{=} v(S) - \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) \stackrel{4.1}{=} \sum_{i \in S} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \subseteq S, \\ h \in H}} \pi(h) - \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) = \sum_{\substack{h \subseteq S, \\ h \in H}} \pi(h).$$

Daraus folgt  $\Delta_v(S) = 0$  für  $S \notin H$  und  $\Delta_v(S) = \pi(S)$  für  $S \in H$ .

*Induktionsschritt:* Gelte jetzt Aussage 4.5 für ein beliebiges  $s - 1 \geq 2$  (IA). Dann folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_v(S) &= v(S) - \sum_{R \subsetneq S} \Delta_v(R) \stackrel{4.1}{=} \sum_{i \in S} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \subseteq S, \\ h \in H}} \pi(h) - \sum_{R \subsetneq S} \Delta_v(R) \\
 &= \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \subseteq S, \\ h \in H}} \pi(h) - \left[ \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) + \sum_{\substack{R \subsetneq S, \\ R \in H}} \Delta_v(R) + \sum_{\substack{R \subsetneq S, \\ R \notin H \\ |R| \neq 1}} \Delta_v(R) \right] \\
 &\stackrel{(IA)}{=} \sum_{\substack{h \subseteq S, \\ h \in H}} \pi(h) - \sum_{\substack{R \subsetneq S, \\ R \in H}} \pi(R) = \begin{cases} 0, & \text{falls } S \notin H, \\ \pi(S), & \text{falls } S \in H. \end{cases} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

□

## 4.2. Lösung des Spiels mit $f$ -Weighted-Shapley-Values-For-Hypergraphs

Das bekannteste Lösungskonzept für Graphen ist der Myerson-Value  $\mu$  (2.20). Dabei wird eigentlich kein neuer Value definiert, sondern die Koalitionsfunktion  $v$  wird zur Koalitionsfunktion  $v^L$  modifiziert und darauf der Shapley-Value  $Sh$  angewendet. Ein analoges Vorgehen ist mit der Hypergraphenkoalitionsfunktion  $v^H$  (2.19) für alle  $f$ -Weighted-Shapley-Values möglich.

**Definition 4.2.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ , alle  $v \in \mathcal{G}^N$  mit

- $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v(\{i\})$  beliebig, falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|N|}$  von Gewichten  $w_i$ ,  $w_i > 0$  für alle  $i \in N$ , alle  $H \subseteq H^N$  und jedes entsprechende CF-Spiel  $(N, v, H)$  (Def. 2.0.10), ist der CF-Value  $Sh^{fH}$ , den wir den zu  $f(v, w)$  zugehörigen  **$f$ -Weighted-Shapley-Value-For-Hypergraphs** nennen, definiert durch

$$Sh_i^{f(v,w)H}(N, v, H) = Sh_i^{f(v^H, w)}(N, v^H) \quad \text{für alle } i \in N, \quad (4.7)$$

wobei  $v^H$  die Hypergraphenkoalitionsfunktion 2.19 und  $Sh^f$  der  $f$ -Weighted-Shapley-Value (Def. 3.4.1) ist.

**Bemerkung 4.2.2.** Der  $f$ -Weighted-Shapley-Value-For-Hypergraphs  $Sh^H := Sh^{fH}$  mit  $f(v(\{i\}), w_i) := c$ ,  $c > 0$  für alle  $i \in N$ , stimmt nach 2.20 für ein CO-Spiel (Def. 2.0.10) mit dem Myerson-Value  $\mu$  überein.

Wir können nun die Auszahlungen für die Spiele *I*, *II* und *III* aus Abschnitt 4.1 berechnen. Wir verwenden dafür, beispielhaft für alle  $f$ -Weighted-Shapley-Values-For-Hypergraphs, den Shapley-Value-For-Hypergraphs  $Sh^H$  und den Proportional-Shapley-Value-For-Hypergraphs  $Sh^{pH} := Sh^{fH}$  mit  $f(v(\{i\}), w_i) := v(\{i\})$ ,  $v(\{i\}) > 0$  für alle  $i \in N$ . In den Spielen *I* bis *III* aus Abschnitt 4.1 erhalten wir mit der Koalitionsfunktion  $v$  für jeden Spieler  $i \in N$  mit  $Sh^H$  folgende Auszahlungen:

$$\begin{aligned} \text{Spiel I:} \quad Sh_i^H(N, v, H) &= \mu_i(N, v, H) = Sh_i(v^H) \stackrel{3.3}{=} \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{\Delta_v(S)}{|S|} \\ &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in H} \pi(\{i,j\}), \quad i \in N. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Spiel II:} \quad Sh_i^H(N, v, H) &= Sh_i(v^H) \stackrel{3.3}{=} \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{\Delta_v(S)}{|S|} \\ &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \frac{1}{\ell} \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \pi(h), \quad i \in N. \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Spiel III: } Sh_i^H(N, v, H) &= Sh_i(v^H) \stackrel{3.3}{=} \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{\Delta_v(S)}{|S|} \\
 &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{1}{|h|} \pi(h), \quad i \in N.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

In Spiel *I* erhält jeder Knoten als Auszahlung, zusätzlich zu seinem Einerkoalitionswert, die Hälfte des Kantengewichts aller mit ihm inzidenten Kanten, in Spiel *II* und *III*, zusätzlich zu seinem Einerkoalitionswert, einen gleichmäßigen Anteil des Kantengewichts von jeder Kante, in der er enthalten ist.

Für den Proportional-Shapley-Value-For-Hypergraphs  $Sh^{pH}$  ergibt sich mit  $v(S) > 0$  für alle  $S$  mit  $|S| = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{Spiel I: } Sh_i^{pH}(N, v, H) &= Sh_i^p(v^H) \stackrel{3.6}{=} \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} \Delta_v(S) \\
 &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + v(\{i\}) \sum_{\{i,j\} \in H} \frac{\pi(\{i,j\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})}, \quad i \in N.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Spiel II: } Sh_i^{pH}(N, v, H) &= Sh_i^p(v^H) \stackrel{3.6}{=} \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} \Delta_v(S) \\
 &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + v(\{i\}) \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{\pi(h)}{\sum_{j \in h} v(\{j\})}, \quad i \in N.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Spiel III: } Sh_i^{pH}(N, v, H) &= Sh_i^p(v^H) \stackrel{3.6}{=} \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} \Delta_v(S) \\
 &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + v(\{i\}) \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{\pi(h)}{\sum_{j \in h} v(\{j\})}, \quad i \in N.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

In Spiel *I*, *II* und *III*, erhält jeder Knoten als Auszahlung, zusätzlich zu seinem Einerkoalitionswert, die Summe der zu seinem Einerkoalitionswert proportionalen Anteile des Kantengewichts jeder Kante, in der er enthalten ist.

### 4.3. Lösung des Spiels mit Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Values-For-Hypergraphs

Ganz ähnlich, wie wir für die  $f$ -Weighted-Shapley-Values einen Value für Hypergraphen definiert haben, können wir auch bei den Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Values vorgehen. Allerdings wollen wir jetzt, dass die Anteilsverhältnisse nur mehr mit Koalitionen gewichtet werden, die einen Spieler  $i$  enthalten und Kanten oder Einerkoalitionen sind:

**Definition 4.3.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

alle  $H \subseteq H^N$ , alle dazugehörigen CF-Spiele  $(N, v, H)$  (Def. 2.0.10) mit  $\hat{H} := H \cup \{\{i\} : i \in N\}$  und einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|\hat{H}|}$  von Gewichten  $w_T$ <sup>3</sup>,  $w_T > 0$  für alle  $T \in \hat{H}$ , ist der CF-Value  $Sh_i^{tfH}$ , den wir den zu  $f(v, w)$  zugehörigen **Totally-f-Weighted-Shapley-Value-For-Hypergraphs** nennen, definiert durch

$$Sh_i^{tf(v,w)H}(N, v, H) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{f(v,w),T}^H(i) \Delta_{vH}(T) \quad \text{für alle } i \in N, \quad (4.14)$$

wobei  $v^H$  die Hypergraphenkoalitionsfunktion (2.19) ist und mit  $Q_{f(v,w),T}^H(i)$  das **totale für Hypergraphen f-gewichtete Anteilsverhältnis** eines Spielers  $i \in N$  an einer Dividende  $\Delta_{vH}(T)$  aus 4.14 durch folgende Ausdrücke rekursiv definiert ist:

$$Q_{f(v,w),T}^H(i) = \frac{\sum_{\substack{S \in (\hat{H}|_T \setminus T), \\ S \ni i}} Q_{f(v,w),S}^H(i) f(v(S), w_S)}{\sum_{S \in (\hat{H}|_T \setminus T)} f(v(S), w_S)} \quad \text{für } |T| > 1 \quad (4.15)$$

und

$$Q_{f(v,w),T}^H(i) = 1 \quad \text{für } T = \{i\}. \quad (4.16)$$

**Bemerkung 4.3.2.** Ist eine Koalition  $S$  ein Element von  $\hat{H}$ , so gilt  $v(S) = v^H(S)$ . Enthält  $\hat{H}$  alle möglichen Koalitionen, so sind die **Totally-f-Weighted-Shapley-Values-For-Hypergraphs**  $Sh_i^{tfH}$  identisch mit den **Totally-f-Weighted-Shapley-Values**  $Sh_i^{tf}$ .

**Bezeichnung 4.3.3.** Den **Totally-f-Weighted-Shapley-Value-For-Hypergraphs**  $Sh_i^{tfH}$  mit  $f(v(T), w_T) := c$ ,  $c > 0$  für alle  $T \in \hat{H}$ , bezeichnen wir als **Totally-Symmetric-Shapley-Value-For-Hypergraphs**  $Sh_i^{tsH}$ , den  $Sh_i^{tfH}$  mit  $f(v(T), w_T) := v(T)$ ,  $v(T) > 0$  für alle  $T \in \hat{H}$ , als **Totally-Proportional-Shapley-Value-For-Hypergraphs**  $Sh_i^{tpH}$ .

Wir berechnen die Auszahlungen für die Spiele I, II und III aus Abschnitt 4.1 mit  $Sh_i^{tsH}$  und  $Sh_i^{tpH}$ . Für  $Sh_i^{tsH}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Spiel I: } Sh_i^{tsH}(N, v, H) &\stackrel{4.14}{=} \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{c,T}^H(i) \Delta_v(T) \\ &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \sum_{\{i,j\} \in H} Q_{c,\{i,j\}}^H(i) \pi(\{i,j\}) \\ &\stackrel{4.15}{=} v(\{i\}) + \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in H} \pi(\{i,j\}), \quad i \in N. \end{aligned} \quad (4.17)$$

<sup>3</sup> Dadurch, dass wir die Anteilsverhältnisse nur für Zusammenhangskomponenten (siehe Bem. 4.1.1) benötigen, sind die Gewichte von Koalitionen  $T \in \hat{H}$  mit  $T \in P(N, H)$  belanglos und nur aus formalen Gründen mitangegeben.

$$\begin{aligned}
 \text{Spiel II: } Sh_i^{tsH}(N, v, H) &\stackrel{4.14}{=} \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{c,T}^H(i) \Delta_v(T) \\
 &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{\sum_{\substack{S \in (\hat{H}|_h \setminus h), \\ S \ni i}} Q_{c,S}^H(i) c}{\sum_{S \in (\hat{H}|_h \setminus h)} c} \pi(h) \\
 &\stackrel{4.15}{=} v(\{i\}) + \frac{1}{\ell} \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \pi(h), \quad i \in N. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Spiel III: } Sh_i^{tsH}(N, v, H) &\stackrel{4.14}{=} \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{c,T}^H(i) \Delta_v(T) \\
 &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{\sum_{\substack{S \in (\hat{H}|_h \setminus h), \\ S \ni i}} Q_{c,S}^H(i) c}{\sum_{S \in (\hat{H}|_h \setminus h)} c} \pi(h) \\
 &\stackrel{4.15}{=} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{\sum_{S \in (\hat{H}|_h \setminus h), S \ni i} Q_{c,S}^H(i)}{|\hat{H}|_h \setminus h|} \pi(h), \quad i \in N. \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

Für  $Sh^{tpH}$  folgt mit  $v(S) > 0$  für alle  $S \subseteq N$ ,  $S \neq \emptyset$ :

$$\begin{aligned}
 \text{Spiel I: } Sh_i^{tpH}(N, v, H) &\stackrel{4.14}{=} \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{v(T),T}^H(i) \Delta_v(T) \\
 &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \sum_{\{i,j\} \in H} Q_{v(\{i,j\}),\{i,j\}}^H(i) \pi(\{i,j\}) \\
 &\stackrel{4.15}{=} v(\{i\}) + v(\{i\}) \sum_{\{i,j\} \in H} \frac{\pi(\{i,j\})}{v(\{i\}) + v(\{j\})}, \quad i \in N. \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Spiel II: } Sh_i^{tpH}(N, v, H) &\stackrel{4.14}{=} \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{v(T),T}^H(i) \Delta_v(T) \\
 &\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{\sum_{\substack{S \in (\hat{H}|_h \setminus h), \\ S \ni i}} Q_{v(S),S}^H(i) v(S)}{\sum_{S \in (\hat{H}|_h \setminus h)} v(S)} \pi(h) \\
 &\stackrel{4.15}{=} v(\{i\}) + v(\{i\}) \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{\pi(h)}{\sum_{j \in h} v(\{j\})}, \quad i \in N. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

$$\text{Spiel III: } Sh_i^{tpH}(N, v, H) \stackrel{4.14}{=} \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{v(T),T}^H(i) \Delta_v(T) \tag{4.22}$$

$$\stackrel{4.2}{=} v(\{i\}) + \sum_{\substack{h \in H, \\ h \ni i}} \frac{\sum_{\substack{S \in (\hat{H}|_h \setminus h), \\ S \ni i}} Q_{v(S),S}^H(i) v(S)}{\sum_{S \in (\hat{H}|_h \setminus h)} v(S)} \pi(h), \quad i \in N. \tag{4.23}$$

Für Spiel *I* und *II* ist  $Sh^H$  mit  $Sh^{tsH}$  und  $Sh^{pH}$  mit  $Sh^{tpH}$  identisch. In Spiel *III* erhält jeder Spieler  $i \in N$  mit  $Sh^{tsH}$ , zusätzlich zum Einerkoalitionswert, seinen total gleichmäßig gewichteten Anteil jedes Kantengewichts aller Kanten, in denen er enthalten ist, mit  $Sh^{tpH}$  zusätzlich zum Einerkoalitionswert seine entsprechenden total proportionalen Anteile.

#### 4.4. Komplexitätsbetrachtungen von Hypergraphen-Values

Es gilt:

**Satz 4.4.1.** *I.:* Spiel *I* ist mit den Values  $Sh^H$ ,  $Sh^{pH}$ ,  $Sh^{tsH}$ ,  $Sh^{tpH}$  in  $O(n^2)$  Zeit lösbar.

*II.:* Spiel *II* ist mit den Values  $Sh^H$ ,  $Sh^{pH}$ ,  $Sh^{tsH}$ ,  $Sh^{tpH}$  in  $O(n^{k+1})$  Zeit lösbar, wenn die Anzahl der Hyperkanten durch ein Polynom  $k$ -ten Grades, oder die Größe  $|h|$  der Hyperkanten  $h \in H$  durch eine Konstante  $k > 0$  beschränkt ist.

*III.:* Spiel *III* ist mit den Values

- a)  $Sh^H$  und  $Sh^{pH}$  in  $O(n^{k+1})$ ,
- b)  $Sh^{tsH}$  und  $Sh^{tpH}$  in  $O(n^{2k+1})$  Zeit lösbar,

wenn die Anzahl der Hyperkanten durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt ist.

*Beweis. I.:* Jeder Knoten  $i$  ist mit maximal  $n - 1$  anderen Knoten in  $G$  adjazent. Somit sind in den Formeln 4.8, 4.11, 4.17, 4.20 maximal  $n - 1$  Summanden zu addieren, von denen jeder mit konstant vielen Operationen ausgewertet werden kann. Bei  $n$  Knoten haben somit alle vier Values quadratische Laufzeit  $O(n^2)$ .

*II.:* Sei die Anzahl der Hyperkanten durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt:

In den Formeln 4.9, 4.12, 4.18, 4.21 ist die Anzahl der Summanden durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt, von denen jeder mit konstant vielen Operationen ausgewertet werden kann, wenn für 4.12, 4.21 vorab für alle Kanten  $h$  die Summen im Nenner berechnet wurden, was  $O(n \cdot n^k) = O(n^{k+1})$  Zeit benötigt. Somit ergibt sich bei  $n$  Knoten für die Values  $Sh^H$ ,  $Sh^{tsH}$  eine polynomiale Gesamtlaufzeit von  $O(n \cdot n^k) = O(n^{k+1})$  und für  $Sh^{pH}$ ,  $Sh^{tpH}$  eine polynomiale Gesamtlaufzeit von  $O(n^{k+1}) + O(n \cdot n^k) = O(n^{k+1})$ .

Sei jetzt die Größe  $|h|$  der Hyperkanten durch eine Konstante  $k \geq 2$  beschränkt: Die maximale Anzahl der Hyperkanten bei Maximalgröße  $k$  von insgesamt  $n$  Knoten entspricht der Anzahl aller  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge, also dem Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$ . Das bedeutet, wenn  $k$  fest ist, ist die Anzahl der Hyperkanten ebenfalls durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt, denn es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} < n^k$$

und wir erhalten, wie zuvor gezeigt, die angegebenen Laufzeiten.

*III.:* a) Die Aussage folgt aus dem gleichen Beweis wie für Spiel *II*. Sollte für  $Sh^H$  die Anzahl der Knoten der Kanten  $h$  nicht abgespeichert sein, so kann diese vorab für alle Kanten in  $O(n^{k+1})$  Zeit ermittelt werden und es ergibt sich die gleiche Gesamtkomplexität.

b) Für die Berechnung von  $Sh^{tsH}$  geben wir einen Algorithmus an:



ist. Damit ist aber jeder Bruch der Zeilen 5 und 8 ebenfalls in  $O(n^k + n^k) = O(n^k)$  Zeit zu berechnen und wir erhalten dieselbe Gesamtlaufzeit  $O(n^{2k+1})$  wie bei  $Sh^{tsH}$ .  $\square$

**Bemerkung 4.4.2.** In Spiel II ist für die Values  $Sh^H$ ,  $Sh^{pH}$ ,  $Sh^{tsH}$ ,  $Sh^{tpH}$  mit den oben angegebenen Formeln die Laufzeit bezüglich  $n$  nicht mehr polynomial, wenn die Maximalgröße  $k$  der Kanten z. B. in der Form  $k = \lceil \frac{n}{t} \rceil$  von  $n$  abhängt.

*Beweis.* Wir zeigen die Bemerkung durch Abschätzung mit der Stirlingschen Formel (siehe [Königsberger 2004]):

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Da für  $2 \leq k \leq n$  für ganzzahlige Binomialkoeffizienten immer die Identität  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  gilt, müssen wir aus Symmetriegründen nur  $k \leq \frac{n}{2}$  betrachten. Aus

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{2} > k$$

folgt, wegen der Symmetrie, dass  $\binom{n}{k}$  ein Maximum bei  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  bzw.  $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  besitzen muss. Es gelte nun  $k' = \lceil \frac{n}{t} \rceil$ ,  $2 \leq t \leq \frac{n}{2}$ . Betrachten wir ein festes  $n$ , bei dem gilt  $k = \frac{n}{s}$ ,  $s \geq t$ ,  $2 \leq s \leq \frac{n}{2}$ . Dann folgt  $k = \frac{n}{s} \leq \lceil \frac{n}{t} \rceil = k'$  und somit auch  $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k'}$ . Wir approximieren nun für ein beliebig großes, solches festes  $n$  mit der Stirlingschen Formel:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{sk}{k} = \frac{(sk)!}{k!(k(s-1))!} \\ &\simeq \frac{\sqrt{2\pi sk} \left(\frac{sk}{e}\right)^{sk}}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k(s-1)} \left(\frac{k(s-1)}{e}\right)^{k(s-1)}} = \frac{\left(\frac{sk}{e}\right)^{sk}}{\sqrt{2\pi k \frac{s-1}{s}} \left(\frac{k}{e}\right)^k \left(\frac{k(s-1)}{e}\right)^{k(s-1)}} \\ &= \frac{s^{sk} \left(\frac{k}{e}\right)^{sk}}{\sqrt{2\pi k \frac{s-1}{s}} (s-1)^{k(s-1)} \left(\frac{k}{e}\right)^k \left(\frac{k}{e}\right)^{k(s-1)}} = \frac{s^{sk}}{\sqrt{2\pi k \frac{s-1}{s}} (s-1)^{k(s-1)}} \\ &= \frac{s^n}{\sqrt{2\pi n \frac{s-1}{s^2}} (s-1)^{n \frac{s-1}{s}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{s-1}{s^2}} (s-1)^{\frac{s-1}{s}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{s}{s-1}\right)^n. \end{aligned}$$

Da  $\frac{s}{s-1} > 1$ , ist die Anzahl der Summanden bezüglich  $n$  für  $s$  und damit für  $t$  exponentiell und somit auch die Laufzeit. Das schlechteste Ergebnis, der Worst Case, wird bei  $t = 2$  mit einer exponentiellen Laufzeit von  $O\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$  für jeden einzelnen Knoten erreicht.  $\square$

**Bemerkung 4.4.3.** Da wir zur Berechnung der Komplexitäten Satz 4.1.2 benutzt haben, erhalten wir die gleichen Komplexitäten für jedes CF-Spiel, wenn in den Values  $Sh^{fH}$  und  $Sh^{tH}$  statt der Hypergraphenkoalitionsfunktion  $v^H$  eine Hypergraphenkoalitionsfunktion  $v^{HR}$  verwendet wird, mit  $v^{HR}(S) := v(S)$  für  $|S| = 1$  oder  $S \in H$  und für alle anderen Koalitionen  $S \subseteq N$ , der Wert  $v(S)$  so gesetzt wird, dass  $\Delta_{v^{HR}}(S) = 0$  gilt. Wir gehen in Kapitel 6 nochmal kurz darauf ein.

# Kapitel 5

## Level-Structures

### 5.1. Nested-Partitions

Wir kommen zum Beispiel aus der Aufgabenstellung (Abschnitt 1.2). Zur Veranschaulichung verwenden wir eine graphische Darstellung. Gegeben ist eine Spielermenge  $N$ , deren Koalitionsstruktur durch einen Baum mit ausgezeichneter Wurzel der Höhe  $h$ ,  $h \geq 1$ , mit  $n = |N|$  Blättern,  $n \geq 2$ , und Grad  $d \in \mathbb{N}$  beschrieben werden kann (Abb. 5.1).

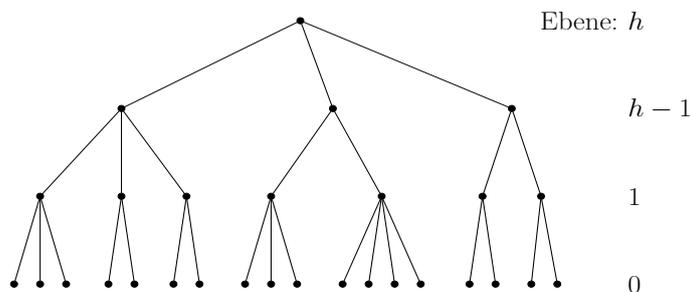


Abb. 5.1: Baum der Höhe  $h$  mit ausgezeichnete Wurzel,  $h + 1$  Ebenen und  $n$  Blättern

Die Spieler sind ursprünglich nur die Blätter. Um die Beschreibung einfach zu halten, seien zunächst alle Blätter nur in Ebene 0. Jedes Blatt steht für eine eigene Partition, die eine einzige Komponente enthält, die als einziges Element nur einen Spieler besitzt. Die Ebene 0 entspricht der atomaren Partition (Def. 2.0.12) der Spielermenge  $N$ , wobei in unserem Fall jedes Blatt eine eigene Partition darstellt (Abb. 5.2).

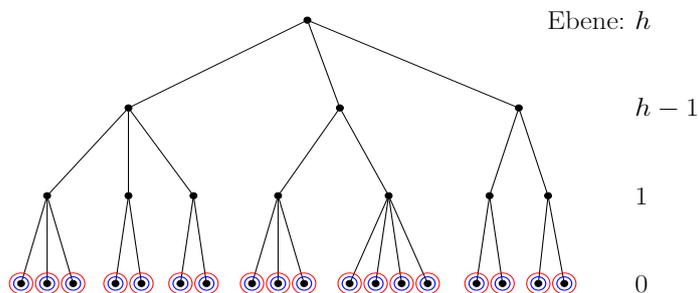


Abb. 5.2: Atomare Partition der Spielermenge mit Blättern als Komponenten. Jede Komponente bildet eine Partition (rot) mit einer Komponente (blau) und einem Spieler als einziges Element.

Alle Partitionen der Ebene 0, die Geschwister sind, bilden die Komponenten einer übergeordneten Partition, dargestellt durch den Elternknoten dieser Geschwister in Ebene 1. Die Komponenten besitzen jeweils einen Spieler als einziges Element (Abb. 5.3).

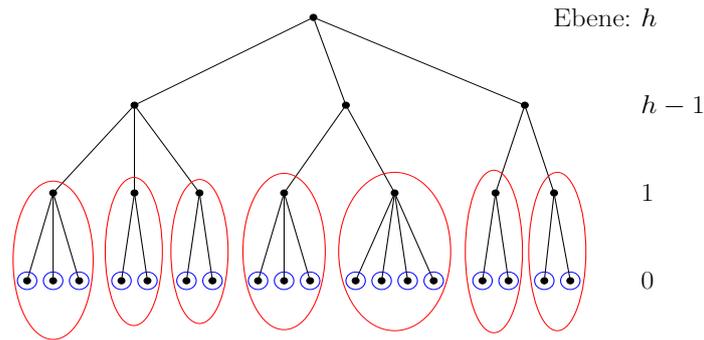


Abb. 5.3: Partitionen (rot), repräsentiert durch Knoten der Ebene 1, auf der jeweiligen Menge von Knoten, die Geschwister in Ebene 0 sind, und die zugehörigen Komponenten (blau) bilden

Die Knoten aus Ebene 1, d.h. die Partitionen, für die diese Knoten stehen, die Geschwister sind, bilden die Komponenten einer neuen Partition der Ebene 2, symbolisiert durch ihren Elternknoten (Abb. 5.4).

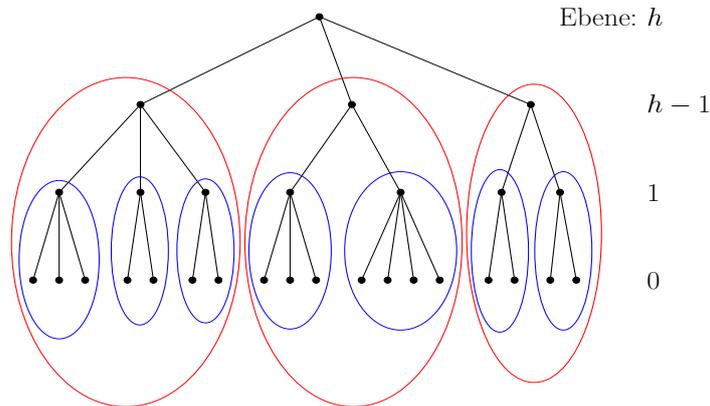


Abb. 5.4: Partitionen (rot), repräsentiert durch Knoten der Ebene 2, auf der jeweiligen Menge von Knoten, die Geschwister in Ebene 1 sind und die zugehörigen Komponenten (blau) bilden

Mit diesem Schema wandern wir immer eine Ebene höher. Die Geschwister in jeder Ebene bilden die Komponenten einer übergeordneten Partition, dargestellt durch den Elternknoten in der nächsthöheren Ebene. Am Schluss bilden die Partitionen, dargestellt durch die Knoten der Ebene  $h - 1$ , die Komponenten der alles umfassenden Partition, symbolisiert durch den Wurzelknoten. Wir erhalten lauter ineinander geschachtelte Partitionen, die, bis auf die letzte, jeweils Komponenten einer übergeordneten Partition sind (Abb. 5.5). Eine solche Koalitionsstruktur nennen wir **Nested-Partitions**.

Wir können nun auch einführen, dass der Baum Blätter in unterschiedlichen Ebenen besitzt. In jeder Ebene sind Blätter Partitionen, die eine einzige Komponente mit einem Spieler als einziges Element besitzen (Abb. 5.6).

Für seinen Level-Structure-Value (Satz 2.0.15) hat Winter in [Winter 1989] eine Koalitionsstruktur eingeführt, die er Levels-Structure nennt, in [Calvo, Lasaga, Winter 1996] heißt sie Level-Structure (Def. 2.0.13). Sie entspricht, mit einer etwas anderen Sichtweise, der gerade beschriebenen Koalitionsstruktur der Nested-Partitions. Wir können damit die Koalitionsstruktur aus Abb. 5.6 mit Abb. 5.7 darstellen.

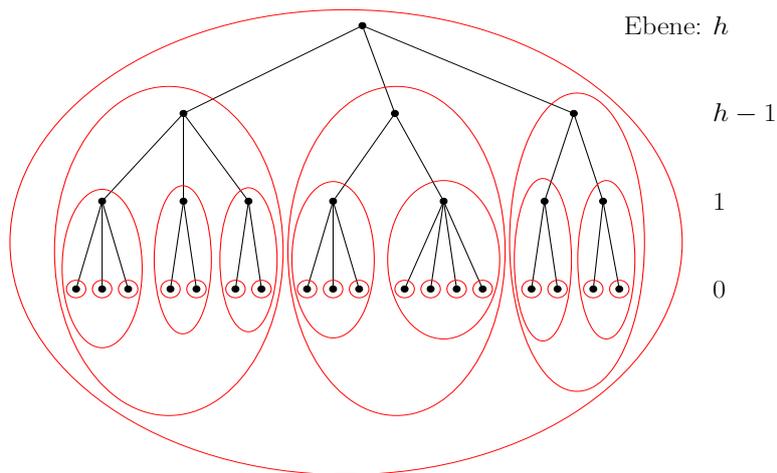


Abb. 5.5: Ineinander geschachtelte Partitionen (Nested-Partitions). Jede Partition, außer der größten, bildet auch eine Komponente der übergeordneten Partition.

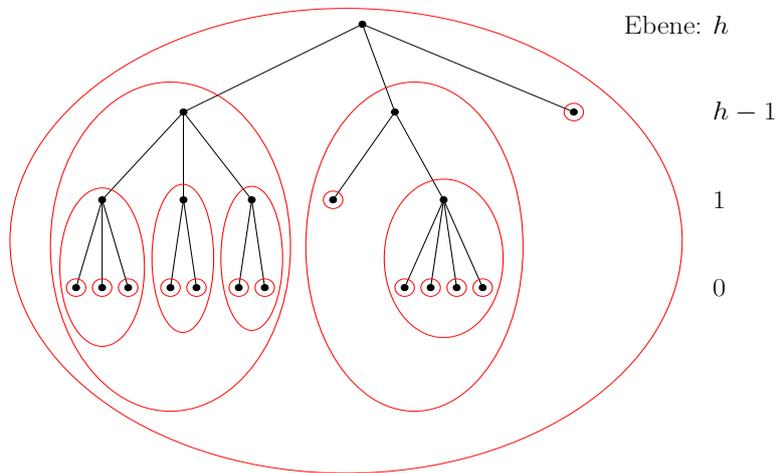


Abb. 5.6: Geschachtelte Partitionen auf einem Baum mit Blättern in unterschiedlichen Ebenen

Für unser weiteres Vorgehen werden wir, um mit der vorhandenen Literatur konform zu bleiben, die Definition der Level-Structure verwenden und keine eigene formale Definition der Nested-Partitions vornehmen. Ziel der nächsten Abschnitte ist es, zum einen Values anzugeben, die die Koalitionsstruktur von Nested-Partitions bei der Auszahlung berücksichtigen und zum anderen, die Laufzeit-Komplexität der Auszahlungsberechnung dieser Values zu ermitteln:

Bei einer gegebenen Level-Structure  $\underline{P}$  bedeutet das, dass die Zwischenauszahlung an eine Komponente gleich der Summe der Auszahlungen an alle Spieler der Komponente sein soll (Satz 2.0.16). Zusätzlich wollen wir, dass für die Berechnung des Auszahlungsanteils eines Elementes  $T$  einer Komponente  $C^\ell \in P^\ell$  an der Zwischenauszahlung nur Koalitionswerte von Koalitionen  $S$  verwendet werden, die aus Elementen der Komponente  $C^\ell$  und anderen Komponenten der Partition  $P^\ell$  zusammengesetzt sind, die Teilmengen derselben Komponente  $C^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$  sind, wie die Komponente  $C^\ell$ , wie dies auch für die Auszahlungsberechnung einer Partition mit dem Owen-Value der Fall ist.

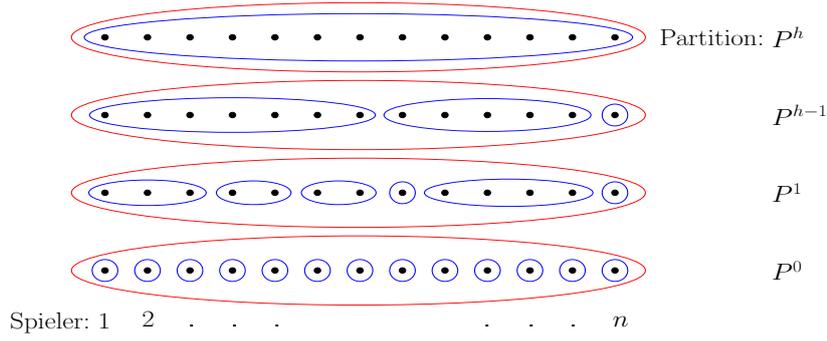


Abb. 5.7: Zur Abbildung 5.6 zugehörige Level-Structure

## 5.2. Algorithmus zur Berechnung des Level-Structure-Values

In [Gómez-Rúa, Vidal-Puga 2011] wird ein neuer Value für Level-Structures eingeführt, der eine Erweiterung des  $\zeta$ -Values [Vidal-Puga 2005] ist. Im folgenden Abschnitt übertragen wir die Darstellung, den Algorithmus und die Beweisführung für den Value aus [Gómez-Rúa, Vidal-Puga 2011] auf den Level-Structure-Value (Satz 2.0.15).

Wir beschreiben kurz die Idee, die hinter dem folgenden Algorithmus steckt: In einem ersten Schritt wird  $v(N)$  durch den Shapley-Value auf die Komponenten des  $(h-1)$ -ten Levels verteilt. Dann wird für jede Komponente  $C_q^{h-1} \in P^{h-1}$  die Auszahlung, die  $C_q^{h-1}$  im ersten Schritt erhalten hat, auf alle Komponenten  $C_q^{h-2} \in P^{h-2}$ , die Teilmengen von  $C_q^{h-1}$  sind, mit dem Shapley-Value verteilt usw.. Im letzten Schritt verteilen wir die Auszahlung, die die Komponenten aus  $P^1$  erhalten haben, an die ursprünglichen Spieler  $i \in N$ .

**Algorithmus 5.2.1.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$  mit einer Level-Structure  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$ , und  $v \in \mathcal{G}^N$  gegeben. Wir setzen  $v^h := v$ .

- **Schritt 1:** Gegeben sei der  $(h-1)$ -te Level  $P^{h-1} = \{C_1^{h-1}, \dots, C_{m(h-1)}^{h-1}\}$  mit  $C_q^{h-1} \in P^{h-1}$  und  $N^{h-1} = \{1, \dots, m(h-1)\}$ . Das TU-Spiel  $(C_q^{h-1}, v^{h-1})$  ist definiert durch

$$v^{h-1}(T) = Sh_q(N^{h-1}, v^h/P^{h-1}|_{(N \setminus C_q^{h-1}) \cup T}) \text{ für alle } T \subseteq C_q^{h-1}. \quad (5.1)$$

Insbesondere ist  $v^{h-1}(C_q^{h-1})$  die der Komponente  $C_q^{h-1}$  zugedachte Auszahlung.

- **Schritt k für  $2 \leq k \leq h-1$ :** Wir betrachten für  $\ell := h-k$  den  $\ell$ -ten Level  $P^\ell = \{C_1^\ell, \dots, C_{m(\ell)}^\ell\}$  mit  $C_r^\ell \in P^\ell$  und  $N^\ell = \{1, \dots, m(\ell)\}$ . Sei  $C_r^\ell \subseteq C_q^{\ell+1}$ ,  $C_q^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$  und  $N_q^\ell = \{s \in N^\ell : C_s^\ell \subseteq C_q^{\ell+1}\}$  die Menge der Indizes der Komponenten in  $C_q^{\ell+1}$ . Wir beachten, dass  $r \in N_q^\ell$  gilt. Das TU-Spiel  $(C_r^\ell, v^\ell)$  ist definiert durch

$$v^\ell(T) = Sh_r(N_q^\ell, v^{\ell+1}/P^\ell|_{(C_q^{\ell+1} \setminus C_r^\ell) \cup T}) \text{ für alle } T \subseteq C_r^\ell. \quad (5.2)$$

Insbesondere ist  $v^\ell(C_r^\ell)$  die der Komponente  $C_r^\ell$  zugedachte Auszahlung.

- **Schritt h:** Wir betrachten die atomare Partition  $P^0 = \{C_1^0, \dots, C_n^0\}$  mit  $C_i^0 = \{i\}$  und  $N^0 = N$ . Sei  $C_q^1 \in P^1$  und  $N_q^0 = \{j \in N^0 : \{j\} \in C_q^1\}$ . Die Auszahlung  $\phi^{LS}$  für die Spieler  $i$ ,  $i \in N$ , ist dann gegeben durch

$$\phi_i^{LS}(v, \underline{P}) = Sh_i(N_q^0, v^1/P^0|_{C_q^1}). \quad (5.3)$$

Gilt  $h = 1$ , wird nur Schritt  $h$  ausgeführt.

Für den Beweis, dass  $\phi^{LS}$  aus dem obigen Algorithmus gleich dem Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$  (Satz 2.0.15) ist, benötigen wir ein Axiom aus [Calvo, Lasaga, Winter 1996].

**Axiom 5.2.1.** *Ein Value  $\phi$  erfüllt das **Balanced-Group-Contributions-Axiom** genau dann, wenn für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ , Level-Structures  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  mit  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$  für alle  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, h-1\}$ , gilt*

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i\left(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}\right) \\ &= \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i\left(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dieses Axiom fordert, dass für zwei Komponenten  $C_q^\ell, C_r^\ell$ , die Teilmengen derselben Komponente in der Partition  $P^{\ell+1}$  sind, der Beitrag der Komponente  $C_r^\ell$  zur Gesamtauszahlung an die grundlegenden Spieler der Komponente  $C_q^\ell$  gleich dem Beitrag der Komponente  $C_q^\ell$  zur Gesamtauszahlung an die grundlegenden Spieler der Komponente  $C_r^\ell$  ist.

Folgender Satz liefert mit diesem Axiom eine Charakterisierung des Level-Structure-Values:

**Satz 5.2.2** ([Calvo, Lasaga, Winter 1996]). *Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  ist jeder LS-Value  $\phi$ , der das Pareto-Axiom 2.0.7 und das Balanced-Group-Contributions-Axiom 5.2.1 erfüllt, gleich dem Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$  (Satz 2.0.15).*

Damit können wir zeigen, dass Algorithmus 5.2.1 den Level-Structure-Value berechnet:

**Satz 5.2.3.** *Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , und  $v \in \mathcal{G}^N$  gegeben. Dann ist der Value  $\phi^{LS}$  aus Algorithmus 5.2.1 der Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$  aus Satz 2.0.15.*

*Beweis.* Wir zeigen die Pareto-Optimalität. Dazu behaupten wir, dass die Summe der Auszahlungen  $v^{h-k}(C_q^{h-k})$  an die Komponenten  $C_q^{h-k} \in P^{h-k}$  in jedem Schritt  $k$ ,  $1 \leq k \leq h-1$ , gleich dem Wert der großen Koalition  $v(N)$  ist, was wir durch Induktion über die Anzahl  $k$  der Schritte in Algorithmus 5.2.1 zeigen wollen.

*Induktionsanfang:* Sei  $k = 1$ . Dann gilt in Schritt 1 wegen der Pareto-Optimalität des Shapley-Values für den Level  $h-k = \text{Level } h-1$

$$\sum_{C_q^{h-k} \in P^{h-k}} v^{h-k}(C_q^{h-k}) = v(N). \quad (5.5)$$

*Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass Gleichung 5.5 für ein beliebiges  $k$ ,  $1 \leq k \leq h-2$ , gilt (IA). Dann folgt in Schritt  $k+1$  für alle Komponenten  $C_r^{h-(k+1)} \in P^{h-(k+1)}$ ,  $C_r^{h-(k+1)} \subseteq C_q^{h-k} \in P^{h-k}$

$$\sum_{\substack{C_r^{h-(k+1)} \in P^{h-(k+1)}, \\ C_r^{h-(k+1)} \subseteq C_q^{h-k} \in P^{h-k}}} v^{h-(k+1)}(C_r^{h-(k+1)}) = v^{h-k}(C_q^{h-k}) \quad (5.6)$$

und wegen (IA)

$$\sum_{C_r^{h-(k+1)} \in P^{h-(k+1)}} v^{h-(k+1)}(C_r^{h-(k+1)}) = v(N). \quad (5.7)$$

Damit ist unsere Behauptung gezeigt. Im letzten Schritt  $k = h$  gilt

$$\sum_{i \in C_q^1} \phi_i^{LS}(v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_q^1} Sh_i(N_q^0, v^1/P^0|_{C_q^1}) = v^1(C_q^1) \text{ f\"ur alle } C_q^1 \in P^1. \quad (5.8)$$

Daraus folgt

$$\sum_{i \in N} \phi_i^{LS}(v, \underline{P}) = \sum_{C_q^1 \in P^1} \sum_{i \in C_q^1} \phi_i^{LS}(v, \underline{P}) = \sum_{C_q^1 \in P^1} v^1(C_q^1) = v(N) \quad (5.9)$$

und deshalb die Pareto-Optimalität von  $\phi^{LS}$ .

Wir beweisen nun, dass das Balanced-Group-Contributions-Axiom erfüllt ist: Sei  $(N, v, \underline{P})$  mit  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ ,  $C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$  mit  $0 \leq \ell \leq h-1$  und  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$  mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1}$  gegeben. Nach Definition von  $\phi_i^{LS}$  gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i^{LS}(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i^{LS}(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}) \\ &= Sh_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}}) - Sh_q(N_k^\ell \setminus \{r\}, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_r^\ell}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Wenn  $T \subseteq C_k^{\ell+1} \setminus C_r^\ell$  gilt, hängt  $v^{l+1}(T)$  nach Definition nicht von der Gegenwart von  $C_r^\ell$  in der Spielermenge ab. Daher können wir Gleichung 5.10 auch schreiben mit

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i^{LS}(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i^{LS}(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}) \\ &= Sh_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}}) - Sh_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_r^\ell}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mit dem gleichen Vorgehen erhalten wir analog für die Komponente  $C_r^\ell$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i^{LS}(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i^{LS}(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell}) \\ &= Sh_r(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}}) - Sh_r(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_q^\ell}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Da der Shapley-Value das Balanced-Contributions-Axiom 3.2.6 erfüllt, gilt

$$\begin{aligned} & Sh_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}}) - Sh_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_r^\ell}) \\ &= Sh_r(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}}) - Sh_r(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_q^\ell}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

und damit

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i^{LS}(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i^{LS}(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}) \\ &= \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i^{LS}(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i^{LS}(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Damit ist Axiom 5.2.1 erfüllt und mit Satz 5.2.2 folgt die Behauptung.  $\square$

### 5.3. Der Nested-Partitions-Shapley-Value

In diesem Abschnitt führen wir mit einem Algorithmus einen  $LS$ -Value ein, der ebenfalls den Shapley- bzw. Owen-Value verallgemeinert. Dieser Algorithmus ist fast der gleiche wie Algorithmus 5.2.1. Da dieser Value die in Abschnitt 5.1 angesprochene Koalitionsstruktur der Nested-Partitions berücksichtigt, werden in den Schritten  $k$ ,  $1 \leq k \leq h-1$ , nicht mehr alle Teilmengen  $T$  einer Komponente  $C_q^{h-k}$  verwendet, sondern nur die Teilmengen, die sich aus den Komponenten des  $h-k-1$ -ten Levels bilden lassen.

**Algorithmus 5.3.1.** *Durch folgenden Algorithmus definieren wir für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$  und alle  $i \in N$  einen  $LS$ -Value  $Sh_i^{NP}$ , den wir **Nested-Partitions-Shapley-Value** nennen. Wir setzen  $v^h := v$ .*

- **Schritt 1:** Gegeben sei der  $(h-1)$ -te Level  $P^{h-1} = \{C_1^{h-1}, \dots, C_{m(h-1)}^{h-1}\}$  mit  $C_q^{h-1} \in P^{h-1}$  und  $N^{h-1} = \{1, \dots, m(h-1)\}$ . Das  $TU$ -Spiel  $(C_q^{h-1}, v^{h-1})$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} v^{h-1}(T) &= Sh_q(N^{h-1}, v^h/P^{h-1}|_{(N \setminus C_q^{h-1}) \cup T}) \\ \text{für alle } T \subseteq C_q^{h-1} \text{ mit } T &= \bigcup_{S \in \hat{P}^{h-2}} S, \hat{P}^{h-2} \subseteq P^{h-2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Insbesondere ist  $v^{h-1}(C_q^{h-1})$  die der Komponente  $C_q^{h-1}$  zugeordnete Auszahlung. Bei Komponenten  $C_q^{h-1}$  mit  $C_q^{h-1} = \{i\}$ ,  $i \in N$ , gilt

$$Sh_i^{NP}(v, \underline{P}) = v^{h-1}(C_q^{h-1}) = Sh_q(N^{h-1}, v^h/P^{h-1}). \quad (5.16)$$

Für alle Komponenten  $C_q^{h-1} \in P^{h-1}$  mit  $C_q^{h-1} \neq \{i\}$  folgt Schritt 2.

- **Schritt  $k$  für  $2 \leq k \leq h-1$ :** Wir betrachten für  $\ell := h-k$  den  $\ell$ -ten Level  $P^\ell = \{C_1^\ell, \dots, C_{m(\ell)}^\ell\}$  mit  $C_r^\ell \in P^\ell$  und  $N^\ell = \{1, \dots, m(\ell)\}$ . Sei  $C_r^\ell \subseteq C_q^{\ell+1}$  mit  $C_q^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$  und  $N_q^\ell = \{s \in N^\ell : C_s^\ell \subseteq C_q^{\ell+1}\}$  die Menge der Indizes der Komponenten in  $C_q^{\ell+1}$ . Wir beachten, dass  $r \in N_q^\ell$  gilt. Für alle  $T \subsetneq C_r^\ell$  setzen wir  $v^{\ell+1}(T) := v(T)$ . Das  $TU$ -Spiel  $(C_r^\ell, v^\ell)$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} v^\ell(T) &= Sh_r(N_q^\ell, v^{\ell+1}/P^\ell|_{(C_q^{\ell+1} \setminus C_r^\ell) \cup T}) \\ \text{für alle } T \subseteq C_r^\ell \text{ mit } T &= \bigcup_{S \in \hat{P}^{\ell-1}} S, \hat{P}^{\ell-1} \subseteq P^{\ell-1}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Insbesondere ist  $v^\ell(C_r^\ell)$  die der Komponente  $C_r^\ell$  zugedachte Auszahlung. Bei Komponenten  $C_r^\ell$  mit  $C_r^\ell = \{i\}$ ,  $i \in N$ , gilt

$$Sh_i^{NP}(v, \underline{P}) = v^\ell(C_r^\ell) = Sh_r(N_q^\ell, v^{\ell+1}/P^\ell|_{C_q^{\ell+1}}). \quad (5.18)$$

Für alle Komponenten  $C_r^\ell \subseteq C_q^{\ell+1}$  mit  $C_r^\ell \neq \{i\}$  folgt der nächste Schritt.

- **Schritt h:** Wir betrachten die atomare Partition  $P^0 = \{C_1^0, \dots, C_n^0\}$  mit  $C_i^0 = \{i\}$  und  $N^0 = N$ . Sei  $C_q^1 \in P^1$  und  $N_q^0 = \{j \in N^0 : j \in C_q^1\}$ . Die Auszahlung  $Sh^{NP}$  für die Spieler  $i$ ,  $i \in N$  und  $i \in C_q^1$ , ist dann gegeben durch

$$Sh_i^{NP}(v, \underline{P}) = Sh_i(N_q^0, v^1/P^0|_{C_q^1}). \quad (5.19)$$

Gilt  $h = 1$ , wird nur Schritt  $h$  ausgeführt.

**Bemerkung 5.3.1.** Für Auszahlungsberechnungen berücksichtigt der Nested-Partitions-Shapley-Value nur die Koalitionswerte von drei Gruppen von Koalitionen  $T \subseteq N$ : Zum einen Koalitionen, die Komponenten der  $h + 1$  Levels sind, zum anderen Koalitionen  $S^\ell$ , die Teilmengen einer Komponente  $C_q^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$  und gleichzeitig die Vereinigung von Komponenten des Levels  $\ell$  für  $0 \leq \ell \leq h - 1$  sind und drittens Koalitionen, die die Koalitionen  $S^\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq h - 2$ , mit anderen Komponenten aus Level  $\ell + 1$ , die Teilmengen der gleichen Komponente aus Level  $\ell + 2$  sind wie  $C_q^{\ell+1}$ , bilden können. Das geht unmittelbar aus der Konstruktion von Algorithmus 5.3.1 hervor. Die Menge der Koalitionen aus diesen drei Gruppen bezeichnen wir als die Menge  $\mathcal{R}^{NP}$  der **relevanten Koalitionen**. Das bedeutet, alle anderen Koalitionswerte, wir bezeichnen die Menge der dazugehörigen Koalitionen  $T \subseteq N$  als die Menge  $\mathcal{NR}$  der **nicht relevanten Koalitionen**, können bis auf die leere Menge, beliebige Werte annehmen und wir erhalten dieselbe Auszahlung.

Für den Nested-Partitions-Shapley-Value gilt folgender Satz

**Satz 5.3.2.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  und  $v \in \mathcal{G}^N$ . Der Nested-Partitions-Shapley-Value  $Sh^{NP}$  aus Algorithmus 5.3.1 erfüllt folgende Eigenschaften:

- I.  $Sh^{NP}$  ist Pareto-optimal.
- II. Gilt  $h = 2$  für  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ , ist  $Sh^{NP}$  identisch mit dem Owen-Value  $Ow$  (2.5), gilt  $h = 1$  ist er identisch mit dem Shapley-Value  $Sh$  (2.2).
- III. Die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $N$ , die sich in einer Komponente  $C_q^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , befinden, ist gleich der  $C_q^\ell$  zugedachten Auszahlung, formal:

$$Sh_{C_q^\ell}^{NP}(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell) = \sum_{i \in C_q^\ell} Sh_i^{NP}(v, \underline{P}). \quad (5.20)$$

- IV.  $Sh^{NP}$  ist im Allgemeinen nicht identisch mit dem Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$ .
- V. Gilt für die Koalitionsfunktion  $v$ , dass für alle in Bemerkung 5.3.1 als nicht relevant bezeichnete Koalitionen  $S \in \mathcal{NR}$  die Harsanyi-Dividenden gleich null sind, ist der Nested-Partitions-Shapley-Value gleich dem Level-Structure-Value.

*Beweis.* Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $v \in \mathcal{G}^N$ :

I. Der Beweis der Pareto-Optimalität läuft vollkommen analog zu dem von Satz 5.2.3.

II. Für  $h = 1$  und  $h = 2$  sind die Schritte von Algorithmus 5.2.1 und 5.3.1 identisch, somit auch beide Values und nach Bemerkung 2.0.17 folgt die Behauptung.

III. Dass die Summe der Auszahlungen an die Spieler  $i \in C_q^\ell$ ,  $C_q^\ell \in P^\ell \in \underline{P}$ , gleich der  $C_q^\ell$  zugeordneten Auszahlung ist, ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion des Algorithmus in Verbindung mit der Pareto-Optimalität des Shapley-Values.

IV. Die Nichtidentität der beiden Values Nested-Partitions-Shapley-Value und Level-Structure-Value zeigen wir mit Abschnitt 5.3.3.

V. Wir beweisen die Identität von  $Sh^{NP}$  und  $Sh^{LS}$ , wenn alle Koalitionen  $S \in \mathcal{NR}$  Dummy-Dividenden besitzen, indem wir für diesen Fall die Identität von Algorithmus 5.3.1 mit Algorithmus 5.2.1 zeigen. Gegeben ist eine Koalitionsfunktion  $v$  mit  $\Delta_v(S) = 0$  für alle  $S \in \mathcal{NR}$ . Für  $h \leq 2$  ist wegen II. nichts zu zeigen. Sei also  $h \geq 3$ . In Schritt 1 erhalten alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$  mit  $T = \bigcup_{S \in \hat{P}^{h-2}} S$ ,  $\hat{P}^{h-2} \subseteq P^{h-2}$  in beiden Algorithmen den gleichen Wert  $v^{h-1}(T)$ , insbesondere alle Komponenten  $C_q^{h-1}$  mit  $C_q^{h-1} = \{i\}$ ,  $i \in N$ . Die Koalitionen  $S \subsetneq C_q^{h-1}$  mit  $S \not\subseteq P^{h-2}$  erhalten in Algorithmus 5.2.1 als Wert  $v^{h-1}(S)$  ihren ursprünglichen Koalitionswert  $v(S)$ . Das lässt sich folgendermaßen einsehen:

Sei  $\mathcal{U}$  die Menge der Koalitionen, die die Komponenten aus  $P^{h-1} \setminus C_q^{h-1}$  miteinander bilden können. Im  $TU$ -Spiel  $(C_q^{h-1}, v^{h-1})$  werden für die Berechnung von  $v^{h-1}(S)$  in 5.15 für den Shapley-Value alle Koalitionen  $K$  benötigt, die eine Koalition  $S$  mit allen Koalitionen  $R \in \mathcal{U}$  bilden kann. Für eine solche Koalition  $K$  gilt somit  $K = S \cup R$ . Im ursprünglichen Spiel  $v$  ist nach Vorgabe der Wert von  $\Delta_v(K)$  gleich null. Nach Definition der Harsanyi-Dividenden (Def. 2.0.6) gilt  $\Delta_v(K) = v(K) - \sum_{Q \subsetneq K} \Delta_v(Q)$ . Wir erhalten

$$v(K) = \sum_{Q \subsetneq K} \Delta_v(Q) = \sum_{Q \subseteq S} \Delta_v(Q) + \sum_{Q \subseteq R} \Delta_v(Q) + \sum_{\substack{Q \subsetneq K, \\ Q \not\subseteq S, Q \not\subseteq R}} \Delta_v(Q). \quad (5.21)$$

Da nach Voraussetzung alle Dividenden des dritten Summanden null sind, folgt

$$v(K) = \sum_{Q \subseteq S} \Delta_v(Q) + \sum_{Q \subseteq R} \Delta_v(Q) = v(S) + v(R). \quad (5.22)$$

D.h. Koalition  $S$  ist ein Dummy-Player, denn sie trägt zu jeder Koalition  $K$  genau  $v(S)$  bei. Da der Shapley-Value bekanntlich das Axiom über den unwesentlichen Spieler (Axiom 2.0.8) erfüllt, erhält Koalition  $S$  ihren Koalitionswert  $v(S)$  als Auszahlung.

Komponenten, die in einem Schritt in Algorithmus 5.3.1 schon ihre Endauszahlung erhalten, weil diese Komponenten Einerkoalitionen sind, erhalten im selben Schritt auch in Algorithmus 5.2.1 schon ihre Endauszahlung, werden aber in diesem Algorithmus noch bis zum letzten Schritt sozusagen „mitgeschleift“. Für die folgenden Schritte gehen wir deshalb nicht mehr extra darauf ein.

Wir behaupten nun, dass in jedem weiteren Schritt  $k$ ,  $2 \leq k \leq h$ , die Ausgangswerte  $v^{h-(k-1)}(T)$  für alle Koalitionen  $T \subseteq C_r^{h-k} \in P^{h-k}$  mit  $T = \bigcup_{S \in \hat{P}^{h-(k+1)}} S$ ,  $\hat{P}^{h-(k+1)} \subseteq P^{h-(k+1)}$  in beiden Algorithmen gleich sind. Das zeigen wir durch Induktion über die Anzahl  $k$  der Schritte in Algorithmus 5.2.1 bzw. Algorithmus 5.3.1.

*Induktionsanfang:* Sei  $k = 2$ . Dann gilt in Schritt 2 nach dem zuvor gezeigten, dass die Ausgangswerte  $v^{h-(k-1)}(T)$  für alle Koalitionen  $T \subseteq C_r^{h-k} \in P^{h-k}$  mit  $T = \bigcup_{S \in \hat{P}^{h-(k+1)}} S$ ,  $\hat{P}^{h-(k+1)} \subseteq P^{h-(k+1)}$  in beiden Algorithmen gleich sind. Somit

erhalten wir für diese Koalitionen  $T$  die gleichen Werte  $v^{h-k}(T)$ , insbesondere für alle Komponenten  $C_r^{h-k}$  mit  $C_r^{h-k} = \{i\}$ ,  $i \in N$ . Alle anderen Koalitionen  $S$  erhalten, wieder mit dem gleichen Argument wie in Schritt 1, in Algorithmus 5.2.1 als Wert  $v^{h-k}(S)$  ihren ursprünglichen Koalitionswert  $v(S)$ .

*Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass unsere Behauptung für einen beliebigen Schritt  $k-1$ ,  $3 \leq k \leq h-1$  gilt. Dann sind die Ausgangswerte  $v^{h-(k-1)}(T)$  für alle Koalitionen  $T \subseteq C_r^{h-k} \in P^{h-k}$  mit  $T = \bigcup_{S \in \hat{P}^{h-(k+1)}} S$ ,  $\hat{P}^{h-(k+1)} \subseteq P^{h-(k+1)}$  in beiden Algorithmen gleich. Somit erhalten wir für diese Koalitionen  $T$  auch die gleichen Werte  $v^{h-k}(T)$ , insbesondere für alle Komponenten  $C_r^{h-k}$  mit  $C_r^{h-k} = \{i\}$ ,  $i \in N$ . Alle anderen Koalitionen  $S$  erhalten, wieder mit dem gleichen Argument wie in Schritt 1, in Algorithmus 5.2.1 als Wert  $v^{h-k}(S)$  ihren ursprünglichen Koalitionswert  $v(S)$ .

Damit ist die Behauptung für die Schritte  $k$ ,  $2 \leq k \leq h$ , gezeigt. Daher sind im letzten Schritt  $k = h$  die Ausgangswerte  $v^1(T)$  für alle Koalitionen  $T \subseteq C_r^1 \in P^1$  gleich. Mit dem Shapley-Value erhalten alle Spieler  $i$ ,  $i \in N$ , die gleiche Auszahlung  $Sh^{NP} = Sh^{LS}$ .  $\square$

### 5.3.1. Beispiel für Level-Structures

Wir rechnen jetzt ein Beispiel mit dem Nested-Partitions-Shapley-Value durch. In der Bezeichnungsweise orientieren wir uns an [Gómez-Rúa, Vidal-Puga 2011]. Gegeben sei die Koalitionsstruktur aus Abbildung 5.8. Formal ist das  $LS$ -Spiel  $(N, v, \underline{P})$  mit Spielermenge  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und Level-Structure  $\underline{P} = (P^0, P^1, P^2, P^3)$  gegeben mit

$$\begin{aligned} P^0 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}, & P^2 &= \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}\}, \\ P^1 &= \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}, & P^3 &= \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 5.3.3.** Als Kurzform kann auch eine verschachtelte Mengenschreibweise für Level-Structures verwendet werden, die die Struktur der Nested-Partitions deutlicher macht. Für dieses Beispiel ergibt sich

$$\underline{P} = \left\{ \left\{ \left\{ \{1\}, \{2\} \right\}, \{3\}, \{4\} \right\}, \{5\}, \{6\} \right\}. \tag{5.23}$$

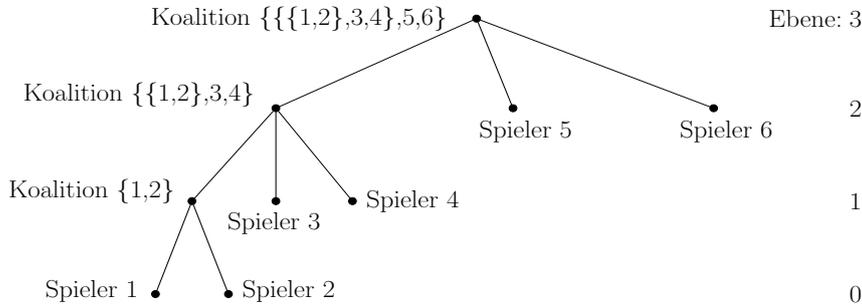


Abb. 5.8: Koalitionsstruktur des Rechenbeispiels

Die zugehörige Koalitionsfunktion  $v$  geben wir an mit:

$$\begin{array}{llll}
 v(\{1\}) = 1, & v(\{2, 4\}) = 10, & v(\{1, 2, 6\}) = 16, & v(\{1, 2, 4, 5\}) = 22, \\
 v(\{2\}) = 2, & v(\{3, 4\}) = 12, & v(\{1, 3, 4\}) = 14, & v(\{1, 2, 4, 6\}) = 24, \\
 v(\{3\}) = 4, & v(\{3, 5\}) = 10, & v(\{2, 3, 4\}) = 16, & v(\{1, 2, 5, 6\}) = 38, \\
 v(\{4\}) = 8, & v(\{3, 6\}) = 12, & v(\{3, 4, 5\}) = 18, & v(\{3, 4, 5, 6\}) = 32, \\
 v(\{5\}) = 6, & v(\{4, 5\}) = 14, & v(\{3, 4, 6\}) = 20, & v(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 30, \\
 v(\{6\}) = 8, & v(\{4, 6\}) = 16, & v(\{3, 5, 6\}) = 24, & v(\{1, 2, 3, 4, 6\}) = 32, \\
 v(\{1, 2\}) = 4, & v(\{5, 6\}) = 20, & v(\{4, 5, 6\}) = 28, & v(\{1, 2, 3, 5, 6\}) = 46, \\
 v(\{1, 3\}) = 6, & v(\{1, 2, 3\}) = 12, & v(\{1, 2, 3, 4\}) = 20, & v(\{1, 2, 4, 5, 6\}) = 46, \\
 v(\{1, 4\}) = 9, & v(\{1, 2, 4\}) = 12, & v(\{1, 2, 3, 5\}) = 22, & v(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 54. \\
 v(\{2, 3\}) = 8, & v(\{1, 2, 5\}) = 14, & v(\{1, 2, 3, 6\}) = 24, &
 \end{array}$$

Alle anderen Koalitionsfunktionswerte werden nicht benötigt und können nach Bemerkung 5.3.1 für den Nested-Partitions-Shapley-Value beliebige Werte annehmen. Die Komponenten jedes Levels werden nach folgendem Schema bezeichnet:  $C_1^1 = \{1, 2\}$  (=1. Komponente des 1. Levels),  $C_2^1 = \{3\}$  (=2. Komponente des 1. Levels), usw.. Für die Indexmenge der Levels gilt  $N^1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und  $N^2 = \{1, 2, 3\}$ . Wir führen die einzelnen Schritte von Algorithmus 5.3.1 durch:

*Schritt 1:* Wir müssen drei Spiele  $v^2$  durchführen, für jede Komponente in Level 2 eines. Für das Spiel  $(\{5\}, v^2)$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 v^2(\{5\}) &\stackrel{5.15}{=} Sh_2(\{1, 2, 3\}, v/P^2) \stackrel{2.2}{=} \sum_{\substack{S \subseteq \{\{1, 2, 3, 4\}, 5, 6\}, \\ S \ni \{5\}}} \frac{(s-1)!(3-s)!}{3!} [v(S) - v(S \setminus \{5\})] \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot ((30 - 20) + (20 - 8)) + \frac{1}{3}(54 - 32) = 13.
 \end{aligned}$$

Da die Komponente  $C_2^2$  eine Einerkoalition ist, erhalten wir als Endauszahlung für Spieler 5  $Sh_5^{NP}(v, \underline{P}) = 13$ . Für das Spiel  $(\{6\}, v^2)$  ergibt sich analog

$$v^2(\{6\}) = Sh_3(\{1, 2, 3\}, v/P^2) = 15.$$

Da die Komponente  $C_3^2$  ebenfalls eine Einerkoalition ist, erhalten wir als Endauszahlung für Spieler 6  $Sh_6^{NP}(v, \underline{P}) = 15$ . Für das Spiel  $(\{1, 2, 3, 4\}, v^2)$  folgt

$$\begin{aligned}
 v^2(\{1, 2\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{1, 2, 5, 6\}}) = \sum_{\substack{S \subseteq \{\{1, 2\}, 5, 6\}, \\ S \ni \{1, 2\}}} \frac{(s-1)!(3-s)!}{3!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot ((14 - 6) + (16 - 8)) + \frac{1}{3}(38 - 20) = 10
 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
 v^2(\{3\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{3,5,6\}}) = 4, \\
 v^2(\{4\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{4,5,6\}}) = 8, \\
 v^2(\{1, 2, 3\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{1,2,3,5,6\}}) = 18, \\
 v^2(\{1, 2, 4\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{1,2,4,5,6\}}) = 18, \\
 v^2(\{3, 4\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{3,4,5,6\}}) = 12, \\
 v^2(\{1, 2, 3, 4\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v/P^2) = 26.
 \end{aligned}$$

*Schritt 2:* Wir haben drei Spiele  $v^1$  durchzuführen, da die Komponenten  $\{5\}$  und  $\{6\}$  schon in Schritt 1 ihre Endauszahlung erhalten haben. Für Spiel  $(\{1, 2\}, v^1)$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 v^1(\{1\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v^2/P^1|_{\{1,3,4\}}) = \frac{3}{2}, \\
 v^1(\{2\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v^2/P^1|_{\{2,3,4\}}) = 3, \\
 v^1(\{1, 2\}) &= Sh_1(\{1, 2, 3\}, v^2/P^1|_{\{1,2,3,4\}}) = 12
 \end{aligned}$$

für das Spiel  $(\{3\}, v^1)$  folgt

$$v^1(\{3\}) = Sh_2(\{1, 2, 3\}, v^2/P^1|_{\{1,2,3,4\}}) = 6 = Sh_3^{NP}(v, \underline{P})$$

und für das Spiel  $(\{4\}, v^1)$  erhalten wir

$$v^1(\{4\}) = Sh_3(\{1, 2, 3\}, v^2/P^1|_{\{1,2,3,4\}}) = 8 = Sh_4^{NP}(v, \underline{P}).$$

*Schritt 3:* Im letzten Schritt berechnen wir nur mehr die Endauszahlung für die zwei verbliebenen Einerkoalitionen mit

$$\begin{aligned}
 Sh_1^{NP}(v, \underline{P}) &= Sh_1(\{1, 2\}, v^1/P^0|_{\{1,2\}}) = \frac{21}{4} \text{ und} \\
 Sh_2^{NP}(v, \underline{P}) &= Sh_2(\{1, 2\}, v^1/P^0|_{\{1,2\}}) = \frac{27}{4}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$Sh^{NP}(v, \underline{P}) = \left( \frac{21}{4}, \frac{27}{4}, 6, 8, 13, 15 \right). \quad (5.24)$$

### 5.3.2. Eine explizite Darstellung des Nested-Partitions-Shapley-Values

Auf der Idee Harsanyis der Dividenden [Harsanyi 1963] basiert eine explizite Darstellung des Level-Structure-Values aus [Calvo, Lasaga, Winter 1996]. Dazu definieren die Autoren

**Definition 5.3.4.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$  und  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ . Für alle  $i \in N$  und  $0 \leq \ell \leq h-1$  sei  $C^{\ell+1}(i)$  die Komponente des  $\ell+1$ -ten Levels  $P^{\ell+1}$  von  $\underline{P}$ , die Spieler  $i$  enthält. Dann bezeichnen wir für alle  $T \subseteq N, T \ni i$ , mit  $K_T^\ell$  bzw.  $K_T$  folgende Ausdrücke:

$$K_T^\ell(i) := |\{C^\ell \in P^\ell : C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i) \text{ und } C^\ell \cap T \neq \emptyset\}| \quad \text{und} \quad (5.25)$$

$$K_T(i) := \prod_{\ell=0}^{h-1} K_T^\ell(i). \quad (5.26)$$

Für jeden Spieler  $i$  wird zur Bestimmung von  $K_T(i)$  für jede Koalition  $T$  und alle Level  $0 \leq \ell \leq h-1$  die Anzahl der Komponenten  $C^\ell$  aus Level  $P^\ell$  ermittelt, die Teilmengen derjenigen Komponente aus  $P^{\ell+1}$  sind, die  $i$  enthält, und deren Schnitt mit der Koalition  $T$  nicht leer ist. Anschließend wird das Produkt darüber gebildet. Damit gilt

**Satz 5.3.5.** (nach [Calvo, Lasaga, Winter 1996]) Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  sei  $(v, \underline{P})$  ein LS-Spiel. Dann ist der Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$  (2.0.15) gegeben mit

$$Sh_i^{LS}(v, \underline{P}) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} \frac{\Delta_v(T)}{K_T(i)} \text{ für alle } i \in N. \quad (5.27)$$

Ähnlich wie die Hypergraphenkoalitionsfunktion  $v^H$  2.19 bewirkt, dass alle Teilmengen  $T \subseteq N$ , die in einem Hypergraphen nicht zusammenhängen, Harsanyi-Dividenden  $\Delta_{v^H}$  besitzen, die Dummy-Dividenden sind, können wir eine entsprechende Koalitionsfunktion  $v^{NP}$ , die die Koalitionsstruktur einer Nested-Partitions wiedergibt, einführen:

**Definition 5.3.6.** Für jedes LS-Spiel  $(N, v, \underline{P}) \in \mathcal{GLS}$  sei  $\mathcal{NR}$  die Menge der nicht relevanten Koalitionen aus Bemerkung 5.3.1. Mit  $v^{NP}$  bezeichnen wir die von  $v$  induzierte **Nested-Partitions-Koalitionsfunktion**, in der für die Dividenden aller Koalitionen  $S \in \mathcal{NR}$   $\Delta_{v^{NP}}(S) = 0$  und für Koalitionen  $R \in \mathcal{R}$  aus Bemerkung 5.3.1  $v^{NP}(R) = v(R)$  gilt.

Damit können wir eine explizite Darstellung des Nested-Partitions-Shapley-Values aus Satz 5.3.5 ableiten:

**Korollar 5.3.7.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  und  $K_T$  der entsprechende Ausdruck aus Definition 5.3.4. Dann ist der durch Algorithmus 5.3.1 definierte Nested-Partitions-Shapley-Value  $Sh^{NP}$  gegeben mit

$$Sh_i^{NP}(v, \underline{P}) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} \frac{\Delta_{v^{NP}}(T)}{K_T(i)} \text{ für alle } i \in N, \quad (5.28)$$

wobei  $v^{NP}$  die Nested-Partitions-Koalitionsfunktion aus Definition 5.3.6 bezeichnet.

*Beweis.* Nach Bemerkung 5.3.1 ist der Nested-Partitions-Shapley-Value für die obige Koalitionsfunktion  $v$  gleich dem Nested-Partitions-Shapley-Value für die obige Koalitionsfunktion  $v^{NP}$ . Für die Koalitionsfunktion  $v^{NP}$  sind nach Satz 5.3.2 Nested-Partitions-Shapley-Value und Level-Structure-Value identisch und es folgt die Behauptung.  $\square$

Mit der Nested-Partitions-Koalitionsfunktion lässt sich ein zum Balanced-Group-Contributions-Axiom analoges Axiom formulieren:

**Axiom 5.3.8.** Ein Value  $\phi$  erfüllt das Axiom der **Balanced-Group-Contributions-For-Nested-Partitions** genau dann, wenn für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  für alle  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, h-1\}$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i\left(N \setminus C_r^\ell, v^{NP}|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}\right) \\ &= \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i\left(N \setminus C_q^\ell, v^{NP}|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell}\right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

gilt, wobei  $v^{NP}$  die Nested-Partitions-Koalitionsfunktion aus Definition 5.3.6 bezeichnet.

Wir erhalten

**Korollar 5.3.9.** *Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  existiert ein eindeutiger LS-Value  $\phi$ , der das Pareto-Axiom 2.0.7 und Axiom 5.3.8 erfüllt. Dieser Value  $\phi$  ist der durch Algorithmus 5.3.1 definierte Nested-Partitions-Shapley-Value  $Sh^{NP}$ .*

*Beweis.* Aus Bemerkung 5.3.1 und Satz 5.3.2 folgt, neben der Pareto-Optimalität, wenn im Beweis von Satz 5.2.3  $v^{NP}$  statt  $v$  verwendet wird, dass der Nested-Partitions-Shapley-Value das Axiom der Balanced-Group-Contributions-For-Nested-Partitions erfüllt.

Zum Beweis der Eindeutigkeit: Seien dazu zwei Values gegeben, die beide Pareto-optimal sind und Axiom 5.3.8 erfüllen. Dann müssen sie auch für eine Koalitionsfunktion  $v$  mit  $v = v^{NP}$  Gleichung 5.29 aus Axiom 5.3.8 erfüllen. Wir verzichten auf die weitere Ausführung des Beweises, da er sich unter leichter Abwandlung mit einem analogen Beweis zu dem der Eindeutigkeit von Theorem 8 aus [Gómez-Rúa, Vidal-Puga 2011], statt mit dem dortigen Balanced-Per-Capita-Contributions-Axiom mit Axiom 5.3.8 für die Nested-Partitions-Koalitionsfunktion  $v^{NP}$  statt mit  $v$  führen lässt.  $\square$

### 5.3.3. Ergänzung zum Beispiel für Level-Structures

Mit Satz 5.3.5 beweisen wir IV. aus Satz 5.3.2, indem wir mit Beispiel 5.3.1 ein Gegenbeispiel zur Identität der beiden Values bringen. Die Koalitionswerte der fehlenden Koalitionen setzen wir so, bis auf Koalition  $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ , die den Koalitionswert  $v(\{1, 3, 4, 5, 6\}) = 37$  erhält, dass Ihre Dividenden Dummy-Dividenden sind. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \Delta_v(\{1\}) &= 1, & \Delta_v(\{5\}) &= 6, & \Delta_v(\{2, 3\}) &= 2, & \Delta_v(\{1, 2, 6\}) &= 4, \\ \Delta_v(\{2\}) &= 2, & \Delta_v(\{6\}) &= 8, & \Delta_v(\{5, 6\}) &= 6, & \Delta_v(\{1, 2, 5, 6\}) &= 6, \\ \Delta_v(\{3\}) &= 4, & \Delta_v(\{1, 2\}) &= 1, & \Delta_v(\{1, 2, 3\}) &= 1, & \Delta_v(\{1, 3, 4, 5, 6\}) &= 3, \\ \Delta_v(\{4\}) &= 8, & \Delta_v(\{1, 3\}) &= 1, & \Delta_v(\{1, 2, 5\}) &= 4, & \Delta_v(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) &= -3. \end{aligned}$$

Alle anderen Dividenden sind Dummy-Dividenden. Dann ergibt sich mit Satz 5.3.5

$$Sh_1^{LS}(v) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + 1 + 1 + \frac{3}{9} - \frac{3}{18} = \frac{65}{12} \neq \frac{21}{4} = Sh_1^{NP}(v).$$

Damit ist Satz 5.3.2 endgültig bewiesen.

## 5.4. Erweiterte $f$ -Weighted-Shapley-Values

Nach Bemerkung 3.4.4 ist der Shapley-Value ein Spezialfall der  $f$ -Weighted-Shapley-Values. Der Level-Structure-Value ist ein Spezialfall von  $f$ -Weighted-Shapley-Values, die zu LS-Values nach dem Schema von Algorithmus 5.2.1 erweitert wurden. Dazu definieren wir einen Gewichtsvektor, der allen Koalitionen, die im Laufe des Algorithmus als Spieler auftauchen, ein positives Gewicht zuordnet.

**Bemerkung 5.4.1.** *Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,*

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

$\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $w \in \mathbb{R}^{\sum_{q \in N^{h-1}} (2^{|C_q^{h-1}|} - 1)}$  ein Vektor von Gewichten  $w_T$ ,  $w_T > 0$  für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$ ,  $T \neq \emptyset$ ,  $q \in N^{h-1}$ . Dann definieren wir den zu  $f(v, w)$  zugehörigen **f-Weighted-Level-Structure-Value**  $Sh^{fLS}$  mit Algorithmus 5.2.1, indem wir für jede Koalitionsfunktion  $v$ , die am Anfang gegeben ist,  $\bar{v} := v$  setzen und in jedem Schritt den Shapley-Value  $Sh$  durch den zu  $w' = f(\bar{v}, w)$  zugehörigen Weighted-Shapley-Value  $Sh^{w'}$  ersetzen. Die Pareto-Optimalität, dass der Value für  $h = 1$  gleich dem f-Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$  und dass die Summe der Auszahlungen an die Spieler einer Komponente  $C_q^\ell \in P^\ell$ , gleich der  $C_q^\ell$  zugedachten Auszahlung ist, folgt durch analoge Beweise zu denen aus Abschnitt 5.2 bzw. 5.3.

Zusätzlich gibt es eine Axiomatisierung durch ein auf Level-Structures erweitertes f-Weighted-Balanced-Contributions-Axiom 3.4.2 analog zu Axiom 5.2.1.

**Axiom 5.4.2.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

$\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $w \in \mathbb{R}^{\sum_{q \in N^{h-1}} (2^{|C_q^{h-1}|} - 1)}$  ein Vektor von Gewichten  $w_T$ ,  $w_T > 0$  für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$ ,  $T \neq \emptyset$ ,  $q \in N^{h-1}$ . Hierfür erfüllt ein Value  $\phi$  das Axiom der **f-Weighted-Balanced-Group-Contributions** genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(v(C_q^\ell), w_{C_q^\ell})} \left( \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}) \right) \\ &= \frac{1}{f(v(C_r^\ell), w_{C_r^\ell})} \left( \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell}) \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

für alle  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, h-1\}$  gilt.

**Bemerkung 5.4.3.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

$\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $w \in \mathbb{R}^{\sum_{q \in N^{h-1}} (2^{|C_q^{h-1}|} - 1)}$  ein Vektor von Gewichten  $w_T$ ,  $w_T > 0$  für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$ ,  $T \neq \emptyset$ ,  $q \in N^{h-1}$ . Dann ist jeder LS-Value  $\phi$ , der das Pareto-Axiom und Axiom 5.4.2 erfüllt gleich dem zu  $f(v, w)$  zugehörigen f-Weighted-Level-Structure-Value  $Sh^{fLS}$  aus Bemerkung 5.4.1.

*Beweis.* Da die zu  $w' = f(\bar{v}, w)$  zugehörigen Weighted-Shapley-Values das Weighted-Balanced-Contributions-Axiom 3.2.2 erfüllen, verzichten wir auf Ausführung eines Beweises, der sich unter leichter Abwandlung der Beweise zu Präposition 7 und Theorem 8 aus [Gómez-Rúa, Vidal-Puga 2011], statt mit dem dortigen Balanced-Per-Capita-Contributions-Axiom mit dem Weighted-Balanced-Contributions-Axiom und statt mit den speziellen Gewichten  $w_T = |T|$  mit den Gewichten  $f(\bar{v}(T), w_T)$  führen lässt.  $\square$

**Bemerkung 5.4.4.** Der Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$  ist gleich einem  $f$ -Weighted-Level-Structure-Value mit  $f(v(T), w_T) := c$ ,  $c > 0$ , für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$ ,  $T \neq \emptyset$ ,  $q \in N^{h-1}$ .

Wir führen eine analoge Erweiterung für Nested-Partitions durch, bei denen nur die relevanten Koalitionen  $T \in \mathcal{R}^{NP}$  aus Bemerkung 5.3.1 als Spieler auftauchen.

**Bemerkung 5.4.5.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

$\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{R}^{NP}|}$  ein Vektor von Gewichten  $w_T$ ,  $w_T > 0$  für alle  $T^4 \in \mathcal{R}^{NP}$ , wobei  $\mathcal{R}^{NP}$  die Menge der relevanten Koalitionen aus Bemerkung 5.3.1 ist. Dann ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige **f-Weighted-Nested-Partitions-Shapley-Value**  $Sh^{fNP}$  mit Algorithmus 5.3.1 definiert, indem für jede am Anfang gegebene Koalitionsfunktion  $v$   $\bar{v} := v$  gesetzt wird und wir in jedem Schritt den Shapley-Value  $Sh$  durch den zu  $w' = f(\bar{v}, w)$  zugehörigen Weighted-Shapley-Value  $Sh^{w'}$  ersetzen. Die Pareto-Optimalität, dass der Value für  $h = 1$  gleich dem  $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$ , dass die Summe der Auszahlungen an die Spieler einer Komponente  $C_q^\ell \in P^\ell$ , gleich der  $C_q^\ell$  zugedachten Auszahlung und dass für eine Koalitionsfunktion  $v = v^{NP}$  der  $f$ -Weighted-Nested-Partitions-Shapley-Value gleich dem  $f$ -Weighted-Level-Structure-Value ist, folgt durch analoge Beweise zu denen aus Abschnitt 5.2 bzw. 5.3.

Das folgende Axiom liefert eine eindeutige Charakterisierung der  $f$ -Weighted-Nested-Partitions-Shapley-Values und damit auch des Nested-Partitions-Shapley-Values.

**Axiom 5.4.6.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

$\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{R}^{NP}|}$  ein Vektor von Gewichten  $w_T$ ,  $w_T > 0$  für alle  $T \in \mathcal{R}^{NP}$ , wobei  $\mathcal{R}^{NP}$  die Menge der relevanten Koalitionen aus Bemerkung 5.3.1 und  $v^{NP}$  die zu  $v$  zugehörige Nested-Partitions-Koalitionsfunktion aus Definition 5.3.6 ist. Hierfür erfüllt ein Value  $\phi$  das Axiom der **f-Weighted-Balanced-Group-Contributions-For-Nested-Partitions** genau dann, wenn für alle  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, h-1\}$ , gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(v(C_q^\ell), w_{C_q^\ell})} \left( \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N \setminus C_r^\ell, v^{NP}|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}) \right) \\ &= \frac{1}{f(v(C_r^\ell), w_{C_r^\ell})} \left( \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N \setminus C_q^\ell, v^{NP}|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell}) \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Damit folgt

**Satz 5.4.7.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

<sup>4</sup>Das belanglose Gewicht der großen Koalition wird nur benötigt, wenn Level  $h$  und  $h-1$  identisch sind.

- $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

$\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{R}^{NP}|}$  ein Vektor von Gewichten  $w_T, w_T > 0$  für alle  $T \in \mathcal{R}^{NP}$ , wobei  $\mathcal{R}^{NP}$  die Menge der relevanten Koalitionen aus Bemerkung 5.3.1 und  $v^{NP}$  die zu  $v$  zugehörige Nested-Partitions-Koalitionsfunktion aus Definition 5.3.6 ist. Dann existiert ein eindeutiger LS-Value  $\phi$ , der das Pareto-Axiom und Axiom 5.4.6 erfüllt. Dieser Value  $\phi$  ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige LS-Value  $Sh^{fNP}$  aus Bemerkung 5.4.5.

*Beweis.* Die Pareto-Optimalität von  $Sh^{fNP}$  wurde schon in Bemerkung 5.4.5 festgestellt.

Wir zeigen, dass  $Sh^{fNP}$  Axiom 5.4.6 erfüllt: Axiom 5.4.2 wird von allen  $f$ -Weighted-Level-Structure-Values für alle  $v$  der Definitionsmenge erfüllt und somit auch für alle entsprechenden  $v^{NP}$ . Dann erfüllen alle  $Sh^{fLS}$  für eine Koalitionsfunktion  $v$  mit  $v = v^{NP}$  auch Gleichung 5.31 aus Axiom 5.4.6. Da nach Bemerkung 5.4.5 für eine Koalitionsfunktion  $v$  mit  $v = v^{NP}$  der  $f$ -Weighted-Nested-Partitions-Shapley-Value gleich dem  $f$ -Weighted-Level-Structure-Value ist, erfüllt  $Sh^{fNP}$  für eine Koalitionsfunktion  $v$  mit  $v = v^{NP}$  ebenfalls Gleichung 5.31. Dann erfüllt  $Sh^{fNP}$  aber für jede Koalitionsfunktion  $v$  Axiom 5.4.6, da  $Sh^{fNP}$  für jede Koalitionsfunktion  $v$  dieselbe Auszahlung liefert, wie von  $v^{NP}$ .

Zum Beweis der Eindeutigkeit: Seien zwei Values gegeben, die beide Pareto-Optimal sind und Axiom 5.4.6 erfüllen. Dann müssen sie auch für eine Koalitionsfunktion  $v$  mit  $v = v^{NP}$  Gleichung 5.31 aus Axiom 5.4.6 erfüllen und wir können einen analogen Beweis zu dem der Eindeutigkeit der  $f$ -Weighted-Level-Structure-Values für Axiom 5.4.2 mit der Nested-Partitions-Koalitionsfunktion  $v^{NP}$  statt mit  $v$  führen und erhalten die Eindeutigkeit.  $\square$

### 5.4.1. Beispiel mit dem Proportional-Nested-Partitions-Shapley-Value

Wir berechnen mit dem zu  $f(v, w) = v$  zugehörigen  $f$ -Weighted-Nested-Partitions-Shapley-Value  $Sh^{pNP}$ , der **Proportional-Nested-Partitions-Shapley-Value**, Beispiel 5.3.1. Der Ablauf ist analog zu dem beim Nested-Partitions-Shapley-Value  $Sh^{NP}$ . Alle Berechnungen lassen sich mit Gleichung 3.5 durchführen, wenn wir für jedes  $TU$ -Spiel die entsprechenden Dividenden verwenden. So besitzen z. B. die Koalitionen für Spiel  $(\{5\}, v^2)$  mit den drei Spielern  $\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}$  folgende zugehörige Dividendenwerte:

$$\begin{aligned} \Delta_{v^2}(\{1, 2, 3, 4\}) &= 20, & \Delta_{v^2}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) &= 4, & \Delta_{v^2}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) &= 6. \\ \Delta_{v^2}(\{5\}) &= 6, & \Delta_{v^2}(\{1, 2, 3, 4, 6\}) &= 4, \\ \Delta_{v^2}(\{6\}) &= 8, & \Delta_{v^2}(\{5, 6\}) &= 6, \end{aligned}$$

Wir führen die einzelnen Schritte des Algorithmus durch, wobei wir  $w' = \bar{v} := v$  setzen:

*Schritt 1:* Wir müssen drei Spiele  $v^2$  durchführen, für jede Komponente in Level 2 eines. Für das Spiel  $(\{5\}, v^2)$  ergibt sich

$$v^2(\{5\}) = Sh_2^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2) \underset{3.1}{=} 6 + \frac{6}{26} \cdot 4 + \frac{6}{14} \cdot 6 + \frac{6}{34} \cdot 6 = \frac{16326}{1547} \approx 10,5533.$$

Da die Komponente  $C_2^2$  eine Einerkoalition ist, erhalten wir als Endauszahlung für Spieler 5  $Sh_5^{pNP}(v, \underline{P}) \approx 10,5533$ . Für das Spiel  $(\{6\}, v^2)$  ergibt sich analog

$$v^2(\{6\}) = Sh_3^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2) = 8 + \frac{8}{28} \cdot 4 + \frac{8}{14} \cdot 6 + \frac{8}{34} \cdot 6 = \frac{1664}{119} \approx 13,9832.$$

Da die Komponente  $C_3^2$  ebenfalls eine Einerkoalition ist, erhalten wir als Endauszahlung für Spieler 6  $Sh_6^{pNP}(v, \underline{P}) \approx 13,9832$ . Für das Spiel  $(\{1, 2, 3, 4\}, v^2)$  folgt

$$\begin{aligned} v^2(\{1, 2\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{1,2,5,6\}}) = 4 + \frac{4}{10} \cdot 4 + \frac{4}{12} \cdot 4 + \frac{4}{18} \cdot 6 = \frac{124}{15}, \\ v^2(\{3\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{3,5,6\}}) = 4 + 0 + 0 + 0 = 4, \\ v^2(\{4\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{4,5,6\}}) = 8 + 0 + 0 + 0 = 8, \\ v^2(\{1, 2, 3\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{1,2,3,5,6\}}) = 12 + \frac{12}{18} \cdot 4 + \frac{12}{20} \cdot 4 + \frac{12}{26} \cdot 6 = \frac{3868}{195}, \\ v^2(\{1, 2, 4\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{1,2,4,5,6\}}) = 12 + \frac{12}{18} \cdot 4 + \frac{12}{20} \cdot 4 + \frac{12}{26} \cdot 6 = \frac{3868}{195}, \\ v^2(\{3, 4\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2|_{\{3,4,5,6\}}) = 12 + 0 + 0 + 0 = 12, \\ v^2(\{1, 2, 3, 4\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v/P^2) = 20 + \frac{20}{26} \cdot 4 + \frac{20}{28} \cdot 4 + \frac{20}{34} \cdot 6 = \frac{45580}{1547}. \end{aligned}$$

*Schritt 2:* Wir haben drei Spiele  $v^1$  durchzuführen, da Komponente  $\{5\}$  und  $\{6\}$  schon in Schritt 1 ihre Endauszahlung erhalten haben. Für das Spiel  $(\{1, 2\}, v^1)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} v^1(\{1\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v^1/P^1|_{\{1,3,4\}}) = 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 + 0 + 0 = \frac{6}{5}, \\ v^1(\{2\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v^1/P^1|_{\{2,3,4\}}) = 2 + \frac{2}{6} \cdot 2 + 0 + 0 = \frac{8}{3}, \\ v^1(\{1, 2\}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2, 3\}, v^1/P^1|_{\{1,2,3,4\}}) \\ &= \frac{124}{15} + \frac{4 \cdot \frac{492}{65}}{4+4} + \frac{4 \cdot \frac{232}{65}}{4+8} - \frac{4 \cdot \frac{45056}{23205}}{4+4+8} \approx 12,7556, \end{aligned}$$

für das Spiel  $(\{3\}, v^1)$  folgt

$$\begin{aligned} v^1(\{3\}) &= Sh_2^{w'}(\{1, 2, 3\}, v^1/P^1|_{\{1,2,3,4\}}) = 4 + \frac{4 \cdot \frac{492}{65}}{4+4} - \frac{4 \cdot \frac{45056}{23205}}{4+4+8} \\ &\approx 7,2992 \approx Sh_3^{pNP}(v, \underline{P}) \end{aligned}$$

und für das Spiel  $(\{4\}, v^1)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} v^1(\{4\}) &= Sh_3^{w'}(\{1, 2, 3\}, v^1/P^1|_{\{1,2,3,4\}}) = 8 + \frac{8 \cdot \frac{232}{65}}{4+8} - \frac{8 \cdot \frac{45056}{23205}}{4+4+8} \\ &\approx 9,4087 \approx Sh_4^{pNP}(v, \underline{P}). \end{aligned}$$

*Schritt 3:* Im letzten Schritt berechnen wir nur mehr die Endauszahlung für die zwei verbliebenen Einerkoalitionen mit

$$\begin{aligned} Sh_1^{pNP}(v, \underline{P}) &= Sh_1^{w'}(\{1, 2\}, v^1/P^0|_{\{1,2\}}) \approx \frac{6}{5} + \frac{1 \cdot 8,8889}{1+2} \approx 4,1630 \quad \text{und} \\ Sh_2^{pNP}(v, \underline{P}) &= Sh_2^{w'}(\{1, 2\}, v^1/P^0|_{\{1,2\}}) \approx \frac{8}{3} + \frac{2 \cdot 8,8889}{1+2} \approx 8,5926. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$Sh^{pNP}(v) \approx (4,1630, 8,5926, 7,2992, 9,4087, 10,5533, 13,9832). \quad (5.32)$$

Zu beachten ist, dass Spieler 4, obwohl er in der Koalitionsfunktion  $v$  zu jeder Koalition nur seinen Einerkoalitionswert beiträgt und somit ein unwesentlicher Spieler ist (wir können die fehlenden Koalitionswerte so setzen), als Auszahlung mehr als seinen Einerkoalitionswert erhält. Unsere proportionalen Varianten der  $LS$ -Values aus Abschnitt 5.7 erfüllen dagegen das Axiom des unwesentlichen Spielers.

## 5.5. Weitere sukzessiv definierte $LS$ -Values

Zur Erweiterung auf  $LS$ -Values lassen sich die Algorithmen 5.2.1 bzw. 5.3.1 auf andere  $TU$ -Values übertragen. Entscheidend für die Pareto-Optimalität der neuen  $LS$ -Values ist die Pareto-Optimalität des zugrundeliegenden  $TU$ -Values, eventuell muss die Definitionsmenge der verwendeten Koalitionsfunktionen eingeschränkt werden. Auch eine Verwendung von verschiedenen  $TU$ -Values in den einzelnen Schritten ist möglich, z. B. von Verwendung des Shapley-Values in den Schritten 1 bis  $h - 1$  und des Proportional-Shapley-Values im Schritt  $h$ . Stellvertretend für sukzessiv definierte  $LS$ -Values greifen wir eine Erweiterung des Proportional-Values  $\psi$  heraus:

### 5.5.1. Der Proportional-Value- $LS$ -Value

**Definition 5.5.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$  und  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  ist der **Proportional-Value- $LS$ -Value**  $\psi^{LS}$  durch Algorithmus 5.2.1 definiert, indem wir in jedem Schritt den Shapley-Value  $Sh$  durch den Proportional-Value  $\psi$  (Gleichungen 2.3, 2.4) ersetzen.

**Bemerkung 5.5.2.** Die Pareto-Optimalität, dass der Value für  $h = 1$  gleich dem zugrundeliegendem Proportional-Value  $\psi$  und dass die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $C_q^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , gleich der  $C_q^\ell$  zugeordneten Auszahlung ist, lässt sich durch analoge Beweise zu denen aus Abschnitt 5.2 bzw. 5.3 zeigen.

Auch für den Proportional-Value- $LS$ -Value gilt ein spezielles Axiom:

**Axiom 5.5.3.** Ein Value  $\phi$  erfüllt das **Preservation-Of-Ratios-For-Groups-Axiom (PRG)** genau dann, wenn für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , für alle  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, h-1\}$ , gilt

$$\frac{\sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i\left(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}\right)} = \frac{\sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i\left(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell}\right)}. \quad (5.33)$$

Dieses Axiom fordert, dass für zwei Komponenten  $C_q^\ell, C_r^\ell$ , die Teilmengen derselben Komponente in der Partition  $P^{\ell+1}$  sind, der relative Beitrag der Komponente  $C_r^\ell$  zur Gesamtauszahlung an die grundlegenden Spieler der Komponente  $C_q^\ell$  gleich dem relativen Beitrag der Komponente  $C_q^\ell$  zur Gesamtauszahlung an die grundlegenden Spieler der Komponente  $C_r^\ell$  ist. Wir charakterisieren mit diesem Axiom den Proportional-Value- $LS$ -Value:

**Satz 5.5.4.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  existiert ein eindeutiger  $LS$ -Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und **PRG** (Axiom 5.5.3) erfüllt. Dieser Value  $\varphi$  ist der Proportional-Value- $LS$ -Value  $\psi^{LS}$  aus Definition 5.5.1.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz in vier Schritten:

I. Die Pareto-Optimalität wurde schon in Bemerkung 5.5.2 festgestellt.

II. Wir zeigen, dass der Proportional-Value-LS-Value **PRG** erfüllt:

Sei  $(N, v, \underline{P})$  mit  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ ,  $C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$  mit  $0 \leq \ell \leq h-1$  und  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$  mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1}$  gegeben. Nach Definition von  $\psi_i^{LS}$  gilt

$$\frac{\sum_{i \in C_q^\ell} \psi_i^{LS}(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_q^\ell} \psi_i^{LS}(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell})} = \frac{\psi_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}})}{\psi_q(N_k^\ell \setminus \{r\}, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_r^\ell})}. \quad (5.34)$$

Dieser Ausdruck ist wohldefiniert, da nach [Ortmann 2000] der Proportional-Value immer positiv ist. Es gilt, wenn  $T \subseteq C_k^{\ell+1} \setminus C_r^\ell$ , dass  $v^{l+1}(T)$  nach Definition nicht von der Gegenwart der Komponente  $C_r^\ell$  in der Spielermenge abhängt. Daher können wir Gleichung 5.34 auch schreiben mit

$$\frac{\sum_{i \in C_q^\ell} \psi_i^{LS}(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_q^\ell} \psi_i^{LS}(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell})} = \frac{\psi_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}})}{\psi_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_r^\ell})}. \quad (5.35)$$

Analog ergibt sich für die Komponente  $C_r^\ell$

$$\frac{\sum_{i \in C_r^\ell} \psi_i^{LS}(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_r^\ell} \psi_i^{LS}(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell})} = \frac{\psi_r(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}})}{\psi_r(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_q^\ell})}. \quad (5.36)$$

Da der Proportional-Value das Preservation-Of-Ratios-Axiom 3.5.1 erfüllt, gilt

$$\frac{\psi_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}})}{\psi_q(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_r^\ell})} = \frac{\psi_r(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1}})}{\psi_r(N_k^\ell, v^{l+1}/P^\ell|_{C_k^{\ell+1} \setminus C_q^\ell})} \quad \text{und damit} \quad (5.37)$$

$$\frac{\sum_{i \in C_q^\ell} \psi_i^{LS}(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_q^\ell} \psi_i^{LS}(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell})} = \frac{\sum_{i \in C_r^\ell} \psi_i^{LS}(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_r^\ell} \psi_i^{LS}(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell})}. \quad (5.38)$$

Damit ist **PRG** erfüllt.

III. Wir zeigen, dass ein Value  $\phi$ , der **PRG** erfüllt und Pareto-optimal ist, immer positiv ist. Sei also  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$  und  $\phi$  erfülle **PRG** und sei Pareto-optimal. Wir führen den Beweis mit einer Induktion  $I_1$  über  $m = h - \ell + 1$  für die einzelnen Level  $\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq h$ . Dabei sei für  $C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq h$ , die Menge  $Q_r^{\ell-1}$  definiert durch  $Q_r^{\ell-1} := \{C_j^{\ell-1} \in P^{\ell-1} : C_j^{\ell-1} \subseteq C_r^\ell\}$ .

*Induktionsanfang  $I_1$ :* Sei  $m = 1$ , also  $\ell = h$  und o.B.d.A. sei der Level  $h-1$  echt feiner als der Level  $h$ , ansonsten verwenden wir den höchsten Level  $\ell$ , für den der Level  $\ell-1$  echt feiner ist. Wir führen eine zweite Induktion  $I_2$  über  $|Q^{h-1}|$ .

*Induktionsanfang  $I_2$ :* Sei  $|Q^{h-1}| = 2$  mit  $C_i^{h-1}, C_j^{h-1} \in Q^{h-1}$ . Dann gilt wegen **PRG**

$$\frac{\sum_{k \in C_i^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})}{\sum_{k \in C_i^{h-1}} \phi_k(C_i^{h-1}, v|_{C_i^{h-1}}, \underline{P}|_{C_i^{h-1}})} = \frac{\sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})}{\sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k(C_j^{h-1}, v|_{C_j^{h-1}}, \underline{P}|_{C_j^{h-1}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{k \in C_i^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})}{\sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{k \in C_i^{h-1}} \phi_k\left(C_i^{h-1}, v|_{C_i^{h-1}}, \underline{P}|_{C_i^{h-1}}\right)}{\sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k\left(C_j^{h-1}, v|_{C_j^{h-1}}, \underline{P}|_{C_j^{h-1}}\right)} \stackrel{\text{Pareto-Opt.}}{=} \frac{v(C_i^{h-1})}{v(C_j^{h-1})} > 0.$$

Daraus folgt, ebenfalls wegen der Pareto-Optimalität,

$$\sum_{k \in C_i^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P}), \quad \sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P}) > 0. \quad (5.39)$$

*Induktionsschritt  $I_2$* : Wir nehmen an,  $\sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P}) > 0$  für ein beliebiges  $|Q^{h-1}| \geq 2$  für alle  $C_j^{h-1} \in Q^{h-1}$  ( $IA_2$ ). Dann gilt wegen **PRG**

$$\frac{\sum_{k \in C_i^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})}{\sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{k \in C_i^{h-1}} \phi_k\left(N \setminus C_j^{h-1}, v|_{N \setminus C_j^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_j^{h-1}}\right)}{\sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k\left(N \setminus C_i^{h-1}, v|_{N \setminus C_i^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_i^{h-1}}\right)} \stackrel{(IA_2)}{>} 0.$$

Da die Aussage nach Induktionsannahme für alle  $C_j^{h-1} \in Q^{h-1}$  gilt, folgt, wieder mit der Pareto-Optimalität,

$$\sum_{k \in C_j^{h-1}} \phi_k(N, v, \underline{P}) > 0 \quad \text{für alle } C_j^{h-1} \in Q^{h-1}, |Q^{h-1}| \text{ beliebig.} \quad (5.40)$$

*Induktionsschritt  $I_1$* : Sei  $m \geq 1$  mit  $\ell = h - m + 1$ . Wir nehmen an,  $\sum_{k \in C_r^\ell} \phi_k(N, v, \underline{P}) > 0$  für alle  $C_r^\ell \in P^\ell$  ( $IA_1$ ). Wir führen eine Induktion  $I_3$  über  $|Q_r^{\ell-1}|$  mit  $C_r^\ell \in P^\ell$  beliebig.

*Induktionsanfang  $I_3$* : Sei  $|Q_r^{\ell-1}| = 2$  mit  $C_i^{\ell-1}, C_j^{\ell-1} \in Q^{\ell-1}$ . Dann gilt wegen **PRG**

$$\frac{\sum_{k \in C_i^{\ell-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})}{\sum_{k \in C_j^{\ell-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{k \in C_i^{\ell-1}} \phi_k\left(N \setminus C_j^{\ell-1}, v|_{N \setminus C_j^{\ell-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_j^{\ell-1}}\right)}{\sum_{k \in C_j^{\ell-1}} \phi_k\left(N \setminus C_i^{\ell-1}, v|_{N \setminus C_i^{\ell-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_i^{\ell-1}}\right)} \stackrel{(IA_1)}{>} 0 \quad (5.41)$$

und deshalb wegen ( $IA_1$ ) auch  $\sum_{k \in C_i^{\ell-1}} \phi_k(N, v, \underline{P}) > 0$  und  $\sum_{k \in C_j^{\ell-1}} \phi_k(N, v, \underline{P}) > 0$ .

*Induktionsschritt  $I_3$* : Wir nehmen an,  $\sum_{k \in C_j^{\ell-1}} \phi_k(N, v, \underline{P}) > 0$  für ein beliebiges  $|Q_r^{\ell-1}| \geq 2$  für alle  $C_j^{\ell-1} \in Q_r^{\ell-1}$  für alle  $C_r^\ell \in P^\ell$  ( $IA_3$ ). Dann gilt wegen **PRG**

$$\frac{\sum_{k \in C_i^{\ell-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})}{\sum_{k \in C_j^{\ell-1}} \phi_k(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{k \in C_i^{\ell-1}} \phi_k\left(N \setminus C_j^{\ell-1}, v|_{N \setminus C_j^{\ell-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_j^{\ell-1}}\right)}{\sum_{k \in C_j^{\ell-1}} \phi_k\left(N \setminus C_i^{\ell-1}, v|_{N \setminus C_i^{\ell-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_i^{\ell-1}}\right)} \stackrel{(IA_3)}{>} 0. \quad (5.42)$$

Da die Aussage nach Induktionsannahme für alle  $C_j^{\ell-1} \in Q^{\ell-1}$  gilt, folgt wegen ( $IA_3$ ),

$$\sum_{k \in C_j^{\ell-1}} \phi_k(N, v, \underline{P}) > 0 \quad \text{für alle } C_j^{\ell-1} \in Q^{\ell-1}, |Q^{\ell-1}| \text{ beliebig.} \quad (5.43)$$

Da  $C_i^{\ell-1}$  für  $\ell = 1$  eine Einerkoalition ist, ist gezeigt, dass  $\phi_i(N, v, \underline{P}) > 0$  für alle  $i \in N$  gilt und Schritt *III* bewiesen.

IV. Wir zeigen die Eindeutigkeit : Wir nehmen an, wir hätten zwei Pareto-optimale Values  $\phi$  und  $\varphi$ , die beide **PRG** erfüllen. Um zu zeigen, dass die Values identisch sind, reicht es zu beweisen, dass für alle  $C_q^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ , für  $0 \leq \ell \leq h$

$$\sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_q^\ell} \varphi_i(N, v, \underline{P}) \quad (5.44)$$

gilt. Wegen III. sind alle im Folgenden durchgeführten Divisionen erlaubt.

Wir führen den Beweis durch eine erste Induktion  $I_1$  über  $k = h - l + 1$  für die einzelnen Level  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq h$ . Dabei sei für  $C_q^\ell \in P^\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq h$ , die Menge  $Q_q^{\ell-1}$  definiert durch  $Q_q^{\ell-1} := \{C_r^{\ell-1} \in P^{\ell-1} : C_r^{\ell-1} \subseteq C_q^\ell\}$ .

*Induktionsanfang  $I_1$* : Sei  $k = 1$ , also  $\ell = h$  und o.B.d.A. sei der Level  $h - 1$  echt feiner als der Level  $h$ , ansonsten verwenden wir den höchsten Level  $\ell$ , für den der Level  $\ell - 1$  echt feiner ist. Dann gilt, da beide Values Pareto-Optimal sind,

$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = v(N). \quad (5.45)$$

Wir führen eine zweite Induktion  $I_2$  über  $|Q^{h-1}|$ .

*Induktionsanfang  $I_2$* : Sei  $|Q^{h-1}| = 2$  mit  $C_1^{h-1}, C_2^{h-1} \in Q^{h-1}$ . Dann folgt wegen der Pareto-Optimalität aus **PRG**

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \in C_1^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_1^{h-1}} \phi_i(N \setminus C_2^{h-1}, v|_{N \setminus C_2^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_2^{h-1}})} &= \frac{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N \setminus C_1^{h-1}, v|_{N \setminus C_1^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_1^{h-1}})} \\ \Leftrightarrow \frac{\sum_{i \in C_1^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{v(C_1^{h-1})} &= \frac{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{v(C_2^{h-1})} \quad \text{und} \\ \frac{\sum_{i \in C_1^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_1^{h-1}} \varphi_i(N \setminus C_2^{h-1}, v|_{N \setminus C_2^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_2^{h-1}})} &= \frac{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N \setminus C_1^{h-1}, v|_{N \setminus C_1^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_1^{h-1}})} \\ \Leftrightarrow \frac{\sum_{i \in C_1^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{v(C_1^{h-1})} &= \frac{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{v(C_2^{h-1})}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich damit

$$\frac{\sum_{i \in C_1^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_1^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}. \quad (5.46)$$

Es gilt, ebenfalls wegen der Pareto-Optimalität

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C_1^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) &= v(N) - \sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) \quad \text{und} \\ \sum_{i \in C_1^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) &= v(N) - \sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}). \end{aligned}$$

Eingesetzt in 5.46 folgt

$$\begin{aligned} \frac{v(N) - \sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{v(N) - \sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} &= \frac{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} \\ \Leftrightarrow v(N) \sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) &= v(N) \sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in C_2^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_2^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) \quad (5.47)$$

und damit auch

$$\sum_{i \in C_1^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_1^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}). \quad (5.48)$$

*Induktionsschritt  $I_2$ :* Wir nehmen an,  $\sum_{i \in C_r^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_r^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})$  gelte für alle  $C_r^{h-1} \in Q^{h-1}$ ,  $|Q^{h-1}| = m - 1 \geq 2$  beliebig ( $IA_2$ ). Da **PRG** erfüllt ist, haben wir

$$\frac{\sum_{i \in C_r^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_r^{h-1}} \phi_i(N \setminus C_s^{h-1}, v|_{N \setminus C_s^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_s^{h-1}})}{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N \setminus C_r^{h-1}, v|_{N \setminus C_r^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^{h-1}})} \quad \text{und} \quad (5.49)$$

$$\frac{\sum_{i \in C_r^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_r^{h-1}} \varphi_i(N \setminus C_s^{h-1}, v|_{N \setminus C_s^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_s^{h-1}})}{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N \setminus C_r^{h-1}, v|_{N \setminus C_r^{h-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^{h-1}})}. \quad (5.50)$$

Dann folgt aus ( $IA_2$ )

$$\frac{\sum_{i \in C_r^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_r^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} \quad (5.51)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i \in C_r^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_r^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} \quad (5.52)$$

für alle  $C_r^{h-1}, C_s^{h-1} \in Q^{h-1}$ . Zusätzlich gilt wegen der Pareto-Optimalität

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C_r^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) &= v(N) - \sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{q \in N^{h-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) \quad \text{und} \\ \sum_{i \in C_r^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) &= v(N) - \sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{q \in N^{h-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}). \end{aligned}$$

Eingesetzt in 5.52 folgt

$$\frac{v(N) - \sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{q \in N^{h-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{v(N) - \sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{q \in N^{h-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}$$

$$\Leftrightarrow v(N) \sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) \sum_{q \in N^{h-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})$$

$$= v(N) \sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) \sum_{q \in N^{h-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})$$

$$\stackrel{5.52}{\Leftrightarrow} v(N) \sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = v(N) \sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in C_s^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_s^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) \quad \text{und} \quad \sum_{i \in C_r^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_r^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}).$$

Somit gilt  $\sum_{i \in C_r^{h-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_r^{h-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})$  für alle  $C_r^{h-1} \in Q^{h-1}$  für  $|Q^{h-1}|$  beliebig.

*Induktionsschritt  $I_1$* : Sei nun  $k \geq 2$  beliebig und nehmen wir an es gelte

$$\sum_{i \in C_t^\ell} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_t^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) \text{ für } \ell = h + 1 - k \text{ und alle } C_t^\ell \in P^\ell \text{ (IA}_1\text{)}. \quad (5.53)$$

Wir betrachten ein festes  $C_t^\ell \in P^\ell$  und definieren  $Q_t^{\ell-1} := \{C_r^{\ell-1} \in P^{\ell-1} : C_r^{\ell-1} \subseteq C_t^\ell\}$ . Damit führen wir eine Induktion  $I_3$  über die Anzahl  $m$  der Elemente der Menge  $Q_t^{\ell-1}$ .

*Induktionsanfang  $I_3$* : Zunächst nehmen wir an, es gilt  $|Q_t^{\ell-1}| = 1$  mit  $Q_t^{\ell-1} = \{C_r^{\ell-1}\}$ . Daraus folgt  $C_r^{\ell-1} = C_t^\ell$  und nach Induktionsannahme  $(IA)_1$  folgt:

$$\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{j \in C_t^\ell} \phi_j(N, v, \underline{P}) = \sum_{j \in C_t^\ell} \varphi_j(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}). \quad (5.54)$$

Nehmen wir jetzt an, die Aussage gelte für  $|Q_t^{\ell-1}| = m - 1 \geq 1$  beliebig  $(IA_3)$ . Wir setzen  $|Q_t^{\ell-1}| = m \geq 2$  voraus mit  $C_r^{\ell-1}, C_s^{\ell-1} \in Q_t^{\ell-1}$ . Da **PRG** erfüllt ist, haben wir

$$\frac{\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \phi_i(N \setminus C_s^{\ell-1}, v|_{N \setminus C_s^{\ell-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_s^{\ell-1}})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N \setminus C_r^{\ell-1}, v|_{N \setminus C_r^{\ell-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^{\ell-1}})} \text{ und} \quad (5.55)$$

$$\frac{\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \varphi_i(N \setminus C_s^{\ell-1}, v|_{N \setminus C_s^{\ell-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_s^{\ell-1}})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N \setminus C_r^{\ell-1}, v|_{N \setminus C_r^{\ell-1}}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^{\ell-1}})}. \quad (5.56)$$

Dann folgt aus  $(IA_3)$

$$\frac{\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} \quad (5.57)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} \quad (5.58)$$

für alle  $C_r^{\ell-1}, C_s^{\ell-1} \in Q_t^{\ell-1}$ . Zusätzlich gilt mit  $N_t^{\ell-1} = \{s \in N^{\ell-1} : C_s^{\ell-1} \subseteq C_t^\ell\}$  und wegen  $(IA_3)$  mit  $Z := \sum_{i \in C_t^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_t^\ell} \varphi_i(N, v, \underline{P})$

$$\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) = Z - \sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{q \in N_t^{\ell-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) \text{ und} \quad (5.59)$$

$$\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = Z - \sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{q \in N_t^{\ell-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}). \quad (5.60)$$

Eingesetzt in 5.58 folgt

$$\begin{aligned} & \frac{Z - \sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{q \in N_t^{\ell-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{Z - \sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{q \in N_t^{\ell-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} \\ \Leftrightarrow & Z \frac{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{q \in N_t^{\ell-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{q \in N_t^{\ell-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} \\ = & Z \frac{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = \frac{\sum_{q \in N_t^{\ell-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{q \in N_t^{\ell-1} \setminus \{r, s\}} \sum_{i \in C_q^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} \\ \stackrel{5.58}{\Leftrightarrow} & Z \frac{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})} = Z \frac{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_s^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P})$$

und damit auch

$$\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}).$$

Somit haben wir gezeigt, dass  $\sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \phi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_r^{\ell-1}} \varphi_i(N, v, \underline{P})$  für jedes  $C_r^{\ell-1} \in P^{\ell-1}$  gilt. Wenn wir die Induktion über  $k$  anwenden, ergibt sich  $\sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_r^\ell} \varphi_i(N, v, \underline{P})$  für alle  $C_r^\ell \in P^\ell$  und für alle  $0 \leq \ell \leq h$ . Insbesondere gilt  $\sum_{i \in C_r^0} \phi_i(N, v, \underline{P}) = \phi_r(N, v, \underline{P}) = \sum_{i \in C_r^0} \varphi_i(N, v, \underline{P}) = \varphi_r(N, v, \underline{P})$  für alle  $C_r^0 \in P^0$  und damit für alle  $r \in N$ , was zu zeigen war.  $\square$

Mit Satz 5.5.4 erhalten wir eine neue kompaktere Charakterisierung für den Owen-Type-Proportional-Value  $\varpi(v, P)$ , als die in [Huettner 2010] bzw. [Huettner 2015]:

**Korollar 5.5.5.** *Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, P^1, P^2)$  existiert ein eindeutiger CS-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und für  $h = 2$  Axiom 5.5.3 erfüllt. Dieser Value  $\varphi$  ist der Proportional-CS-Value  $\varpi(v, P)$  aus Definition 2.0.3. D.h. für  $h = 2$  ist der Proportional-Value-LS-Value  $\psi^{LS}$  gleich dem Proportional-CS-Value  $\varpi(v, P)$ .*

*Beweis.* Der Proportional-CS-Value  $\varpi(v, P)$  ist nach [Huettner 2015] durch drei Axiome eindeutig charakterisiert: *I.* Pareto-Optimalität, *II.* Intermediate-Game-Property und *III.* Internal-Preservation-Of-Ratios-Property. Axiom *I* und Axiom *II*, das besagt, dass die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $N$ , die sich in einer Komponente  $C_q^1$  des 1-ten Levels  $P^1$  einer Level-Structure  $\underline{P}$  befinden, gleich der  $C_q^1$  zugeordneten Auszahlung ist, sind von  $\psi^{LS}$  nach Bemerkung 5.5.2 erfüllt. Das Axiom *III* besagt:

**Axiom 5.5.6.** *Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, P^1, P^2)$  und für alle  $i, j \in C^1$ ,  $C^1 \in P^1$  gilt*

$$\frac{\phi_i(N, v, \underline{P})}{\phi_i(N \setminus j, v|_{N \setminus j}, \underline{P}|_{N \setminus j})} = \frac{\phi_j(N, v, \underline{P})}{\phi_j(N \setminus i, v|_{N \setminus i}, \underline{P}|_{N \setminus i})}. \quad (5.61)$$

Das entspricht aber genau **PRG** (Axiom 5.5.3) mit  $\ell = 0$ .  $\square$

Auch für den Proportional-Value geben wir eine Erweiterung für Nested-Partitions an:

**Definition 5.5.7.** *Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  ist der **Proportional-Value-NP-Value**  $\psi^{NP}$  durch Algorithmus 5.3.1 definiert, indem wir in jedem Schritt den Shapley-Value  $Sh$  durch den Proportional-Value  $\psi$  (2.3, 2.4) ersetzen.*

**Bemerkung 5.5.8.** *Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  und  $v \in \mathcal{G}^N$ . Der Proportional-Value-NP-Value  $\psi^{NP}$  aus Definition 5.5.7 erfüllt folgende Eigenschaften:*

- I.*  $\psi^{NP}$  ist Pareto-optimal.
- II.* Gilt  $h = 2$ , ist  $\psi^{NP}$  identisch mit dem Owen-Type-Proportional-Value  $\varpi(v, P)$  (Def. 2.0.3), gilt  $h = 1$  ist er identisch mit dem Proportional-Value  $\psi$  (2.3, 2.4).

- III. Die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $N$ , die sich in einer Komponente  $C_q^\ell$  des  $\ell$ -ten Levels  $P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , befinden, ist gleich der  $C_q^\ell$  zugedachten Auszahlung.
- IV. Gilt für die Koalitionsfunktion  $v$ , dass für alle in Bemerkung 5.3.1 als nicht relevant bezeichnete Koalitionen  $S \in \mathcal{NR}$  die Harsanyi-Dividenden gleich null sind, ist der Proportional-Value-NP-Value gleich dem Proportional-Value-LS-Value.

Die Beweise ergeben sich analog zu denen von Satz 5.3.2, dabei geht in die letzte Behauptung ein, dass der Proportional-Value nach [Ortmann 2000] ebenfalls das Axiom über den unwesentlichen Spieler 2.0.8 erfüllt.

Auch der Proportional-Value-NP-Value lässt sich kompakt charakterisieren:

**Bemerkung 5.5.9.** Ein Value  $\phi$  erfüllt das **Preservation-Of-Ratios-For-Groups-NP-Axiom** genau dann, wenn für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $v^{NP}$ , die die zu  $v$  zugehörige Nested-Partitions-Koalitionsfunktion aus Definition 5.3.6 ist, für alle  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, h-1\}$

$$\frac{\sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i\left(N \setminus C_r^\ell, v^{NP}|_{N \setminus C_r^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_r^\ell}\right)} = \frac{\sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P})}{\sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i\left(N \setminus C_q^\ell, v^{NP}|_{N \setminus C_q^\ell}, \underline{P}|_{N \setminus C_q^\ell}\right)} \quad (5.62)$$

gilt. Dann ist jeder Pareto-optimale Value  $\phi$ , der dieses Axiom erfüllt, gleich dem Proportional-Value-NP-Value  $\psi^{NP}$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt analog zu dem von Satz 5.4.7. □

## 5.6. Komplexitätsbetrachtungen der bisher untersuchten LS-Values

**Vereinbarung 5.6.1.** In Definition 2.0.13 sind, wie in [Winter 1989], Levels zugelassen, die nur feiner sind als der darauffolgende, d.h. zwei aufeinanderfolgende Levels müssen sich nicht unterscheiden. Da identische Levels keine neue Information enthalten und zusätzlichen Aufwand bedeuten, vereinbaren wir, bei Komplexitätsbetrachtungen nur Level-Structures zuzulassen, bei denen alle Levels einer niedrigeren Stufe echt feiner sind als die der höheren Stufe. Das ist dadurch gerechtfertigt, dass sich in unseren Algorithmen die Auszahlung nicht ändert, wenn im nächsten Schritt ein identischer Level verwendet wird. Alle Spiele enthalten dann für jede Berechnung nur eine einzige Koalition  $T$  und für die von uns verwendeten TU-Values  $\varphi$  gilt dann für jeden solchen Level  $\ell$   $v^\ell(T) = v^{\ell+1}(T)$ .

**Bemerkung 5.6.2.** Für jede Level-Structure  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ , bei der jeder Level echt feiner ist als der darauffolgende, gilt  $h \leq n - 1$ .

*Beweis.* Für alle  $\ell \in \{0, 1, \dots, h-1\}$  besitzt jeder Level  $P^\ell$  mindestens eine Komponente mehr als der Level  $P^{\ell+1}$ . Da wir in Level  $P^0$   $n = |N|$  Komponenten, die Einerkoalitionen  $\{i\}$ ,  $i \in N$ , haben, gibt es maximal  $n$  Levels und damit gilt  $h \leq n - 1$ . □

Wir geben zunächst die Komplexitäten der Zwischenauszahlungen an:

**Satz 5.6.3.** Für einen Spieler  $i \in D \subseteq N$  mit  $d := |D|$  lassen sich

- I. der Shapley-Value  $Sh_i(v|_D)$  in  $O(d2^{d-1})$  Zeit,
- II. alle anderen  $f$ -Weighted-Shapley-Values  $Sh_i^{f(v,w)}(v|_D)$ , falls  $f$  in konstanter Zeit berechenbar ist, in  $O(3^d)$  Zeit und
- III. der Proportional-Value  $\psi_i(v|_D)$  (2.3,2.4) in  $O(d2^{d-1})$  Zeit berechnen.

*Beweis.* I. Sind die nötigen Fakultäten nicht abgespeichert, ist jeder Summand der Shapley-Formel 2.2 in  $O(d)$  Zeit zu berechnen. Bei  $2^{d-1}$  Summanden, so viele Koalitionen gibt es, die Spieler  $i$  enthalten, ergibt sich für Spieler  $i$  eine Laufzeit von  $O(d2^{d-1})$ .

II. Sei  $f$  in konstanter Zeit berechenbar. Wir berechnen zuerst mit dem Algorithmus "dividend" aus [Algaba, E., et al. 2007], der eine Zeitkomplexität von  $O(3^d)$  besitzt, die Harsanyi-Dividenden. Jeder Summand der Gleichung 3.17 enthält im Nenner maximal  $d$  Summanden und ist somit in  $O(d)$  Zeit berechenbar, wenn der Dividendenwert bekannt ist. Für einen Spieler  $i \in D$  ist bei  $2^{d-1}$  Koalitionen, die Spieler  $i$  enthalten, deshalb die Formel 3.17 in  $O(d2^{d-1})$  Zeit auszuwerten, wenn alle Dividendenwerte bekannt sind. Mit der Dividendenberechnung ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von  $O(d2^{d-1} + 3^d) = O(3^d)$ , da  $d2^{d-1} < 3^d$ , was sich leicht durch Induktion über  $d$  zeigen lässt: Für  $d = 1$  ist die Aussage richtig (IA). Sei nun die Aussage für ein beliebiges  $d \geq 1$  richtig. Dann gilt

$$(d+1)2^d = 2d2^{d-1} + 2^d \underset{(IA)}{<} 2 \cdot 3^d + 2^d < 2 \cdot 3^d + 3^d = 3^{d+1}.$$

III. Für die Berechnung von  $\psi_i(v|_D)$  geben wir einen Algorithmus an:

---

**Algorithmus 5.6.1.** Berechne  $\psi_i(v|_D)$  für einen Spieler  $i \in D \subseteq N$

---

**Input:** Die Restriktion eines TU-Spiels  $(D, v|_D)$ ,  $D \subseteq N$  und ein Spieler  $i \in D$ .

- 1: **for**  $j = 1$  **to**  $d$  **do**
- 2:      $\psi_j(v|_{\{j}\}) := v(\{j\})$                      // 2.4
- 3: **end for**
- 4: **for**  $k = 2$  **to**  $d$  **do**                     // die Anzahl  $k$  der Spieler einer Koalition
- 5:     **for**  $j = 1$  **to**  $d$  **do**                     // die einzelnen Spieler  $j$
- 6:         **for**  $\ell = 1$  **to**  $|S_k(j)|$  **do** // alle Koalitionen der Größe  $k$  mit Spieler  $j$
- 7:

$$\psi_j(v|_{T_{k\ell}(j)}) := \frac{v(T_{k\ell}(j))}{1 + \sum_{m \in T_{k\ell}(j) \setminus \{j\}} \frac{\psi_m(v|_{T_{k\ell}(j) \setminus \{j\}})}{\psi_j(v|_{T_{k\ell}(j) \setminus \{k\}})}} \quad // 2.3$$

- 8:             **end for**
- 9:     **end for**
- 10: **end for**
- 11: **return**  $\psi_i(v|_D)$ ,

wobei  $|S_k(j)|$  die Anzahl aller Koalitionen mit  $k$  vielen Spielern ist, die den Spieler  $j$  enthalten und  $T_{k\ell}(j)$  die  $\ell$ -te Koalition mit  $k$  vielen Spielern ist, die den Spieler  $j$  enthält.

---

*Beschreibung:* Der Algorithmus berechnet zunächst für alle Spieler die Value-Werte für die Restriktionen auf die kleinsten Koalitionen und geht dann sukzessive auf die der größeren über. Am Schluss gibt er den Value-Wert für einen bestimmten Spieler  $i$  aus.

*Komplexität:* Wir verwenden die Bezeichnungen 2.0.18. Der Nenner des Bruchs Zeile 7 enthält maximal  $d$  viele Summanden mit schon berechneten Value-Werten. Somit gilt  $t(Z_7) \in O(d)$ . Es gibt  $2^{d-1} - 1$  viele Koalitionen mit zwei bis  $d$  vielen Spielern, die einen Spieler  $j$  enthalten. Deshalb rufen die geschachtelten Schleifen, Zeile 4, 5, 6, die Zuweisung Zeile 7 für  $d$  Spieler insgesamt  $d(2^{d-1} - 1)$ -mal auf. Damit gilt:

$$t(\text{Algorithmus 5.6.1}) = t(F_1) + t(F_4) = d + \sum_{k=2}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^{|S_k(j)|} t(Z_7)$$

Somit ist Algorithmus 5.6.1 in  $O(d) + O(d(2^{d-1} - 1)d) = O(d^2 2^{d-1})$  Zeit ausführbar.  $\square$

Es folgt die Hauptaussage für den Ausgangspunkt der Aufgabenstellung (Abschnitt 1.2):

**Satz 5.6.4.** *Für alle LS-Spiele  $(N, v, \underline{P}) \in \mathcal{GLS}^N$  bzw.  $\mathcal{GLS}_{++}^N$ , je nach Definitionsbereich, besitzen der Nested-Partitions-Shapley-Value  $Sh^{NP}$ , alle  $f$ -Weighted-Nested-Partitions-Shapley-Values  $Sh^{fNP}$ , wenn  $f$  in konstanter Zeit berechenbar ist, und der Proportional-Value-NP-Value  $\phi^{pNP}$  eine quadratische Laufzeit von  $O(n^2)$ , wenn der Grad  $d$  von  $\underline{P}$  beschränkt ist.*

*Beweis.* Wir setzen Algorithmus 5.3.1 in Pseudocode:

---

**Algorithmus 5.6.2.** *Berechne  $Sh^{NP}$  (Alg. 5.3.1)*

---

**Input:** Ein LS-Spiel  $(N, v, \underline{P}) \in \mathcal{GLS}^N$  mit  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ .

1: **for**  $q = 1$  **to**  $m_{h-1}$ , mit  $m_{h-1} = |P^{h-1}|$  **do** // Schritt 1  
 2:     **for all**

$$T \subseteq C_q^{h-1} \text{ mit } T = \bigcup_{S \in \hat{P}^{h-2}} S, \hat{P}^{h-2} \subseteq P^{h-2},$$

wobei  $C_q^{h-1} \in P^{h-1} = \{C_1^{h-1}, \dots, C_{m_{h-1}}^{h-1}\}$  **do**

3:      $v(T) := Sh_q(N^{h-1}, v/P^{h-1}|_{(N \setminus C_q^{h-1}) \cup T})$  mit  $N^{h-1} = \{1, \dots, m_{h-1}\}$

4:     **if**  $T = C_q^{h-1} = \{i\}, i \in N$ , **then**  $Sh_i^{NP}(v, \underline{P}) := v(T)$

5:     **end if**

6:     **end for**

7: **end for**

8: **for**  $k = 2$  **to**  $h - 1$  **do** // Schritt 2 bis  $h - 1$

9:      $\ell := h - k$

10:     **for all**  $C_q^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$  mit  $C_q^{\ell+1} \neq \{i\}, i \in N$ , **do** // Schritt  $k$

11:         **for all**  $C_r^\ell \subseteq C_q^{\ell+1}$  **do**

12:             **for all**

$$T \subseteq C_r^\ell \text{ mit } T = \bigcup_{S \in \hat{P}^{\ell-1}} S, \hat{P}^{\ell-1} \subseteq P^{\ell-1},$$

wobei  $P^\ell = \{C_1^\ell, \dots, C_{m_\ell}^\ell\}$  mit  $C_r^\ell \in P^\ell$  und  $N^\ell = \{1, \dots, m_\ell\}$  **do**

13:      $v(T) := Sh_r(N_q^\ell, v/P^\ell|_{(C_q^{\ell+1} \setminus C_r^\ell) \cup T})$  mit  $N_q^\ell = \{s \in N^\ell : C_s^\ell \subseteq C_q^{\ell+1}\}$

14:     **if**  $T = C_r^\ell = \{i\}, i \in N$ , **then**  $Sh_i^{NP}(v, \underline{P}) := v(T)$

15:     **end if**

```

16:         end for
17:     end for
18: end for
19: end for
20: for all  $C_q^1 \in P^1$  mit  $C_q^1 \neq \{i\}, i \in N$ , do           // Schritt h
21:     for all  $i \in C_q^1$  do
22:

$$Sh_i^{NP}(v, \underline{P}) := Sh_i(N_q^0, v^1/P^0|_{C_q^1}),$$

        wobei  $P^0 = \{C_1^0, \dots, C_n^0\}$  mit  $C_i^0 = \{i\}$ ,  $N^0 = N$ ,  $N_q^0 = \{j \in N^0 : j \in C_q^1\}$ 
23:     end for
24: end for
25: return  $Sh^{NP}(v, \underline{P})$ .

```

*Komplexität:* Wir verwenden die Bezeichnungen 2.0.18. Sei eine Level-Structure  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$  mit  $h + 1$  Levels und beschränktem Grad  $d$  gegeben. Die Spiele in Zuweisung Zeile 3, Zeile 13 und Zeile 22 sind jeweils ein Spiel mit maximal  $d$  Spielern. Nach Satz 5.6.3 folgt  $t(Z_3), t(Z_{13}), t(Z_{22}) \in O(d2^{d-1})$ . Die Anzahl der Teilmengen  $T$  aus Zeile 2 und aus Zeile 12 ist jeweils kleiner als  $2^d$ . Nach Bemerkung 5.6.2 gilt  $h \leq n - 1$  und somit wird Schleife Zeile 8 maximal  $(n - 3)$ -mal durchlaufen. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
t(\text{Alg. 5.6.2}) &= t(F_1) + t(F_8) + t(F_{20}) \leq dt(F_2) + (n - 3)t(F_{10}) + (n - 1)t(F_{21}) \\
&< d2^d[t(Z_3) + 1] + (n - 3)(n - 2)t(F_{11}) + (n - 1)dt(Z_{22}) \\
&\leq d2^d[t(Z_3) + 1] + (n - 3)(n - 2)dt(F_{12}) + (n - 1)dt(Z_{22}) \\
&< d2^d[t(Z_3) + 1] + (n - 3)(n - 2)d2^d[t(Z_{13}) + 1] + (n - 1)dt(Z_{22}).
\end{aligned}$$

Somit ist Algorithmus 5.6.2 in  $O(d2^d(d2^{d-1} + 1)) + O((n - 3)(n - 2)d2^d(d2^{d-1} + 1)) + O((n - 1)d \cdot d2^{d-1}) = O(1) + O(n^2) + O(n) = O(n^2)$  Zeit ausführbar.

Die  $f$ -Weighted-Nested-Partitions-Shapley-Values und der Proportional-Value-NP-Value haben mit analogen Algorithmen für die Zuweisungen Zeile 3, 13 und 22 andere Komplexitäten. Da diese aber konstant sind, ergibt sich dieselbe Laufzeit von  $O(n^2)$ .  $\square$

**Bemerkung 5.6.5.** Die gleiche Laufzeit würde sich bei Erweiterungen von anderen TU-Values nach Schema von Algorithmus 5.3.1 ergeben, wenn die TU-Values für jede feste Spielermenge  $D \subseteq N$  eine in  $n$  konstante Laufzeit besitzen.

**Bemerkung 5.6.6.** Wenn der Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$  oder andere LS-Values, deren zugrundeliegende TU-Values zur Auszahlungsberechnung in der Regel alle Koalitionswerte benötigen, mit Algorithmus 5.2.1 bzw. analog dazu berechnet werden, ergeben sich keine polynomiale Laufzeiten, auch wenn der Grad der Level-Structure begrenzt ist.

*Beweis.* In Schritt 1 von Algorithmus 5.2.1 werden zur Berechnung des TU-Spiels  $(C_q^{h-1}, v^{h-1})$  alle Teilmengen  $T \subseteq C_q^{h-1}$  verwendet. Die Anzahl  $\hat{n} := |C_q^{h-1}|$  der Komponente  $C_q^{h-1}$  zugrundeliegenden Spielermenge kann im Extremfall  $n - 1$  betragen. Die Anzahl aller Teilmengen  $T \neq \emptyset$  von  $(C_q^{h-1}, v^{h-1})$  beträgt  $2^{\hat{n}} - 1$ . Da nach Abschnitt 3.9 der Shapley-Value die Koalitionswerte aller Teilmengen für eine Berechnung benötigt, ergibt sich allein für Schritt 1 eine exponentielle Laufzeit von  $O(2^n)$ . Analoges gilt für die anderen LS-Values.  $\square$

**Bemerkung 5.6.7.** Um eine polynomiale Laufzeit zu erhalten muss Algorithmus 5.2.1 nicht unbedingt nach Schema von Algorithmus 5.3.1 verändert werden. Es können für die Teilmengen  $T$  einer Komponente  $C_q^{h-k}$  in den Schritten  $k, 1 \leq k \leq h-1$  auch die Teilmengen von  $C_q^{h-k}$  aus mehreren niedrigeren Levels verwendet werden, solange die Anzahl dieser Levels und der Grad der Level-Structure durch Konstanten begrenzt sind.

## 5.7. $f$ -Weighted-LS-Shapley-Values

In diesem Abschnitt bringen wir verschiedene neue LS-Values in Dividendendarstellung. Sie unterscheiden sich dabei in der Gewichtung der Anteilsverhältnisse an einer Dividende.

### 5.7.1. $f$ -Weighted-ILS-Shapley-Values

Der folgende LS-Value ist eine Art Erweiterung der Dividendendarstellung des Level-Structure-Values von Satz 5.3.5. Er benutzt zur Gewichtung nur Komponenten, die eine Schnittmenge ("intersection") mit der zu einer Dividende zugehörigen Koalition haben.

**Definition 5.7.1.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

und alle  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , sei ein Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}_P|}$  von Gewichten  $w_C, w_C > 0$  für alle  $C^5 \in \mathcal{C}_P$ , gegeben. Für alle  $i \in N$  und  $0 \leq \ell \leq h$  ist  $C^\ell(i)$  die Komponente  $C^\ell \in P^\ell, P^\ell \in \underline{P}$ , die Spieler  $i$  enthält. Mit  $Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i)$  definieren wir für alle  $T \subseteq N, T \ni i$ , das für Level-Structures **fI-gewichtete Anteilsverhältnis**<sup>6</sup> eines Spielers  $i \in N$  an einer Dividende  $\Delta_v(T)$  mit

$$Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) := \prod_{\ell=0}^{h-1} Q_{f(v,w),T}^{I^\ell}(i), \quad (5.63)$$

wobei die Ausdrücke  $Q_{f(v,w),T}^{I^\ell}(i)$  gegeben sind mit

$$Q_{f(v,w),T}^{I^\ell}(i) := \frac{f(v(C^\ell(i)), w_{C^\ell(i)})}{\sum_{\substack{C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i) \\ C^\ell \cap T \neq \emptyset}} f(v(C^\ell), w_{C^\ell})}. \quad (5.64)$$

Dann ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige **f-Weighted-ILS-Shapley-Value**  $Sh^{fILS}$  gegeben durch

$$Sh_i^{f(v,w)ILS}(v, \underline{P}) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) \Delta_v(T) \text{ für alle } i \in N. \quad (5.65)$$

<sup>5</sup>Das belanglose Gewicht der großen Koalition wird nur benötigt, wenn Level  $h$  und  $h-1$  identisch sind.

<sup>6</sup> I steht für "intersection"

Damit gilt

**Satz 5.7.2.** *Der durch Definition 5.7.1 gegebene LS-Value  $Sh^{fLLS}$  besitzt folgende Eigenschaften:*

- I.  $Sh^{fLLS}$  ist Pareto-optimal.
- II.  $Sh^{fLLS}$  erfüllt das Axiom über den unwesentlichen Spieler,
- III. das Monotonie-Axiom bezüglich der großen Koalition und ist
- IV. homogen, falls  $f$  homogen vom Grad  $r$ ,  $r$  beliebig, ist.
- V. Gilt  $h = 1$  für eine Level-Structure  $\underline{P}$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ , ist  $Sh^{fLLS}$  identisch mit dem zu  $f(v, w)$  zugehörigen  $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$  von Definition 3.4.1.
- VI. Die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $N$ , die sich in einer Komponente  $C_q^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , befinden, ist gleich der  $C_q^\ell$  zugeordneten Auszahlung, formal:

$$Sh_{C_q^\ell}^{f(v,w)LLS}(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell) = \sum_{i \in C_q^\ell} Sh_i^{f(v,w)LLS}(v, \underline{P}) \quad \text{für alle } P^\ell \in \underline{P}. \quad (5.66)$$

Für den Beweis von VI. benötigen wir noch zwei Lemmata:

**Lemma 5.7.3.** *Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ , und  $P^\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq h$ , der  $\ell$ -te Level von  $\underline{P}$ . Dann gilt für alle  $T \in 2^{N^\ell}$*

$$\Delta_{v/P^\ell}(T) = \Delta_v(T) + \sum_{\substack{S \subsetneq T, S \notin 2^{N^\ell}, \\ S \not\subseteq R \subsetneq T, R \in 2^{N^\ell}}} \Delta_v(S). \quad (5.67)$$

Dieses Lemma besagt, dass sich jede zu einer Koalition  $T$  zugehörige Dividende  $\Delta_{v/P^\ell}(T)$  im Spiel  $(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell)$  zusammensetzt aus der Dividende  $\Delta_v(T)$  plus der Summe von zu Koalitionen  $S$  zugehörigen Dividenden  $\Delta_v(S)$  aus dem ursprünglichen Spiel  $(v, \underline{P})$ . Dabei werden für die Koalitionen  $S$  alle echten Teilmengen von  $T$  berücksichtigt, die die Komponenten  $C^\ell \in P^\ell$  nicht selbst bilden können und die zugleich keine Teilmengen einer echten Teilmenge  $R$  der Koalition  $T$  sind, wenn die Teilmenge  $R$  eine Koalition von Komponenten  $C^\ell \in P^\ell$  ist. Das bedeutet, die Koalitionen  $S$  werden immer nur für die kleinsten Koalitionen  $T \in 2^{N^\ell}$  verwendet, von denen sie Teilmengen sind.

*Beweis Lemma 5.7.3.* Wir bezeichnen die Anzahl der Komponenten  $C^\ell \in P^\ell$ , die Teilmengen einer Koalition  $T \in 2^{N^\ell}$  sind mit  $|T^\ell|$ . Das Lemma beweisen wir dann durch Induktion über die Anzahl  $k = |T^\ell|$ ,  $1 \leq k \leq N^\ell$ , der Komponenten  $C^\ell \in P^\ell$ , die Teilmengen einer Koalition  $T \in 2^{N^\ell}$  sind.

*Induktionsanfang:* Sei  $k = 1$ . Dann ist  $T$  eine Komponente  $C^\ell \in P^\ell$  und es gilt

$$\Delta_{v/P^\ell}(T) = \Delta_{v/P^\ell}(C^\ell) = v(C^\ell) = \Delta_v(C^\ell) + \sum_{\substack{S \subsetneq C^\ell, S \notin 2^{N^\ell}, \\ S \not\subseteq R \subsetneq C^\ell, R \in 2^{N^\ell}}} \Delta_v(S). \quad (5.68)$$

*Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass Gleichung 5.67 für ein beliebiges  $k$ ,  $1 \leq k \leq N^\ell - 1$  gilt (IA). Sei nun  $Q \in 2^{N^\ell}$  mit  $|Q^\ell| = k$  und  $T = Q \cup C^\ell$  mit  $C^\ell \in P^\ell$  und  $C^\ell \not\subseteq Q$ . Dann gilt  $|T^\ell| = k + 1$  und es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{v/P^\ell}(T) &\stackrel{2.13}{=} v(T) - \sum_{\substack{S \subsetneq T, \\ S \in 2^{N^\ell}}} \Delta_{v/P^\ell}(S) \stackrel{2.13}{=} \Delta_v(T) + \sum_{S \subsetneq T} \Delta_v(S) - \sum_{\substack{S \subsetneq T, \\ S \in 2^{N^\ell}}} \Delta_{v/P^\ell}(S) \\
 &\stackrel{(IA)}{=} \Delta_v(T) + \sum_{S \subsetneq T} \Delta_v(S) - \sum_{\substack{S \subsetneq T, \\ S \in 2^{N^\ell}}} \left( \Delta_v(S) + \sum_{\substack{R \subsetneq S, R \notin 2^{N^\ell}, \\ R \not\subseteq Q \subsetneq S, Q \in 2^{N^\ell}}} \Delta_v(R) \right) \\
 &= \Delta_v(T) + \sum_{S \subsetneq T} \Delta_v(S) - \sum_{\substack{S \subsetneq T, \\ S \in 2^{N^\ell}}} \Delta_v(S) - \sum_{\substack{S \subsetneq T, \\ S \in 2^{N^\ell}}} \sum_{\substack{R \subsetneq S, R \notin 2^{N^\ell}, \\ R \not\subseteq Q \subsetneq S, Q \in 2^{N^\ell}}} \Delta_v(R) \\
 &= \Delta_v(T) + \sum_{\substack{S \subsetneq T, \\ S \notin 2^{N^\ell}}} \Delta_v(S) - \sum_{\substack{R \subsetneq T, \\ R \in 2^{N^\ell}}} \sum_{\substack{S \subsetneq R, S \notin 2^{N^\ell}, \\ S \not\subseteq Q \subsetneq R, Q \in 2^{N^\ell}}} \Delta_v(S) \\
 &= \Delta_v(T) + \sum_{\substack{S \subsetneq T, S \notin 2^{N^\ell}, \\ S \not\subseteq R \subsetneq T, R \in 2^{N^\ell}}} \Delta_v(S),
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

**Lemma 5.7.4.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$  und  $\underline{P} \in \mathcal{L}S^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ . Dann wird für alle  $S \in 2^N \setminus \emptyset$  im Spiel  $(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell)$  die Dividende  $\Delta_v(S)$  jeweils genau für eine einzige Koalition  $T \in 2^{N^\ell}$  in Gleichung 5.67 verwendet.

*Beweis Lemma 5.7.4.* Alle Koalitionen  $T \in 2^{N^\ell}$  sind Vereinigungen von Komponenten  $C^\ell \in P^\ell$ . Für alle Koalitionen  $S \in 2^N \setminus \emptyset$  kommt jeder Spieler  $i \in S$  in genau einer Komponente  $C^\ell$  vor, da  $P^\ell$  eine Partition ist. Somit gibt es genau eine Koalitionen  $T \in 2^{N^\ell}$ , die genau alle Komponenten  $C^\ell \in P^\ell$  enthält, die mindestens einen Spieler  $i$  aus  $S \in 2^N$  besitzen. Das bedeutet,  $S$  ist Teilmenge dieser Koalition  $T$ , die die kleinste Koalition von allen Koalitionen  $R \in 2^{N^\ell}$  ist, die  $S$  enthalten. Nach Lemma 5.7.3 wird somit die zu  $S$  zugehörige Dividende  $\Delta_v(S)$  genau für eine einzige Koalitionen  $T \in 2^{N^\ell}$  in Gleichung 5.67 verwendet.  $\square$

*Beweis von Satz 5.7.2. I.-IV.* Die Beweise ergeben sich aus analogen Beweisen zu den Eigenschaften II.-V. aus Satz 3.6.2.

V. Für  $h = 1$  sind alle Komponenten  $C \in \mathcal{C}_P \setminus N$  Einerkoalitionen. Mit  $w_i := w_{\{i\}}$  folgt

$$Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) = Q_{f(v,w),T}^{I^0}(i) = \frac{f(v(C^0(i)), w_{C^0(i)})}{\sum_{\substack{C^0 \subseteq C^1(i), \\ C^0 \cap T \neq \emptyset}} f(v(C^0), w_{C^0})} = \frac{f(v(\{i\}), w_i)}{\sum_{j \in T} f(v(\{j\}), w_j)}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 Sh_i^{f(v,w)ILS}(v, \underline{P}) &= \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) \Delta_v(T) \\
 &= \sum_{T \subseteq N, T \ni i} \frac{f(v(\{i\}), w_i)}{\sum_{j \in T} f(v(\{j\}), w_j)} \Delta_v(T) = Sh_i^{f(v,w)}(v).
 \end{aligned}$$

VI. Für  $\ell = h$  haben wir die triviale Partition und die Aussage ist wegen der zuvor gezeigten Pareto-Optimalität von  $Sh^{fILS}$  erfüllt. Sei nun eine beliebige Komponente  $C_q^\ell$  eines beliebigen Levels  $\ell$  mit  $0 \leq \ell \leq h-1$  gegeben. Dann gilt für alle  $i \in C_q^\ell$ ,  $i \in N$ , nach Konstruktion von Definition 5.7.1 für alle  $S \in 2^N$ ,  $S \ni i$ , im Spiel  $(v, \underline{P})$

$$\sum_{i \in C_q^\ell} Q_{f(v,w),S}^{ILS}(i) := \prod_{r=\ell}^{h-1} Q_{f(v,w),S}^{I^r}(i). \quad (5.69)$$

Im Spiel  $(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell)$  gilt für alle  $T \in 2^{N^\ell}$ ,  $T \ni C_q^\ell$ ,

$$Q_{f(v,w),T}^{ILS}(C_q^\ell) := \prod_{r=\ell}^{h-1} Q_{f(v,w),T}^{I^r}(C_q^\ell). \quad (5.70)$$

Wir bezeichnen im Folgenden diejenige Komponente des  $r$ -ten Levels, die die Komponente  $C_q^\ell$  enthält, mit  $C^r(C_q^\ell)$ . Dann gilt  $C^r(i) = C^r(C_q^\ell)$  für alle  $r \geq \ell$  und  $i \in C_q^\ell$ . Für jedes  $S \in 2^N$ ,  $S \cap C_q^\ell \neq \emptyset$ , gibt es ein kleinstes  $k$ ,  $k \geq \ell$ , mit  $S \subseteq C^k(C_q^\ell)$ . Nach Lemma 5.7.4 existiert dann genau eine einzige Koalition  $T_q^\ell \in 2^{N^\ell}$ , die in Gleichung 5.67 dieses  $S$  verwendet und nach Lemma 5.7.3 ist diese Koalition  $T_q^\ell$  identisch mit  $C^k(C_q^\ell)$ . Wir versehen dann alle Koalitionen  $S \in 2^N$ ,  $S \cap C_q^\ell \neq \emptyset$ , zusätzlich mit einem Subskript derjenigen Koalition  $T_q^\ell$ , zu der sie in diesem Sinne gehören. Damit folgt für alle  $S_{T_q^\ell} \in 2^N$  aus Gleichung 5.64 für alle  $r \geq \ell$  und  $i \in C_q^\ell$

$$Q_{f(v,w),S_{T_q^\ell}}^{I^r}(i) = Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{I^r}(i) = Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{I^r}(C_q^\ell) \quad \text{und damit} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C_q^\ell} Q_{f(v,w),S_{T_q^\ell}}^{ILS}(i) & \stackrel{5.69}{=} \prod_{r=\ell}^{h-1} Q_{f(v,w),S_{T_q^\ell}}^{I^r}(i) = \prod_{r=\ell}^{h-1} Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{I^r}(i) = \prod_{r=\ell}^{h-1} Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{I^r}(C_q^\ell) \\ & \stackrel{5.70}{=} Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{ILS}(C_q^\ell). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Daraus erhalten wir mit Gleichung 5.65

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C_q^\ell} Sh_i^{f(v,w)ILS}(v) & = \sum_{i \in C_q^\ell} \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ S \ni i}} Q_{f(v,w),S}^{ILS}(i) \Delta_v(S) = \sum_{i \in C_q^\ell} \sum_{\substack{S_{T_q^\ell} \in 2^N, \\ S_{T_q^\ell} \ni i}} Q_{f(v,w),S_{T_q^\ell}}^{ILS}(i) \Delta_v(S_{T_q^\ell}) \\ & = \sum_{S_{T_q^\ell} \in 2^N} \sum_{i \in C_q^\ell} Q_{f(v,w),S_{T_q^\ell}}^{ILS}(i) \Delta_v(S_{T_q^\ell}) \stackrel{5.72}{=} \sum_{S_{T_q^\ell} \in 2^N} Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{ILS}(C_q^\ell) \Delta_v(S_{T_q^\ell}) \\ & = \sum_{T_q^\ell \in 2^{N^\ell}} Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{ILS}(C_q^\ell) \left( \Delta_v(T_q^\ell) + \sum_{S_{T_q^\ell} \subsetneq T_q^\ell} \Delta_v(S_{T_q^\ell}) \right) \\ & = \sum_{\substack{T \in 2^{N^\ell}, \\ C_q^\ell \subseteq T}} Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{ILS}(C_q^\ell) \left( \Delta_v(T) + \sum_{\substack{S \subsetneq T, S \not\subseteq 2^{N^\ell}, \\ S \not\subseteq R \subsetneq T, R \in 2^{N^\ell}}} \Delta_v(S) \right) \\ & \stackrel{5.67}{=} \sum_{T \in 2^{N^\ell}, C_q^\ell \subseteq T} Q_{f(v,w),T_q^\ell}^{ILS}(C_q^\ell) \Delta_{v/P^\ell}(T) = Sh_{C_q^\ell}^{f(v,w)ILS}(v/P^\ell, \underline{P}/P^\ell). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 5.7.2 komplett.  $\square$

**Bemerkung 5.7.5.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , sei  $(v, \underline{P})$  ein LS-Spiel mit  $f(v(C), w_C) := c$  für alle  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$ . Dann ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige  $f$ -Weighted-ILS-Shapley-Value  $Sh^{ILS}$  gleich dem Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$ .

*Beweis.* Nach Definition 5.7.1 gilt für alle  $T \subseteq N$ ,  $T \ni i$ ,

$$\begin{aligned} Q_{f(v,w),T}^{I^\ell}(i) &:= \frac{f(v(C^\ell(i)), w_{C^\ell(i)})}{\sum_{\substack{C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), \\ C^\ell \cap T \neq \emptyset}} f(v(C^\ell), w_{C^\ell})} = \frac{c}{\sum_{\substack{C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), \\ C^\ell \cap T \neq \emptyset}} c} = \frac{1}{\sum_{\substack{C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), \\ C^\ell \cap T \neq \emptyset}} 1} \\ &= \frac{1}{|\{C^\ell \in P^\ell : C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i) \text{ und } C^\ell \cap T \neq \emptyset\}|} \stackrel{5.25}{=} \frac{1}{K_T^\ell(i)} \end{aligned}$$

und damit

$$Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) := \prod_{\ell=0}^{h-1} Q_{f(v,w),T}^{I^\ell}(i) = \frac{1}{\prod_{\ell=0}^{h-1} K_T^\ell(i)} \stackrel{5.26}{=} \frac{1}{K_T(i)}.$$

Mit Gleichung 5.27 und Gleichung 5.65 folgt die Behauptung.  $\square$

Für eine Axiomatisierung bringen wir ein am  $f$ -Weighted-Balanced-Group-Contributions-Axiom 5.4.2 „angelehntes“ Axiom:

**Axiom 5.7.6.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

$\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}_{\underline{P}}|}$  ein Vektor von Gewichten  $w_C$ ,  $w_C > 0$  für alle  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$ . Hierfür erfüllt ein Value  $\phi$  das **fI-Balanced-Group-Contributions-Axiom** genau dann, wenn für alle  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, h-1\}$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f(v(C_q^\ell), w_{C_q^\ell})} \left( \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} \phi_i(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \tilde{\underline{P}}|_{N \setminus C_r^\ell}) \right) \\ &= \frac{1}{f(v(C_r^\ell), w_{C_r^\ell})} \left( \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_r^\ell} \phi_i(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \tilde{\underline{P}}|_{N \setminus C_q^\ell}) \right) \end{aligned} \quad (5.73)$$

gilt, wobei in Gleichung 5.73 für  $\phi(N \setminus C, v|_{N \setminus C}, \tilde{\underline{P}}|_{N \setminus C})$  für jedes  $C$ ,  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}} \setminus N$ , ein anderes LS-Spiel  $(v, \tilde{\underline{P}})$ ,  $\tilde{\underline{P}} := \underline{P}$ , mit einer von  $C$  abhängigen Funktion  $\tilde{f}$  für alle  $S \in \mathcal{C}_{\tilde{\underline{P}}|_{N \setminus C}}$  verwendet wird mit

$$\tilde{f}(v(S), w_S) := \begin{cases} f(v(S \cup C), w_{S \cup C}), & \text{falls } S \cup C \in \mathcal{C}_{\tilde{\underline{P}}} \\ f(v(S), w_S) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.74)$$

Dieses Axiom besagt, dass für zwei Komponenten  $C_q^\ell, C_r^\ell$ , die Teilmengen derselben Komponente der Partition  $P^{\ell+1}$  sind, der  $f$ -gewichtete Beitrag der Komponente  $C_r^\ell$  zur Gesamtauszahlung an die grundlegenden Spieler der Komponente  $C_q^\ell$  gleich dem  $f$ -gewichteten

Beitrag der Komponente  $C_q^\ell$  zur Gesamtauszahlung an die grundlegenden Spieler der Komponente  $C_r^\ell$  wäre, wenn im reduzierten Spiel die Gewichtung der Komponenten, die mit der entfernten Komponente zusammen im ursprünglichen Spiel eine Komponente  $C^U$  bilden, so wäre, wie die Gewichtung der Komponente  $C^U$  im ursprünglichen Spiel.

**Satz 5.7.7.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

alle  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  und einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}_P|}$  von Gewichten  $w_C$ ,  $w_C > 0$  für alle  $C \in \mathcal{C}_P$ , ist jeder LS-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und Axiom 5.7.6 erfüllt ein zu  $f(v, w)$  zugehöriger  $f$ -Weighted-ILS-Shapley-Value  $Sh^{fILS}$ .

*Beweis.* Wir beweisen den Satz in drei Schritten:

I. Die Pareto-Optimalität wurde schon in Satz 5.7.2 gezeigt.

II. Wir beweisen, dass der  $f$ -Weighted-ILS-Shapley-Value  $Sh^{fILS}$  Axiom 5.7.6 erfüllt. Dazu zeigen wir vorab die Identität

$$Q_{\tilde{f}(v|_{N \setminus C_r^\ell}, w), T}^{ILS}(i) = Q_{f(v, w), T}^{ILS}(i) \quad \text{für } N \neq C_r^\ell \in P^\ell, i \in T \subseteq N \setminus C_r^\ell, 0 \leq \ell \leq h-1. \quad (5.75)$$

Aus 5.74 folgt für  $0 \leq \ell \leq h-1$  mit  $\tilde{C}^\ell := C^\ell|_{N \setminus C_r^\ell}$

a) für  $\tilde{C}^\ell(i) \cup C_r^\ell \notin \mathcal{C}_{\tilde{P}}$  und für alle  $\tilde{C}^\ell \subseteq (C^{\ell+1}(i) \cap (N \setminus C_r^\ell))$  mit  $\tilde{C}^\ell \cap T \neq \emptyset$  und alle  $C^\ell \subseteq (C^{\ell+1}(i) \cap (N \setminus C_r^\ell))$  mit  $C^\ell \cap T \neq \emptyset$ :

$$\tilde{C}^\ell = C^\ell \quad \text{und daraus} \quad \tilde{f}(v(\tilde{C}^\ell), w_{\tilde{C}^\ell}) = f(v(C^\ell), w_{C^\ell}),$$

b) für  $\tilde{C}^\ell(i) \cup C_r^\ell \in \mathcal{C}_{\tilde{P}}$ :

$$\tilde{f}(v(\tilde{C}^\ell(i)), w_{\tilde{C}^\ell(i)}) = f(v(\tilde{C}^\ell(i) \cup C_r^\ell), w_{\tilde{C}^\ell(i) \cup C_r^\ell}) = f(v(C^{\ell+k}(i)), w_{C^{\ell+k}(i)})$$

für ein  $C^{\ell+k}(i) \in \mathcal{C}_{\tilde{P}}$  mit  $k \geq 1$ .

Dann folgt für  $T \subseteq N \setminus C_r^\ell$

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{f}(v|_{N \setminus C_r^\ell}, w), T}^{I^\ell}(i) &= \frac{\tilde{f}(v(\tilde{C}^\ell(i)), w_{\tilde{C}^\ell(i)})}{\sum_{\substack{\tilde{C}^\ell \subseteq (C^{\ell+1}(i) \cap (N \setminus C_r^\ell)), \\ \tilde{C}^\ell \cap T \neq \emptyset}} \tilde{f}(v(\tilde{C}^\ell), w_{\tilde{C}^\ell})} \\ &= \frac{f(v(C^\ell(i)), w_{C^\ell(i)})}{\sum_{\substack{C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), \\ C^\ell \cap T \neq \emptyset}} f(v(C^\ell), w_{C^\ell})} = Q_{f(v, w), T}^{I^\ell}(i), \end{aligned}$$

wobei im Fall b) die Summen im Nenner der beiden Brüche nur aus einem Summanden bestehen, die Brüche ergeben deshalb beide 1 und mit Gleichung 5.63 folgt Gleichung

5.75. Damit gilt für alle  $C_q^\ell, C_r^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , mit  $C_q^\ell, C_r^\ell \subseteq C_k^{\ell+1} \in P^{\ell+1}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, h-1\}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{f(v(C_q^\ell), w_{C_q^\ell})} \left[ \sum_{i \in C_q^\ell} Sh_i^{f(v,w)ILS}(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_q^\ell} Sh_i^{\tilde{f}(v,w)ILS}(N \setminus C_r^\ell, v|_{N \setminus C_r^\ell}, \tilde{P}|_{N \setminus C_r^\ell}) \right] \\
 \stackrel{5.65}{=} & \frac{1}{f(v(C_q^\ell), w_{C_q^\ell})} \sum_{i \in C_q^\ell} \left[ \sum_{\substack{T \subseteq N, \\ T \ni i}} Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) \Delta_v(T) - \sum_{\substack{T \subseteq N \setminus C_r^\ell, \\ T \ni i}} Q_{f(v|_{N \setminus C_r^\ell}, w), T}^{ILS}(i) \Delta_{v|_{N \setminus C_r^\ell}}(T) \right] \\
 \stackrel{5.75}{=} & \frac{1}{f(v(C_q^\ell), w_{C_q^\ell})} \\
 & \cdot \sum_{i \in C_q^\ell} \left[ \sum_{\substack{T \subseteq N, \\ T \ni i, \\ i \in C_r^\ell}} Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) \Delta_v(T) + \sum_{\substack{T \subseteq N, \\ T \ni i, \\ i \notin C_r^\ell}} Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) \Delta_v(T) - \sum_{\substack{T \subseteq N, \\ T \ni i, \\ i \notin C_r^\ell}} Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) \Delta_v(T) \right] \\
 = & \sum_{i \in C_q^\ell} \sum_{\substack{T \subseteq N, \\ T \ni i, i \in C_r^\ell}} \frac{Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) \Delta_v(T)}{f(v(C_q^\ell), w_{C_q^\ell})} = \sum_{i \in C_r^\ell} \sum_{\substack{T \subseteq N, \\ T \ni i, i \in C_q^\ell}} \frac{Q_{f(v,w),T}^{ILS}(i) \Delta_v(T)}{f(v(C_r^\ell), w_{C_r^\ell})} \\
 = & \frac{1}{f(v(C_r^\ell), w_{C_r^\ell})} \left[ \sum_{i \in C_r^\ell} Sh_i^{f(v,w)ILS}(N, v, \underline{P}) - \sum_{i \in C_r^\ell} Sh_i^{\tilde{f}(v,w)ILS}(N \setminus C_q^\ell, v|_{N \setminus C_q^\ell}, \tilde{P}|_{N \setminus C_q^\ell}) \right].
 \end{aligned}$$

III. Die Eindeutigkeit kann wieder analog zu [Gómez-Rúa, Vidal-Puga 2011], Beweis von Theorem 8, gezeigt werden.  $\square$

### 5.7.2. $f$ -Weighted-ALS-Shapley-Values

Bei den bisher untersuchten  $LS$ -Values war die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $N$ , die sich in einer Komponente  $C_q^\ell \in P^\ell$ ,  $P^\ell \in \underline{P}$ , befinden, gleich der  $C_q^\ell$  zugedachten Auszahlung. Koalitionswerte  $v(T)$  von Koalitionen  $T$ , bestehend aus Komponenten  $C_r^{\ell-1} \subsetneq C_q^\ell$  mit anderen Komponenten  $C_s^\ell \neq C_q^\ell$  aus Level  $P^\ell$ , hatten zum einen keinerlei Einfluss auf die der Komponente  $C_q^\ell$  zugedachte Auszahlung, zum anderen beeinflussten sie aber den Anteil der Komponente  $C_r^{\ell-1}$  an der der Komponente  $C_q^\ell$  zugedachten Auszahlung. Das war Owens Forderung in [Owen 1977] und er weist darauf hin, dass die Komponenten  $C_r^{\ell-1}$  dafür entschädigt werden, keine Koalition mit anderen Komponenten  $C_s^\ell \neq C_q^\ell$  einzugehen.

Die Komponente als Ganzes hat keinen Vorteil davon, wenn einzelne Mitglieder „gute Beziehungen“ nach außen haben. Manche reale Vorgänge werden dadurch nicht vollständig erfasst: In der länderüberschreitenden Politik ist es keineswegs so, dass z. B. nur die Bundesrepublik mit anderen Nationalstaaten verhandelt und nur die Mehreinnahmen daraus allen Bundesländern und damit im Endeffekt den Bürgern zufließen. Es passiert durchaus, dass z. B. Bayern direkt mit Österreich verhandelt und der Mehrwert davon, ohne Umweg über den Staat Deutschland, direkt den Bürgern in Bayern zugutekommt.

Wir definieren dazu einen  $LS$ -Value, der mit der tatsächlichen („actual“) Koalition, die Schnittmenge einer Komponente mit der zur Dividende zugehörigen Koalition ist, gewichtet.

**Definition 5.7.8.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$ , mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

und alle  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , sei ein Vektor  $w \in \mathbb{R}^{\sum_{q \in N^{h-1}} (2^{|C_q^{h-1}|} - 1)}$  von Gewichten  $w_T, w_T > 0$  für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}, T \neq \emptyset, q \in N^{h-1}$ , gegeben. Für alle  $i \in N$  und  $0 \leq \ell \leq h$  ist  $C^\ell(i)$  die Komponente des Levels  $P^\ell \in \underline{P}$ , die Spieler  $i$  enthält. Wir definieren für alle  $T \subseteq N, T \ni i$ , mit  $Q_{f(v,w),T}^{ALS}(i)$  das für Level-Structures **fA-gewichtete Anteilsverhältnis**<sup>7</sup> eines Spielers  $i \in N$  an einer Dividende  $\Delta_v(T)$  mit

$$Q_{f(v,w),T}^{ALS}(i) := \prod_{\ell=0}^{h-1} Q_{f(v,w),T}^{A^\ell}(i), \quad (5.76)$$

wobei die Ausdrücke  $Q_{f(v,w),T}^{A^\ell}(i)$  gegeben sind durch

$$Q_{f(v,w),T}^{A^\ell}(i) := \frac{f(v(\check{C}_T^\ell(i)), w_{\check{C}_T^\ell(i)})}{\sum_{S \in \check{C}_{T,i}^\ell} f(v(S), w_S)}, \quad (5.77)$$

mit  $\check{C}_T^\ell(i) := C^\ell(i) \cap T$  und  $\check{C}_{T,i}^\ell := \{C^\ell \cap T : C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), C^\ell \cap T \neq \emptyset\}$ . Dann ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige **f-Weighted-ALS-Shapley-Value**  $Sh^{fALS}$  gegeben durch

$$Sh_i^{f(v,w)ALS}(v, \underline{P}) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{f(v,w),T}^{ALS}(i) \Delta_v(T) \text{ für alle } i \in N. \quad (5.78)$$

Damit gilt

**Korollar 5.7.9.** Der durch Definition 5.7.8 gegebene LS-Value  $Sh^{fALS}$  besitzt folgende Eigenschaften:

- I.  $Sh^{fALS}$  ist Pareto-optimal.
- II.  $Sh^{fALS}$  erfüllt das Axiom über den unwesentlichen Spieler,
- III. das Monotonie-Axiom bezüglich der großen Koalition und ist
- IV. homogen, falls  $f$  homogen vom Grad  $r$ ,  $r$  beliebig, ist.
- V. Gilt  $h = 1$  für eine Level-Structure  $\underline{P}$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ , ist  $Sh^{fALS}$  identisch mit dem zu  $f(v, w)$  zugehörigen  $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$  von Definition 3.4.1.
- VI. Die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $N$ , die sich in einer Komponente  $C_q^\ell$  des  $\ell$ -ten Levels  $P^\ell$  einer Level-Structure  $\underline{P}$  befinden, ist im Allgemeinen ungleich der  $C_q^\ell$  zugeordneten Auszahlung.

*Beweis.* Der Beweis der Eigenschaften I.-V. ergibt sich analog zu denen aus Satz 5.7.2. Die Eigenschaft VI. folgt aus Beispiel 5.7.14.  $\square$

<sup>7</sup> A steht für "actual"

**Bemerkung 5.7.10.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ ,  $f(v(T), w_T) := c$ ,  $c > 0$  für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$ ,  $T \neq \emptyset$ ,  $q \in N^{h-1}$ . Dann ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige  $f$ -Weighted-ALS-Shapley-Value  $Sh^{fALS}$  gleich dem Level-Structure-Value  $Sh^{LS}$  aus Satz 2.0.15.

*Beweis.* Nach Definition 5.7.8 gilt

$$\begin{aligned} Q_{f(v,w),T}^{A^\ell}(i) &\stackrel{5.77}{=} \frac{c}{\sum_{S \in \mathcal{C}_{T,i}^\ell} c} = \frac{1}{|\{C^\ell \cap T : C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), C^\ell \cap T \neq \emptyset\}|} \\ &= \frac{1}{|\{C^\ell : C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), C^\ell \cap T \neq \emptyset\}|} \stackrel{5.25}{=} \frac{1}{K_T^\ell(i)} \end{aligned}$$

und damit

$$Q_{f(v,w),T}^{ALS}(i) := \prod_{\ell=0}^{h-1} Q_{f(v,w),T}^{A^\ell}(i) = \frac{1}{\prod_{\ell=0}^{h-1} K_T^\ell(i)} \stackrel{5.26}{=} \frac{1}{K_T(i)}.$$

Mit Gleichung 5.27 und Gleichung 5.78 folgt die Behauptung.  $\square$

Wir definieren analog zu den Value-Dividenden 3.6.3:

**Definition 5.7.11.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , und  $v \in \mathcal{G}^N$ . Für alle  $i \in N$ , alle Koalitionen  $S \subseteq N$  mit  $S \ni i$  und alle LS-Values  $\varphi$  definieren wir die zu  $\varphi(v)$  zugehörigen **LS-Value-Dividenden**  $\Theta_{\varphi_i(v)}^{LS}(S) \subseteq \mathbb{R}$  rekursiv durch

$$\Theta_{\varphi_i(v)}^{LS}(S) = \varphi_i(v|_S) - \sum_{R \subseteq S, R \ni i} \Theta_{\varphi_i(v)}^{LS}(R) \text{ für } |S| > 1 \text{ und} \quad (5.79)$$

$$\Theta_{\varphi_i(v)}^{LS}(S) = \varphi_i(v|_{\{i\}}) \text{ für } S = \{i\}. \quad (5.80)$$

Mit den LS-Value-Dividenden können wir ein Axiom formulieren:

**Axiom 5.7.12.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

alle  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{\sum_{q \in N^{h-1}} (2^{|C_q^{h-1}|} - 1)}$  von Gewichten  $w_T$ ,  $w_T > 0$  für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$ ,  $T \neq \emptyset$ ,  $q \in N^{h-1}$ , alle  $S \subseteq N$  und alle  $i, j \in S$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ein LS-Value  $\varphi$  das **fA-Balanced-Value-Dividends-Axiom** genau dann, wenn gilt:

$$\frac{\Theta_{\varphi_i(v)}^{LS}(S)}{Q_{f(v,w),S}^{ALS}(i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}^{LS}(S)}{Q_{f(v,w),S}^{ALS}(j)}, \quad (5.81)$$

wobei die  $\Theta_{\varphi_i(v)}^{LS}$  die LS-Value-Dividenden aus Definition 5.7.11 und die  $Q_{f(v,w),S}^{ALS}$  die fA-gewichteten Anteilsverhältnisse aus Definition 5.7.8 bezeichnen.

Wir erhalten

**Korollar 5.7.13.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$ , mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

alle  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{\sum_{q \in N^{h-1}} (2^{|C_q^{h-1}|} - 1)}$  von Gewichten  $w_T$ ,  $w_T > 0$  für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$ ,  $T \neq \emptyset$ ,  $q \in N^{h-1}$ , ist jeder LS-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und Axiom 5.7.12 erfüllt ein zu  $f(v, w)$  gehöriger  $f$ -Weighted-ALS-Shapley-Value  $Sh^{fALS}$ .

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich analog zum Beweis von Satz 3.6.5.  $\square$

**Beispiel 5.7.14** (Beweis von VI. in Korollar 5.7.9). Gegeben sei das LS-Spiel  $(N, v, \underline{P})$  mit Spielermenge  $N = \{1, 2, 3\}$  und Level-Structure  $\underline{P} = (P^0, P^1, P^2)$  mit

$$\underline{P} = \left\{ \left\{ \{1\}, \{2\} \right\}, \{3\} \right\}. \quad (5.82)$$

Die zugehörige Koalitionsfunktion  $v$  laute

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 1, & v(\{3\}) &= 3, & v(\{1, 3\}) &= 5, & v(\{1, 2, 3\}) &= 9. \\ v(\{2\}) &= 2, & v(\{1, 2\}) &= 5, & v(\{2, 3\}) &= 5, \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für den zu  $f(v(T), w_T) := v(T)$  für alle  $T \subseteq C_q^{h-1}$ ,  $T \neq \emptyset$ ,  $q \in N^{h-1}$ , zugehörigen  $f$ -Weighted-ALS-Shapley-Value  $Sh^{fALS}$  ein Auszahlungsvektor

$$Sh^{fALS}(v) = \left( \frac{23}{12}, \frac{10}{3}, \frac{15}{4} \right). \quad (5.83)$$

Im durch die Komponenten des 1-ten Levels als Spieler induzierten Spiel erhalten wir für die Komponente  $\{1, 2\}$

$$Sh_{\{1,2\}}^{fALS}(v/P^1, \underline{P}/P^1) = \frac{45}{8}. \quad (5.84)$$

Dann folgt

$$Sh_{\{1,2\}}^{fALS}(v/P^1, \underline{P}/P^1) = \frac{45}{8} \neq \frac{21}{4} = \frac{23}{12} + \frac{10}{3} = \sum_{i \in \{1,2\}} Sh_i^{fALS}(v, \underline{P}). \quad (5.85)$$

Damit ist der Beweis von Korollar 5.7.9 komplett.

### 5.7.3. $f$ -Weighted-SLS-Shapley-Values

Es folgt ein LS-Value, der zur Gewichtung nur Komponenten verwendet, die echte Teilmengen ("strict subset") der zu einer Dividende zugehörigen Koalition sind. Auch hier ist die Auszahlung an die Spieler einer Komponente im Allgemeinen ungleich der der Komponente zugeordneten Auszahlung.

**Definition 5.7.15.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

und alle  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , sei ein Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}_{\underline{P}}|-1}$  von Gewichten  $w_C$ ,  $w_C > 0$  für alle  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}} \setminus N$ , gegeben. Dann nennen wir den LS-Value  $Sh^{fSLS}$  mit

$$Sh_i^{f(v,w)^{SLS}}(v, \underline{P}) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} Q_{f(v,w), T}^{SLS}(i) \Delta_v(T) \text{ für alle } i \in N, \quad (5.86)$$

den zu  $f(v, w)$  zugehörigen **f-Weighted-SLS-Shapley-Value**, wobei für alle  $T \subseteq N$ ,  $T \ni i$ , mit  $Q_{f(v,w), T}^{SLS}(i)$  das für Level-Structures **fS-gewichtete Anteilsverhältnis**<sup>8</sup> eines Spielers  $i \in N$  an der Dividende  $\Delta_v(T)$  durch folgenden Algorithmus definiert ist:

**Algorithmus 5.7.1.** Setze  $Q_{f(v,w), T}^{SLS}(i) := 1$  und  $S := T$ .  
Solange  $S \neq \{i\}$  gilt, führe folgenden Schritt aus:

- **Schritt:**

$$Q_{f(v,w), S}^{SLS}(i) := \frac{f(v(\bar{C}_S(i)), w_{\bar{C}_S(i)})}{\sum_{C \in \bar{C}_S} f(v(C), w_C)}, \quad (5.87)$$

setze  $Q_{f(v,w), T}^{SLS}(i) := Q_{f(v,w), S}^{SLS}(i) \cdot Q_{f(v,w), T}^{SLS}(i)$  und  $S := \bar{C}_S(i)$ .

Dabei gilt für  $C^\ell(i)$  als diejenige Komponente des  $\ell$ -ten Levels, die den Spieler  $i$  enthält,

$$\bar{C}_S(i) := C^m(i), \quad C^m(i) \in \mathcal{C}_{\underline{P}} \text{ mit } |C^m(i)| = \max_{\substack{C^\ell(i) \in \mathcal{C}_{\underline{P}}, \\ C^\ell(i) \subsetneq S}} |C^\ell(i)| \text{ und } \bar{C}_S = \{\bar{C}_S(j) : j \in S\}.$$

Für die Gewichtung des Zählers sucht jeder Schritt unter allen Komponenten, die den Spieler  $i$  enthalten, die größte Komponente, die echte Teilmenge von  $S$  ist. Für den Nenner werden für alle Spieler aus  $S$  solche Komponenten gesucht. Der Algorithmus endet nach maximal  $n - 1$  vielen Schritten, da  $S$  in jedem Schritt um mindestens ein Element  $j \in N$ ,  $j \neq i$  kleiner wird und am Schluss  $S = \{i\}$  ist. Es gilt

**Korollar 5.7.16.** Der durch Definition 5.7.15 gegebene LS-Value  $Sh^{fSLS}$  besitzt folgende Eigenschaften:

- I.  $Sh^{fSLS}$  ist Pareto-optimal.
- II.  $Sh^{fSLS}$  erfüllt das Axiom über den unwesentlichen Spieler,
- III. das Monotonie-Axiom bezüglich der großen Koalition und ist
- IV. homogen, falls  $f$  homogen vom Grad  $r$ ,  $r$  beliebig, ist.
- V. Gilt  $h = 1$  für eine Level-Structure  $\underline{P}$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h)$ , ist  $Sh^{fSLS}$  identisch mit dem zu  $f(v, w)$  zugehörigen f-Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$  von Definition 3.4.1.
- VI. Die Summe der Auszahlungen an die Spieler aus  $N$ , die sich in einer Komponente  $C_q^\ell$  des  $\ell$ -ten Levels  $P^\ell$  einer Level-Structure  $\underline{P}$  befinden, ist im Allgemeinen ungleich der  $C_q^\ell$  zugeordneten Auszahlung.

<sup>8</sup> S steht für "strict subset"

*Beweis.* Der Beweis von I.-IV. und VI. verläuft analog zu dem von Korollar 5.7.9. Weil für  $h = 1$   $Q_{f(v,w),T}^{SLS}(i) = \frac{f(v(\{i\}),w_i)}{\sum_{j \in T} f(v(\{j\}),w_j)}$  für alle  $i \in N$  und  $T \subseteq N$  gilt, folgt V..  $\square$

Mit den LS-Value-Dividenden formulieren wir

**Axiom 5.7.17.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$ ,  $f$  eine Funktion mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

alle  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}_P|-1}$  von Gewichten  $w_C$ ,  $w_C > 0$  für alle  $C \in \mathcal{C}_P \setminus N$ , alle  $S \subseteq N$  und für alle Spieler  $i, j \in S$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ein LS-Value  $\varphi$  das **fS-Balanced-Value-Dividends-Axiom** genau dann, wenn gilt:

$$\frac{\Theta_{\varphi_i(v)}^{LS}(S)}{Q_{f(v,w),S}^{SLS}(i)} = \frac{\Theta_{\varphi_j(v)}^{LS}(S)}{Q_{f(v,w),S}^{SLS}(j)}, \quad (5.88)$$

wobei die  $\Theta_{\varphi(v)}^{LS}$  die LS-Value-Dividenden aus Definition 5.7.11 und die  $Q_{f(v,w),S}^{SLS}$  die fS-gewichteten Anteilsverhältnisse aus Definition 5.7.15 bezeichnen.

Damit erhalten wir:

**Korollar 5.7.18.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

alle  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ , einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}_P|-1}$  von Gewichten  $w_C$ ,  $w_C > 0$  für alle  $C \in \mathcal{C}_P \setminus N$ , ist jeder LS-Value  $\varphi$ , der Pareto-optimal ist und Axiom 5.7.17 erfüllt ein zu  $f(v, w)$  zugehöriger  $f$ -Weighted-SLS-Shapley-Value  $Sh^{fSLS}$ .

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich analog zum Beweis von Satz 3.6.5.  $\square$

Wir bringen einen interessanten Spezialfall eines  $f$ -Weighted-SLS-Shapley-Values:

**Satz 5.7.19.** Sei  $N \in \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{G}^N$ ,  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$ ,  $f(v(C), w_C) := |C|$  für alle  $C \in \mathcal{C}_P \setminus N$ . Dann ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige  $f$ -Weighted-SLS-Shapley-Value  $Sh^{fSLS}$  gleich dem Shapley-Value  $Sh$  von Gleichung 2.2.

*Beweis.* Für  $T = \{i\}$  ist nichts zu zeigen. Sei also  $T \neq \{i\}$ . Die Menge  $\bar{\mathcal{C}}_S$  aus Definition 5.7.15 ist eine Partition von  $S$ . Deshalb gilt  $\sum_{C \in \bar{\mathcal{C}}_S} |C| = |S|$ .

In jedem Schritt des Algorithmus aus Definition 5.7.15 haben wir somit

$$Q_{f(v,w),S}^{SLS}(i) := \frac{|\bar{\mathcal{C}}_S(i)|}{\sum_{C \in \bar{\mathcal{C}}_S} |C|} = \frac{|\bar{\mathcal{C}}_S(i)|}{|S|} \quad (5.89)$$

Für jeden Folgeschritt ist der Nenner gleich dem Zähler des vorherigen Schritts. Im letzten Folgeschritt steht im Zähler eine 1. Durch Kürzen erhalten wir im letzten Schritt

$$Q_{f(v,w),T}^{SLS}(i) := \frac{1}{|T|}. \quad (5.90)$$

Damit ist die Bestimmungsgleichung 5.86 aus Definition 5.7.15 gleich der Bestimmungsgleichung 3.3 von Satz 3.2.4, was zu zeigen war.  $\square$

## Kapitel 6

# Relevante Koalitionen

Für  $f$ -Weighted- $LS$ -Shapley-Values könnten wir mit der Nested-Partitions-Koalitionsfunktion  $v^{NP}$  5.3.6 weitere  $LS$ -Values für Nested-Partitions einführen. Wir definieren allgemeiner:

**Definition 6.0.1.** Sei  $N \subseteq \mathcal{N}$  und  $(N, v) \in \mathcal{G}^N$ . Für  $\mathcal{R} \subseteq 2^N \setminus \emptyset$ ,  $N \in \mathcal{R}$ ,  $\{i\} \in \mathcal{R}$  für alle  $i \in N$ , bezeichnen wir als **relevante Koalitionsfunktion**  $v^{\mathcal{R}}$  diejenige, von  $v$  induzierte Koalitionsfunktion, die für alle Koalitionen  $T \in \mathcal{R}$ , die **relevanten Koalitionen (Relevant-Coalitions)**, die gleichen Funktionswerte wie  $v$  besitzt, also  $v^{\mathcal{R}}(T) := v(T)$ . Die Koalitionswerte  $v^{\mathcal{R}}(S)$  aller anderen Koalitionen  $S \in 2^N \setminus \mathcal{R}$  sind so definiert, dass  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}(S) = 0$  gilt.

Für Level-Structures  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  definieren wir für  $\underline{\mathcal{R}} \subseteq 2^N \setminus \emptyset$ ,  $C \in \underline{\mathcal{R}}$  für alle  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$ , eine analoge **relevante Koalitionsfunktion**  $v^{\underline{\mathcal{R}}}$ , die für alle Koalitionen  $T \in \underline{\mathcal{R}}$  die gleichen Funktionswerte wie  $v$  besitzt und für die Dividenden aller anderen Koalitionen  $S \in 2^N \setminus \underline{\mathcal{R}}$   $\Delta_{v^{\underline{\mathcal{R}}}}(S) = 0$  gilt.

Als relevante Koalitionen kommen alle in der Praxis als wesentlich betrachtete Koalitionen in Frage. Das können z. B. für eine Firma Gruppen von Personen sein, die im selben Gebäude oder derselben Fabrik arbeiten, oder die Koalitionen haben eine bestimmte maximale Größe und/oder bestimmte Anforderungen an einen Teil der Mitglieder, wie beim Bordpersonal eines Flugzeugs usw.. Um die Values Pareto-optimal zu halten, ist in unserer Definition die große Koalition immer Bestandteil der relevanten Koalitionen. Wir können auf andere Varianten aus Platzgründen nicht eingehen.

**Bemerkung 6.0.2.** Wir können jede relevante Koalition auch als Hyperkante, bzw. Knoten eines Hypergraphens bei Einerkoalitionen auffassen. So sind wir konform mit Bemerkung 4.4.3 und hätten dieses Kapitel auch als Erweiterung von Kapitel 4 bringen können.

Die relevante Koalitionsfunktion kann für den  $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^f$ , den  $f$ -Weighted- $ILS$ -Shapley-Value  $Sh^{fILS}$  und  $f$ -Weighted- $SLS$ -Shapley-Value  $Sh^{fSLS}$  direkt verwendet werden. Für die relevante Koalitionsfunktion sollen beim Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Value  $Sh^{tf}$  (Def. 3.7.1) zur Gewichtung in den Anteilsverhältnissen nun nicht mehr alle Teilmengen, die einen Spieler  $i$  enthalten, berücksichtigt werden, sondern nur diejenigen, die auch in  $\mathcal{R}$  enthalten sind. Wir ändern darum leicht unsere ursprüngliche Definition in eine für relevante Koalitionen:

**Definition 6.0.3.** Für alle  $N \subseteq \mathcal{N}$ , eine Funktion  $f$  mit  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  oder  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

- alle  $v \in \mathcal{G}_{++}^N$ , falls  $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,
- alle  $v \in \mathcal{G}^N$ , falls  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,

eine Menge  $\mathcal{R}$  relevanter Koalitionen mit zugehöriger relevanter Koalitionsfunktion  $v^{\mathcal{R}}$  nach Definition 6.0.1 und einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{R} \setminus N|}$  von Gewichten  $w_T, w_T > 0$  für alle  $T \in \mathcal{R} \setminus N$ , definieren wir für  $T \in \mathcal{R}$ ,  $T \ni i$ , das totale  $f$ -gewichtete Anteilsverhältnis  $Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), T}$  eines Spielers  $i \in N$  an einer Dividende  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}(T)$  rekursiv mit folgenden Ausdrücken:

$$Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), T}(i) = \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T, \\ S \ni i, S \in \mathcal{R}}} Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), S}(i) f(v^{\mathcal{R}}(S), w_S)}{\sum_{\substack{S \subseteq T, \\ S \in \mathcal{R}}} f(v^{\mathcal{R}}(S), w_S)} \quad \text{für } |T| > 1 \quad (6.1)$$

und

$$Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), T}(i) = 1 \quad \text{für } T = \{i\}. \quad (6.2)$$

Dann ist der zu  $f(v, w)$  zugehörige **Totally-f-Weighted-Shapley-Value-For-Relevant-Coalitions**  $Sh^{tf^{\mathcal{R}}}$  gegeben durch

$$Sh_i^{tf(v, w)^{\mathcal{R}}}(v) = \sum_{T \in \mathcal{R}, T \ni i} Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), T}(i) \Delta_{v^{\mathcal{R}}}(T) \quad \text{für alle } i \in N. \quad (6.3)$$

**Bemerkung 6.0.4.** Alle Eigenschaften aus Abschnitt 3.7 des Totally-f-Weighted-Shapley-Values, außer Bemerkung 3.7.5, lassen sich auf den Totally-f-Weighted-Shapley-Value-For-Relevant-Coalitions übertragen und analog beweisen.

## 6.1. Komplexitätsbetrachtungen für relevante Koalitionen

Wir verwenden in diesem Abschnitt die Bezeichnungen 2.0.18.

**Satz 6.1.1.** Sei  $n \in \mathcal{N}$  und  $v \in \mathcal{G}^N$ . Ist die Anzahl der relevanten Koalitionen  $T \in \mathcal{R}$  bzw.  $T \in \underline{\mathcal{R}}$  (Def. 6.0.1) durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt, liegt die Laufzeit zur Berechnung aller Dividenden  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}(T)$  bzw.  $\Delta_{v^{\underline{\mathcal{R}}}}(T)$  in  $O(n^{2k})$ .

*Beweis.* Für den Beweis geben wir einen Algorithmus an:

---

**Algorithmus 6.1.1.** Berechne  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}$

---

**Input:** Die relevante Koalitionsfunktion  $v^{\mathcal{R}}$  (Def. 6.0.1) einer Koalitionsfunktion  $v$ .

1: **for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**

2:      $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}(\{i\}) := v(\{i\})$                      // 2.13

3: **end for**

4: **for**  $j = 2$  **to**  $n$  **do**                             // gibt die Koalitionsgröße vor

5:     **for**  $m = 1$  **to**  $|S_j^{\mathcal{R}}|$  **do**                     // alle Koalitionen aus  $\mathcal{R}$  der Größe  $j$

6:

$$\Delta_{v^{\mathcal{R}}}(T_{jm}^{\mathcal{R}}) := v(T_{jm}^{\mathcal{R}}) - \sum_{\substack{S \subseteq T_{jm}^{\mathcal{R}}, \\ S \in \mathcal{R}}} \Delta_v(S) \quad // 2.13$$

7:     **end for**

8: **end for**

9: **return**  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}(T)$  für alle  $T \in \mathcal{R}$ ,

wobei  $|S_j^{\mathcal{R}}|$  die Anzahl aller Koalitionen aus  $\mathcal{R}$  mit  $j$  vielen Spielern und  $T_{jm}^{\mathcal{R}}$  die  $m$ -te Koalition aus  $\mathcal{R}$  mit  $j$  vielen Spielern ist.

*Beschreibung:* Der Algorithmus berechnet zuerst die Dividenden aller Einerkoalitionen und geht dann sukzessive auf die Dividenden der größeren Koalitionen aus  $\mathcal{R}$  über.

*Komplexität:* Die Anzahl der Summanden in Zeile 6 ist durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt und somit gilt  $t(Z_6) \in O(n^k)$ . Die Anzahl der Aufrufe von Zeile 6 durch die beiden geschachtelten Schleifen, Zeile 4, Zeile 5, ist durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt. Es folgt

$$\begin{aligned} t(\text{Algorithmus 6.1.1}) &= t(F_1) + t(F_4) = n + \sum_{j=2}^n t(F_5) \\ &= n + \sum_{j=2}^n \sum_{m=1}^{|S_j^{\mathcal{R}}|} t(Z_6). \end{aligned}$$

Somit ist Algorithmus 6.1.1 in  $O(n) + O(n^{2k}) = O(n^{2k})$  Zeit ausführbar.

Der Beweis für die Dividenden  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}$  ergibt sich völlig analog.  $\square$

Es gilt

**Satz 6.1.2.** *Jede Level-Structure  $\underline{P} \in \mathcal{LS}^N$  enthält maximal  $2n-1$  Komponenten  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$ .*

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch Induktion über  $n$ :

*Induktionsanfang:* Für  $n = 1$  ist nichts zu zeigen.

*Induktionsschritt:* Gelte jetzt die Aussage für  $n - 1$ ,  $n \geq 2$ . D.h. wir haben eine Level-Structure mit  $n - 1$  Spielern und es gibt maximal  $2(n - 1) - 1 = 2n - 3$  Komponenten (IA). Sei die Anzahl der Komponenten, die die  $n - 1$  Spieler mit einem zusätzlichen Spieler  $j$  bilden, maximal. Nach der Einerkoalition des  $j$  gibt es eine zweitkleinste Komponente  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$ , der Spieler  $j$  angehört, da die große Koalition immer existiert. Scheide Spieler  $j$  wieder aus dem Spiel aus. Dann ist die maximale Anzahl von Komponenten jetzt höchstens um zwei kleiner wie vorher: Alle vorherigen Komponenten können Komponenten bleiben, allerdings ohne Spieler  $j$ , bis auf die Einerkoalition des  $j$ . Die vorherige zweitkleinste Komponente des  $j$  kann ohne den Spieler  $j$  schon bei  $n$  Spielern eine Komponente gewesen sein. Somit gibt es bei  $n$  Spielern maximal zwei Komponenten mehr als bei einer maximalen Anzahl von Komponenten bei  $n - 1$  Spielern und aus (IA) folgt die Behauptung.  $\square$

Wir können jetzt, wenn wir statt der Koalitionsfunktion  $v$  die relevante Koalitionsfunktion  $v^{\mathcal{R}}$  bzw.  $v^{\underline{\mathcal{R}}}$  verwenden, folgende Auszahlungen effizient berechnen:

**Satz 6.1.3.** *Ist die Anzahl der relevanten Koalitionen  $T \in \mathcal{R}$  bzw.  $T \in \underline{\mathcal{R}}$  (Def. 6.0.1) durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt, liegt die Laufzeit für*

- I.  $Sh^f(v^{\mathcal{R}})$  (Def. 3.4.1) in  $O(n^{2k})$ ,
- II.  $Sh^{t^{\mathcal{R}}}(v)$  (Def. 6.0.3) in  $O(n^{2k+1})$ ,
- III.  $Sh^{fILS}(v^{\underline{\mathcal{R}}}, \underline{P})$  (Def. 5.7.1) in  $O(n^3)$  für  $k = 1$  und  $O(n^{2k})$  für  $k \geq 2$ ,

IV.  $Sh^{fSLs}(v^{\mathcal{R}}, \underline{P})$  (Def. 5.7.15) in  $O(n^3)$  für  $k = 1$  und  $O(n^{2k})$  für  $k \geq 2$ .

*Beweis.* I. Wir geben einen Algorithmus zur Auszahlungsberechnung an:

---

**Algorithmus 6.1.2.** Berechne  $Sh^f(v^{\mathcal{R}})$  (Def. 3.4.1)

---

**Input:** Ein TU-Spiel  $(N, v^{\mathcal{R}})$ , wobei  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}$  gegeben ist.

1: **for all**  $S \in \mathcal{R}$  **do**

2:      $sumNenner(S) := \sum_{j \in S} f(v^{\mathcal{R}}(\{j\}), w_j)$

3: **end for**

4: **for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**

5:      $Sh_i^{f(v^{\mathcal{R}}, w)}(v^{\mathcal{R}}) = \sum_{\substack{S \in \mathcal{R}, \\ S \ni i}} \frac{f(v^{\mathcal{R}}(\{i\}), w_i)}{sumNenner(S)} \Delta_{v^{\mathcal{R}}}(S)$

6: **end for**

7: **return**  $Sh^f(v^{\mathcal{R}})$ .

---

*Beschreibung:* Vorab werden für alle relevanten Koalitionen die Nennersummen für Zeile 5 berechnet und anschließend damit jedem Spieler die Endauszahlung zugewiesen.

*Komplexität:* Die Anzahl der Schleifendurchläufe Zeile 1 und die Anzahl der Summanden Zeile 5 ist durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt. Für eine Zuweisung Zeile 2 gilt  $t(Z_2) \in O(n)$ . Somit gilt  $t(F_1) \in O(n \cdot n^k) = O(n^{k+1})$  und es folgt:

$$t(\text{Alg. 6.1.2}) = t(F_1) + t(F_4) = t(F_1) + n(t(Z_5)).$$

Somit ist Algorithmus 6.1.2 in  $O(n^{k+1}) + O(n \cdot n^k) = O(n^{k+1})$  Zeit ausführbar. Mit der Zeit für die Dividendenberechnung ergibt sich eine Gesamtlaufzeit für  $Sh^f$  von  $O(n^{k+1}) + O(n^{2k}) = O(n^{2k})$ .

II. Für die Berechnung von  $Sh^{tf\mathcal{R}}$  geben wir einen Algorithmus an:

---

**Algorithmus 6.1.3.** Berechne  $Sh^{tf\mathcal{R}}(v)$  (Def. 6.0.3)

---

**Input:** Ein TU-Spiel  $(N, v)$ , wobei eine Menge  $\mathcal{R}$  relevanter Koalitionen mit zugehöriger relevanter Koalitionsfunktion  $v^{\mathcal{R}}$  nach Definition 6.0.1 und  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}$  gegeben ist.

1: **for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**

2:      $Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), \{i\}}(i) := 1$      // 6.2

3:     **for**  $j = 2$  **to**  $n$  **do**     // gibt die Koalitionsgröße vor

4:         **for**  $m = 1$  **to**  $|S_j^{\mathcal{R}}(i)|$  **do** // alle Koalitionen aus  $\mathcal{R}$  der Größe  $j$ , die  $i$  enthalten

5:

$$Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), T_{j_m}^{\mathcal{R}}(i)}(i) := \frac{\sum_{\substack{S \subseteq T_{j_m}^{\mathcal{R}}(i), \\ S \ni i, S \in \mathcal{R}}} Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), S}(i) f(v^{\mathcal{R}}(S), w_S)}{\sum_{\substack{S \subseteq T_{j_m}^{\mathcal{R}}(i), \\ S \in \mathcal{R}}} f(v^{\mathcal{R}}(S), w_S)} \quad // 6.1$$

6:     **end for**

7:     **end for**

8:

$$Sh_i^{tf(v, w)^{\mathcal{R}}}(v) := \sum_{T \in \mathcal{R}, T \ni i} Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), T}(i) \Delta_{v^{\mathcal{R}}}(T) \quad // 6.3$$

9: **end for**

10: **return**  $Sh^{tf\mathcal{R}}(v)$ ,

wobei  $|S_j^{\mathcal{R}}(i)|$  die Anzahl aller Koalitionen aus  $\mathcal{R}$  mit  $j$  vielen Spielern ist, die Spieler  $i$  enthalten und  $T_{jm}^{\mathcal{R}}(i)$  die  $m$ -te Koalition aus  $\mathcal{R}$  mit  $j$  vielen Spielern ist, die Spieler  $i$  enthält.

*Beschreibung:* Der Algorithmus berechnet zunächst sukzessive für jeden einzelnen Spieler die Anteilsverhältnisse von den Dividenden der kleineren Koalitionen aus  $\mathcal{R}$  zu den größeren, in denen er enthalten ist und weist dann die Endauszahlung jedem Spieler zu.

*Komplexität:* Die Anzahl der Summanden im Zähler und im Nenner des Bruchs Zeile 5 ist durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt und somit gilt  $t(Z_5) \in O(2n^k) = O(n^k)$ . Die Anzahl der Aufrufe von Zeile 5 durch die beiden geschachtelten Schleifen, Zeile 3, Zeile 4, und die Anzahl der Summanden in Zeile 8 ist durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt. Es folgt  $t(Z_8) \in O(n^k)$  und es gilt:

$$\begin{aligned} t(\text{Alg. 6.1.3}) &= t(F_1) = n[1 + t(F_3) + t(Z_8)] \\ &= n \left[ 1 + \sum_{j=2}^n \sum_{m=1}^{|S_j^H(i)|} t(Z_5) + t(Z_8) \right] = n + n \sum_{j=2}^n \sum_{m=1}^{|S_j^H(i)|} t(Z_5) + nt(Z_8). \end{aligned}$$

Somit ist Algorithmus 6.1.3 in  $O(n + nn^{2k} + nn^k) = O(n^{2k+1})$  Zeit ausführbar. Mit der Zeit für die Dividendenberechnung von  $O(n^{2k})$  ergibt sich eine Gesamtlaufzeit zur Berechnung von  $Sh^{t\mathcal{R}}$  von  $O(n^{2k}) + O(n^{2k+1}) = O(n^{2k+1})$ .

III. Für die Berechnung von  $Sh^{fLLS}$  geben wir einen Algorithmus an:

---

**Algorithmus 6.1.4.** Berechne  $Sh^{fLLS}(v^{\mathcal{R}}, \underline{P})$  (Def. 5.7.1)

---

**Input:** Ein LS-Spiel  $(N, v^{\mathcal{R}}, \underline{P})$ , wobei  $\Delta_{v^{\mathcal{R}}}$  gegeben ist.

```

1: for all  $T \in \underline{\mathcal{R}}$  do mit  $|T| \neq 1$ 
2:    $\check{S}_T := \{N\}$ 
3:   for all  $i \in T$  do
4:      $S_T := N$ 
5:     while  $S_T \neq \{i\}$  do
6:        $\check{C}_{S_T}(i) := C^m(i), C^m(i) \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$  mit  $|C^m(i)| = \max_{\substack{C^\ell(i) \in \mathcal{C}_{\underline{P}}, \\ C^\ell(i) \subsetneq S_T}} |C^\ell(i)|$ 
7:        $S_T := \check{C}_{S_T}(i)$ 
8:        $\check{S}_T := \check{S}_T \cup \{S_T\}$ 
9:     end while
10:  end for
11:  for all  $S_T \in \check{S}_T$  do
12:     $\check{C}_{S_T} := \{\check{C}_{S_T}(j) : j \in S_T\}$ 
13:     $sumNenner(S_T) := \sum_{C \in \check{C}_{S_T}} f(v^{\mathcal{R}}(C), w_C)$ 
14:  end for
15: end for
16: for  $i = 1$  to  $n$  do
17:   for all  $T \in \underline{\mathcal{R}}$  mit  $T \ni i$  do
18:      $Q_{f(v^{\mathcal{R}}, w), T}^{fLLS}(i) := 1$ 
19:      $S_T := N$ 
20:     while  $S_T \neq \{i\}$  do

```

21:

$$Q_{f(v^{\mathcal{R}},w),S_T}^{ILS}(i) := \frac{f\left(v^{\mathcal{R}}(\check{C}_{S_T}(i)), w_{\check{C}_{S_T}(i)}\right)}{\text{sumNenner}(S_T)}$$

22:

$$Q_{f(v^{\mathcal{R}},w),T}^{ILS}(i) := Q_{f(v^{\mathcal{R}},w),S_T}^{ILS}(i) \cdot Q_{f(v^{\mathcal{R}},w),T}^{ILS}(i)$$

23:

$$S_T := \check{C}_{S_T}(i)$$

24:

**end while**

25:

**end for**

26:

$$Sh_i^{f(v^{\mathcal{R}},w)ILSR}(v^{\mathcal{R}}, \underline{P}) := \sum_{T \in \underline{\mathcal{R}}, T \ni i} Q_{f(v^{\mathcal{R}},w),T}^{ILS}(i) \Delta_{v^{\mathcal{R}}}(T)$$

 27: **end for**

 28: **return**  $Sh^{fILS}(v^{\mathcal{R}}, \underline{P})$ .

Der Algorithmus berechnet für die Koalitionsfunktion  $v^{\mathcal{R}}$  den Value aus Definition 5.7.1, da die Anteilsverhältnisse, die in Zuweisung Zeile 26 übergeben werden, gleich denen aus Definition 5.7.1 für die Koalitionsfunktion  $v^{\mathcal{R}}$  sind:

Für jedes  $T \subseteq N$ ,  $T \ni i$ , und alle  $S_T \in \check{\mathcal{S}}_T$  existiert ein Level  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq h-1$ , mit  $\check{C}_{S_T}(i) = C^\ell(i)$  und  $C^\ell(i) \neq C^{\ell+1}(i)$ , für den

$$\frac{f\left(v^{\mathcal{R}}(\check{C}_{S_T}(i)), w_{\check{C}_{S_T}(i)}\right)}{\sum_{C \in \check{C}_{S_T}} f\left(v^{\mathcal{R}}(C), w_C\right)} = \frac{f\left(v^{\mathcal{R}}(C^\ell(i)), w_{C^\ell(i)}\right)}{\sum_{\substack{C^\ell \subseteq C^{\ell+1}(i), \\ C^\ell \cap T \neq \emptyset}} f\left(v^{\mathcal{R}}(C^\ell), w_{C^\ell}\right)} \quad (6.4)$$

gilt. Für alle anderen Level  $\ell$  gilt  $C^\ell(i) = C^{\ell+1}(i)$  und deshalb ist der Faktor  $Q_{f(v^{\mathcal{R}},w),T}^{I^\ell}(i)$  5.64 aus Definition 5.7.1 gleich 1. Somit sind die gewichteten Anteilsverhältnisse  $Q_{f(v^{\mathcal{R}},w),T}^{ILS}(i)$  und  $Q_{f(v^{\mathcal{R}},w),T}^{ILS}(i)$  aus Definition 5.7.1 und Algorithmus 6.1.4 identisch.

*Beschreibung:* Die für jeden Schritt benötigten Werte werden für alle relevanten Koalitionen außer den Einerkoalitionen berechnet, dann werden jedem Spieler in der zweiten While-Schleife mit diesen Werten die Anteilsverhältnisse und damit dann die Endauszahlung zugewiesen.

*Komplexität:* Die Anzahl der Schleifendurchläufe Zeile 1 und Zeile 17 und die Anzahl der Summanden Zeile 26 ist durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt. Für ein  $i$  aus Zeile 3 gilt für die While-Schleife Zeile 5  $t(W_5) \in O(n)$ . Nach Satz 6.1.2 enthält die Menge  $\check{\mathcal{S}}_T$  aus Zeile 11 weniger als  $2n$  Elemente. Für einen Schleifendurchlauf von Schleife Zeile 1 folgt somit:

$t = t(Z_2) + t(F_3) + t(F_{11}) < 1 + n[t(Z_4) + t(W_5)] + 2n(n+n) \in O(1 + n(1+n) + 4n^2) = O(n^2)$ . Somit folgt  $t(F_1) \in O(n^k n^2) = O(n^{k+2})$ . Für jeden Schleifendurchlauf Zeile 17 gilt:

$t = t(Z_{18}) + t(Z_{19}) + t(W_{20}) \leq 1 + 1 + n[t(Z_{21}) + t(Z_{22}) + t(Z_{23})] \leq c + nc \in O(n)$ . Somit folgt  $t(F_{17}) \in O(n^k n) = O(n^{k+1})$ . Für Zuweisung Zeile 26 folgt  $t(Z_{26}) \in O(n^k)$ .

Damit gilt

$$t(\text{Alg. 6.1.4}) = t(F_1) + t(F_{16}) = t(F_1) + n[t(F_{17}) + t(Z_{26})].$$

Somit ist Algorithmus 6.1.4 in  $O(n^{k+2}) + O(n(n^{k+1} + n^k)) = O(n^{k+2})$  Zeit ausführbar. Mit der Zeit für die Dividendenberechnung ergibt sich eine Gesamtlaufzeit für  $Sh^{fILS}(v^{\mathcal{R}}, \underline{P})$  von  $O(n^{k+2}) + O(n^{2k}) = O(n^{2k})$  für  $k \geq 2$  und  $O(n^3)$  für  $k = 1$ .

IV. Folgender Algorithmus lässt sich direkt aus Definition 5.7.15 ableiten:

---

**Algorithmus 6.1.5.** *Berechne  $Sh^{fSLS}(v^{\underline{R}}, \underline{P})$  (Def. 5.7.15)*

---

**Input:** Ein LS-Spiel  $(N, v^{\underline{R}}, \underline{P})$ , wobei  $\Delta_{v^{\underline{R}}}$  gegeben ist.

```

1: for all  $S \in \underline{R}$  do mit  $|S| \neq 1$ 
2:    $\bar{C}_S := \emptyset$ 
3:   for all  $i \in S$  do
4:      $\bar{C}_S(i) := C^m(i)$ ,  $C^m(i) \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$  mit  $|C^m(i)| = \max_{\substack{C^\ell(i) \in \mathcal{C}_{\underline{P}}, \\ C^\ell(i) \subsetneq S}} |C^\ell(i)|$ 
5:      $\bar{C}_S := \bar{C}_S \cup \{\bar{C}_S(i)\}$ 
6:   end for
7:    $sumNenner(S) := \sum_{C \in \bar{C}_S} f(v^{\underline{R}}(C), w_C)$ 
8: end for
9: for  $i = 1$  to  $n$  do
10:  for all  $T \in \underline{R}$  mit  $T \ni i$  do
11:     $Q_{f(v^{\underline{R}}, w), T}^{SLS}(i) := 1$ 
12:     $S := T$ 
13:    while  $S \neq \{i\}$  do // Schritt
14:       $Q_{f(v^{\underline{R}}, w), S}^{SLS}(i) := \frac{f(v^{\underline{R}}(\bar{C}_S(i)), w_{\bar{C}_S(i)})}{sumNenner(S)}$ 
15:       $Q_{f(v^{\underline{R}}, w), T}^{SLS}(i) := Q_{f(v^{\underline{R}}, w), S}^{SLS}(i) \cdot Q_{f(v^{\underline{R}}, w), T}^{SLS}(i)$ 
16:       $S := \bar{C}_S(i)$ 
17:    end while
18:  end for
19:     $Sh_i^{f(v^{\underline{R}}, w)SLS}(v^{\underline{R}}, \underline{P}) := \sum_{T \in \underline{R}, T \ni i} Q_{f(v^{\underline{R}}, w), T}^{SLS}(i) \Delta_{v^{\underline{R}}}(T)$ 
20: end for
21: return  $Sh^{fSLS}(v^{\underline{R}}, \underline{P})$ ,

```

---

*Beschreibung:* Die für jeden Schritt benötigten Werte werden für alle relevanten Koalitionen außer den Einerkoalitionen berechnet, dann werden jedem Spieler in der While-Schleife mit diesen Werten die Anteilsverhältnisse und damit dann die Endauszahlung zugewiesen.

*Komplexität:* Die Anzahl der Schleifendurchläufe Zeile 1 und Zeile 10 und die Anzahl der Summanden Zeile 19 ist durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt. Für einen Schleifendurchlauf von Schleife Zeile 1 gilt:

$$t = t(Z_2) + t(F_3) + t(Z_7) \leq 1 + n(t(Z_3) + t(Z_4)) + n \leq 1 + n(n - 1 + 1) + n \in O(n^2).$$

Somit folgt  $t(F_1) \in O(n^k n^2) = O(n^{k+2})$ .

Für jeden Schleifendurchlauf von Schleife Zeile 10 gilt:

$$t = t(Z_{11}) + t(Z_{12}) + t(W_{13}) \leq 1 + 1 + n[t(Z_{14}) + t(Z_{15}) + t(Z_{16})] \leq c + nc \in O(n).$$

Somit folgt  $t(F_{10}) \in O(n^k n) = O(n^{k+1})$ .

Für Zuweisung Zeile 19 folgt  $t(Z_{19}) \in O(n^k)$ . Damit gilt

$$t(\text{Alg. 6.1.5}) = t(F_1) + t(F_9) = t(F_1) + n[t(F_{10}) + t(Z_{19})].$$

Somit ist Algorithmus 6.1.5 in  $O(n^{k+2}) + O(n(n^{k+1} + n^k)) = O(n^{k+2})$  Zeit ausführbar. Mit der Zeit für die Dividendenberechnung ergibt sich eine Gesamtlaufzeit für  $Sh^{fSLs}$  von  $O(n^{k+2}) + O(n^{2k}) = O(n^{2k})$  für  $k \geq 2$  und  $O(n^3)$  für  $k = 1$ .  $\square$

**Bemerkung 6.1.4.** Aus Satz 6.1.3 folgt, dass mit Algorithmus 6.1.4 auch eine effiziente Berechnung des Nested-Partitions-Shapley-Values und des Level-Structure-Values möglich ist, wenn der Grad der Level-Structure nicht begrenzt, dafür aber die Anzahl der relevanten Koalitionen durch ein Polynom  $k$ -ten Grades beschränkt ist.

**Satz 6.1.5.** Ist der Grad  $d$  einer Level-Structure  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  begrenzt, ist die Anzahl der Elemente der Menge  $\mathcal{R}^{NP}$  aus Bemerkung 5.3.1 durch ein Polynom 1. Grades beschränkt.

*Beweis.* Sei  $d$  begrenzt. Nach Satz 6.1.2 gibt es maximal  $2n - 1$  Komponenten  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$ . Jede Komponente  $C_q^\ell \in P^\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq h$ , enthält maximal  $d$  Komponenten  $C_r^{\ell-1} \subseteq C_q^\ell$ ,  $C_r^{\ell-1} \in P^{\ell-1}$ . Aus  $d$  Komponenten  $C_r^{\ell-1}$  lassen sich  $2^d - 1$  verschiedene Koalitionen  $T$  zusammensetzen. Jede Koalition  $T$  bildet mit maximal  $d - 1$  Komponenten  $C_s^\ell \neq C_q^\ell$ , die Teilmengen der Komponente  $C_t^{\ell+1}$  sind, die  $T$  enthält, höchstens  $2^d - 1$  Koalitionen  $S$ . Insgesamt gibt es somit für jede Komponente  $C_q^\ell$  höchstens  $(2^d - 1)(2^d - 1) < 2^{2d}$  zugehörige Koalitionen  $S$ . Die zu allen Komponenten  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$  zugehörigen Koalitionen  $S$  sind genau die relevanten Koalitionen der Menge  $\mathcal{R}^{NP}$  aus Bemerkung 5.3.1. Es folgt  $|\mathcal{R}^{NP}| < (2n - 1) \cdot 2^{2d}$ .  $\square$

Wir können somit mit den obigen Algorithmen den Nested-Partitions-Shapley-Value in  $O(n^3)$  Zeit berechnen. Die Laufzeit kann aber noch verbessert werden, wenn wir die spezielle Struktur der Nested-Partitions auch bei der Konstruktion des Algorithmus berücksichtigen. Dazu geben wir beispielhaft einen Algorithmus für den  $f$ -Weighted-ALS-Shapley-Value an und formulieren zuvor:

**Satz 6.1.6.** Ist der Grad  $d$  einer Level-Structure  $\underline{P} = (P^0, \dots, P^h) \in \mathcal{LS}^N$  begrenzt und jeder Level einer niedrigeren Stufe echt feiner als der einer höheren, ist der  $f$ -Weighted-ALS-Shapley-Value  $Sh^{fALS}$  aus Definition 5.7.8, falls  $f$  in konstanter Zeit berechenbar ist, und damit auch der Nested-Partitions-Shapley-Value  $Sh^{NP}$  für die relevante Koalitionsfunktion  $v^{NP}$  aus Definition 5.3.6 mit der Menge  $\mathcal{R}^{NP}$  relevanter Koalitionen aus Bemerkung 5.3.1 in  $O(n^2)$  Zeit zu berechnen.

*Beweis.* Zu beachten ist, dass wir nur mehr einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^{|\mathcal{R}^{NP} \setminus N|}$  von Gewichten  $w_T$ ,  $w_T > 0$  für alle  $T \in \mathcal{R}^{NP} \setminus N$  benötigen. Wir formulieren einen Algorithmus:

---

**Algorithmus 6.1.6.** Berechne  $Sh^{fALS}(v^{NP}, \underline{P})$  (Def. 5.7.8)

---

**Input:** Ein LS-Spiel  $(N, v^{NP}, \underline{P})$ , wobei  $\Delta_{v^{NP}}$  gegeben ist und jeder Level echt feiner ist als der folgende.

- 1: **for all**  $C^1 \in P^1$  **do**
- 2:      $\mathcal{T}^{C^1} := \{T : T = \bigcup_{S \in \hat{P}^0} S, \hat{P}^0 \subseteq P^0, T \subseteq C^1\}$
- 3:     **for all**  $T \in \mathcal{T}^{C^1}$  **do**
- 4:          $\tilde{C}_T^1 := \{\tilde{C}_T^1 \mid \tilde{C}_T^1 := T \text{ falls } |T| = 1 \text{ und } \tilde{C}_T^1 := C \in P^0, C \subsetneq T, \text{ sonst}\}$
- 5:          $sumNenner(T) := \sum_{\tilde{C}_T^1 \in \tilde{C}_T^1} f(v^{NP}(\tilde{C}_T^1), w_{\tilde{C}_T^1})$

6: **end for**  
 7: **end for**  
 8: **for**  $\ell = 2$  **to**  $h$  **do**  
 9:   **for all**  $C^\ell \in P^\ell$  **do**  
 10:      $\mathcal{T}_1^{C^\ell} := \{T : \text{ Falls } T \neq C^\ell \text{ gilt } T \notin P^{\ell-1}, T = \bigcup_{S \in \hat{P}^{\ell-1}} S, \hat{P}^{\ell-1} \subsetneq P^{\ell-1} \text{ mit } T \subseteq C^\ell\}$   
 11:      $\mathcal{T}_2^{C^\ell} := \{T : T = T' \cup S, T' = \bigcup_{C \in \hat{P}^{\ell-1}} C, \hat{P}^{\ell-1} \subsetneq P^{\ell-1} \text{ mit } T' \subseteq (C^\ell \setminus C_q^{\ell-1}), C_q^{\ell-1} \subsetneq C^\ell, C_q^{\ell-1} \in P^{\ell-1}, S \subsetneq C_q^{\ell-1}, S = \bigcup_{R \in \hat{P}^{\ell-2}} R, \hat{P}^{\ell-2} \subsetneq P^{\ell-2}\}$   
 12:      $\mathcal{T}^{C^\ell} := \mathcal{T}_1^{C^\ell} \cup \mathcal{T}_2^{C^\ell}$   
 13:     **for all**  $T \in \mathcal{T}_1^{C^\ell}$  **do**  
 14:        $\tilde{C}_T^\ell := \{\tilde{C}_T^\ell \mid \tilde{C}_T^\ell := C^{\ell-1} \in P^{\ell-1}, C^{\ell-1} \subsetneq T \text{ falls } T \neq C^\ell, \text{ sonst gilt } \tilde{C}_T^\ell := T.\}$   
 15:        $\text{sumNenner}(T) := \sum_{\tilde{C}_T^\ell \in \tilde{C}_T^\ell} f(v^{NP}(\tilde{C}_T^\ell), w_{\tilde{C}_T^\ell})$   
 16:     **end for**  
 17:     **for all**  $T \in \mathcal{T}_2^{C^\ell}$  **do**  
 18:        $\tilde{C}_T^\ell := \{\tilde{C}_T^\ell \mid \tilde{C}_T^\ell := C_t^{\ell-1} \text{ f\"ur alle } C_t^{\ell-1} \subseteq T', C_t^{\ell-1} \in P^{\ell-1} \text{ und } \tilde{C}_T^\ell = S, \text{ wobei } T = T' \cup S \text{ aus Zuweisung Zeile 11 ist.}\}$   
 19:        $\text{sumNenner}(T) := \sum_{\tilde{C}_T^\ell \in \tilde{C}_T^\ell} f(v^{NP}(\tilde{C}_T^\ell), w_{\tilde{C}_T^\ell})$   
 20:     **end for**  
 21:   **end for**  
 22: **end for**  
 23: **for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**  
 24:    $Q_{f(v^{NP}, w), \{i\}}^{ALS}(i) := 1$   
 25: **end for**  
 26: **for**  $\ell = 1$  **to**  $h$  **do**  
 27:   **for all**  $C^\ell \in P^\ell$  **mit**  $|C^\ell| > |C^{\ell-1}|$  **wenn**  $C^{\ell-1} \subseteq C^\ell$  **do**  
 28:     **for all**  $T \in \mathcal{T}^{C^\ell}$  **do**  
 29:       **for all**  $i \in T$  **do**  
 30:          $Q_{f(v^{NP}, w), T}^{ALS}(i) := \frac{f(v^{NP}(\tilde{C}_T^\ell(i)), w_{\tilde{C}_T^\ell(i)})}{\text{sumNenner}(T)} \cdot Q_{f(v^{NP}, w), \tilde{C}_T^\ell(i)}^{ALS}(i)$   
 31:       **end for**  
 32:     **end for**  
 33:   **end for**  
 34: **end for**  
 35: **for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**  
 36:

$$Sh_i^{fALS}(v^{NP}, \underline{P}) := \sum_{T \in \mathcal{R}^{NP}, T \ni i} Q_{f(v^{NP}, w), T}^{ALS}(i) \Delta_{v^{NP}}(T)$$

37: **end for**

38: **return**  $Sh^{fALS}(v^{NP}, \underline{P})$ ,

wobei mit  $\tilde{C}_T^\ell(i)$ , dasjenige  $\tilde{C}_T^\ell \in \tilde{C}_T^\ell$  gemeint ist, das den Spieler  $i$  enthält.

---

Der Algorithmus berechnet für die Koalitionsfunktion  $v^{NP}$  aus Definition 5.3.6 den Value aus Definition 5.7.8, da die Anteilsverhältnisse, die in Zuweisung Zeile 36 übergeben wer-

den, gleich denen aus Definition 5.7.8 sind. Denn für alle  $T \in \mathcal{T}^{C^m}$ ,  $1 \leq m \leq h$ ,  $T \ni i$ , gilt  $\check{C}_T^m(i)$  aus dem Algorithmus ist gleich  $\check{C}_T^{m-1}(i)$  aus Definition 5.7.8, damit entspricht  $Q_{f(v^{NP},w),T}^{ALS}(i)$  aus Algorithmus 6.1.6 dem Produkt der  $Q_{f(v^{NP},w),T}^{A^\ell}(i)$  von  $\ell = 0$  bis  $m - 1$  in Definition 5.7.8 und alle  $Q_{f(v^{NP},w),T}^{A^\ell}(i)$  eines höheren Levels  $\ell$  sind für diese  $T$  gleich 1.

*Beschreibung:* Zuerst werden für jede Komponente die benötigten Werte von Koalitionen, die sich der Komponente zurechnen lassen, und damit sukzessive vom kleinsten zum größten Level die gewichteten Anteile an den Dividenden der relevanten Koalitionen einer Nested-Partitions berechnet. Damit erhält schließlich jeder Spieler seine Auszahlung..

*Komplexität:* Sei der Grad  $d$  von  $\underline{P}$  begrenzt. Nach dem Beweis von Satz 6.1.5 gibt es für jede der maximal  $2n - 1$  Komponenten  $C \in \mathcal{C}_{\underline{P}}$  jeweils weniger als  $2^{2d}$  zurechenbare Koalitionen  $S$  und es gilt  $|\mathcal{R}^{NP}| < (2n - 1) \cdot 2^{2d}$ . Zuweisung Zeile 30 erfordert konstante Zeit. Somit gilt für Schleife Zeile 29  $t(F_{29}) = O(n)$ . Ein Schleifendurchlauf Zeile 27 ist somit in  $O(n2^{2d})$  Zeit möglich und für Schleife Zeile 26 gilt deshalb  $t(F_{26}) = O(n \cdot n2^{2d}) = O(n^2)$ .

Zuweisung Zeile 10 erfordert  $O(2^d)$ , Zuweisung Zeile 11  $O(2^d \cdot 2^d) = O(2^{2d})$ , Zuweisung Zeile 12  $O(1)$ , Zuweisung Zeile 14, 15, 18 und 19  $O(d)$  Zeit. Somit gilt für Schleife Zeile 13  $t(F_{13}) = O(2d2^d)$  und für Schleife Zeile 17  $t(F_{17}) = O(2d2^{2d})$  und für Schleife Zeile 8 ergibt sich  $t(F_8) < nt(F_9) = O(n^2(2^d + 2^{2d} + 1 + 2d2^d + 2d2^{2d})) = O(n^2)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} t(\text{Alg. 6.1.6}) &= t(F_1) + t(F_8) + t(F_{23}) + t(F_{26}) + t(F_{35}) \\ &\leq (n - 1)(t(Z_2) + t(F_3)) + t(F_8) + nt(Z_{24}) + t(F_{26}) + nt(Z_{36}) \\ &< (n - 1)(2^d + 2^d(d + d)) + t(F_8) + n + t(F_{26}) + nt(Z_{36}). \end{aligned}$$

Somit ist Algorithmus 6.1.6 in  $O((n - 1) + n^2 + n + n^2 + n \cdot n) = O(n^2)$  Zeit ausführbar und es ergibt sich einschließlich Dividendenberechnung eine Gesamtlauzeit von  $O(n^2)$ .  $\square$

## Kapitel 7

# Ausblick

Die vorgestellte Arbeit bietet eine Reihe von Anknüpfungspunkten für weitere Forschungsaktivitäten:

Das Kapitel über Graphen und Hypergraphen wurde sehr knapp gehalten. Hier bietet sich z. B. an, zu untersuchen, ob eine Verallgemeinerung der Axiomatisierung, analog zu unserer aus Kapitel 3, von der des Shapley-Values, mit Pareto-Effizienz und Balanced-Contributions-Axiom, auf die für die  $f$ -Weighted- bzw. Totally- $f$ -Weighted-Shapley-Values, von der des Myerson-Values aus [Slikker 2001], mit Komponenten-Effizienz-Axiom und dem dortigen Balanced-Contributions-Axiom, auf die in Kapitel 4 gebrachten Values übertragbar ist.

Offen ist auch, zu zeigen, dass das in der Charakterisierung des Proportional- $CS$ -Values 5.5.5 verwendete Preservation-Of-Ratios-For-Groups-Axiom, für eine Level-Structure mit  $h = 2$ , äquivalent zu den beiden in [Huettner 2015] benutzten Axiomen Intermediate-Game-Property und Internal-Preservation-Of-Ratios-Property ist.

In der Definition der relevanten Koalitionen 6.0.1 könnte das Gebot, dass die große Koalition eine relevante Koalition sein muss, gestrichen bzw. durch alternative Forderungen ersetzt werden. Entsprechend ergeben sich andere Effizienz-Eigenschaften der Values, die zu untersuchen wären.

Abschließend sei noch eine Endogenisierung der Koalitionsbildung mithilfe von relevanten Koalitionen genannt, wobei wir hier das Gebiet der kooperativen mit der nichtkooperativen Spieltheorie verknüpfen. Wir denken z. B. an Modelle, in denen den Spielern etwa nur eine gewisse Anzahl von, für ihre Auszahlung sich günstig auswirkenden, relevanten Koalitionen zugeteilt werden sollen oder die Spieler selbst eine gewisse Anzahl von Koalitionen, an denen sie teilnehmen wollen, vorschlagen können. Wenn alle anderen Spieler einer solchen Koalition diese Koalition selbst in ihrem eigenen Vorschlag besitzen, wird diese Koalition in die Menge der relevanten Koalitionen aufgenommen. Neu an diesem Ansatz ist, dass, wenn die Anzahl der Vorschläge durch ein Polynom  $k$ -ten Grades begrenzt ist, eine effiziente Auszahlungsberechnung möglich ist.

# Literaturverzeichnis

- [Algaba, E., et al. 2007] Algaba, E., Bilbao, J., Fernández, J., Jiménez, N., & López, J. (2007): *Algorithms for computing the myerson value by dividends*, Discrete Mathematics Research Progress, pp. 1–13.
- [Calvo, Lasaga, Winter 1996] Calvo, Emilio, J. Javier Lasaga, & Eyal Winter (1996): *The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation*, Mathematical Social Sciences, 31(3), pp. 171–182.
- [Casajus 2007] Casajus, André (2007): *The position value is the Myerson value, in a sense*, International Journal of Game Theory 36(1), pp. 47–55.
- [Chun 1989] Chun, Youngsub (1989): *A new axiomatization of the Shapley value*, Games and Economic Behavior 1(2), pp. 119–130.
- [van Damme 1998] Damme, Eric van (1998): *On the State of the Art in Game Theory: An Interview with Robert Aumann*, Games and Economic Behavior 24, pp. 181–210.
- [Deng und Papadimitriou 1994] Deng, Xiaotie & Christos H. Papadimitriou (1994): *On the Complexity of Cooperative Solution Concepts*, Mathematics of Operations Research, Vol. 19, No. 2, pp. 257–266.
- [Feldman 1999] Feldman, Barry (1999): *The proportional value of a cooperative game*, Manuscript. Chicago: Scudder Kemper Investments.
- [Gómez-Rúa, Vidal-Puga 2011] Gómez-Rúa, María, and Juan Vidal-Puga (2011): *Balanced per capita contributions and level structure of cooperation*, Top, 19(1), 167–176.
- [Güting 2003] Güting, Ralf Hartmut & Stefan Dieker (2003): *Datenstrukturen und Algorithmen*, 2. Auflage, B.G.Teubner Verlag, Wiesbaden.
- [Harsanyi 1959] Harsanyi, John Charles (1959): *A bargaining model for cooperative n-person games*, in A. W. Tucker & R. D. Luce (Eds.), Contributions to the theory of games IV (pp. 325–355). Princeton NJ: Princeton University Press.
- [Harsanyi 1963] Harsanyi, John Charles (1963): *A simplified bargaining model for the n-person game*, International Economic Review, 4, pp. 194–220.
- [Hart und Mas-Colell 1989] Hart, Sergiu, and Andreu Mas-Colell (1989): *Potential, value, and consistency*, Econometrica: Journal of the Econometric Society, pp. 589–614.
- [Huettner 2010] Hüttner, Frank (2010): *An Owen-Type Proportional Value for Games in Coalition Structure*, Bachelorarbeit am Lehrstuhl für Diskrete Mathematik, Prof. Dr. Winfried Hochstättler, FernUniversität in Hagen.

- [Huettner 2015] Hüttner, Frank (2015): *A proportional value for cooperative games with a coalition structure*, Theory and Decision, 78(2), pp. 273–287.
- [Kalai und Samet 1987] Kalai, Ehud, and Dov Samet (1987). *On weighted Shapley values*, International Journal of Game Theory 16(3), pp. 205–222.
- [Königsberger 2004] Königsberger, Konrad (2004): *Analysis 1*, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin et al..
- [Macho-Stadler et al. 2010] Macho-Stadler, Inés, David Pérez-Castrillo, and David Wettstein (2010): *Dividends and weighted values in games with externalities*, International Journal of Game Theory 39(1–2), pp. 177–184.
- [Myerson 1977] Myerson, R. B. (1977): *Graphs and cooperation in games*, Mathematics of operations research, 2(3), pp. 225–229.
- [Myerson 1980] Myerson, R. B. (1980): *Conference Structures and Fair Allocation Rules*, International Journal of Game Theory, Volume 9, Issue 3, pp. 169–182.
- [Neyman 1989] Neyman, Abraham (1989): *Uniqueness of the Shapley value*, Games and Economic Behavior 1(1) pp. 116–118.
- [Ortmann 2000] Ortmann, K. Michael (2000): *The proportional value for positive cooperative games*, Mathematical Methods of Operations Research, 51(2), pp. 235–248.
- [Owen 1977] Owen, Guillermo (1977): *Values of games with a priori unions*, R. Henn & O. Moeschlin (eds), Essays in Mathematical Economics & Game Theory, Springer, Berlin et al., pp. 76–88.
- [Shapley 1953a] Shapley, Lloyd S. (1953): *Additive and non-additive set functions*, Princeton University.
- [Shapley 1953b] Shapley, Lloyd S. (1953): *A value for  $n$ -person games*, H. W. Kuhn/A. W. Tucker (Hrsg.), Contributions to the Theory of Games, Vol. 2, Princeton University Press, Princeton, pp. 307–317.
- [Slikker 2001] Slikker, Marco, and Nouweland, Anne van den (2001): *Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory*, Vol. 27 of C: Game Theory, Mathematical Programming and Operations Research.
- [Vidal-Puga 2005] Vidal-Puga, Juan (2005): *The Harsanyi paradox and the "right to talk" in bargaining among coalitions*, (No. 0501005). EconWPA.
- [Wiese 2005] Wiese, Harald (2005): *Kooperative Spieltheorie*, Oldenbourg Verlag, München.
- [Winter 1989] Winter, Eyal. (1989): *A value for cooperative games with levels structure of cooperation*, International Journal of Game Theory, 18(2), pp. 227–240.
- [Young 1985] Young, H. Peyton. (1985): *Monotonic Solutions of Cooperative Games*, International Journal of Game Theory, 14(2), pp. 65–72.