

**Bachelorarbeit**

# **Das Basentauschspiel für Graphen**

von

Markus Merkel

Matrikelnummer 6870554

Iffezheim, September 2009

angefertigt an der

FernUniversität in Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik

unter Anleitung von

Herrn Prof. Dr. Winfried Hochstättler

# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Iffezheim, den 7. September 2009

---

Unterschrift

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Allgemeines über Graphen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Einführung in das zu untersuchende Spiel</b>	<b>7</b>
3.1	Spielidee . . . . .	7
3.2	Definition der Spielregeln . . . . .	7
3.2.1	Spielvariante I . . . . .	7
3.2.2	Spielvariante II . . . . .	7
3.2.3	Gewinnbedingung . . . . .	8
3.2.4	Gewinnstrategien . . . . .	8
3.3	Erläuterung Matroidvariante . . . . .	8
3.3.1	Allgemeines zu Matroiden . . . . .	8
3.3.2	Spielregeln der Matroidvariante des Basentauschspiels . . . . .	10
3.3.3	Vermutung von White . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Aussagen zu beiden Spielvarianten</b>	<b>11</b>
4.1	Eigenschaften des Spielgraphen . . . . .	11
4.2	Generelle Aussagen zu beiden Spielvarianten . . . . .	15
4.2.1	Spielzüge . . . . .	15
4.2.2	Baumgraph zweiten Grades . . . . .	16
4.2.3	Graph der erzwungenen Transformationen . . . . .	18
4.2.4	Strategieübertragung . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Analyse der Spielvariante I</b>	<b>26</b>
5.1	Analyse $K_4$ . . . . .	26
5.2	Induzierter Teilgraph $K_4$ . . . . .	30
5.3	Analyse 4-Wheel ( $W_4$ ) . . . . .	31
5.4	Analyse Graph $D_6$ . . . . .	36
5.5	Analyse Radgraphen ( $W_n$ ) . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Aussagen zu Spielvariante II</b>	<b>43</b>
6.1	Untersuchung der Graphen $K_4$ und $D_6$ in Spielvariante II . . . . .	43
6.1.1	Analyse Graph $K_4$ . . . . .	43
6.1.2	Analyse Graph $D_6$ . . . . .	44
6.2	Untersuchung Graph der erzwungenen Transformationen Spielvariante II . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>48</b>
	<b>Anhang</b>	
	<b>Literaturverzeichnis</b>	

# Abbildungsverzeichnis

4.1	$K_4$ als Vereinigung zweier aufspannender Bäume . . . . .	12
4.2	Reduzierung um eine Ecke mit Grad 3 . . . . .	14
4.3	Reduzierung um eine Ecke mit Grad 3(2) . . . . .	14
4.4	Beispiel für die Verbindung zweier Graphen . . . . .	25
5.1	Graph $K_4$ . . . . .	26
5.2	Baumgraph zweiten Grades $K_4$ . . . . .	29
5.3	Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I $K_4$ . . . . .	29
5.4	Graph $W_4$ . . . . .	31
5.5	Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I $W_4$ . . . . .	35
5.6	Übergang $W_4$ nach $K_4$ . . . . .	36
5.7	Graph $D_6$ . . . . .	36
5.8	Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I $D_6$ . . . . .	38
5.9	Radgraph . . . . .	39
5.10	Gewinnstrategie $W_n$ 1. Spielzug . . . . .	40
5.11	Gewinnstrategie $W_n$ 2. Spielzug . . . . .	41
5.12	Gewinnstrategie $W_n$ 3.-4. Spielzug . . . . .	41
5.13	Gewinnstrategie $W_n$ (n-1). Spielzug . . . . .	42
5.14	Gewinnstrategie $W_n$ n. Spielzug . . . . .	42
6.1	Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II $K_4$ . . . . .	44
6.2	Komponenten von $\tau_2^I(D_6)$ inkl. Übergänge gemäß Tabelle 6.1 . . . . .	45
6.3	Ecke mit Grad 3 . . . . .	46

# Tabellenverzeichnis

5.1	Beweis $K_4$ Spielvariante I . . . . .	27
5.1	Beweis $K_4$ Spielvariante I . . . . .	28
5.2	Beweis $W_4$ Spielvariante I . . . . .	31
5.2	Beweis $W_4$ Spielvariante I . . . . .	32
5.2	Beweis $W_4$ Spielvariante I . . . . .	33
5.2	Beweis $W_4$ Spielvariante I . . . . .	34
5.2	Beweis $W_4$ Spielvariante I . . . . .	35
5.3	Komponenten $D_6$ fixe Kanten . . . . .	37
6.1	Beweis $D_6$ Spielvariante II . . . . .	45
A	Beweis $D_6$ Spielvariante I . . . . .	
A	Beweis $K_4$ Spielvariante II . . . . .	

# 1 Einführung

Die Spieltheorie ist eine noch relativ junge mathematische Disziplin. Allgemein wird das Jahr 1944 mit dem Erscheinen des Standardwerks „The Theory of Games and Economic Behaviour“ [vNM44] von John von Neumann und Oskar Morgenstern als ihre Geburtsstunde angesehen. Die Regeln eines im Rahmen der Spieltheorie zu untersuchenden Spiels umfassen:<sup>1</sup>

- Die Anzahl der Spieler
- Zu jedem Spielstand die Aussage darüber,
  - wer am Zug ist,
  - welche Zugmöglichkeiten für den betreffenden Spieler bestehen und
  - auf Basis welcher Informationen er seine Entscheidung zu treffen hat.
- Für beendete Partien, wer wie viel gewonnen hat.

Die Idee Graphen als Grundlage für mathematische Spiele zu nutzen ist nicht neu. Es existieren eine Vielzahl verschiedener mehr oder weniger miteinander verwandter Spiele mit Graphen als Grundlage. Sehr oft, wie auch bei dem im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Spiel, handelt es sich hierbei um nichtkooperative Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele. Es spielen folglich zwei Personen gegeneinander, wobei nur ein Spieler gewinnen kann, d.h. der Verlust des einen ist der Gewinn des anderen Spielers und es findet zwischen den Spielern keine Kooperation statt. Es können zwei Konstellationen vorliegen um zu definieren, welcher der beiden Spieler ein Spiel gewonnen hat. In der Maker/Maker - Variante versuchen beide Spieler eine im Vorfeld definierte Gewinnbedingung zu erreichen. In der Maker/Breaker - Variante versucht der Maker seine Gewinnbedingung zu erreichen, während der Breaker gewinnt, sofern er dies verhindern kann.

Eine, wenngleich mit dem in der vorliegenden Arbeit untersuchten Spiel nur wenig vergleichbare, Art von mathematischen Spielen auf Graphen sind die sogenannten Kantenfärbungsspiele. Diese wurden erstmals 1991 von Bodlaender in [Bod91] definiert und mathematisch untersucht. Vereinfacht ausgedrückt werden die Kanten eines ungefärbten Graphen abwechselnd vom Maker und Breaker mit einer im Vorfeld definierten Anzahl zur Auswahl stehender Farben gefärbt, wobei der Maker gewinnt, sofern es ihm gelingt, dass alle Kanten des Graphen gefärbt sind, ohne dass zwei benachbarte Kanten die gleiche Farbe aufweisen. Der Breaker gewinnt somit, sofern er dies verhindern kann. Eine genauere Definition und weiterführende Untersuchungen finden sich z.B. in [Bod91] und [And03].

---

<sup>1</sup>Für eine formale Definition eines Spiels im mathematischen Sinn sei der interessierte Leser auf einschlägige Fachliteratur wie z.B. [HI03] verwiesen.

Ein weiteres bekanntes mathematisches Spiel auf Graphen ist das nach Claude Shannon benannte Shannon-Switching-Game. Grundidee des Spiels ist es, dass bei einem gegebenen Graphen der Breaker in seinem Spielzug Kanten löschen kann, während der Maker Kanten markiert, die dann in den folgenden Spielzügen nicht mehr durch den Breaker gelöscht werden können. Der Maker gewinnt, sofern er verhindern kann, dass der Graph in zwei Komponenten zerfällt. Es zeigt sich, dass das Shannon-Switching-Game bereits deutlich mehr Gemeinsamkeiten mit dem in dieser Arbeit untersuchten Spiel hat als die Kantenfärbungsspiele. Insbesondere ist es ebenfalls sehr eng mit der Matroidtheorie verbunden. So zeigte Lehman in [Leh88] mit Hilfe der Matroidtheorie für welche Graphen der Maker und für welche der Breaker über eine Gewinnstrategie verfügt. Auch das in dieser Arbeit untersuchte Basentauschspiel weist eine enge Verbindung zur Matroidtheorie auf, ist es doch vielmehr der Graphen - Spezialfall eines Spiels auf reguläre Matroiden. Wie Lehman in [Leh88] zeigte verfügt der Maker genau dann über eine Gewinnstrategie im Shannon-Switching-Game, wenn der Graph zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume enthält. Dies führt uns direkt zum in dieser Arbeit untersuchten Basentauschspiel, dessen Grundlage ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, bildet.

Ergänzend sei erwähnt, dass es sich beim Basentauschspiel, im Gegensatz zu den Kantenfärbungsspielen als auch dem Shannon-Switching-Game, nicht um ein endliches Spiel in dem Sinne handelt, dass das Spiel zu einem bestimmten Zeitpunkt automatisch enden muss, da die Spieler keine regelkonformen Züge mehr zur Verfügung haben. Wie sich zeigen wird haben beide Spieler zu jedem Zeitpunkt legale Zugmöglichkeiten. Das Basentauschspiel für Graphen ist somit in diesem Sinne nicht endlich.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es das Basentauschspiel für Graphen näher zu untersuchen. Neben Aussagen zu den als Grundlage des Spiels dienenden aus zwei kantendisjunkten aufspannenden Bäumen bestehenden Graphen, liegt das Hauptaugenmerk auf Ergebnissen, die es ermöglichen Aussagen zur Existenz einer Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler zu machen. Schwerpunkt ist die Analyse der Spielvariante I. Sofern sich aus den Untersuchungen Ergebnisse auch für die Spielvariante II ableiten lassen sind diese jedoch ebenfalls aufgeführt.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in sieben Teile. Im zweiten Teil werden grundlegende Definitionen und fundamentale Sätze über Graphen, die im Rahmen dieser Arbeit benötigt werden, aufgeführt. Im Teil drei wird das Basentauschspiel, bzw. die zwei im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Varianten dieses Spiels definiert sowie die Verbindung zur allgemeineren Version des Spiels auf reguläre Matroide hergeleitet. An dieser Stelle wird auch auf eine Vermutung von Prof. Dr. Neil White zur Existenz einer Gewinnstrategie in der Matroidvariante des Basentauschspiels eingegangen. Im vierten Teil werden für beide Spielvarianten gültige Aussagen erarbeitet und das Konzept des Graphen der erzwungenen Transformationen für beide Spielvarianten eingeführt. Im Kapitel fünf wird die Spielvariante I detailliert untersucht. In Kapitel sechs finden sich die aus der Untersuchung von Spielvariante I sich für die Spielvariante II ergebenden Aussagen. Im letzten Teil werden die Ergebnisse sowie die offenen Fragen nochmals zusammengefasst.

## 2 Allgemeines über Graphen

### Definition 1. Graph

Ein *Graph*  $G = (V, E, \varphi)$  besteht aus:

- einer *Menge von Ecken*  $V$ ,
- einer *Menge von Kanten*  $E$  und
- einer *Inzidenzfunktion*  $\varphi : E \rightarrow V \cup \binom{V}{2}$ , wobei  $\binom{V}{2}$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $V$  ist.

Die beiden Ecken, welche einer Kante  $e \in E$  durch die Abbildung  $\varphi$  zugeordnet werden, heißen dabei *Endecken* von  $e$ .

Unter Verwendung des Konzepts der Multimenge ist es meist möglich die Kanten mit ihrem Bild unter der Inzidenzfunktion zu identifizieren, weshalb in der Folge die Schreibweise  $G = (V, E)$  für einen Graphen und  $(x, y) \in E$  für  $x, y \in V$  genutzt wird.

### Definition 2. endlicher Graph

Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *endlich*, wenn für die Anzahl der Ecken  $|V| < \infty$  und für die Menge der Kanten  $|E| < \infty$  gilt. An Stelle von  $|V|$  wird auch  $|G|$  geschrieben und als *Ordnung von  $G$*  bezeichnet.

### Definition 3. parallele Kanten, Schleife, schlichter Graph

- Zwei Kanten werden als *parallel (Mehrfachkante)* bezeichnet, wenn sie die gleichen Endecken besitzen.
- Eine *Schleife* bezeichnet eine Kante, die nur eine Endecke besitzt.
- Ein Graph, welcher weder Schleifen noch Mehrfachkanten enthält, wird als *schlichter Graph* bezeichnet.

In der Literatur ist auch anzutreffen, dass bei der Definition eines Graphen keine parallelen Kanten und Schleifen zugelassen werden. Enthält ein Graph parallele Kanten oder Schleifen so wird in diesem Fall von einem *Multigraphen* gesprochen. Im Rahmen dieser Arbeit sind gemäß Definition 1 parallele Kanten und Schleifen bei Graphen zugelassen. Soll jedoch ausdrücklich betont werden, dass ein Graph parallele Kanten oder Schleifen besitzt, so wird auch im Rahmen dieser Arbeit der Begriff *Multigraph* verwendet.



**Definition 4.** vollständiger Graph

Sei  $G=(V,E)$  ein schlichter Graph. Ist  $|V| = n$  und  $E = \binom{V}{2}$ , so wird  $G$  als *vollständiger Graph mit  $n$  Ecken* ( $K_n$ ) bezeichnet.

**Definition 5.** Graphenvereinigung

Sind  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  Graphen, so ist ihre (nicht notwendig disjunkte) Vereinigung  $G_1 \cup G_2$  der Graph mit der Eckenmenge  $V_1 \cup V_2$ , Kantenmenge  $E_1 \cup E_2$  und Inzidenzfunktion  $\varphi_{G_1 \cup G_2}$  definiert durch:

$$\varphi_{G_1 \cup G_2}(e) := \begin{cases} \varphi_{G_1}(e) & \text{falls } e \in E_1 \\ \varphi_{G_2}(e) & \text{falls } e \in E_2 \end{cases}$$

wobei gelten soll, dass für  $e \in E_1 \cap E_2$  :  $\varphi_{G_1}(e) = \varphi_{G_2}(e)$  ist.

**Definition 6.** adjazent, inzident, Adjazenzmatrix, Inzidenzmatrix

- Zwei Kanten  $e \neq f$  sind *adjazent (oder benachbart)*, falls sie eine gemeinsame Endecke haben.
- Zwei Ecken  $x, y \in V$  sind *adjazent (oder benachbart)*, wenn  $(x, y) \in E$ .
- Eine Kante  $e$  und eine Ecke  $v$  heissen *inzident*, wenn  $v$  eine Endecke von  $e$  ist.
- Auf diesen Definitionen aufbauend lässt sich ein Graph  $G = (V,E)$  in Matrixform darstellen. Seien für einen Graphen  $G = (V,E)$  die Ecken mit  $u_1, \dots, u_n$  und die Kanten mit  $k_1, \dots, k_q$  durchnummeriert.

Die *Adjazenzmatrix* ist die  $n \times n$  - Matrix  $A = (a_{ij})$  mit:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (u_i, u_j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die *Inzidenzmatrix*  $B = (b_{ij})$  ist die  $n \times q$  - Matrix  $B = (b_{ij})$  mit:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i \in k_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Definition 7.** Teilgraph, induzierter Teilgraph

- Ein Graph  $H = (V', E')$  heißt *Teilgraph* von  $G = (V, E)$ , wenn  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  ist.
- Ein Graph  $H = (V', E')$  heißt *induzierter Teilgraph* von  $G = (V, E)$ , wenn  $V' \subseteq V$  und  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$  ist.

**Definition 8.** Kantenfolge, Weg, Kreis

- Eine *Kantenfolge* in einem Graphen ist eine alternierende Folge  $v_0e_1v_1\dots v_{k-1}e_kv_k$  von Ecken und Kanten so dass  $\forall \{1, \dots, k\} e_i$  zu  $v_{i-1}$  und  $v_i$  inzident ist.
- Kommen in einer Kantenfolge alle Ecken höchstens einmal vor, so wird diese als *Weg* bezeichnet. Solch ein Weg wird als  $(v_0, v_k) - Pfad$  bezeichnet.
- Ist  $P$  ein  $(u, v)$  - Pfad mit  $u, v \in V$  in  $G = (V, E)$  und  $e \in E \setminus P$  mit  $e = (u, v)$ , so heißt  $P \cup e$  ein *Kreis*.

**Definition 9.** zusammenhängend, Komponente, Brücke

- Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *zusammenhängend*, wenn für zwei beliebige  $u, v \in V$  ein  $(u, v)$  - Weg existiert.
- Eine *Komponente* von  $G = (V, E)$  ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von  $G$ .
- Eine Kante  $k \in E$  eines Graphen  $G = (V, E)$  wird als *Brücke* bezeichnet, falls die Entfernung der Kante die Anzahl der Komponenten des Graphen erhöht.

**Definition 10.** Eckengrad

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $v \in V$  eine Ecke des Graphen. Dann bezeichnet  $N(v)$  die Menge der zu  $v$  adjazenten Ecken und  $d(v) = |N(v)|$  wird mit *Grad der Ecke*  $v$  bezeichnet.

**Definition 11.** Wald, Baum, aufspannender Baum, Blatt

- Ein Graph ohne Kreis wird als *Wald* bezeichnet.
- Ein zusammenhängender Wald ist ein *Baum*.
- Ein *aufspannender Baum* eines zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  ist ein Teilgraph  $T = (V, E')$ , der ein Baum ist.
- Alle Ecken  $v$  eines Baumes mit  $d(v) = 1$  heißen *Blätter*.

Somit ist ein *Graph, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist*, ein Graph  $G = (V, E)$ , von welchem zwei ausspannende Bäume  $T_1 = (V, E_1)$  und  $T_2 = (V, E_2)$  existieren, so dass  $E = E_1 \cup E_2$  gilt.

Der nachfolgende Satz ist sinngemäß [Die06] entnommen.

**Satz 1.** Sei  $T = (V, E)$  ein Baum und  $v \in V$  ein Blatt des Baums, dann ist der Graph, der durch Streichen der Ecke  $v$  und der zu dieser Ecke inzidenten Kante entsteht, ebenfalls ein Baum.

Der nachfolgende Satz fasst einige wichtige Äquivalenzen bezüglich der Eigenschaften von Bäumen zusammen. Beweise dieser fundamentalen Aussagen finden sich z.B. in [Aig06, MN07, Die06].

**Satz 2.** Baumäquivalenzen

Sei  $T = (V, E)$  ein Graph, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $T$  ist ein Baum.
2.  $T$  ist kreisfrei und  $|E| = |V| - 1$ .
3.  $T$  ist zusammenhängend und  $|E| = |V| - 1$ .
4.  $T$  ist zusammenhängend und jede Kante ist eine Brücke, d.h. nach Entfernung einer beliebigen Kante zerfällt der Graph in genau zwei Komponenten.
5. Je zwei Ecken in  $G$  sind durch genau einen Weg verbunden.

**Satz 3.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $T = (V, E')$  ein aufspannender Baum des Graphen und  $e \in E$  eine nicht in  $T$  enthaltene Kante aus  $G$ , dann enthält  $T' = (V, E' \cup e)$  einen eindeutig bestimmten Kreis, der die Kante  $e$  beinhaltet.

Einen Beweis der Aussage des letzten Satzes findet sich in [Die06]. Der vorangegangene Satz ermöglicht nachfolgende Definition.

**Definition 12.** Fundamentalkreis

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $T$  ein aufspannender Baum, dann wird der eindeutig bestimmte Kreis, der durch Hinzufügen einer nicht in  $T$  enthaltenen Kante  $e \in E$  zu  $T$  entsteht, als *Fundamentalkreis*  $C(T, e)$  bezeichnet.

Gemäß Satz 2.4 zerfällt ein aufspannender Baum eines Graphen bei Entfernen einer Kante in genau zwei Komponenten. Dies bildet die Ausgangsbasis für die nachfolgende Definition.

**Definition 13.** Fundamentalschnitt

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $T = (V, E')$  ein aufspannender Baum von  $G$  sowie  $e \in E'$ , so wird die Menge der Kanten von  $G$ , welche die beiden Komponenten von  $T' = (V, E' \setminus e)$  miteinander verbinden, als *Fundamentalschnitt*  $S(T, e)$  bezeichnet.

# 3 Einführung in das zu untersuchende Spiel

## 3.1 Spielidee

Bei dem in dieser Arbeit untersuchten Spiel, dem Basentauschspiel für Graphen, handelt es sich, wie bereits in der Einführung erwähnt, um einen graphenspezifischen Spezialfall eines Maker/Breaker - Spiels auf disjunkte Basen regulärer Matroide. Es handelt sich um ein Kantenfärbungsspiel in dem Sinne, dass der Maker und der Breaker abwechselnd Kanten eines Graphen nach bestimmten im Vorfeld definierten Regeln färben. Entgegen den in der Einführung erwähnten Kantenfärbungsspielen ist jedoch bereits der Ausgangsgraph gefärbt und im Spielverlauf ist es möglich in einem früheren Spielzug gefärbte Kanten erneut umzufärben.

## 3.2 Definition der Spielregeln

### 3.2.1 Spielvariante I

Nachfolgend werden nun die Spielregeln der in dieser Arbeit untersuchten beiden Varianten des Spiels definiert. Die Basis des Spiels bildet ein Graph  $G=(V,E)$ , der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume darstellt. Die Kanten des ersten Baumes, in der Folge mit Maker-Baum  $R$  bezeichnet, sind rot gefärbt, die Kanten des zweiten Baumes (Breaker - Baum,  $B$ ) blau. Ein Spielzug besteht nun aus jeweils einer Kantenfärbung jedes Spielers. In der Folge werden die Spieler mit Maker und Breaker bezeichnet.<sup>1</sup> Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

1. Der Maker beginnt den Spielzug und färbt eine blaue Kante rot.
2. Der Breaker muss nun eine rote Kante blau färben, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
  - a) es handelt sich nicht um die vom Maker im gleichen Spielzug gefärbte Kante.
  - b) sowohl die roten als auch die blauen Kanten bilden nach der Färbung durch den Breaker jeweils wieder einen aufspannenden Baum des Graphen  $G$ .

### 3.2.2 Spielvariante II

Die zweite in dieser Arbeit untersuchte Variante gibt dem Maker die ergänzende Möglichkeit, an Stelle der Färbung einer blauen Kante, eine rote Kante blau zu färben. Der

---

<sup>1</sup>Die Spieler werden in Zweispersonenspielen in der Spieltheorie oftmals auch, analog zur in der Kryptographie gebräuchlichen Bezeichnungssystematik, mit Alice und Bob bezeichnet.

Breaker ist dann in seinem Teil des Spielzuges verpflichtet eine blaue Kante rot zu färben, so dass die Bedingungen 2.a) und 2.b) aus Spielvariante I wiederum erfüllt sind. Offensichtlich erweitert Variante II lediglich die Möglichkeiten des Makers. Hieraus folgt, dass die Existenz einer Gewinnstrategie des Makers in Variante I automatisch auch deren Existenz in Variante II impliziert.

### 3.2.3 Gewinnbedingung

Ausgehend von einer beliebigen zulässigen Startfärbung (R, B) gewinnt der Maker das Spiel, sofern nach einer endlichen Anzahl von Spielzügen am Ende eines Spielzugs alle Kanten aus R blau und alle Kanten aus B rot gefärbt sind. Der Breaker wiederum siegt, sofern er verhindern kann, dass der Maker dies in einer endlichen Anzahl von Spielzügen erreicht.

### 3.2.4 Gewinnstrategien

Eine zentrale Frage bei der mathematischen Untersuchung von Spielen ist, ob ein Spieler über eine Gewinnstrategie verfügt. Mit Strategie wird hierbei eine, nicht notwendigerweise endliche, Liste bezeichnet, in der für jede Situation im Spiel angegeben ist, welchen Spielzug der betrachtete Spieler wählen soll. Führt nun die Befolgung der Strategie unabhängig von den Spielzügen der anderen Beteiligten immer zum Sieg, so wird diese Strategie als Gewinnstrategie bezeichnet. Ob Gewinnstrategien existieren ist vom untersuchten Spiel abhängig. In dem im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Maker/Breaker - Spiel muss bei gegebenem Graphen G offensichtlich immer einer der beiden Spieler über eine Gewinnstrategie verfügen. Verfügt der Maker über keine Gewinnstrategie, so bedeutet dies in einem Maker/Breaker - Spiel nichts anderes, als dass er nicht erzwingen kann seine Gewinnbedingung zu erreichen und somit der Breaker gewinnt, also über eine Gewinnstrategie verfügen muss.

## 3.3 Erläuterung Matroidvariante

Bevor im nächsten Kapitel mit der konkreten Untersuchung des Basentauschspiels für Graphen begonnen wird, soll im nachfolgenden Abschnitt die allgemeinere Matroidvariante des Spiels hergeleitet werden.

### 3.3.1 Allgemeines zu Matroiden

Zur Beschreibung dieser Variante des Spiels werden vorab noch weitere Definitionen benötigt.

**Definition 14.** Matroid

Ein *Matroid*  $M$  ist ein geordnetes Paar  $(E, \mathcal{I})$ , bestehend aus einer endlichen Menge  $E$  und einer Mengenfamilie  $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ , wobei  $2^E$  die Potenzmenge von  $E$  ist, mit

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ ,
- $I \in \mathcal{I}$  und  $I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$ ,
- $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  und  $|I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup e \in \mathcal{I}$ .

**Definition 15.** Basis eines Matroids

Sei  $M = (E, \mathcal{I})$  ein Matroid, dann heisst  $B \in \mathcal{I}$  *Basis*, wenn es kein  $I \in \mathcal{I}$  gibt mit  $B \subset I$ . Die Familie der Basen wird mit  $\mathcal{B}$  bezeichnet.

Das nachfolgende Lemma, welches sicherstellt, dass zwei Basen eines Matroids immer aus der gleichen Anzahl von Elementen bestehen, ist aus einem der Standardwerke zur Matroidtheorie [Oxl06] entnommen, in dem sich auch dessen Beweis findet.

**Lemma 1.** Sind  $B_1$  und  $B_2$  Basen eines Matroids  $M = (E, \mathcal{I})$ , so ist  $|B_1| = |B_2|$ .

Nachdem nun die Grundlagen für die allgemeinere Variante des Spiels geschaffen sind, stellt der nachfolgende Satz die Verbindung zwischen Matroiden und Graphen her. Alle Untergraphen eines Graphen  $G = (V, E)$  lassen sich eindeutig durch eine Teilmenge der Kantenmenge  $E$  identifizieren. Sei  $\mathcal{B}(E)$  die Familie aller Untermengen von  $E$ . Mit  $W \subseteq \mathcal{B}(E)$  wird nun die Familie der Kantenmenge aller Wälder bezeichnet. Der nachfolgende Satz ist [Aig06] entnommen.

**Satz 4.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, dann ist  $M = (E, W)$  ein Matroid.

Die auf diese Weise erhaltenen Matroide werden mit Kreismatroid oder Polygonmatroid von  $G$ , kurz  $M(G)$ , bezeichnet. Die Basen von  $M = (E, W)$  sind offensichtlich die aufspannenden Wälder, d.h. bei einem zusammenhängenden Graphen die aufspannenden Bäume, des Graphen.

Die nachfolgende Proposition ist wiederum [Oxl06] entnommen.

**Proposition 1.** Sei  $E$  die Menge der Spaltenlabel einer Matrix  $A$  über einem Körper  $K$  und sei  $\mathcal{I}$  die Menge der Teilmengen  $I$  von  $E$ , bei denen die Multimenge der mit Elementen aus  $I$  gelabelten Spalten linear unabhängig in dem Vektorraum  $K^m$  ist. Dann ist  $(E, \mathcal{I})$  ein Matroid. Dieses Matroid wird Vektormatroid von  $A$ , kurz  $M[A]$ , genannt.

**Definition 16.** Zwei Matroide  $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ ,  $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$  heißen isomorph, wenn es eine Bijektion  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  gibt mit:

$$I \in \mathcal{I}_1 \Leftrightarrow \varphi(I) := \{\varphi(e) \in E_2 \mid e \in I\} \in \mathcal{I}_2$$

**Definition 17.** lineares Matroid, reguläres Matroid

- Ein Matroid  $M$ , das isomorph zu einem Vektormatroid  $M[A]$  einer Matrix  $A$  über einem Körper  $K$  ist, wird als *linear* über  $K$  bezeichnet.
- Ein Matroid, das über jedem Körper  $K$  linear ist, wird als *reguläres Matroid* bezeichnet.

Es gilt nun folgender Satz, der wiederum aus [Oxl06] entnommen ist:

**Satz 5.**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, dann ist  $M(G)$  regulär.

### 3.3.2 Spielregeln der Matroidvariante des Basentauschspiels

Mit diesen Informationen lässt sich nun das Maker/Breaker - Spiel leicht auf reguläre Matroide erweitern. Das nachfolgend geschilderte Spiel geht auf Prof. Dr. White zurück und wurde in leicht abweichender Form in [Whi80] eingeführt. Sei  $M$  ein reguläres Matroid, das in zwei disjunkte Basen aufgeteilt werden kann und  $B_1$  (Makerbasis) sowie  $B_2$  (Breakerbasis) zwei disjunkte Basen dieses Matroids. An Stelle der Färbung einer Kante in einem Graphen wählen der Maker und der Breaker nun Elemente aus Matroidbasen aus. Es gelten für jeden Spielzug folgende Regeln:

- Spielvariante I

Der Maker wählt ein  $b \in B_2$  aus. Der Breaker muss nun ein  $a \in B_1$  so wählen, dass  $((B_1 \setminus a) \cup b)$  sowie  $((B_2 \setminus b) \cup a)$  wiederum zwei Basen des Matroids bilden.

- Spielvariante II

Der Maker erhält die zusätzliche Möglichkeit an Stelle eines  $b \in B_2$  ein  $a \in B_1$  zu wählen, woraufhin der Breaker ein  $b \in B_2$  wählen muss, so dass  $((B_1 \setminus a) \cup b)$  sowie  $((B_2 \setminus b) \cup a)$  wiederum zwei Basen des Matroids bilden.

Das neu entstandene Matroidbasenpaar bildet den Ausgangspunkt für den nächsten Spielzug. Der Maker gewinnt jeweils, sofern er durch eine Folge von Spielzügen erreicht, dass die Makerbasis aus den Elementen der ursprünglichen Startbasis des Breakers besteht, d.h. Maker und Breaker ihre Anfangsbasen komplett getauscht haben. Wie im Nachgang zu Satz 4 ausgeführt, bilden bei einem zusammenhängenden Graphen die aufspannenden Bäume die Basen des aus diesem abgeleiteten Kreisimatroids. Die Elemente der Basen sind somit die Kanten des jeweiligen aufspannenden Baumes. Das Umfärben der Kanten im Graphen stellt somit nichts anderes als den Tausch von Basiselementen dar. Dies liefert die Erklärung für die Bezeichnung „Basentauschspiel für Graphen“ des im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Spiels auf Graphen.

### 3.3.3 Vermutung von White

Nachdem nun die Überführung des in dieser Arbeit betrachteten Maker/Breaker - Spiels auf Graphen in die allgemeinere Variante auf reguläre Matroiden möglich ist, soll nun eine auf Prof. Dr. Neil White zurückgehende die allgemeinere Variante betreffende Vermutung<sup>2</sup> geschildert werden.

*Sei  $M$  ein reguläres Matroid, das in zwei disjunkte Basen aufgeteilt werden kann, dann verfügt der Maker in Spielvariante II für jedes Paar disjunkter Basen  $(B_1, B_2)$  über eine Gewinnstrategie.*

Für die in dieser Arbeit untersuchte Version des Maker/Breaker - Spiels auf Graphen folgt, sofern diese Vermutung sich als richtig erweist, dass der Maker in Spielvariante II immer über eine Gewinnstrategie verfügt.

---

<sup>2</sup>Gemäß persönlicher Mitteilung von Prof. Dr. White sowie in [Whi80] gemachten Vermutungen.

# 4 Aussagen zu beiden Spielvarianten

## 4.1 Eigenschaften des Spielgraphen

Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben dient als Grundlage des Spiels ein Graph  $G=(V,E)$ , der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist. Bevor das Spiel als solches analysiert wird, werden in diesem Abschnitt die als Grundlage des Spiels dienenden Graphen untersucht. Der nachfolgender Satz stellt einige fundamentale Eigenschaften, die allgemein für Graphen gelten, die die Vereinigung zweier aufspannender Bäume darstellen, zusammen.

### Satz 6.

Sei  $G = (V,E)$  ein Graph mit  $n$  Ecken, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, dann gilt:

1. Für die Anzahl der Kanten des Graphen gilt:  $|E| = 2n - 2$
2.  $G$  enthält keine Schleifen
3. Enthält  $G$  parallele Kanten, so sind diese maximal 2 - fach
4. Enthalten die beiden Bäume keine Kanten mit gleichen Endknoten, so ist der Graph schlicht
5. Ist  $G$  schlicht, so gilt:  $n \geq 4$
6. Ist  $G$  schlicht und gilt  $n=4$ , so handelt es sich um  $K_4$
7. Für jede Ecke  $v \in V$  gilt  $d(v) \geq 2$
8.  $G$  enthält mindestens eine Ecke mit Grad 2 oder 3
9. Enthält  $G$  keine Ecke mit Grad 2, so enthält er mindestens 4 Ecken mit Grad 3

*Beweis.*

1. Aus Satz 2 folgt, dass ein Baum mit  $n$  Ecken  $(n-1)$  Kanten besitzt. Folglich besitzt ein aus zwei aufspannenden Bäumen bestehender Graph mit  $n$  Ecken  $2 \cdot (n - 1) = 2n - 2$  Kanten.
2. Eine Schleife ist ein Kreis der Länge eins und kann somit nicht Teil eines Baumes sein. Aus der Voraussetzung, dass  $G$  die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist, folgt die Aussage.



3. Enthält  $G$  zwischen zwei Ecken mehr als zwei Kanten, so müssen mindestens zwei dieser Kanten Teil eines der beiden aufspannenden Bäume sein. Diese würde in diesem jedoch einen Kreis der Länge zwei darstellen. Ein Widerspruch zur Annahme, dass es sich um einen aufspannenden Baum handelt.
4. Gemäß Punkt 2 enthält  $G$  keine Schleifen. Da die beiden aufspannenden Bäume kantendisjunkt sind, kommt in der Vereinigung und somit in  $G$  keine Kante mehrfach vor, woraus sofort die Aussage folgt.
5. Ein schlichter Graph mit zwei Ecken besitzt maximal eine Kante, ein schlichter Graph mit drei Ecken maximal drei Kanten. In beiden Fällen können somit in Verbindung mit Punkt 1 dieses Satzes keine zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume existieren.
6. Ein aufspannender Baum eines Graphen mit vier Ecken besitzt genau drei Kanten. Somit muss ein aus zwei kantendisjunkten aufspannenden Bäumen bestehender Graph mit vier Ecken sechs Kanten besitzen. Der einzige schlichte Graph auf den dies zutrifft ist der vollständige Graph mit vier Ecken ( $K_4$ ). Wie in nachfolgender Abbildung 4.1 zu sehen ist, stellt  $K_4$  die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume dar.

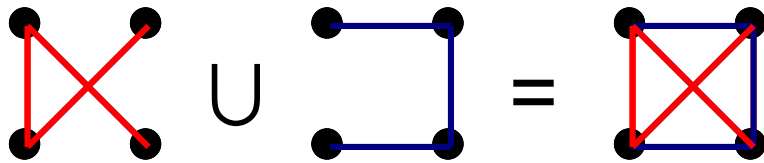


Abbildung 4.1:  $K_4$  als Vereinigung zweier aufspannender Bäume

7. Existiert im Graph eine Ecke mit Grad 0 oder 1 so kann diese offensichtlich nicht Teil zweier aufspannender Bäume sein, da hierfür jede Ecke inzident zu mindestens einer Kante aus beiden aufspannenden Bäumen sein muss.
8. Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist und der keine Ecke mit Grad 2 oder 3 enthält. Dann gilt für die Summe der Grade über alle Ecken  $\sum_{u \in V} d(u) \geq 4n$ . Bekanntermaßen gilt jedoch  $\sum_{u \in V} d(u) = 2 \cdot |E|$  für alle Graphen<sup>1</sup> und für diese spezielle Art von Graphen mit  $|E| = 2n - 2$  folgt  $\sum_{u \in V} d(u) = 4n - 4 \geq 4n$  ein Widerspruch.
9. Sei  $a$  die Anzahl der Ecken mit Grad 3 sowie  $V' \subseteq V$  die Menge der Ecken mit Grad größer 3. Gemäß den in Punkt 8 gemachten Ausführungen muss gelten:

$$3 \cdot a + \sum_{v \in V'} d(v) = 4n - 4$$

$$3 \cdot a + (n - a) \cdot 4 \leq 4n - 4 \text{ mit } d(v) \geq 4 \text{ für } v \in V'$$

$$a \geq 4$$

<sup>1</sup>siehe z.B. [Aig06]

woraus die Aussage folgt.

□

Der nachfolgende Satz ermöglicht in Verbindung mit Satz 6.8 einen Graphen  $G$ , bestehend aus der Vereinigung zweier aufspannender Bäume, um eine Ecke zu reduzieren und wieder einen Graphen zu erhalten, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist. Insbesondere bietet dies prinzipiell die Möglichkeit der Beweisführung mittels vollständiger Induktion über die Anzahl der Ecken des Graphen. Dieses Verfahren wird sowohl in [FRS85] als auch in [KUM88] angewendet. In beiden Arbeiten ist sinngemäß die Aussage des nachfolgenden Satzes, jedoch ohne vollständigen Beweis, angegeben.

**Satz 7.**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist, dann gilt:

1. Existiert eine Ecke  $v \in V$  mit  $d(v) = 2$ , so ist der Graph  $G' = (V \setminus v, E')$ , der durch Streichung der Ecke  $v$  sowie der mit dieser Ecke inzidenten Kanten entsteht, wieder die Vereinigung zweier aufspannender Bäume.
2. Sei  $v \in V$  eine Ecke mit  $d(v) = 3$  und  $e_i = (v, v_i)$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  die mit  $v$  inzidenten Kanten, dann existiert ein  $e_4 = (v_i, v_j)$  mit  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  so dass  $G_{ij} = (V \setminus v, (E \setminus \{e_1, e_2, e_3\}) \cup e_4)$  die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist.

*Beweis.*

1. Für jedes Paar aufspannender Bäume mit den Kantenmengen  $(E_i, E_j)$ , deren Vereinigung den Graphen  $G$  ergibt, muss gelten, dass eine zu  $v$  inzidente Kante in  $E_i$  sowie die jeweils andere in  $E_j$  liegt, da ansonsten derjenige Baum ohne eine zu  $v$  inzidente Kante offensichtlich nicht aufspannend ist. Somit handelt es sich bei der Ecke  $v$  sowohl für  $E_i$  als auch für  $E_j$  um ein Blatt, woraus sofort folgt, dass das Entfernen der zu  $v$  inzidenten Kante aus  $E_i$  und  $E_j$  gemäß Satz 1 nichts an deren Baumeigenschaft ändert, womit der erste Teil des Satzes gezeigt ist.
2. Analog zu der einführenden Überlegung im Punkt 1 des Beweises folgt, dass für alle Baumpaare  $(E_i, E_j)$  mindestens eine und somit maximal zwei zu  $v$  inzidente Kanten zum jeweiligen Baum gehören müssen. Zum Beweis des Satzes sind zwei Fälle zu unterscheiden:
  - Fall 1: Die Ecke  $v$  ist adjazent zu drei Ecken  $v_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die in der nachfolgenden Abbildung 4.2, in der nicht zu  $v$  inzidente Kanten sowie nicht zu  $v$  adjazente Ecken nicht berücksichtigt sind, durch Färbung angedeutete Zuordnung zu den Baumpaaren angenommen.

Sei  $E_1$  die Kantenmenge des roten Baumes sowie  $E_2$  die Kantenmenge des blauen Baumes. Zu zeigen ist, dass  $E_1 \setminus e_1$  sowie  $((E_2 \setminus \{e_2, e_3\}) \cup e_4)$  aufspannende Bäume des reduzierten Graphen sind. Wichtig ist, dass sofern im Graphen  $G$

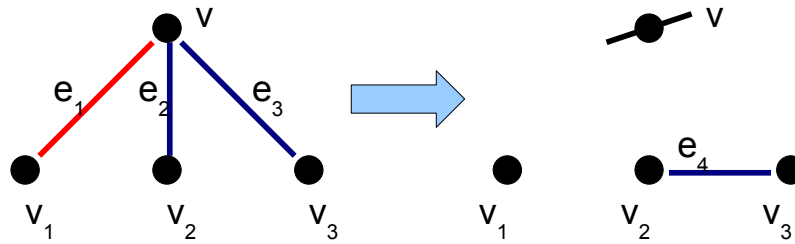


Abbildung 4.2: Reduzierung um eine Ecke mit Grad 3

bereits eine Kante  $(v_2, v_3)$  existiert diese rot gefärbt sein muss, da eine blau gefärbte Kante mit  $e_2$  und  $e_3$  einen Kreis bilden würde. Für  $E_1$  handelt es sich bei der Ecke  $v$  um ein Blatt, woraus analog zur Argumentation in Punkt 1 sofort die Aussage folgt. Nach dem Streichen der Kante  $e_2$  zerfällt der Baum  $E_2$  gemäß Satz 2.4 in genau zwei Komponenten, wobei  $v_2$  und  $v_3$  in verschiedenen Komponenten liegen. Wäre dies nicht der Fall würde ein Weg von  $v_2$  nach  $v_3$  existieren, der nicht über  $v$  führt und somit wäre  $E_2$  nicht kreisfrei, also kein Baum. Somit stellt  $e_4$  eine Brücke zwischen beiden Komponenten dar und  $(E_2 \setminus e_2) \cup e_4$  ist zusammenhängend, kreisfrei und folglich ein aufspannender Baum. Wird aus diesem Baum nun die Kante  $e_3$  entfernt zerfällt er wiederum in genau zwei Komponenten, wobei eine Komponente nur die Ecke  $v$  umfasst. Nach Streichen dieser Ecke bildet  $(E_2 \setminus \{e_2, e_3\}) \cup e_4$  einen aufspannenden Baum des reduzierten Graphen.

- Fall 2: Die Ecke  $v$  ist adjazent zu zwei Ecken  $v_i$  mit  $i \in \{1, 2\}$ , d.h.  $v$  ist inzident zu zwei parallelen Kanten.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die in der nachfolgenden Abbildung 4.3, in der nicht zu  $v$  inzidente Kanten sowie nicht zu  $v$  adjazente Ecken nicht berücksichtigt sind, durch Färbung angedeutete Zuordnung zu den Baum-paaren angenommen.

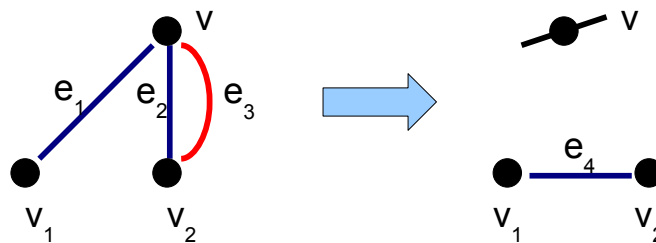


Abbildung 4.3: Reduzierung um eine Ecke mit Grad 3(2)

Sei  $E_1$  die Kantenmenge des roten Baumes sowie  $E_2$  die Kantenmenge des blauen Baumes. Zu zeigen ist, dass  $E_1 \setminus e_3$  sowie  $((E_2 \setminus \{e_1, e_2\}) \cup e_4)$  aufspannende Bäume des reduzierten Graphen sind. Wichtig ist, dass sofern im Graphen  $G$  bereits eine Kante  $(v_1, v_2)$  existiert diese rot gefärbt sein muss, da eine blau gefärbte Kante mit  $e_1$  und  $e_2$  einen Kreis bilden würde. Für  $E_1$  handelt es sich bei der Ecke  $v$  um ein Blatt, woraus analog zur Argumentation in Punkt 1 sofort die Aussage folgt. Nach dem Streichen der Kante  $e_1$  zerfällt der Baum

$E_2$  gemäß Satz 2.4 in genau zwei Komponenten, wobei  $v_1$  und  $v_2$  in verschiedenen Komponenten liegen. Wäre dies nicht der Fall, würde ein Weg von  $v_1$  nach  $v_2$  existieren, der nicht über  $v$  führt und somit wäre  $E_2$  nicht kreisfrei, also kein Baum. Somit stellt  $e_4$  eine Brücke zwischen beiden Komponenten dar und  $(E_2 \setminus e_1) \cup e_4$  ist zusammenhängend, kreisfrei und folglich ein aufspannender Baum. Wird aus diesem Baum nun die Kante  $e_2$  entfernt zerfällt er wiederum in genau zwei Komponenten, wobei eine Komponente nur die Ecke  $v$  umfasst. Nach Streichen dieser Ecke bildet  $(E_2 \setminus \{e_1, e_2\}) \cup e_4$  einen aufspannenden Baum des reduzierten Graphen.

□

In Verbindung mit Satz 6.8, der die Existenz einer Ecke vom Grad 2 oder 3 in jedem Graphen, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist, sichert, ermöglicht der vorangegangene Satz mittels vollständiger Induktion über die Anzahl der Ecken des Graphen Eigenschaften über alle Graphen dieser Art zu zeigen. Ausgehend von einem Graphen mit geringer Eckenzahl, der die gewünschte Eigenschaft besitzt, werden alle Graphen mit größerer Eckenzahl mittels des im Satz 7 geschilderten Verfahrens um eine Ecke reduziert. Folgt nun aus der Existenz der Eigenschaft für den reduzierten Graphen (Induktionsvoraussetzung) die Existenz für den ursprünglichen Graphen (Induktionsschluss), so ist der Induktionsbeweis abgeschlossen. Dieses Verfahren wird z.B. in [FRS85] angewendet, in der damit der nachfolgende Satz 9 bewiesen wird. Wie im weiteren Verlauf gezeigt wird ist dieses Verfahren jedoch nur eingeschränkt anwendbar um Aussagen über die Existenz von Gewinnstrategien im Maker/Breaker - Spiel zu beweisen.

## 4.2 Generelle Aussagen zu beiden Spielvarianten

### 4.2.1 Spielzüge

Gemäß den Spielregeln ist es dem Maker erlaubt jede blaue Kante rot zu färben (Variante I), bzw. jede Kante umzufärben (Variante II). Es wurde nicht geregelt, was geschehen soll, wenn dem Breaker auf die Makerfärbung keine regelkonforme Färbung zur Verfügung steht. Das dies auch nicht nötig ist, da dieser Fall nicht auftreten kann, zeigt der nächste Satz.

**Satz 8.** Existenz einer zulässigen Färbung

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume darstellt, dann existiert auf jede Makerfärbung eine zulässige Breakerfärbung.

*Beweis.*

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume mit den Kantenmengen  $R$  und  $B$  darstellt, d.h.  $E = R \cup B$ . Sei  $b \in B$  beliebig. Dann gilt: Der Graph  $G_B = (V, B \setminus b)$  zerfällt gemäß Satz 2.4 in zwei Komponenten  $E_1$  und  $E_2$ . Der Graph  $G_R = (V, R \cup b)$  enthält gemäß Satz 3, genau einen Kreis. Die Kante  $b$  verbindet somit  $E_1$  und  $E_2$ , d.h.  $b = (x_b, y_b)$  mit  $x_b \in E_1$  und  $y_b \in E_2$ . Da  $b$  eine Kante innerhalb eines Kreises ist, der sowohl in  $E_1$  als auch in  $E_2$  verläuft, existiert mindestens eine weitere

Kante  $i = (x_i, y_i)$  innerhalb des Kreises mit  $x_i \in E_1$  sowie  $y_i \in E_2$ , da in einem Kreis zwischen allen Ecken zwei kantendisjunkte Wege existieren. Für jedes  $i$  gilt:  $(B \cup i) \setminus b$  ist ein aufspannender Baum, da  $(B \cup i) \setminus b$  maximal kreisfrei und zusammenhängend ist.  $(R \cup b) \setminus i$  ist mit analoger Argumentation ebenso ein aufspannender Baum.

Somit ist gezeigt, dass der Breaker in der Spielvariante I auf jede Färbung des Makers eine regelkonforme Färbung hat. Da mit  $(R, B)$  auch  $(B, R)$  eine zulässige Startfärbung ist, ergibt sich die Korrektheit des Satzes für die in Spielvariante II zusätzlich vorhandenen Färbemöglichkeiten des Makers analog. □

## 4.2.2 Baumgraph zweiten Grades

Nachdem durch den vorangegangenen Abschnitt sichergestellt ist, dass keine Konstellationen auftreten können, in denen kein regelkonformer Zug eines Spielers mehr möglich ist, stellt sich nun die Frage, wie bei einer gegebenen Startfärbung eines aus zwei kantendisjunkten aufspannenden Bäumen bestehenden Graphen entschieden werden kann, welcher Spieler über eine Gewinnstrategie verfügt. Die erste Frage, die sich hierbei stellt, ist, ob es überhaupt möglich ist bei jedem Graphen, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, durch reguläre Spielzüge die Gewinnfärbung des Makers zu erreichen oder existieren zulässige Graphen, bei denen der Breaker selbst bei schlechtest möglichem Spiel nicht verlieren kann ?

Um eine Antwort auf diese Frage zu finden ist es hilfreich das Konzept des Baumgraphen zweiten Grades aus einer Arbeit von Farber et al. [FRS85] aufzugreifen. Dieser ist wie folgt definiert:

### **Definition 18.** Baumgraph zweiten Grades

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist. Mit *Baumgraph zweiten Grades des Graphen  $G$*  ( $\tau_2(G)$ ) wird derjenige Graph bezeichnet, dessen Ecken aus geordneten 2 – er Tupeln  $(E_1, E_2)$  von Teilmengen der Kantenmenge  $E(G)$  bestehen, so dass  $E_1$  und  $E_2$  jeweils die Kantenmengen aufspannender Bäume von  $G$  ergeben. Zwei Ecken  $(E_1, E_2)$  und  $(F_1, F_2)$  sind adjazent in  $\tau_2(G)$ , wenn  $\sum_{j=1}^2 |E_j \setminus F_j| = 2$  gilt.

Die Kernaussage der Arbeit von Farber et al. [FRS85], die mittels Induktion über die Anzahl der Ecken von Graphen bewiesen wird (vgl. Satz 7), ist, dass für jeden Graphen, der mindestens zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume besitzt,  $\tau_2(G)$  zusammenhängend ist. Für die Analyse des Maker/Breaker - Spiels ist insbesondere der Spezialfall, auf den sich der nachfolgende Satz bezieht, interessant.

### **Satz 9.**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, dann ist  $\tau_2(G)$  zusammenhängend.

Der Beweis findet sich in der Arbeit von Farber et al. [FRS85] in der mittels eines Reduktionslemmas gezeigt wird, dass es für die Aussage keinen Unterschied macht, ob der Graph zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume enthält oder aus genau zwei kantendisjunkten aufspannenden Bäumen besteht.

Für die Analyse des Maker/Breaker - Spiels ist dieser Satz von Bedeutung, da offensichtlich die Kanten des Graphen  $\tau_2(G)$  genau den im Maker/Breaker - Spiel möglichen Spielzügen entsprechen. Aus dem vorangegangenen Satz folgt somit, dass der Maker unter Mithilfe des Breakers, unabhängig von dem aus zwei kantendisjunkten aufspannenden Bäumen bestehenden Graphen und der Startfärbung, immer gewinnen kann. Es existieren keine zulässigen Graphen, bei denen das Erreichen der Gewinnbedingung theoretisch unmöglich ist.

Zur weiteren Analyse des Maker/Breaker - Spiels sowie insbesondere zur Definition des Graphen der erzwungenen Transformationen erweist sich die in der Definition des Baumgraphen zweiten Grades verwendete Bedingung für die Adjazenz zweier Ecken als ungeeignet. Aus diesem Grund werden in den nächsten beiden Sätzen äquivalente Bedingungen hergeleitet.

Eine zweite bei der Untersuchung des Spiels nützliche Bedingung, wann zwischen zwei Ecken aus  $\tau_2(G)$  eine Kante existiert, liefert die nachfolgende Aussage, die in Farber et al. [FRS85] ohne Beweis angegeben ist:

**Satz 10.**

Sei  $(E_1, E_2)$  eine Ecke des Graphen  $\tau_2(G)$ . Für  $e_1 \in E_1$  und  $e_2 \in E_2$  ist  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  genau dann eine weitere Ecke von  $\tau_2(G)$ , wenn  $e_1$  im Fundamentalkreis von  $(E_1 \cup e_2)$  und  $e_2$  im Fundamentalkreis von  $(E_2 \cup e_1)$  liegt.

*Beweis.*

Seien  $(E_1, E_2)$  sowie  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  zwei Paare aufspannender Bäume, dann beinhaltet  $E_1 \cup e_2$  einen Kreis. Da  $(E_1 \cup e_2) \setminus e_1$  per Voraussetzung ein Baum ist, muss  $e_1$  im Fundamentalkreis von  $E_1 \cup e_2$  liegen. Ebenso beinhaltet  $E_2 \cup e_1$  einen Kreis, woraus in Verbindung mit der Voraussetzung, dass  $(E_2 \cup e_1) \setminus e_2$  ein aufspannender Baum ist der zweite Teil der Behauptung folgt. Sei nun  $e_1$  im Fundamentalkreis von  $(E_1 \cup e_2)$  und  $e_2$  im Fundamentalkreis von  $(E_2 \cup e_1)$ . Aus der Voraussetzung folgt nun, dass sowohl  $(E_1 \cup e_2) \setminus e_1$  als auch  $(E_2 \cup e_1) \setminus e_2$  kreisfrei sind, da durch das Hinzufügen von  $e_2$  zu  $E_1$  bzw.  $e_1$  zu  $E_2$  genau ein Kreis entstanden ist, der durch die Herausnahme von  $e_1$  bzw.  $e_2$  wieder aufgelöst wurde. Somit handelt es sich bei  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  um ein Paar kantendisjunkter aufspannender Bäume des Graphen  $G$  und somit um eine Ecke von  $\tau_2(G)$ . □

Mit Hilfe des vorangegangenen Satzes lässt sich nicht nur eine Aussage bzgl. der Existenz von Ecken und Kanten im Graphen  $\tau_2(G)$  machen, sondern es lässt sich auch eine erste Aussage darüber machen wie viele mögliche Kanten bei gegebener Makerfärbung dem Breaker zum Färben zur Auswahl stehen. Aus dem Satz folgt direkt: Nach Färben der Kante  $e_2 \in E_2$  hat der Breaker genau so viele Färbemöglichkeiten wie  $e_1 \in E_1$  existieren, so dass  $e_1$  im Fundamentalkreis von  $(E_1 \cup e_2)$  und  $e_2$  im Fundamentalkreis von  $(E_2 \cup e_1)$  liegt.

Unter Einbeziehung von Fundamentalschnitten ergeben sich weitere Möglichkeiten die Ecken und Kanten des Graphen  $\tau_2(G)$  zu charakterisieren. Vorteilhaft ist dies insbesondere zur Bestimmung der Anzahl der möglichen Breakerfärbungen nach einer gegebenen Makerfärbung.

**Satz 11.**

Sei  $(E_1, E_2)$  eine Ecke des Graphen  $\tau_2(G)$  sowie  $e_1 \in E_1$  und  $e_2 \in E_2$ . Desweiteren sei  $C(E_1, e_2)$  die Kantenmenge des Fundamentalkreises von  $E_1 \cup e_2$  und  $D(E_2, e_2)$  der Fundamentalschnitt von  $E_2$  und  $e_2$ . Dann gilt:  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  ist genau dann eine weitere Ecke von  $\tau_2(G)$ , wenn  $e_1 \in (C \cap D)$ .

*Beweis.*

Sei  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  eine weitere Ecke von  $\tau_2(G)$ . Da  $E_1$  die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes ist muss  $E_1 \cup e_2$  einen Fundamentalkreis ( $C$ ) enthalten. Nach Voraussetzung ist aber  $(E_1 \cup e_2) \setminus e_1$  ebenfalls die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes und somit kreisfrei. Hieraus folgt sofort  $e_1 \in C$ . Da  $E_2$  die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes ist, zerfällt  $E_2 \setminus e_2$  gemäß Satz 2.4 in genau 2 Komponenten. Da nach Voraussetzung  $(E_2 \cup e_1) \setminus e_2$  die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes ist, muss  $e_1$  diese zwei Komponenten verbinden und nach Definition folgt  $e_1 \in D$  und somit  $e_1 \in (C \cap D)$ .

Sei  $e_1 \in (C \cap D)$ . Aus  $e_1 \in C$ , d.h.  $e_1$  liegt im Fundamentalkreis von  $E_1 \cup e_2$ , folgt, da  $E_1$  die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes ist, dass  $(E_1 \cup e_2) \setminus e_1$  wiederum ein aufspannender Baum ist. Ebenso folgt aus  $e_1 \in D$ , d.h.  $e_1$  liegt im Fundamentalschnitt von  $E_2$  und  $e_2$  sofort, dass es sich bei  $(E_2 \cup e_1) \setminus e_2$  um die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes handelt, da  $e_1$  die gemäß Satz 2.4 durch Streichen der Kante  $e_2$  entstandenen beiden Komponenten nach Definition des Fundamentalschnitts verbindet. □

Da gemäß Satz 8 für jedes  $e_2 \in E_2$  eine zulässige Breakerfärbung, d.h.  $e_1 \in E_1$  existiert, so dass  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  die Kantenmengen zweier aufspannender Bäume des Graphen  $G$  sind und desweiteren immer  $e_1 \in C \cap D$  gilt, folgt  $|C \cap D| \geq 2$ .

Da der Breaker nach einer Makerfärbung nicht die im gleichen Spielzug gefärbte Kante wählen darf, folgt aus  $|C \cap D| = 2$  offensichtlich, dass der Breaker nur eine Kante zur Auswahl hat. Somit kann der Maker in diesem Fall durch Färbung der Kante  $e_2$  den Übergang von  $(E_1, E_2)$  nach  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  erzwingen. Allgemein folgt aus Satz 11 sofort, dass die Zahl der Kanten, die der Breaker auf eine Makerfärbung färben kann gegeben ist durch  $|C \cap D| - 1$ . Die Aussage gilt analog auch für die zusätzliche Färbemöglichkeit des Makers in der Spielvariante II, wobei im obigen Beweis lediglich  $e_1$  und  $e_2$  sowie  $E_1$  und  $E_2$  getauscht werden müssen.

### 4.2.3 Graph der erzwungenen Transformationen

Mit Hilfe des Satzes 11 sowie der im Nachgang zu diesem Satz gemachten Ausführungen ist es nun möglich das Konzept des Baumgraphen zweiten Grades zum Graph der erzwungenen Transformationen zu erweitern. Der Graph der erzwungenen Transformationen ermöglicht schließlich Aussagen über die Existenz von Gewinnstrategien für den Maker bzw. Breaker zu treffen. Dem Graph der erzwungenen Transformationen liegt die Idee zu Grunde, dass bei analog zum Baumgraph zweiten Grades definierten Ecken, zwei Ecken nur dann adjazent sind, wenn der Maker den Übergang zwischen den beiden Baumparen in einem Spielzug erzwingen kann. Hieraus ist sofort ersichtlich, dass der Graph

der erzwungenen Transformationen von der betrachteten Spielvariante abhängt. Nachfolgend wird der Graph der erzwungenen Transformationen für beide Spielvarianten formal definiert.

**Definition 19.** Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist. Dann wird mit *Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I des Graphen  $G$*  ( $\tau_2^I(G)$ ) derjenige Graph bezeichnet, dessen Ecken aus geordneten 2-er Tupeln  $(E_1, E_2)$  von disjunkten Teilmengen der Kantenmenge  $E$  bestehen, so dass  $E_1$  und  $E_2$  jeweils die Kantenmengen aufspannender Bäume von  $G$  ergeben. Zwei Ecken  $(E_1, E_2)$  und  $(F_1, F_2)$  sind adjazent in  $\tau_2^I(G)$ , wenn  $e_1 \in E_1$  sowie  $e_2 \in E_2$  existieren, so dass  $F_1 = (E_1 \cup e_2) \setminus e_1$ ,  $F_2 = (E_2 \cup e_1) \setminus e_2$  sowie  $|C \cap D| = 2$  gilt, wobei  $C$  die Kantenmenge des Fundamentalkreises in  $E_1 \cup e_2$  und  $D$  die Kantenmenge des Fundamentalschnitts von  $E_2$  und  $e_2$  bezeichnet.

Um den Graphen der erzwungenen Transformationen für die Spielvariante II zu erhalten ist es nötig, um den zusätzlichen Färbemöglichkeiten des Makers Rechnung zu tragen, die Definition zu erweitern.

**Definition 20.** Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist. Dann wird mit *Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II des Graphen  $G$*  ( $\tau_2^{II}(G)$ ) derjenige Graph bezeichnet, dessen Ecken aus geordneten 2-er Tupeln  $(E_1, E_2)$  von disjunkten Teilmengen der Kantenmenge  $E$  bestehen, so dass  $E_1$  und  $E_2$  jeweils die Kantenmengen aufspannender Bäume von  $G$  ergeben. Zwei Ecken  $(E_1, E_2)$  und  $(F_1, F_2)$  sind adjazent in  $\tau_2^{II}(G)$ , wenn  $e_1 \in E_1$  sowie  $e_2 \in E_2$  existieren so dass  $F_1 = (E_1 \cup e_2) \setminus e_1$ ,  $F_2 = (E_2 \cup e_1) \setminus e_2$  gilt und entweder

- $|C \cap D| = 2$  gilt, wobei  $C$  die Kantenmenge des Fundamentalkreises in  $E_1 \cup e_2$  und  $D$  die Kantenmenge des Fundamentalschnitts von  $E_2$  und  $e_2$  bezeichnet.  
oder
- $|G \cap H| = 2$  gilt, wobei  $G$  die Kantenmenge des Fundamentalkreises in  $E_2 \cup e_1$  und  $H$  die Kantenmenge des Fundamentalschnitts von  $E_1$  und  $e_1$  bezeichnet.

Aus der Definition von Fundamentalkreis und Fundamentalschnitt folgt, dass der Maker, sofern er den Übergang von  $(E_1, E_2)$  nach  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  erzwingen kann, dies immer auch für den Übergang von  $((E_1 \cup e_2) \setminus e_1, (E_2 \cup e_1) \setminus e_2)$  nach  $(E_1, E_2)$  gilt. Es ist somit nicht nötig den Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I bzw. II als gerichteten Graphen zu definieren.

Die Bedingung  $\sum_{j=1}^2 |E_j \setminus F_j| = 2$  in der Definition des Baumgraphen zweiten Grades bedeutet offensichtlich, dass sich die Baumpaare zweier benachbarter Ecken in nur zwei Kanten unterscheiden dürfen. Diese Forderung gilt, lediglich abweichend formuliert, auch für den Graphen der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I bzw. II. Jedoch ist die Existenz einer Kanten zwischen zwei Ecken an weitere Bedingungen geknüpft, wobei definitionsgemäß jede Kante in  $\tau_2^I(G)$  auch in  $\tau_2^{II}(G)$  vorhanden sein muss. Somit enthält  $\tau_2(G)$   $\tau_2^{II}(G)$  und dieser wiederum  $\tau_2^I(G)$  für jeden Graphen, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, als Teilgraphen.



Mit Hilfe des Graphen der erzwungenen Transformationen lässt sich nun für beide Spielvarianten eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Gewinnstrategie für den Maker formulieren.

**Satz 12.**

Der Maker besitzt für eine Startfärbung  $(E_1, E_2)$  eine Gewinnstrategie in Spielvariante I bzw. II, wenn  $(E_2, E_1)$  in der gleichen Komponente des Graphen der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I bzw. II liegt.

*Beweis.*

Sei  $(E_1, E_2)$  in der gleichen Komponente des Graphen der erzwungenen Transformationen wie  $(E_2, E_1)$ . Somit existiert mindestens ein  $((E_1, E_2), (E_2, E_1))$ -Pfad, der nur in dieser Komponente des Graphen der erzwungenen Transformationen verläuft. Gemäß Definition gilt für je zwei benachbarte Ecken in diesem Pfad  $|C \cap D| = 2$ , woraus wiederum, wie im Nachgang zu Satz 11 ausgeführt, folgt, dass der Maker diese Übergänge erzwingen kann. Somit kann der Maker entlang dieses Pfades den Übergang von  $(E_1, E_2)$  nach  $(E_2, E_1)$  erzwingen und somit das Spiel gewinnen. □

Weiter gilt:

**Satz 13.**

Sei der Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I bzw. II für einen Graphen, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, zusammenhängend, dann besitzt der Maker in der jeweiligen Spielvariante für alle zulässigen Ausgangsfärbungen eine Gewinnstrategie.

*Beweis.*

Aus der Definition des Graphen der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I bzw. II folgt, dass dieser alle kantendisjunkten aufspannenden Baumpaare als Ecken enthält. Ist  $(E_1, E_2)$  eine Ecke des Graphen der erzwungenen Transformationen so folgt aus der Definition, dass auch  $(E_2, E_1)$  eine Ecke sein muss. Ist nun der Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I bzw. II zusammenhängend, so liegen alle Paare kantendisjunkter aufspannender Bäume in der gleichen Komponente und aus Satz 12 folgt der Satz. □

Zerfällt der Graph der erzwungenen Transformationen in mehrere Komponenten und liegt für eine Startfärbung  $(E_1, E_2)$  die Zielfärbung  $(E_2, E_1)$  in einer anderen Komponente, so kann aus den vorangegangenen beiden Sätzen keine Aussage zur Existenz einer Gewinnstrategie gemacht werden. Der Maker hat in diesem Fall zwar keine Möglichkeit ausschließlich mittels Färbungen, die dem Breaker nur eine Antwortfärbung ermöglichen, die Zielfärbung zu erreichen, jedoch ist es denkbar, dass der Breaker auf eine Makerfärbung aus mehreren Antwortzügen wählen kann, diese jedoch alle einen Komponentenwechsel im Graph der erzwungenen Transformationen bedeuten.

Um aus Satz 12 eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Gewinnstrategie für den Maker zu machen, ist es somit nötig zu zeigen, dass dem Breaker auf jede Makerfärbung eine Färbemöglichkeit zur Verfügung steht, die zu einem Baumpaare führt, das in

der gleichen Komponente des Graphen der erzwungenen Transformationen liegt wie das Baumpaar zu Beginn des Spielzuges. Für die in Kapitel 5 näher betrachteten Graphen  $K_4$  und  $D_6$  trifft dies zu. Die Aussage konnte jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht allgemein für alle aus zwei kantendisjunkten aufspannenden Bäumen bestehenden Graphen gezeigt werden. Um aus Satz 13 eine Äquivalenzaussage zu machen wäre zusätzlich zur Äquivalenz in Satz 12 noch zu zeigen, dass der Fall nicht auftreten kann, dass der Graph der erzwungenen Transformationen in mehrere Komponenten zerfällt, jedoch in einer Komponente sowohl  $(E_1, E_2)$  als auch  $(E_2, E_1)$  liegen.

#### 4.2.4 Strategieübertragung

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden im Folgenden zwei Sätze bewiesen, die es ermöglichen von Graphen, für die die Existenz einer Gewinnstrategie für den Maker oder Breaker bekannt ist, auf die Existenz einer solchen für einen aus diesen abgeleiteten oder zusammengesetzten Graphen zu schließen. Der letzte Satz des Abschnitts beantwortet schließlich die Frage, warum es keine für das Spiel wesentliche Einschränkung darstellt als Grundlage des Basentauschspiels nur Graphen, die die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume und nicht allgemeiner die Vereinigung zweier aufspannender Bäume sind, zu wählen. Gleichzeitig liefert der Satz in Verbindung mit Satz 15 eine weitere Möglichkeit aus zwei Graphen, für die die Existenz einer Gewinnstrategie für den Maker oder den Breaker bekannt ist, einen dritten Graphen zu bilden, für den aus den beiden ursprünglichen Graphen abgeleitet werden kann, welcher Spieler über eine Gewinnstrategie verfügt. Die Sätze sind für beide Spielvarianten gleichermaßen gültig.

##### Satz 14.

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist und eine Ecke  $v \in V$  mit  $d(v) = 2$  enthält. Dann gilt:

Der Maker besitzt genau dann eine Gewinnstrategie für den Graphen  $G$ , wenn er eine Gewinnstrategie für den Graphen  $G' = (V \setminus v, E')$ , der durch Streichung der Ecke  $v$  sowie der mit dieser Ecke inzidenten Kanten entsteht, besitzt.

##### *Beweis.*

Mit Satz 7.1 sowie Satz 6.4 folgt, dass der Graph  $G'$  wieder die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist. Für jede Färbung  $(E_1, E_2)$  des Graphen  $G$  gilt, dass die zu  $v$  inzidenten Kanten unterschiedlich gefärbt sein müssen, da ansonsten einer der Bäume keine mit  $v$  inzidente Kante besitzen würde. Hieraus folgt, dass zum einen eine Färbung einer zu  $v$  inzidenten Kante durch den Maker immer die Färbung der anderen zu  $v$  inzidenten Kante durch den Breaker erzwingt und dass zum anderen der Breaker niemals eine zu  $v$  inzidente Kante färben kann ohne dass die zweite zu  $v$  inzidente Kante im gleichen Spielzug durch den Maker gefärbt wurde. Weiterhin folgt, dass für jede nicht zu  $v$  inzidente Kante  $e_2 \in E_2$  keine zu  $v$  inzidente Kante im Fundamentalkreis von  $E_1 \cup e_2$  sein kann. Somit stehen dem Breaker, in Verbindung mit Satz 10 über Fundamentalkreise, im Graphen  $G' = (V \setminus v, E')$  die gleichen Antwortfärbungen wie im Graphen  $G = (V, E)$  zur Verfügung. Existiert nun eine Gewinnstrategie in  $G'$  so kann der Maker diese analog im Graphen  $G$  umsetzen und erreicht durch Färbung der zu  $v$  inzidenten Kante im letzten Spielzug erzwungen die Gewinnbedingung. Im Gegenzug lässt sich eine Gewinnstrategie in  $G$  mit Ausnahme der mit  $v$  inzidenten Kanten direkt auf  $G'$  anwenden.  $\square$

Unter Zuhilfenahme des vorangegangenen Satzes lässt sich die Frage, ob für den Maker oder den Breaker bei einem gegebenen Graphen, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist und der eine Ecke vom Grad 2 enthält, eine Gewinnstrategie existiert auf die analoge Frage für den um die Ecke mit Grad 2 und den zu dieser Ecke inzidenten Kanten reduzierten Graphen zurückführen. Dieses Verfahren lässt sich so lange anwenden bis keine Ecke mit Grad 2 mehr im Graphen existiert.

Der nachfolgende Satz ermöglicht zum einen aus der Kenntnis der Existenz einer Gewinnstrategie für den Maker bzw. Breaker für zwei gegebene Graphen auf die Existenz einer solchen für die in spezieller Weise gebildete Vereinigung dieser beiden Graphen zu schließen. Zum anderen ist es aber bei Vorhandensein bestimmter Voraussetzungen auch möglich einen Graphen in zwei Graphen mit geringerer Ordnung zu zerlegen und mit Hilfe des Satzes aus der Existenz einer Gewinnstrategie für diese beiden Graphen Rückschlüsse auf die Existenz einer solchen für den Ausgangsgraphen zu ziehen.

**Satz 15.**

Seien  $G_1 = (V_1, E_1)$  sowie  $G_2 = (V_2, E_2)$  zwei kanten- und eckendisjunkte Graphen, die jeweils die kantendisjunkte Vereinigung zweier aufspannender Bäume sind. Seien  $e_1 = (v_1, v_2)$  und  $e_2 = (v'_1, v'_2)$  zwei beliebige nicht parallele Kanten mit  $v_1, v'_1 \in V_1$  und  $v_2, v'_2 \in V_2$  und der Graph  $G = (V, E)$  die um die beiden Kanten  $e_1$  und  $e_2$  ergänzte Vereinigung von  $G_1$  und  $G_2$ , d.h.  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup e_1 \cup e_2)$ , dann gilt:

Der Graph  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup e_1 \cup e_2)$  ist die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume und der Maker besitzt für den Graphen  $G$  genau dann eine Gewinnstrategie, wenn er sowohl für  $G_1$  als auch für  $G_2$  über eine solche verfügt.

*Beweis.*

Der Graph  $G' = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$  besteht gemäß der Voraussetzung aus genau zwei Komponenten, die jeweils die Vereinigung aus einem roten und einem blauen kantendisjunkten aufspannenden Baum sind. Sei nun  $e_1$  o.B.d.A. rot, dann stellt diese Kante nach Hinzufügen offensichtlich eine Brücke zwischen den beiden roten aufspannenden Bäumen dar und die Vereinigung der beiden roten Bäume mit  $e_2$  ist kreisfrei, zusammenhängend und besteht aus  $|V_1| + |V_2| - 1$  Kanten, ist also gemäß Satz 2 ein aufspannender Baum von  $G$ . Sei nun  $e_2$  blau gefärbt. Mit einer analogen Argumentation bilden auch die blauen Kanten einen aufspannenden Baum von  $G$ . Der erste Teil des Satzes ist somit gezeigt und der Graph  $G$  bildet eine zulässige Grundlage für das Basentauschspiel.

Als nächsten Schritt zum Beweis des Satzes ist nun zu zeigen, dass  $e_1$  und  $e_2$  nach Beendigung eines vollständigen Spielzuges immer unterschiedlich gefärbt sein müssen. Seien  $e_1$  und  $e_2$  nach Beendigung eines Spielzuges o.B.d.A beide rot gefärbt. Gemäß den Spielregeln des Basentauschspiels müssen die roten und blauen Kanten jeweils wieder einen aufspannenden Baum bilden. Seien  $v \in V_1$  und  $w \in V_2$  zwei Ecken des Graphen. Gemäß Satz 2.5 muss im blauen aufspannenden Baum genau ein  $(v, w)$  - Weg existieren. Da jedoch  $e_1$  und  $e_2$  gemäß den Voraussetzungen des Satzes die einzigen Kanten mit einer Endecke in  $V_1$  sowie einer Endecke in  $V_2$  sind, diese jedoch beide rot gefärbt sind, führt dies zu einem Widerspruch. Die blauen Kanten stellen keinen aufspannenden Baum von  $G$  dar. Somit folgt, dass  $e_1$  und  $e_2$  nach Beendigung eines Spielzuges immer unterschiedlich gefärbt sein müssen. Eine Färbung einer der beiden Kanten durch den Maker erzwingt somit immer im gleichen Spielzug die Färbung der anderen Kante durch den Breaker.

Nachfolgend wird nun gezeigt, dass weder  $e_1$  noch  $e_2$  nach der Färbung einer Kante ungleich  $e_1$  bzw.  $e_2$  durch den Maker im entstandenen Kreis liegen können. Sei  $R$  die Kantenmenge des roten aufspannenden Baumes und  $B$  die Kantenmenge des blauen aufspannenden Baumes. Färbt der Maker eine blaue Kante  $k \in B$  rot, so existiert in  $R \cup k$  ein Kreis. Um den Spielbedingungen zu genügen muss der Breaker eine Kante aus diesem Kreis, dem Fundamentalkreis, blau färben. Jedoch kann weder die Kante  $e_1$  noch die Kante  $e_2$  in diesem Kreis liegen, denn würde z.B.  $e_1 = (v_1, v_2)$  mit  $v_1 \in V_1$  und  $v_2 \in V_2$  im Kreis liegen, müsste ein Weg von  $v_1$  nach  $v_2$  existieren, der  $e_1$  nicht enthält. Da jedoch  $e_2$  die einzige weitere Verbindung zwischen der Eckenmenge  $E_1$  und der Eckenmenge  $E_2$  darstellt, diese Kante jedoch gemäß dem Vorabschnitt blau gefärbt sein muss, ist dies nicht möglich.

Somit enthält jeder Kreis, der nach der Färbung einer Kante ungleich  $e_1$  und  $e_2$  entsteht, keine dieser beiden Kanten. Jeder dieser Kreise verläuft somit immer nur in einem der beiden ursprünglichen Graphen und muss folglich identisch sein mit dem Kreis, der durch eine analoge Färbung in  $G_1$  bzw.  $G_2$  entsteht. In Verbindung mit Satz 10 folgt, dass dem Breaker nach der Färbung einer Kante durch den Maker die gleichen Färbemöglichkeiten wie bei Färbung der gleichen Kante im einzelnen Graphen  $G_1$  oder  $G_2$  zur Verfügung stehen.

Dies ermöglicht die Teilgraphen vollkommen getrennt voneinander zu betrachten. Kann der Maker in beiden Teilgraphen,  $G_1$  und  $G_2$ , das Erreichen der Gewinnbedingung erzwingen, so kann er dies auch in  $G$ , da er wie gezeigt die Umfärbung der beiden Kanten  $e_1$  und  $e_2$  immer erzwingen kann. Gleichzeitig folgt jedoch auch, dass sobald in einem der beiden ursprünglichen Graphen kein Erreichen der Gewinnbedingung möglich ist, der Maker auch im Graphen  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup e_1 \cup e_2)$  diese nicht erreichen kann, womit der Satz vollständig bewiesen ist.  $\square$

In Abschnitt 3.2 wurde als Ausgangspunkt für das Basentauschspiel für Graphen ein Graph, der die kantendisjunkte Vereinigung zweier aufspannender Bäume darstellt, definiert. Prinzipiell ist es jedoch auch möglich das Spiel allgemeiner auf Graphen, die die Vereinigung zweier, nicht notwendigerweise kantendisjunkter, aufspannender Bäume darstellen, d.h. Graphen in denen Mehrfachkanten existieren können, zu definieren. Der nachfolgende Satz zeigt jedoch, dass in diesen Fällen die Frage nach der Existenz einer Gewinnstrategie auf die analoge Frage für einen Graphen, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, bzw. den Graphen mit zwei Ecken und zwei zu diesen Ecken inzidenten parallelen Kanten, zurückgeführt werden kann.

**Satz 16.**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $|G| \geq 3$ , der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist und mindestens zwei parallele Kanten enthält. Seien  $e, e' \in E$  zwei parallele Kanten sowie  $v, v' \in V$  die zu  $e$  und  $e'$  inzidenten Ecken des Graphen  $G$ , dann gilt:

Der Maker besitzt genau dann eine Gewinnstrategie im Basentauschspiel für Graphen in  $G$ , wenn er über eine solche im Graphen  $G' = (V', E') = G / \{e, e'\}$ , mit

$$V' := (V \setminus \{v, v'\}) \cup v_e \text{ mit } v_e \notin V \text{ und}$$

$$E' := \{(x, y) \in E \mid \{x, y\} \cap \{v, v'\} = \emptyset\} \cup \{(v_e, w) \mid (v, w) \in E \setminus \{e, e'\} \text{ oder } (v', w) \in E \setminus \{e, e'\}\}$$

verfügt.

$G'$  ist somit der aus  $G$  durch Kontraktion der parallelen Kanten entstehende Graph.

Zum Beweis von Satz 16 wird nachfolgende Proposition benötigt. In dieser sowie im Beweis zu Satz 16 wird benutzt, dass aus der Definition des Graphen  $G' = (V', E')$  folgt, dass jede nicht zu  $v$  oder  $v'$  in  $G = (V, E)$  inzidente Kante auch in  $G'$  existiert. Kanten, die in  $G$  zu  $v$  oder  $v'$  inzident sind, können in  $G'$ , mit Ausnahme von  $e$  und  $e'$ , eindeutig Kanten, die als zweite Endecke an Stelle von  $v$  oder  $v'$  die neue Ecke  $v_e$  besitzen, zugeordnet werden. In diesem Sinne gilt für  $R', B' \subset E'$  auch  $R', B' \subset E$ .

**Proposition 2.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit mindestens zwei parallelen Kanten, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist und  $e, e' \in E$  zwei parallele Kanten sowie  $G' = (V', E') = G / \{e, e'\}$ . Seien  $R', B' \subset E'$  dann gilt:

$(R' \cup e, B' \cup e')$  sind genau dann die Kantenmengen eines komplementären Paares aufspannender Bäume von  $G$ , wenn  $(R', B')$  die Kantenmengen eines komplementären Paares aufspannender Bäume von  $G'$  sind.

*Beweis.* Seien  $(R' \cup e, B' \cup e')$  die Kantenmengen eines komplementären Paares aufspannender Bäume von  $G$ .  $R'$  enthält gemäß Voraussetzung  $|E| - 2 = |E'| - 1$  Kanten und ist kreisfrei, da ansonsten  $R' \cup e$  gemäß der Definition von  $G'$  einen Kreis in  $G$  enthalten hätte. Somit handelt es sich bei  $R'$  gemäß Satz 2.2 um die Kantenmenge eines aufspannenden Baumes von  $G'$ . Analog folgt dies auch für  $B'$  und damit der erste Teil der Aussage. Seien nun  $(R', B')$  die Kantenmengen eines komplementären Paares aufspannender Bäume von  $G'$ .  $R' \cup e$  enthält dann  $|E'| = |E| - 1$  Kanten und ist kreisfrei, da gemäß der Definition von  $G'$  ansonsten bereits  $R'$  einen Kreis in  $G'$  enthalten hätte. Da dies auch analog für  $B' \cup e'$  folgt, ist die Aussage gezeigt.  $\square$

*Beweis.* Satz 16

Jeder aufspannende Baum von  $G$ , dessen Komplement ebenfalls ein aufspannender Baum ist, enthält höchstens eine der Kanten  $e$  oder  $e'$ , da beide Kanten zusammen einen Kreis ergeben. Da dies analog auch für das Komplement gilt, folgt, dass jeder aufspannende Baum von  $G$ , dessen Komplement wiederum ein aufspannender Baum von  $G$  ist, genau eine der beiden Kanten  $e$  oder  $e'$  enthält. In Verbindung mit Proposition 2 gilt somit:

- Färbt der Maker in  $G$   $e$  oder  $e'$ , so muss der Breaker die jeweils andere Kante färben.
- Färbt der Maker in  $G$  weder  $e$  noch  $e'$ , so kann der Breaker auch keine der beiden Kanten färben.
- Jedem komplementären Paar aufspannender Bäume mit den Kantenmengen  $(R', B')$  von  $G'$  entspricht ein komplementäres Paar aufspannender Bäume mit den Kantenmengen  $(R' \cup e, B' \cup e')$  von  $G$ .

Sei  $A$  eine Gewinnstrategie des Makers auf  $G'$ , dann kann der Maker diese auch analog auf  $G$  spielen. Färbt er abschließend die Kante  $e$  bzw.  $e'$  so ist das Spiel auch in  $G$  für ihn gewonnen. Hat jedoch der Breaker in  $G'$  eine Gewinnstrategie so färbt er, falls der Maker  $e$  bzw.  $e'$  färbt, erzwungenermaßen die andere Kante, wendet aber ansonsten die Gewinnstrategie aus  $G'$  an. Hierbei handelt es sich offensichtlich um eine Gewinnstrategie in  $G$ . Besitzt der Maker oder der Breaker eine Gewinnstrategie in  $G$  folgt ebenfalls aus den Aussagen, dass er diese unter Auslassens des Färbens der Kante  $e$  bzw.  $e'$  auch auf  $G'$  anwenden kann. Der Satz ist somit bewiesen.  $\square$

Gemäß Satz 6 können in einem Graphen, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist, maximal 2 - fache Kanten auftreten. Satz 16 ermöglicht Graphen, die die Vereinigung zweier nicht kantendisjunkter aufspannender Bäume sind, sukzessive um eine Ecke zu reduzieren, ohne jedoch die Existenz einer Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler zu beeinflussen. Bei einem endlichen Graphen führt dies entweder zu einem schlichten Graphen oder dem Graphen mit zwei Ecken und zwei parallelen Kanten. Im Graph mit zwei Ecken und zwei parallelen Kanten besitzt der Maker jedoch offensichtlich eine Gewinnstrategie. Somit ist es keine wesentliche Einschränkung als Grundlage für das Basentauschspiel nur Graphen, die die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume darstellen, zu definieren.

Aus dem vorangegangenen Satz ergibt sich, in Verbindung mit einer Erweiterung von Satz 15, eine weitere Möglichkeit zwei für das Spiel zulässige Graphen zu einem neuen Graphen zu verbinden und abzuleiten welcher Spieler in diesem über eine Gewinnstrategie verfügt. Werden entgegen den Voraussetzungen des Satzes 15 zwei Graphen, die jeweils die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume sind, mittels zweier paralleler Kanten verbunden, wobei die anderen Bedingungen des Satzes 15 eingehalten werden, so ist der entstehende Graph die Vereinigung zweier, jedoch nicht kantendisjunkter, aufspannender Bäume. Da dies für die Beweisführung unerheblich ist, gilt die Aussage des Satzes bezüglich der Übertragung der Gewinnstrategie jedoch analog. Mittels Satz 16 lassen sich nun die beiden parallelen Kanten kontrahieren und es entsteht wieder ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist (siehe Beispiel in Abbildung 4.4). Im neuen Graph verfügt der Maker gemäß der Vorbemerkung in Verbindung mit Satz 16 genau dann über eine Gewinnstrategie, wenn er auch in beiden Ausgangsgraphen über eine Gewinnstrategie verfügt.

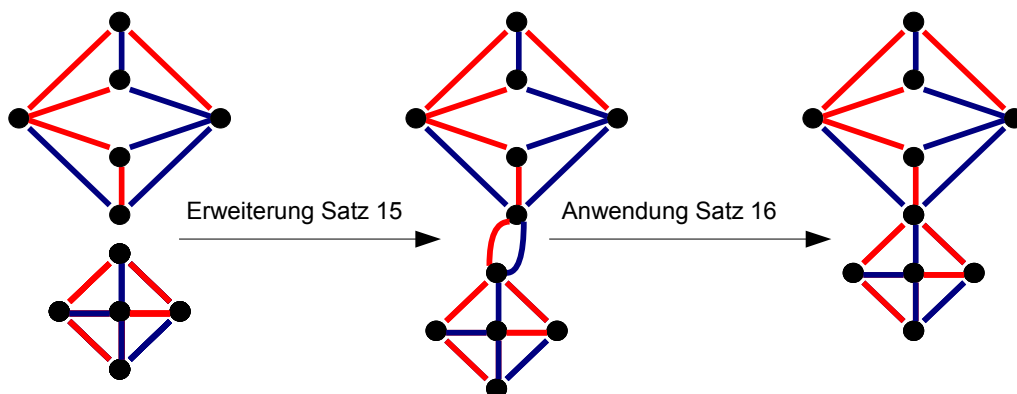


Abbildung 4.4: Beispiel für die Verbindung zweier Graphen

## 5 Analyse der Spielvariante I

Im nachfolgenden Kapitel wird die Variante I des Maker/Breaker - Spiels näher untersucht. Hierzu wird für konkrete Graphen ermittelt für welchen Spieler eine Gewinnstrategie existiert.

### 5.1 Analyse $K_4$

Gemäß Satz 6.6 handelt es sich bei  $K_4$  um den Graphen mit der kleinsten Ordnung, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist. Es bietet sich aus diesem Grund an, die Untersuchung der Spielvariante I mit diesem Graphen zu beginnen. Die Kanten werden im Folgenden gemäß Abbildung 5.1 bezeichnet.

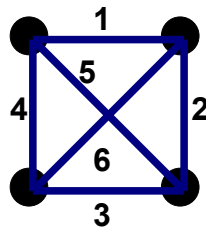


Abbildung 5.1: Graph  $K_4$

Gemäß der Cayley - Formel<sup>1</sup> besitzt  $K_4$   $n^{n-2}$  ( $n$  - Anzahl der Ecken), d.h. 16, aufspannende Bäume. Es ist leicht zu sehen, dass die Menge der geordneten kantendisjunkten Baumpaare nur 12 Elemente enthält, da alle aufspannenden Bäume mit einer Ecke vom Grad 3 nicht Teil eines kantendisjunkten Baumpaars sein können, alle anderen es aber sind.

**Satz 17.** Sei  $K_4$  der vollständige Graph mit vier Ecken, dann besitzt der Breaker in Spielvariante I des Basentauschspiels für Graphen eine Gewinnstrategie unabhängig von der Ursprungsfärbung des Graphen.

*Beweis.*

Zum Beweis des Satzes wird der Graph der erzwungenen Transformationen ermittelt und gezeigt, dass dieser in drei Komponenten zerfällt, wobei niemals die Ausgangsfärbung sowie die Zielfärbung in der gleichen Komponente liegen und sofern der Breaker mehrere Auswahlmöglichkeiten nach einem Maker - Zug besitzt, immer mindestens ein resultierendes Baumpaare in der gleichen Komponente wie das Baumpaare zu Beginn des Spielzug liegt. Hieraus folgt, dass der Maker keine Möglichkeit hat seine Zielfärbung forciert zu erreichen und somit verfügt der Breaker über eine Gewinnstrategie.

---

<sup>1</sup>siehe z.B. [MN07]

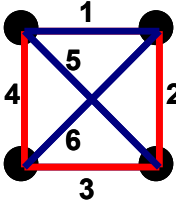
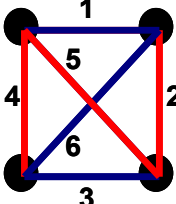
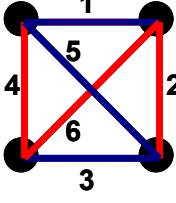
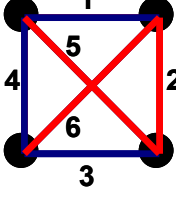
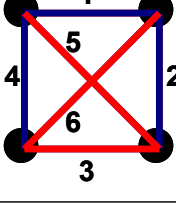
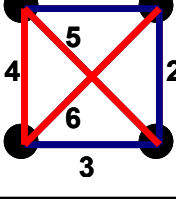
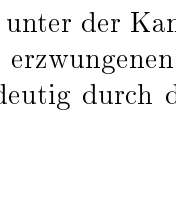

In Tabelle 5.1 sind für jedes Paar kantendisjunkter aufspannender Bäume und für jeweils alle Kanten, die der Maker gemäß den Regeln färben darf, die dann möglichen Breakerfärbungen aufgeführt.

Tabelle 5.1: Beweis  $K_4$  Spielvariante I

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (rot)	Färbung Breaker (blau)	resultierender Maker-Baum	Kompo- nente
1	(1,2,3)  I		4	1	(2,3,4)	II
			2	(1,3,4)	I	
			3	(1,2,4)	II	
			5	2	(1,3,5)	I
			6	2	(1,3,6)	I
			2	(1,2,4)  II		3
2	(1,3,4)	I				
4	(1,2,3)	I				
5	1	(2,4,5)	II			
6	1	(2,4,6)	II			
3	(1,3,4)  I		2			1
			3	(1,2,4)	II	
			4	(1,2,3)	I	
			5	4	(1,3,5)	I
			6	4	(1,3,6)	I
			4	(1,3,5)  I		6
3	(1,5,6)	III				
5	(1,3,6)	I				
2	5	(1,2,3)				I
4	5	(1,3,4)				I
5	(1,3,6)  I					5
			3	(1,5,6)	III	
			6	(1,3,5)	I	
			2	6	(1,2,3)	I
			4	6	(1,3,4)	I
			6	(1,5,6)  III		3
5	(1,3,6)	I				
6	(1,3,5)	I				
2	1	(2,5,6)				III
4	1	(4,5,6)				III



Tabelle 5.1: Beweis  $K_4$  Spielvariante I

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (rot)	Färbung Breaker (blau)	resultierender Maker-Baum	Kompo- nente	
7	(2,3,4)		1	2	(1,3,4)	I	
	II		5	3	(1,2,4)	II	
8	(2,4,5)		6	2	(4,5,6)	III	
			II	1	4	(2,5,6)	III
	9	(2,4,6)		5	2	(4,5,6)	III
				II	3	4	(2,5,6)
10	(2,5,6)		4	2	(4,5,6)	III	
			III	1	5	(2,4,6)	II
	11	(3,5,6)		1	3	(1,5,6)	III
				III	3	2	(3,5,6)
12	(4,5,6)		2	4	(2,5,6)	III	
			III	1	5	(2,4,6)	II
	9	(2,4,6)		5	6	(2,4,5)	II
				II	3	6	(1,2,4)
10	(2,5,6)		4	6	(2,4,5)	II	
			III	3	6	(1,2,4)	II

Die römischen Ziffern unter der Kantenmenge des Maker - Baums bezeichnen die Komponente des Graphs der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I, in der das Baumpaar, welches eindeutig durch die Kantenmenge des Maker - Baums bestimmt ist

und den Ausgangspunkt des Spielzuges bildet, liegt (siehe auch Abbildung 5.3). In Spalte sieben ist die Komponente des Graphen der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I in der das Baumpaar, das nach Abschluss des Spielzuges entstanden ist, liegt, aufgeführt. Mit diesen Informationen ist es nun möglich den Baumgraph zweiten Grades (Abbildung 5.2) sowie den Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I zu ermitteln. Wie in Abbildung 5.3 zu sehen ist, zerfällt der Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I in drei Komponenten und für kein Baumpaar befindet sich das durch den Maker zum Gewinn zu erreichende Baumpaar in der gleichen Komponente (im Graph haben diese beiden Baumpaare jeweils die gleiche Farbe). Der Satz ist somit bewiesen. □

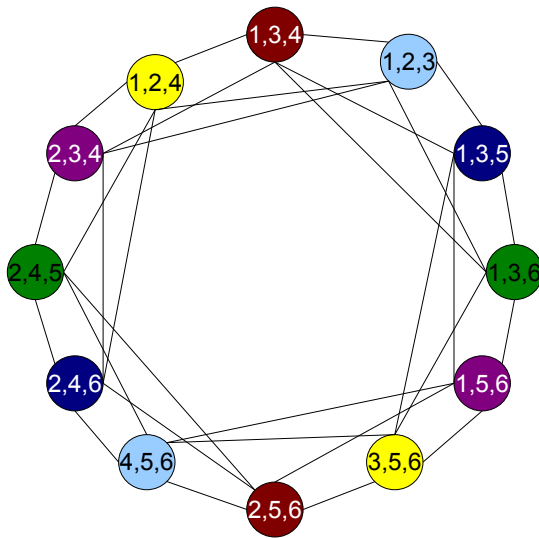


Abbildung 5.2: Baumgraph zweiten Grades  $K_4$

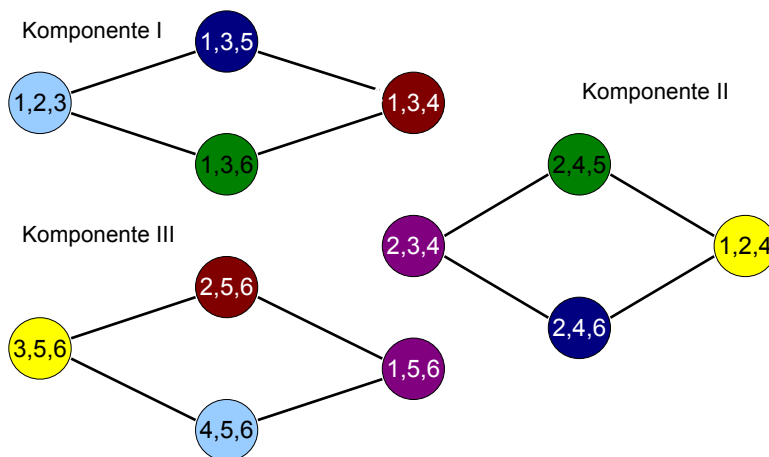


Abbildung 5.3: Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I  $K_4$

## 5.2 Induzierter Teilgraph $K_4$

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe des Satzes 17 die Existenz einer Gewinnstrategie des Breakers für eine wesentlich größere Klasse von Graphen, die die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume sind, bewiesen.

### Satz 18.

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist und  $K_4$  als induzierten Teilgraphen enthält, dann besitzt der Breaker bei jeder möglichen Startfärbung in Spielvariante I des Basentauschspiels eine Gewinnstrategie.

*Beweis.*

Zum Beweis des Satzes werden nachfolgende Aussagen gezeigt:

- Jede Färbung einer Kante außerhalb des Teilgraphen  $K_4$  kann nur mit der Färbung einer Kante innerhalb des Teilgraphen beantwortet werden.
- Jede Färbung innerhalb des Teilgraphen  $K_4$  muss mit der Färbung einer Kante innerhalb des Teilgraphen, auf die Kanten außerhalb des Teilgraphen keinen Einfluss haben, beantwortet werden.

Da der Maker um die Gewinnbedingung zu erreichen notwendigerweise auch die komplette Umfärbung des Teilgraphen  $K_4$  erreichen muss, die obigen beiden Aussagen jedoch dem Breaker ermöglichen seine Gewinnstrategie aus dem reinen  $K_4$  anzuwenden, folgt hieraus der Satz.

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist und  $K_4$  als induzierten Teilgraphen enthält. Offensichtlich ergeben vier Kanten gleicher Färbung innerhalb des Teilgraphen  $K_4$  einen Kreis, weshalb nach Beendigung des gesamten Spielzuges, d.h. Maker- und Breakerfärbung, stets drei Kanten rot und drei Kanten blau gefärbt sein müssen. Die möglichen Färbungen des Teilgraphen  $K_4$  entsprechen hierbei den aufspannenden Baumpaare aus dem reinen  $K_4$ . Alle anderen Kombinationen von drei roten sowie drei blauen Kanten ergeben zwangsläufig einen Kreis. Färbt nun der Maker eine Kante außerhalb des Teilgraphen  $K_4$  so folgt, dass der Breaker mit keiner Färbung innerhalb des Teilgraphen antworten kann, da sonst vier Kanten innerhalb des Teilgraphen blau gefärbt wären. Somit ist die erste Aussage gezeigt.

Färbt der Maker hingegen eine Kante innerhalb des Teilgraphen  $K_4$ , so entsteht in diesem ein Kreis. Da die roten Kanten vor der Färbung einen aufspannenden Baum des Graphen darstellten ist dieser Kreis eindeutig. Da im  $K_4$ , sofern eine zulässige Ausgangsfärbung vorliegt, zwischen jeweils zwei Ecken ein nur aus roten sowie ein nur aus blauen Kanten bestehender Weg existiert, verläuft dieser Kreis nur innerhalb des Teilgraphen  $K_4$ . Nach Färbung einer Kanten dieses Kreises durch den Breaker, in Analogie zur Strategie im reinen  $K_4$ , ergeben die roten Kanten wieder einen aufspannenden Baum, während die blauen Kanten zumindest einen aufspannenden Baum des Teilgraphen bilden. Da vor der Maker- und Breakerfärbung die blauen Kanten einen aufspannenden Baum des Graphen bildeten, folgt hieraus, dass die blauen Kanten auch nach der Färbung kreisfrei und zusammenhängend sind und somit einen aufspannenden Baum des Graphen bilden. Somit ist Aussage 2 und damit der Satz gezeigt.

□

### 5.3 Analyse 4-Wheel ( $W_4$ )

Der nächste Graph, der als Grundlage des Maker/Breaker - Spiels untersucht werden soll, ist das 4-Wheel ( $W_4$ ). Dabei werden die Kanten analog der nachfolgenden Abbildung 5.4 nummeriert.

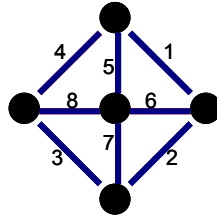


Abbildung 5.4: Graph  $W_4$

**Satz 19.**

Der Maker besitzt für jede zulässige Startfärbung des Graphen  $W_4$  in der Spielvariante I des Basentauschspiels eine Gewinnstrategie.

*Beweis.*

Die Vorgehensweise ist analog zu der beim Beweis zu  $K_4$ , wobei auf den Baumgraph zweiten Grades verzichtet wird. In der nachfolgenden Tabelle 5.2 werden zu jedem Paar aufspannender Bäume diejenigen Färbungen aufgeführt, die der Maker erzwingen kann. Färbungen, die dem Breaker eine Wahlmöglichkeit überlassen sind nicht aufgeführt. Dies ist in diesem Fall möglich, da der Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I bereits zusammenhängend ist und somit mit Satz 13 bereits folgt, dass der Maker über eine Gewinnstrategie verfügt.

Tabelle 5.2: Beweis  $W_4$  Spielvariante I

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (rot)	Färbung Breaker (blau)	resultierender Maker-Baum
1	(1,2,3,5)		7 4 6	2 1 1	(1,3,5,7) (2,3,4,5) (2,3,5,6)
2	(1,2,3,8)		4 7 6	3 3 2	(1,2,4,8) (1,2,7,8) (1,3,6,8)
3	(1,2,4,7)		3 6 5	2 2 1	(1,3,4,7) (1,4,6,7) (2,4,5,7)

Tabelle 5.2: Beweis  $W_4$  Spielvariante I

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (rot)	Färbung Breaker (blau)	resultierender Maker-Baum
4	(1,2,4,8)		3 5 6	4 4 1	(1,2,3,8) (1,2,5,8) (2,4,6,8)
5	(1,2,5,8)		4 6	5 1	(1,2,4,8) (2,5,6,8)
6	(1,2,7,8)		3 6	7 2	(1,2,3,8) (1,6,7,8)
7	(1,3,4,6)		8 2 5	4 1 1	(1,3,6,8) (2,3,4,6) (3,4,5,6)
8	(1,3,4,7)		2 5 8	3 4 3	(1,2,4,7) (1,3,5,7) (1,4,7,8)
9	(1,3,5,7)		2 4 8 6	7 5 3 1	(1,2,3,5) (1,3,4,7) (1,5,7,8) (3,5,6,7)
10	(1,3,6,8)		2 4 7 5	6 8 3 1	(1,2,3,8) (1,3,4,6) (1,6,7,8) (3,5,6,8)
11	(1,4,6,7)		2 5	6 1	(1,2,4,7) (4,5,6,7)

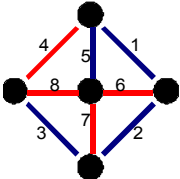
Tabelle 5.2: Beweis  $W_4$  Spielvariante I

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (rot)	Färbung Breaker (blau)	resultierender Maker-Baum
12	(1,4,7,8)		3 5	8 4	(1,3,4,7) (1,5,7,8)
13	(1,5,7,8)		3 4 6	8 5 5	(1,3,5,7) (1,4,7,8) (1,6,7,8)
14	(1,6,7,8)		2 3 5	6 7 6	(1,2,7,8) (1,3,6,8) (1,5,7,8)
15	(2,3,4,5)		1 8 7	4 4 3	(1,2,3,5) (2,3,5,8) (2,4,5,7)
16	(2,3,4,6)		1 8 7	2 3 2	(1,3,4,6) (2,4,6,8) (3,4,6,7)
17	(2,3,5,6)		1 7	6 2	(1,2,3,5) (3,5,6,7)
18	(2,3,5,8)		4 7	8 3	(2,3,4,5) (2,5,7,8)
19	(2,4,5,7)		1 3 8 6	5 7 4 2	(1,2,4,7) (2,3,4,5) (2,5,7,8) (4,5,6,7)

Tabelle 5.2: Beweis  $W_4$  Spielvariante I

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (rot)	Färbung Breaker (blau)	resultierender Maker-Baum
20	(2,4,6,8)		1 3 5 7	6 8 4 2	(1,2,4,8) (2,3,4,6) (2,5,6,8) (4,6,7,8)
21	(2,5,6,8)		1 4 7	6 5 6	(1,2,5,8) (2,4,6,8) (2,5,7,8)
22	(2,5,7,8)		3 4 6	7 8 7	(2,3,5,8) (2,4,5,7) (2,5,6,8)
23	(3,4,5,6)		1 8	5 4	(1,3,4,6) (3,5,6,8)
24	(3,4,6,7)		2 8	7 3	(2,3,4,6) (4,6,7,8)
25	(3,5,6,7)		1 2 8	6 7 7	(1,3,5,7) (2,3,5,6) (3,5,6,8)
26	(3,5,6,8)		1 4 7	5 8 8	(1,3,6,8) (3,4,5,6) (3,5,6,7)
27	(4,5,6,7)		1 2 8	5 6 5	(1,4,6,7) (2,4,5,7) (4,6,7,8)

Tabelle 5.2: Beweis  $W_4$  Spielvariante I

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (rot)	Färbung Breaker (blau)	resultierender Maker-Baum
28	(4,6,7,8)		2 3 5	7 8 8	(2,4,6,8) (3,4,6,7) (4,5,6,7)

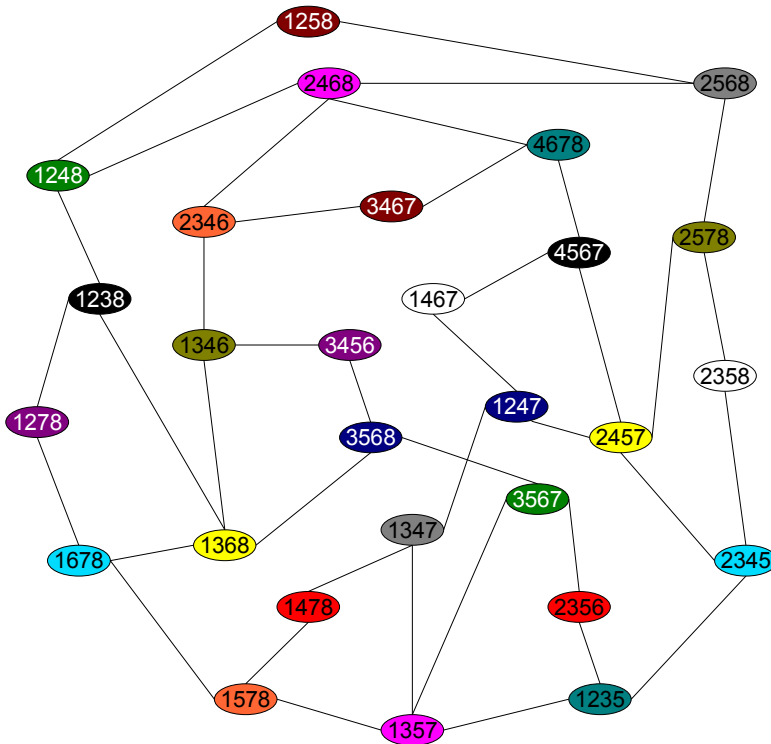


Abbildung 5.5: Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I  $W_4$

□

In Kapitel 4 wurde im Nachgang zu Satz 7 bereits ausgeführt, dass ein Beweis mittels vollständiger Induktion über die Anzahl der Ecken eines Graphen, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, zum Beweis von Aussagen bzgl. der Existenz einer Gewinnstrategie in der beschriebenen Form nicht herangezogen werden kann. Satz 14 liefert zwar die benötigte Aussage für Ecken mit Grad 2, aber bei Ecken vom Grad 3 folgt die Existenz einer Gewinnstrategie für den Breaker des ursprünglichen Graphen nicht notwendigerweise aus der Existenz für den um die Ecke mit Grad 3 reduzierten Graphen. Am einfachsten lässt sich dies mit den in diesem Abschnitt bereits untersuchten Graphen  $K_4$  sowie  $W_4$  zeigen. Wie in nachfolgender Abbildung 5.6 zu sehen



ist, entsteht aus  $W_4$ , mittels Streichen einer Ecke mit Grad 3 gemäß Satz 7.2, der Graph  $K_4$ . Für  $W_4$  besitzt jedoch der Maker und für  $K_4$  der Breaker eine Gewinnstrategie.

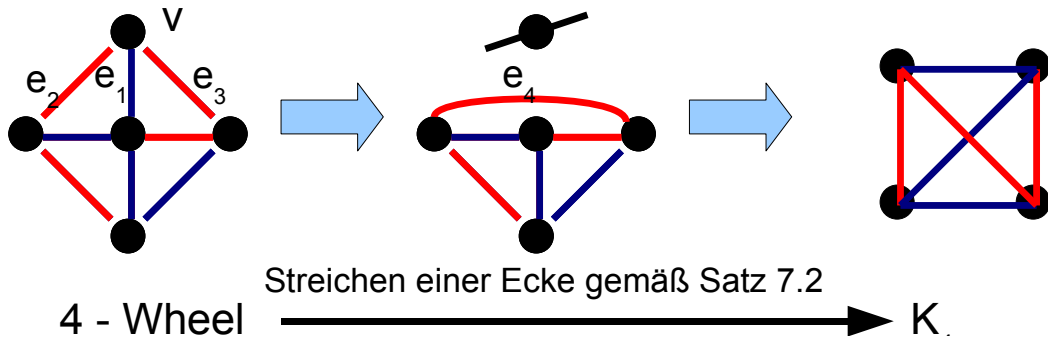


Abbildung 5.6: Übergang  $W_4$  nach  $K_4$

## 5.4 Analyse Graph $D_6$

Gemäß Satz 18 besitzt der Breaker für jeden Graphen, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist und  $K_4$  als induzierten Teilgraphen enthält, eine Gewinnstrategie. Diese Bedingung ist hinreichend aber nicht notwendig, wie die nachfolgende Untersuchung des in Abbildung 5.7 abgebildeten Graphen  $D_6$  zeigt.

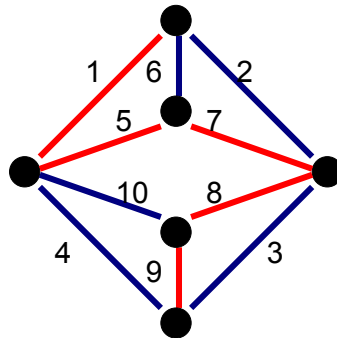


Abbildung 5.7: Graph  $D_6$

Offensichtlich enthält der Graph  $D_6$   $K_4$  nicht als induzierten Teilgraphen. Der Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I (siehe nachfolgende Abbildung 5.8) zerfällt jedoch in acht Komponenten, wobei die nicht erzwungenen Färbungen ebenfalls keinen Komponentenwechsel ermöglichen und in keinem Fall komplementäre Baumpaare in der gleichen Komponente liegen. Dies folgt auch direkt daraus, dass in allen Komponenten mit 12 Baumpaaren jeweils 3 Kanten in allen Makerbäumen vorkommen, d.h. der Maker kann nie erzwingen, dass nach Beendigung eines Spielzuges mehr als zwei rote Kanten seines Startbaumes blau gefärbt sind. In allen Komponenten mit sechs Baumpaaren sind sogar jeweils vier Kanten des Makerbaumes identisch. In der nachfolgenden Tabelle 5.3 sind die fixen Kanten der jeweiligen Komponenten des Graphen der erzwungenen

Transformationen aufgeführt. Die vollständige Tabelle zur Analyse des Graphen, d.h. mit allen möglichen kantendisjunkten Baumpaaren sowie Maker- und Breakerfärbungen findet sich im Anhang, wobei die Tabelle analog zu Tabelle 5.1 aufgebaut ist. Die Vollständigkeit der Tabelle folgt aus Satz 9, da bei allen aufgeführten Baumpaaren und Färbungen ein in der Tabelle genanntes Baumpaar entsteht, was in Folge der Tatsache, dass der Baumgraph zweiten Grades zusammenhängend ist, sonst nicht der Fall sein dürfte.

Tabelle 5.3: Komponenten  $D_6$  fixe Kanten

Komponente	Anzahl Baumpaare	fixe Kanten des Makerbaums
I	12	1,7,9
II	12	2,5,9
III	6	2,4,5,8
IV	12	4,6,8
V	12	3,6,10
VI	6	1,3,7,10
VII	6	1,4,7,8
VIII	6	2,3,5,10

Mit dem bisher Gezeigten lässt sich nun für die Spielvariante I für jede Anzahl von Ecken  $n \geq 5$  ein Graph konstruieren, für den eine Gewinnstrategie für den Maker oder den Breaker existiert. Dabei kann beispielsweise  $K_4$ , sofern der Breaker über eine Gewinnstrategie verfügen soll, bzw.  $W_4$ , für den Fall, dass der Maker über eine solche verfügen soll, als Ausgangsbasis genommen und gemäß Satz 14 sukzessive um Ecken mit Grad 2 erweitert werden. Aus dem Satz folgt direkt, dass sich die Existenz einer Gewinnstrategie durch das Hinzufügen der Ecken mit Grad 2 nicht ändert und es somit lediglich auf den Ursprungsgraphen ankommt. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Nutzung des in Satz 15 gezeigten Verfahrens. Ausgehend von Graphen, für die bekannt ist, welche Seite über eine Gewinnstrategie verfügt, wird mittels Anwendung von Satz 15 ein neuer Graph erzeugt, für den dann eine Aussage über die Existenz einer Gewinnstrategie abgeleitet werden kann.

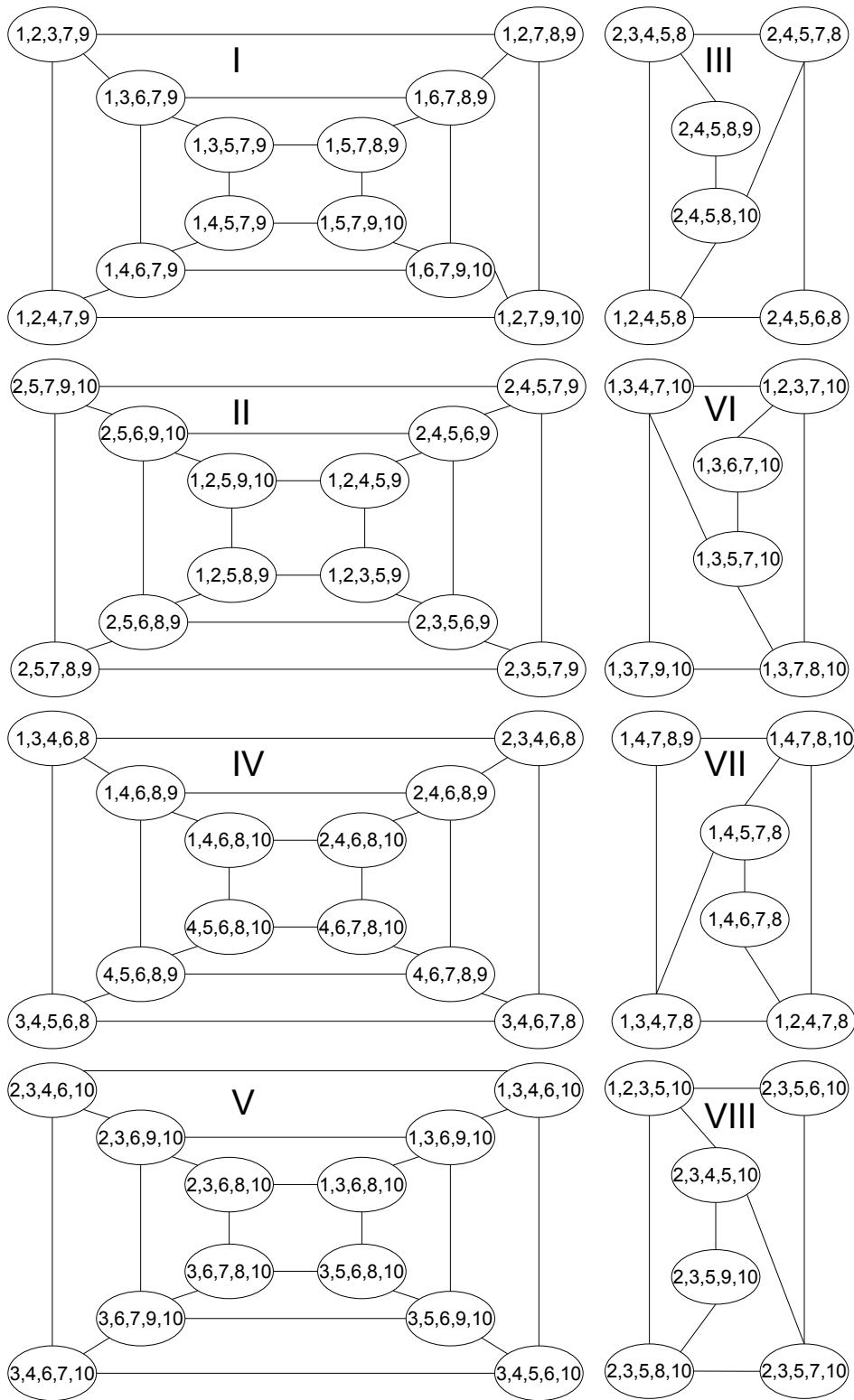


Abbildung 5.8: Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I  $D_6$

## 5.5 Analyse Radgraphen ( $W_n$ )

Zum Abschluss der Untersuchungen der Spielvariante I des Basentauschspiels für Graphen wird nachfolgend die Frage nach der Existenz einer Gewinnstrategie für Radgraphen beliebiger Größe untersucht. Diese sind wie folgt definiert:

**Definition 21.** Radgraph

Der *Radgraph* mit  $n$  Speichen,  $n$  - Wheel ( $W_n$ ), ist der Graph, der aus einem Kreis der Länge  $n$  sowie einer zusätzlichen Ecke, genannt  $c$ , besteht, die zu allen Ecken des Kreises adjazent ist. Die zur Ecke  $c$  inzidenten Kanten werden *Speichen* genannt.

Somit handelt es sich bei den bereits untersuchten Graphen  $K_4$  und  $W_4$  ebenfalls um Radgraphen. Allgemein lassen sich Radgraphen wie in Abbildung 5.9 darstellen, wobei die gepunkteten Linien für beliebig viele weitere Speichen und Kreiskanten stehen.

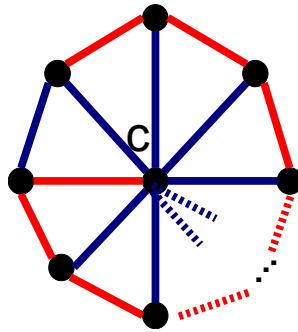


Abbildung 5.9: Radgraph

Wie der nachfolgende Satz zeigt eignen sich alle Radgraphen mit mehr als zwei Speichen als Grundlage des Basentauschspiels.

**Satz 20.** Für alle  $n \geq 3$  ist das  $n$  - Wheel die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume.

*Beweis.*

Für  $n=3$  und  $n=4$  folgt die Korrektheit der Aussage des Satzes bereits aus den vorangegangenen Untersuchungen. Sei nun  $W_n$  ein Radgraphen mit 3 oder mehr Speichen und seien die Kanten analog zu Abbildung 5.9 gefärbt, alle bis auf eine Kante des Kreises rot sowie alle bis auf eine Speiche blau. Die rote Speiche und die blaue Kreiskante verfügen dabei über eine gemeinsame Endecke. Die blauen Speichenkanten verbinden über  $c$  alle bis auf eine Außenecke. Da die blaue Kreiskante eine gemeinsame Endecke mit der roten Speiche besitzt muss es sich bei dieser Ecke um die nicht zu einer blauen Speichenkante inzidente Ecke handeln und die blauen Kanten bilden einen aufspannenden Baum. Die roten Kreiskanten verbinden alle Ecken des Außenkreises. Da die rote Speiche inzident zu einer Ecke dieses Kreises sowie zu  $c$  ist, bilden die roten Kanten ebenfalls einen aufspannenden Baum.

□

Weiterführend lässt sich nun bei Radgraphen zur Anzahl der kantendisjunkten Baum-paare, d.h. der Ordnung des Baumgraphen zweiten Grades, eine genaue Aussage machen. Es gilt:

**Satz 21.**

Der Baumgraph zweiten Grades des  $n$ -Wheels ( $\tau_2(W_n)$ ) hat die Ordnung  $2^{n+1} - 4$ .

*Beweis.*

Wie von Hochstättler und Merkel in [HM09] gezeigt, gilt für die Anzahl der Aufteilungen des  $n$ -Wheels in zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume  $2^n - 2$ . Seien  $(E_1, E_2)$  die Kantenmengen zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume des  $n$ -Wheels. Dann sind  $(E_1, E_2)$  sowie  $(E_2, E_1)$  definitionsgemäß zwei verschiedene Ecken von  $\tau_2(W_n)$  da geordnete 2-er Tupel betrachtet werden. In der Zählung der Anzahl der Aufteilung des  $n$ -Wheels in kantendisjunkte aufspannende Bäume werden jedoch ungeordnete Paare betrachtet, weshalb zwischen den beiden Baumpaaren nicht unterschieden wird. Es ergibt sich somit:  $|\tau_2(W_n)| = 2 \cdot (2^n - 2) = 2^{n+1} - 4$ . □

Der nachfolgende Satz legt die Vermutung nahe, dass es sich bei einem  $n$ -Wheel mit  $n > 4$  ähnlich verhält wie mit dem 4-Wheel. Es existieren für jedes  $n$ -Wheel Startfärbungen, für die der Maker über eine Gewinnstrategie verfügt. Im Rahmen dieser Arbeit konnte jedoch nicht gezeigt werden, dass diese Aussage für alle zulässigen Startfärbungen korrekt ist.

**Satz 22.** Es existiert für jedes  $n$ -Wheel mit  $n \geq 4$  eine zulässige Aufteilung in zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume, so dass der Maker im Basentauschspiel für Graphen unter Spielvariante I über eine Gewinnstrategie verfügt.

*Beweis.*

Für  $n=4$  wurde die Aussage in Abschnitt 5.3 gezeigt. Sei ein  $n$ -Wheel mit einer Kantenfärbung gemäß Abbildung 5.9 gegeben. Der Gewinnstrategie des Makers teilt sich in drei Teile auf. In den nachfolgenden Abbildungen 5.10 bis 5.14 ist jeweils die Nummer des Spielzuges sowie von links beginnend die Färbung des Graphen zu Beginn des Spielzugs, nach der Makerfärbung sowie nach der Breakerfärbung angegeben. Die Färbungen innerhalb des Spielzugs sind mittels eines roten bzw. blauen Pfeils gekennzeichnet. In Teil 1 der Gewinnstrategie färbt der Maker im ersten Spielzug die einzige blaue Kante des äußeren Kreises, woraufhin der Breaker gezwungen ist, die zweite zur einzigen roten Speiche inzidente äußere Kreiskante zu färben (siehe Abbildung 5.10).

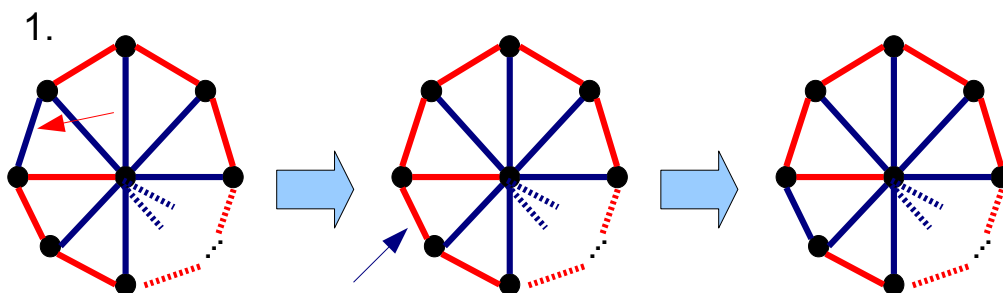


Abbildung 5.10: Gewinnstrategie  $W_n$  1. Spielzug

Zum Abschluß des ersten Teils der Gewinnstrategie färbt er im zweiten Spielzug die im Uhrzeigersinn zweite Speiche nach der bereits roten Speiche. Die Antwort des Breakers ist wiederum erzwungen (siehe Abbildung 5.11).

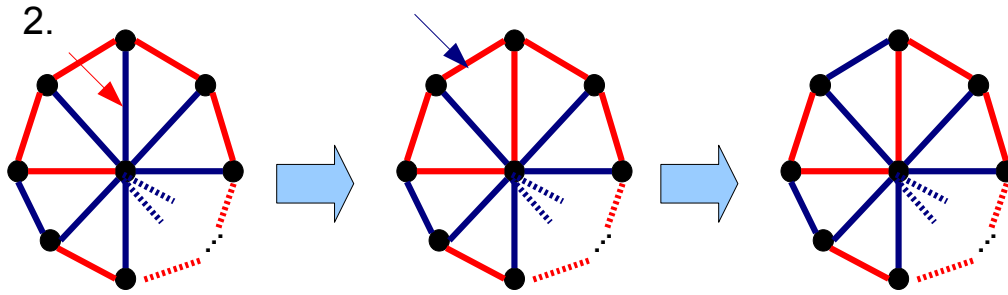


Abbildung 5.11: Gewinnstrategie  $W_n$  2. Spielzug

Die beiden geschilderten Spielzüge lassen sich bei jedem Radgraphen mit mehr als 4 Speichen durchführen, wobei die Antworten des Breakers immer erzwungen sind.

Im zweiten Teil der Gewinnstrategie, ab Spielzug 3, färbt der Maker im Uhrzeigersinn die Speichen des Graphen, beginnend mit der auf die im 2. Spielzug gefärbten Speiche folgende blaue Speiche. Wie in Abbildung 5.12 zu sehen ist, entsteht durch die Makerfärbung jeweils mit der vorangegangenen roten Speiche und der diese beiden Speichen verbindenden roten Außenkreiskante ein rotes Dreieck, d.h. ein roter Kreis der Länge drei. Gleichzeitig ist nach der Makerfärbung die zur gefärbten Speiche inzidente Außenecke nicht mehr inzident zur einer blau gefärbten Kante. Die Färbung des Breakers ist folglich jeweils erzwungen, da der blaue Baum wieder aufspannend sein muss und gleichzeitig die roten Kanten nach Abschluss des Spielzuges kreisfrei sein müssen.

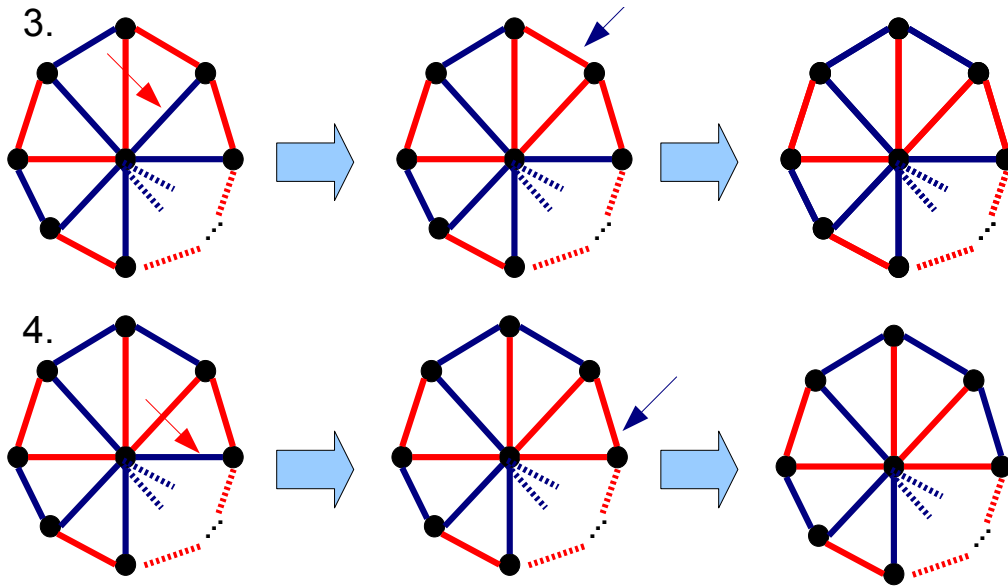


Abbildung 5.12: Gewinnstrategie  $W_n$  3.-4. Spielzug

Nach  $n-4$  dieser erzwungenen Schritte ist die im rechten Graphen der nachfolgenden Abbildung 5.13 dargestellte Färbung erreicht. In Teil 3 der Gewinnstrategie färbt der Maker nun in Spielzug  $(n-1)$  die im Uhrzeigersinn nächste blaue Speiche. Wiederum entsteht ein rotes Dreieck. Das Färben der zweiten roten Speiche des Dreiecks ergäbe mit der vor-

handenen blauen Speiche sowie den blauen Außenkanten einen Kreis. Die Antwort des Breakers ist somit wiederum erzwungen.

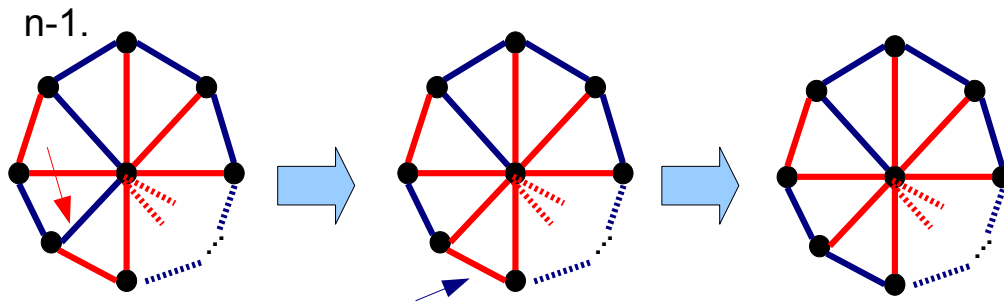


Abbildung 5.13: Gewinnstrategie  $W_n$  (n-1). Spielzug

Abschließend färbt der Maker wie in Abbildung 5.14 die einzige blaue Speiche und nach der wiederum erzwungenen Antwort des Breakers hat der Maker die Gewinnbedingung erreicht.

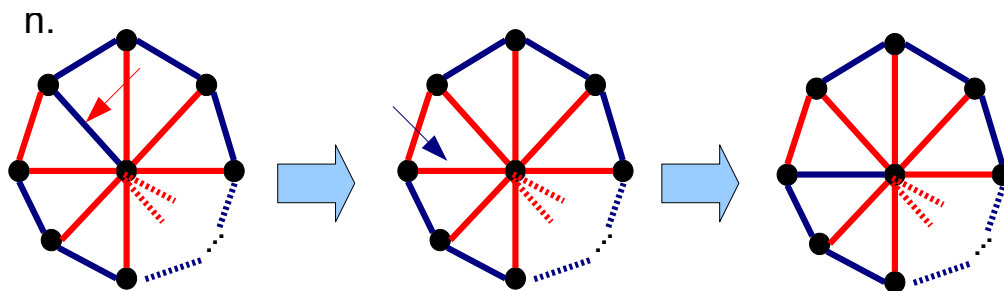


Abbildung 5.14: Gewinnstrategie  $W_n$  n. Spielzug

□

Mittels des geschilderten Verfahrens lässt sich auch leicht die Existenz einer Gewinnstrategie für den Maker für weitere Färbungen, die die Symmetrie des  $n$  - Wheels ausnutzen, zum Beispiel Drehungen oder Spiegelungen, zeigen.

## 6 Aussagen zu Spielvariante II

### 6.1 Untersuchung der Graphen $K_4$ und $D_6$ in Spielvariante II

Wie bereits in Abschnitt 3 beschrieben erweitert die Spielvariante II, in der der Maker nun nicht nur eine blaue Kante rot, sondern auch eine rote Kante blau färben kann, lediglich die Möglichkeiten des Makers. Ihm steht in dieser Variante des Maker/Breaker - Spiels die doppelte Anzahl an Kanten zum Färben zur Verfügung als in Variante I. Hieraus folgt, dass eine Gewinnstrategie, die in Variante I für den Maker existiert, auch in Variante II anwendbar ist.

Es stellt sich somit die Frage, ob für die im vorangegangenen Kapitel untersuchten Graphen  $K_4$  sowie  $D_6$ , für die in Spielvariante I der Breaker über eine Gewinnstrategie verfügte, in Spielvariante II eine Gewinnstrategie für den Maker existiert.

#### 6.1.1 Analyse Graph $K_4$

**Satz 23.** Sei  $K_4$  der vollständige Graph mit vier Ecken, dann besitzt der Maker in Spielvariante II des Basentauschspiels für Graphen eine Gewinnstrategie unabhängig von der Ursprungsfärbung des Graphen.

*Beweis.*

Zum Beweis der Existenz einer Gewinnstrategie für den Maker in  $K_4$  ist im Anhang eine Tabelle analog zu Tabelle 5.1 angefügt, die jedoch nun lediglich die in Spielvariante II neu hinzugekommenen Färbemöglichkeiten des Makers umfasst. Abbildung 6.1 stellt den aus Tabelle 5.1 in Verbindung mit der im Anhang befindlichen Tabelle erstellten Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II für den Graphen  $K_4$  dar. Die im Vergleich zum Graphen der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I neu hinzugekommenen Kanten sind rot gefärbt. Der Graph ist offensichtlich zusammenhängend, woraus mit Satz 13 sofort folgt, dass der Maker für alle Startfärbungen über eine Gewinnstrategie verfügt.  $\square$

Aus der Existenz einer Gewinnstrategie für den Maker in Spielvariante II für  $K_4$  folgt auch sofort, dass in einem Graphen  $G = (V, E)$ , der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist und  $K_4$  als induzierten Teilgraphen enthält, nicht mehr notwendigerweise der Breaker über eine Gewinnstrategie verfügt, wie es in Varianten I des Maker/Breaker - Spiels, gemäß Satz 18, der Fall war.



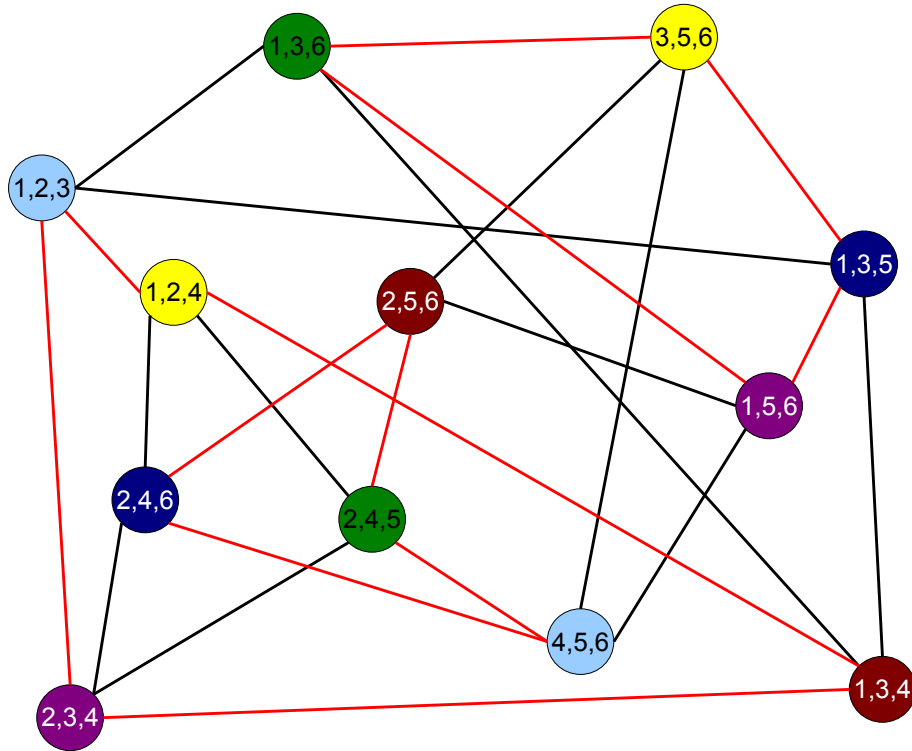


Abbildung 6.1: Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II  $K_4$

### 6.1.2 Analyse Graph $D_6$

Analog zu  $K_4$  führen die zusätzlichen Möglichkeiten des Makers auch in  $D_6$  dazu, dass dieser nun unabhängig von der Ausgangsfärbung über eine Gewinnstrategie verfügt. Um dies zu zeigen ist es gemäß Satz 13 nicht nötig den gesamten Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II zu ermitteln. Es ist ausreichend zu zeigen, dass die neu hinzugekommenen Färbemöglichkeiten des Makers dafür sorgen, dass der Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II zusammenhängend ist.

Zu diesem Zweck sind in der nachfolgenden Tabelle 6.1 für fünf Baumpaare die zusätzliche Färbemöglichkeiten des Makers, sofern die Breakerfärbung erzwungen ist, d.h. eine Kante im Graph der erzwungen Transformationen unter Spielvariante II aus diesem Übergang resultiert, inklusive der jeweiligen Antwortmöglichkeit des Breakers und das resultierende Baumpaare aufgeführt. Unter der Kantenmenge des Maker - Baums ist in römischen Ziffern für das Ausgangsbaumpaare und in der Spalte Komponente für das resultierende Baumpaare jeweils die Komponente des Graphen der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I, in der diese Baumpaare liegen, genannt. Wie Abbildung 6.2 veranschaulicht führen die aus diesen fünf Baumpaaren resultierenden erzwungenen Übergänge bereits dazu, dass der Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II zusammenhängend sein muss, da dieser den Graphen der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante I als Teilgraphen enthält und die zusätzlichen Kanten alle Komponenten von diesem verbinden. Hieraus folgt mit Satz 13 die Existenz einer Gewinnstrategie, unabhängig von der Ausgangsfärbung, für den Maker.

Tabelle 6.1: Beweis  $D_6$  Spielvariante II

Nr.	Maker-Baum	Färbung Maker	Färbung Breaker	resultierender Baum	Komponente	
1	I	(1,3,6,7,9)	1	10	(3,6,7,9,10)	V
		7	10	(1,3,6,9,10)	V	
		9	10	(1,3,6,7,10)	VI	
2	III	(2,4,5,8,10)	2	6	(4,5,6,8,10)	IV
		4	3	(2,3,5,8,10)	VIII	
		5	6	(2,4,6,8,10)	IV	
		8	3	(2,3,4,5,10)	VIII	
3	IV	(4,5,6,8,9)	4	2	(2,5,6,8,9)	II
		6	2	(2,4,5,8,9)	III	
		8	2	(2,4,5,6,9)	II	
4	VI	(1,3,4,7,10)	1	6	(3,4,6,7,10)	V
		3	8	(1,4,7,8,10)	VII	
		7	6	(1,3,4,6,10)	V	
		10	8	(1,3,4,7,8)	VII	
5	VII	(1,4,7,8,9)	1	6	(4,6,7,8,9)	IV
		7	6	(1,4,6,8,9)	IV	

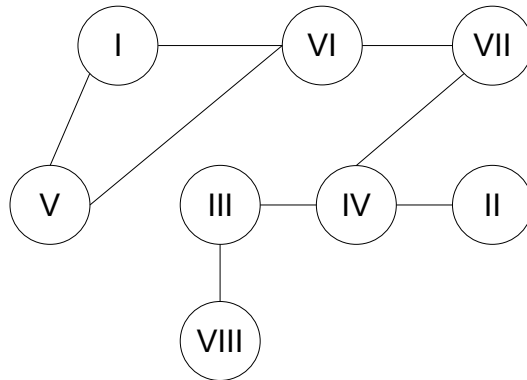


Abbildung 6.2: Komponenten von  $\tau_2^I(D_6)$  inkl. Übergänge gemäß Tabelle 6.1

## 6.2 Untersuchung Graph der erzwungenen Transformationen Spielvariante II

Abschließend zur Untersuchung der Spielvariante II soll nun noch ein Satz zum Graph der erzwungenen Transformationen unter Spielvariante II gezeigt werden, in dem nochmals verdeutlicht wird, dass die Möglichkeiten des Makers im Vergleich zu Spielvariante I deutlich erhöht sind.

**Satz 24.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist und keine Ecke vom Grad 2 enthält, dann gilt:

Sei  $v$  eine Ecke von  $\tau_2^{II}(G)$ , dann gilt:  $d(v) \geq 4$ .

*Beweis.*

Gemäß Satz 6.9 gilt für jeden Graphen, der die Vereinigung zweier aufspannender Bäume ist und keine Ecke vom Grad 2 enthält, dass dieser mindestens 4 Ecken mit Grad 3 enthalten muss. Wie bereits im Beweis zu Satz 7 gezeigt, muss für jede dieser Ecken gelten, dass genau zwei zu dieser Ecke inzidente Kanten die gleiche Färbung besitzen. Da der Maker bezüglich der Färbung in Spielvariante II nun nicht mehr eingeschränkt ist, seien die zur Ecke vom Grad 3 inzidenten Kanten beispielhaft wie in nachfolgender Abbildung 6.3 gefärbt und bezeichnet.

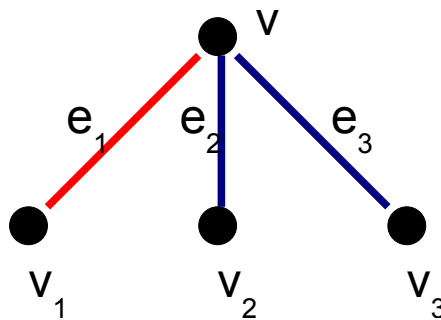


Abbildung 6.3: Ecke mit Grad 3

Zum Beweis des Satzes werden nun folgende Teilaussagen gezeigt:

1. Ausgehend von jeder Ecke mit Grad 3 kann der Maker jeweils mindestens eine Transformation erzwingen.
2. Jede dieser erzwungenen Transformationen ist eindeutig, d.h. es existieren keine zwei Ecken mit Grad 3, die bei Anwendung des geschilderten Verfahrens zu gleichen Baumpaaren führen.

Der Maker färbt genau diejenige zur Ecke mit Grad 3, im Beispiel mit  $v$  bezeichnet, inzidente Kante, so dass nach seinem Spielzug alle zu  $v$  inzidenten Kanten die gleiche Färbung besitzen. Im Beispiel wäre dies die Kante  $e_1$ . Gemäß der Einführung zum Beweis muss der Breaker nun eine zu  $v$  inzidente Kante färben, d.h.  $e_2$  oder  $e_3$ . Sei  $R$  die Menge der ursprünglich in  $G$  rot gefärbten und  $B$  die ursprünglich blau gefärbten Kanten. Sei  $e_1$  o.B.d.A. ursprünglich, wie in der Beispielabbildung, rot gefärbt, dann enthält  $B \cup e_1$

gemäß Satz 3 genau einen Kreis. Der Breaker muss diejenige Kante  $e_2$  oder  $e_3$  färben, die in diesem Fundamentalkreis von  $e_1$  liegt. Würden beide Kanten in dem entstandenen Kreis liegen, so würde die Ecke  $v$ , da drei mit dieser Ecke inzidente Kanten im Kreis enthalten sind, mehr als einmal im Kreis vorkommen, was der Definition eines Kreises widerspricht. Somit kann nur  $e_2$  oder  $e_3$  im Kreis liegen und Teilaussage 1 ist gezeigt, da die Färbung dieser Kante durch den Breaker erzwungen ist.

Durch das beim Beweis zu Teilaussage 1 geschilderte Verfahren werden in einem Spielzug zwei zur Ecke  $v$  inzidente Kanten gefärbt. Existiert nun eine Ecke  $v' \in V$  mit  $v \neq v'$  und führt die Anwendung der Strategie nach Abschluss des Spielzuges zur gleichen Färbung des Graphen  $G$ , so wurden zwei zu  $v$  und zwei zu  $v'$  inzidente Kanten gefärbt. Da in einem Spielzug genau zwei Kanten, eine vom Maker und eine vom Breaker, gefärbt werden ist dies nur möglich, wenn es sich jeweils um die gleichen Kanten handelt, d.h.  $v'$  und  $v$  jeweils Endecken beider gefärbten Kanten sind. In diesem Fall würde aber per Definition ein Multigraph vorliegen. Da jedoch die beiden aufspannenden Bäume, deren Vereinigung den Graphen  $G$  ergibt, gemäß Voraussetzung kantendisjunkt sind, ist dies in Verbindung mit Satz 6.4 nicht möglich. Somit ist Teilaussage 2 und damit der Satz gezeigt.  $\square$

Die Einschränkung auf Graphen ohne Ecke mit Grad 2 ist insofern unkritisch, als dass gemäß Satz 14 Ecken mit Grad 2 keinen Einfluss auf die Existenz einer Gewinnstrategie haben und entfernt werden können. Somit kann ein Graph, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, so lange um Ecken mit Grad 2 reduziert werden, bis keine solche mehr existiert und somit die Bedingungen des gerade bewiesenen Satzes erfüllt sind.

Die im Beweis von Satz 24 benutzte Verfahrensweise lässt sich sehr gut auf die bereits in Abschnitt 5.5 für Spielvariante I untersuchten Radgraphen anwenden.

**Satz 25.**

Sei  $v$  eine Ecke von  $\tau_2^{II}(W_n)$ , dann gilt:  $d(v) \geq n$ .

*Beweis.*

Aus der Definition des Graphen  $W_n$  folgt sofort, dass es sich um einen schlichten Graphen handelt sowie dass jede Ecke aus dem Kreis der Länge  $n$  zu genau einer weiteren Ecke, die nicht im Kreis enthalten ist, der Ecke  $c$ , adjazent ist. Somit besitzt jede dieser Ecken den Grad 3 und  $W_n$  enthält  $n$  Ecken mit Grad 3. In Verbindung mit der im Beweis zu Satz 24 bewiesenen Aussage, dass aus jeder Ecke mit Grad 3 eine erzwungene Transformation resultiert, folgt der Satz.  $\square$

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit konnten nicht alle Fragen bezüglich des Basentauschspiels für Graphen beantwortet werden. Für einige konkrete Graphen, wie z.B.  $K_4$  und  $W_4$ , konnte eine definitive Aussage zur Existenz einer Gewinnstrategie in beiden Spielvarianten getroffen werden. Die erarbeiteten Konzepte bieten eine Grundlage für weitergehende Forschungen. So deutet Vieles darauf hin, dass es möglich sein sollte eine definitive Aussage für beide Spielvarianten für Radgraphen, aufbauend auf der in Abschnitt 5.5 geschilderten Gewinnstrategie sowie der von Hochstättler und Merkel in [HM09] erzielten Ergebnisse bezüglich der Anzahl sowie dem Aussehen der Baumpaare, zu erhalten.

Die noch offenen Fragen sind für beide Spielvarianten verschieden. In Spielvariante I stellt sich die Frage, welche Eigenschaften eines Graphen, der die Vereinigung zweier kantendisjunkter aufspannender Bäume ist, bestimmen, ob der Maker oder der Breaker über eine Gewinnstrategie verfügt und existieren Graphen, bei denen die Existenz einer Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler von der Startfärbung abhängt ?

In Spielvariante II deutet hingegen nichts darauf hin, dass die Vermutung von White für die allgemeinere Matroidvariante des Basentauschspiels, d.h. dass der Maker für jede zulässige Ausgangsbasis über eine Gewinnstrategie verfügt, zumindest für die Graphenvariante des Spiels nicht zutreffend sein sollte. Die Möglichkeit jede beliebige Kante färben zu dürfen erweitert die Makermöglichkeiten beträchtlich. Ein endgültiger Beweis der Vermutung steht aber noch aus. Vielleicht muss analog zum Shannon-Switching-Game auch hier die Lösung in der allgemeineren Matroidversion unter Anwendung der Matroidtheorie gesucht werden. Ein Schritt in diese Richtung ist der vor kurzem gelungene Beweis eines Spezialfalls einer in [Whi80] von White aufgestellten Vermutung<sup>1</sup> durch McGuinness in [McG09]. Diese Vermutung war sehr wahrscheinlich mit ein Grund für die von White über die Matroidvariante des Basentauschspiels geäußerte Vermutung.

---

<sup>1</sup>Der bewiesene Spezialfall der Vermutung von White findet sich auch unter 14.8.11 in der Auflistung ungelöster Probleme in [Oxl06]

# Anhang: Tabelle $K_4$ Spielvariante II

Tabelle .1: Beweis  $K_4$  Spielvariante II

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (blau)	Färbung Breaker (rot)	resultierender Maker-Baum	Kompo- nente
1	(1,2,3)  I		1	4	(2,3,4)	II
			2	4	(1,3,4)	I
				5	(1,3,5)	I
				6	(1,3,6)	I
			3	4	(1,2,4)	II
2	(1,2,4)  II		1	3	(2,3,4)	II
				5	(2,4,5)	II
				6	(2,4,6)	II
			2	3	(1,3,4)	I
			4	3	(1,2,3)	I
3	(1,3,4)  I		1	2	(2,3,4)	II
			3	2	(1,2,4)	II
			4	2	(1,2,3)	I
				5	(1,3,5)	I
				6	(1,3,6)	I
4	(1,3,5)  I		1	6	(3,5,6)	III
			3	6	(1,5,6)	III
			5	2	(1,2,3)	I
				4	(1,3,4)	I
				6	(1,3,6)	I
5	(1,3,6)  I		1	5	(3,5,6)	III
			3	5	(1,5,6)	III
			6	2	(1,2,3)	I
				4	(1,3,4)	I
				5	(1,3,5)	I
6	(1,5,6)  III		1	2	(2,5,6)	III
				3	(3,5,6)	III
				4	(4,5,6)	III
			5	3	(1,3,6)	I
			6	3	(1,3,5)	I

Tabelle .1: Beweis  $K_4$  Spielvariante II

Nr.	Maker-Baum (rot)	Graph	Färbung Maker (blau)	Färbung Breaker (rot)	resultierender Maker-Baum	Kompo- nente
7	(2,3,4)  II		2	1	(1,3,4)	I
			3	1	(1,2,4)	II
				5	(2,4,5)	II
				6	(2,4,6)	II
			4	1	(1,2,3)	I
8	(2,4,5)  II		2	6	(4,5,6)	III
			4	6	(2,5,6)	III
			5	1	(1,2,4)	II
				3	(2,3,4)	II
				6	(2,4,6)	II
9	(2,4,6)  II		2	5	(4,5,6)	III
			4	5	(2,5,6)	III
			6	1	(1,2,4)	II
				3	(2,3,4)	II
				5	(2,4,5)	II
10	(2,5,6)  III		2	1	(1,5,6)	III
				3	(3,5,6)	III
				4	(4,5,6)	III
			5	4	(2,4,6)	II
			6	4	(2,4,5)	II
11	(3,5,6)  III		3	1	(1,5,6)	III
				2	(2,5,6)	III
				4	(4,5,6)	III
			5	1	(1,3,6)	I
			6	1	(1,3,5)	I
12	(4,5,6)  III		4	1	(1,5,6)	III
				2	(2,5,6)	III
				3	(3,5,6)	III
			5	2	(2,4,6)	II
			6	2	(2,4,5)	II

# Literaturverzeichnis

- [Aig06] Aigner, Martin: *Diskrete Mathematik*. Vieweg Verlag, 6. Auflage, 2006.
- [And03] Andres, Dominique: *Spieltheoretische Kantenfärbungsprobleme auf Wäldern und verwandte Strukturen*. Diplomarbeit, Universität zu Köln, 2003.
- [Bod91] Bodlaender, Hans L.: *Graph Theoretic Concepts in Computer Science*, Kapitel On the Complexity of some coloring games, Seiten 30–40. Springer Verlag, 1991.
- [Die06] Diestel, Reinhard: *Graphentheorie*. Springer Verlag, 3. Auflage, 2006.
- [FRS85] Farber, M., B. Richter und H. Shank: *Edge-Disjoint Spanning Trees: A Connectedness Theorem*. Journal of Graph Theory, 8:319–324, 1985.
- [HI03] Holler, Manfred J. und Gerhard Iling: *Einführung in die Spieltheorie*. Springer Verlag, 2003.
- [HM09] Hochstättler, W. und M. Merkel: *On the Number of Partitions of Wheels and Whirls into Two Trees respectively Two Bases*. Preprint, feu-dmo-017.09, 2009.
- [Hoc] Hochstättler, Winfried: *Matroide, Vorlesung WS 96/97, Version November 2007*. [http://www.zaik.de/AFS/publications/lecture\\_notes/Matroide/\(15.06.2009\)](http://www.zaik.de/AFS/publications/lecture_notes/Matroide/(15.06.2009)).
- [KUM88] Kajitani, Yoji, Shuichi Ueno und Hiroshi Miyano: *Ordering the elements of a matroid such that its consecutive  $w$  elements are independent*. Discrete Mathematics, 72:187–194, 1988.
- [Leh88] Lehman, Alfred: *A solution of the Shannon switching game*. Discrete Math, 12:687–725, 1988.
- [McG09] McGuinness, Sean: *A Base Exchange Property for Regular Matroids*. preprint, URL: [www.cms.math.ca/Events/CMS-SMM-2009/abs/pdf/cgt-sm.pdf](http://www.cms.math.ca/Events/CMS-SMM-2009/abs/pdf/cgt-sm.pdf), 2009.
- [MN07] Matousek, Jiri und Jaroslav Nešetřil: *Diskrete Mathematik*. Springer Verlag, 2. Auflage, 2007.
- [Oxl06] Oxley, James: *Matroid Theory*. Oxford University Press, 2006.
- [vNM44] Neumann, John von und Oskar Morgenstern: *The Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, 1944.
- [Whi80] White, Neil: *A unique exchange property for bases*. Linear Algebra and its applications, 31:81–91, 1980.