FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

Rainbow-Verbindungsspiele

Valérie Dannigkeit

Bern, 31. Oktober 2013

Prüfer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler
Betreuer: Dr. Dominique Andres

Inhaltsverzeichnis

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Bachelorarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

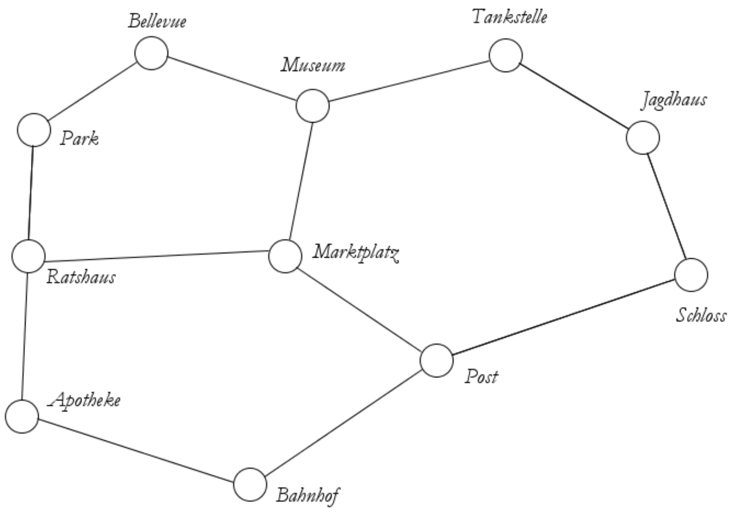
Bern, 31. Oktober 2013

Valérie Dannigkeit

Einleitung

Die Rummelsdorfer Strassenbahn AG hat den Werbetexter Charly mit ihrer neuen Werbestrategie beauftragt. Zwischen zwei beliebigen Haltestellen des Strassenbahnnetzes soll es jeweils einen Weg geben, sodass an den Zwischenstopps unterschiedliche Texte die Strassenbahn bewerben.

Charly ist etwas überfordert. Er ist zurzeit nicht sehr kreativ und das Rummelsdorfer Strassenbahnnetz hat immerhin elf Haltestellen. Am Abend klagt er seiner Freundin Dolly sein Leid. Sie ist Mathematik-Studentin und schlägt ihm vor, das Strassenbahnnetz doch mal als Graphen aufzuzeichnen. Für jede Haltestelle soll er einen kleinen Kreis zeichnen, den man Knoten nennt. Sind zwei Haltestellen ohne Zwischenhalt miteinander verbunden, soll Charly die Knoten mit einer Linie verbinden, einer sogenannten Kante. Charly fertigt diese Zeichnung an:



Dolly holt ihre Farbstifte hervor und fordert Charly nun auf, die Knoten so zu färben, dass es jeweils zwischen zwei Knoten einen Weg gibt, dessen innere Knoten unterschiedlich gefärbt sind. Charly findet die Aufgabe ziemlich knifflig. Aber schliesslich präsentiert er Dolly das Ergebnis. Er hat insgesamt drei Farben gebraucht. Und den Zusammenhang hat er selbst herausgefunden: Er muss nun nur drei Texte kreieren, nämlich für jede Farbe einen, um den Auftrag ausführen zu können.

Für das Aufhängen der Plakate hat die Rummelsdorfer Strassenbahn AG die pflichtbewusste Alice und den aufmüpfigen Bob engagiert. Damit die Plakate nicht zerknittert werden, können sich die beiden bei der Hauptstelle der Rummelsdorfer Strassenbahn AG jeweils ein Plakat aussuchen und an einer beliebigen Haltestelle aufhängen. Da nur ein Kleister-Set vorhanden ist, müssen sie sich aber abwechseln. Von Alice weiss Charly, dass sie versuchen wird, die Wünsche des Auftraggebers zu erfüllen. Bob ist aber bekannt dafür, dass er dies möglichst verhindern wird. Um sicherzugehen, dass Alice die Möglichkeit hat, die Plakate auftragsgemäss aufzuhängen, muss Charly doch noch einige Texte mehr erfinden... Oder hat Alice vielleicht beim besten Willen gar keine Chance, mit Bob den Auftrag ordentlich auszuführen?

Ob Alice dies gelingt und wenn ja, wieviele unterschiedliche Plakate mindestens vorhanden sein müssen, können wir nach den Untersuchungen in dieser Arbeit beantworten. Die Lösung verraten wir im Anhang A.2.

Zu dieser Arbeit

Sind in zusammenhängenden Graphen je zwei Knoten durch einen Weg verbunden, dessen innere Knoten alle verschieden gefärbt sind, so ist der Graph rainbow-knotengefärbt. Die Rainbow-Knotenfärbung wurde als „Knoten-Version“ zur Rainbow-Kantenfärbung durch Krivelevich und Yuster in *The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree three* [10] entwickelt. Letztere wurde von Chartrand, Johns, McKeon und Zhang im Jahre 2006 eingeführt (siehe *Rainbow connection in graphs*, [5]).

In dieser Arbeit geht es um die spieltheoretische Betrachtung der Rainbow-Knotenfärbung. Die spieltheoretische Untersuchung von Graphenfärbungen wurde 1989 durch Bodlaender im Artikel *On the complexity of some coloring games* [4] erstmals dargestellt. Zwei Spieler färben abwechselnd die Knoten eines Graphen, wobei benachbarte Knoten nicht gleich gefärbt werden dürfen. Einer der Spieler (der Maker) versucht, den gesamten Graphen gültig zu färben, während der andere Spieler (der Breaker) Knoten so färbt, dass dies dem Maker mit den zur Verfügung stehenden Farben nicht gelingt. Gesucht wird die kleinste Anzahl Farben, mit der der Maker eine Strategie hat, alle Knoten des Graphen auf jeden Fall gültig zu färben. Der spieltheoretische Ansatz untersucht demnach den Worst Case. Manchmal macht es einen Unterschied, ob Alice oder Bob beginnt.

Es wurden seither viele Varianten des Graphenfärbungsspiels untersucht (siehe http://www.fernuni-hagen.de/MATHEMATIK/DMO/graphcolor.html). Die Rainbow-Knotenfärbung als Färbungsziel scheint bisher nicht untersucht worden zu sein. Die Idee hatten Dr. Dominique Andres und Dr. Britta Peis, im Anschluss an einen Vortrag von Prof. Dr. Ingo Schiermeyer zum Thema Rainbow-Verbindung. Hier dürfen benachbarte Knoten die gleiche Farbe erhalten. Das Ziel des Makers ist es, dass es im gefärbten Graphen zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt, dessen innere Knoten unterschiedlich gefärbt sind. Der Breaker hingegen will erreichen, dass zwei Knoten nur durch Wege verbunden sind, auf denen mindestens zwei innere Knoten gleich gefärbt sind.

Im ersten Kapitel werden die notwendigen Definitionen und Sätze zur Graphentheorie und zur Rainbow-Knotenverbindung eingeführt. Im zweiten Kapitel, dem Hauptteil dieser Arbeit, wenden wir uns dem Spiel zu. Das Rainbow-Verbindungsspiel wird im Kapitel 2.1 definiert und im Kapitel 2.3 werden erste Aussagen gemacht. Im Kapitel 2.4 folgen hinreichende Bedingungen an den Graphen, dass der Breaker (Bob) gewinnt. Der Beweis des entsprechenden Satzes ist konstruktiv und zeigt eine Gewinnstrategie für Bob. Im Kapitel 2.5 werden einige stark strukturierte Graphen auf ihre Rainbowspielverbindungszahl untersucht. Die Rainbowspielverbindungszahl sagt aus, wieviele Farben mindestens zur Verfügung stehen müssen, damit der Maker (Alice) seine Gewinnstrategie ausspielen kann. Wir werden sehen, dass Alice auf den untersuchten Graphen sehr oft auch mit unendlich vielen Farben keine Chance hat zu gewinnen.

1. Grundlagen

1.1. Graphentheorie

In diesem Kapitel stellen wir die in dieser Arbeit benötigten Definitionen und Sätze aus der Graphentheorie bereit. Sie sind grösstenteils den Büchern [9], [13] und [14] entnommen.

1.1.1. Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein **ungerichteter, schlichter Graph** $G = (V, E)$ besteht aus den disjunkten Mengen V und E, wobei E eine Teilmenge von $\binom{V}{2}$ ist. Ist die Menge V endlich, so sprechen wir von einem **endlichen Graphen**. Die Elemente von V heissen **Knoten**. Eine **Kante** e ist genau dann Element von E, wenn sie zwei **Endknoten** v und w aus V verbindet, wenn also $e = \{v, w\}$ gilt. Die beiden Endknoten heissen dann **benachbart** oder **adjazent** in G. Die Kante e heisst **inzident** zu v und w.

In dieser Arbeit betrachten wir nur endliche Graphen.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Unter einem v_1**-**v_k**-Weg** in G verstehen wir eine Folge $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, ..., v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ von Knoten und Kanten des Graphen G, sodass die Kante e_i für $i = 1, ..., k-1$ jeweils die Endknoten v_i und v_{i+1} besitzt und jeder Knoten höchstens einmal auftritt. Wir sagen auch, der Weg **verbindet** die Knoten v_1 und v_k. Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der Kanten dieser Folge. Oft bezeichnen wir den Weg durch die natürliche Abfolge seiner Knoten und schreiben $P = v_1 v_2 ... v_k$.

Der **Abstand** zwischen zwei Knoten v und w im Graphen G ist die Länge des kürzesten v-w-Weges. Wir bezeichnen ihn mit $d_G(v, w)$. Der **Durchmesser** von G ist definiert als $\text{diam}(G) := max\{d_G(v, w) \mid v, w \in V\}$.

Der Graph $G' = (V', E')$ heisst **Untergraph** von $G = (V, E)$, wenn für die Knoten- und Kantenmengen $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt. Enthält G' alle Kanten, die in G zwei Knoten aus V' verbinden, so heisst G' **induzierter Untergraph** von G.

Der Graph $K_n = (V, E)$ mit n Knoten, die alle paarweise durch Kanten verbunden sind, heisst **vollständiger Graph**.

Ein Graph $G = (V, E)$ heisst **bipartit**, wenn eine Partition von V in zwei Mengen A und B existiert, sodass die beiden Endknoten jeder Kante von G in verschiedenen Mengen liegen. Sind alle Knoten aus A mit allen Knoten aus B durch eine Kante verbunden, ist G **vollständig bipartit**. Wir bezeichnen G dann mit $K_{m,n}$, wobei $m = |A|$ und $n = |B|$ gilt.

Ein **Kreis** mit n Knoten ist definiert als $C_n := \{v_1, e_1, v_2, ..., v_n, e_n, v_{n+1} = v_1\}$, wobei für die Kanten $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ gilt. Mit Ausnahme von v_1 kommt kein Knoten doppelt vor.

Ein Graph $B = (V, E)$ heisst **Baum**, wenn er zusammenhängend ist und keine Kreise enthält. Zwischen zwei Knoten enthält B genau einen Weg (siehe [9], Satz 0.5.1).

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Baum $B \subseteq G$ heisst **aufspannender Baum** von G, wenn er dieselbe Knotenmenge V wie G besitzt.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der **Knotengrad** $d(v)$ entspricht der Anzahl inzidenter Kanten zu v. Der **Minimalgrad** von G ist $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}$. $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}$ heisst der **Maximalgrad** von G. Ein Knoten mit $d(v) = 0$ heisst **isoliert**. Einen Knoten mit $d(v) = 1$ nennt man **Randknoten** oder **Blatt** von G.

1.1.2. Zusammenhang und Trennung in Graphen

Da der Zusammenhang und vor allem die Trennung in Graphen wichtige Punkte im Hauptteil sind, erhalten sie ein eigenes Unterkapitel.

Ein Graph $G = (V, E)$ heisst **zusammenhängend**, wenn zwischen je zwei Knoten v und w ein Weg existiert. Die maximalen zusammenhängenden Untergraphen von G sind seine **Komponenten**.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Das **Entfernen eines Knotens** $v \in V$ erzeugt aus G einen neuen Graphen $G - v$. Das Entfernen eines Knotens v schliesst das gleichzeitige Entfernen aller zu v inzidenten Kanten des Graphen ein. Ist $T \subseteq V$ eine beliebige Knotenteilmenge, so sei $G - T$ der Graph, der durch Entfernen aller Knoten aus T aus dem Graphen hervorgeht.

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Eine Knotenteilmenge $T \subseteq V$ heisst eine **trennende Knotenmenge**, wenn $G - T$ nicht zusammenhängend ist. Es gibt dann verschiedene Knoten $q, s \in V$, die im Graphen $G - T$ nicht in derselben Komponente liegen. Es gibt in $G - T$ also auch keinen Weg zwischen q und s. Wenn T eine (q-s-)trennende Knotenmenge von G ist, so ist auch jede Knotenmenge $U \supseteq T$ mit $q, s \notin U$ eine (q-s-)trennende Knotenmenge. T von G ist **minimal**, wenn keine echte Teilmenge von T ebenfalls eine trennende Knotenmenge von G ist.

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Sei T eine trennende Knotenmenge in G und $U \subseteq V$ eine beliebige Knotenmenge. Wir sagen **die Knotenmenge T trennt die Knotenmenge** U, wenn die Knoten aus U in $G - T$ nicht alle in derselben Komponente liegen.

Satz 1.1.1 (Menger)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $q, s \in V$. Die kleinste Mächtigkeit einer q von s trennenden Knotenmenge ist gleich der grössten Mächtigkeit einer Menge knotendisjunkter q-s-Wege in G.

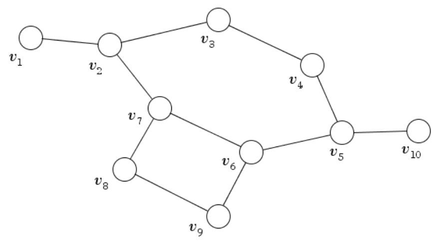
Beweis. In [9], Kapitel 2.3, werden drei Beweise zum Satz von Menger vorgestellt. □

Ein Graph G heisst **k-zusammenhängend**, wenn G mehr als k Knoten besitzt und jeder Graph, der durch Entfernen von höchstens $k-1$ Knoten aus G hervorgeht, zusammenhängend ist. Offensichtlich ist ein k-zusammenhängender Graph auch l-zusammenhängend für jedes $l < k$.

Ein nichtleerer Graph $G = (V, E)$ besitzt die **Knotenzusammenhangszahl** k, wenn G k-zusammenhängend, jedoch nicht $(k+1)$-zusammenhängend ist. Wir bezeichnen im Folgenden die Knotenzusammenhangszahl eines Graphen G stets mit $\kappa(G)$.

Es ist $\kappa(G) = 0$ genau dann, wenn G nicht zusammenhängend oder ein K_1 ist. Ein Baum mit mindestens zwei Knoten besitzt die Knotenzusammenhangszahl 1. Ein Kreis der Länge 3 oder grösser besitzt die Knotenzusammenhangszahl 2. Für den vollständigen Graphen K_n gilt $\kappa(K_n) = n - 1$, für alle $n \geq 1$.

Beispiel 1.1.2



Der Graph im Beispiel 1.1.2 ist 1-knotenzusammenhängend, die Graphen $G - v_2$ und $G - v_5$ sind nicht zusammenhängend. Trennende Knotenmengen sind unter anderem auch $\{v_3, v_7\}$, $\{v_4, v_7\}$ oder $\{v_6, v_7\}$.

Es folgt eine globale Version vom Satz von Menger (1.1.1).

Satz 1.1.3
Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann k-knotenzusammenhängend, wenn je zwei seiner Knoten v und w durch k knotendisjunkte v-w-Wege miteinander verbunden sind.

Beweis. Siehe [9], Seite 76. □

1.1.3. Graphenfärbung

Eine **Knotenfärbung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \to \{1, ..., r\}$, die jedem Knoten $v \in V$ eine Farbe aus $\{1, ..., r\}$ zuordnet.

Eine **Kantenfärbung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : E \to \{1, ..., r\}$, die jeder Kante $e \in E$ eine Farbe aus $\{1, ..., r\}$ zuordnet.

Zusätzlich kann verlangt werden, dass bei der Knotenfärbung $c(v) \neq c(w)$ für zwei adjazente Knoten $v, w \in V$ gelten soll, beziehungsweise $c(e) \neq c(f)$ für zwei adjazente Kanten $e, f \in E$ bei der Kantenfärbung. Diese Färbungsvorschrift geht zurück auf die Frage, wieviele Farben man braucht, um eine Landkarte so zu färben, dass zwei benachbarte Länder nicht die gleiche Farbe haben (siehe auch [9], Kapitel 4).

In dieser Arbeit dürfen benachbarte Knoten aber gleich gefärbt sein.

1.2. Rainbow-Knotenverbindung

Rainbow-Knotenverbindung ist eine recht neue Vorschrift, wie Graphen gefärbt werden können und zugleich eine Art Verschärfung des Zusammenhangs: Ein Graph ist zusammenhängend, wenn es zwischen jeweils zwei Knoten einen Weg gibt. Hier soll es zwischen je zwei Knoten einen Weg geben, dessen innere Knoten alle mit unterschiedlichen Farben gefärbt sind.

1.2.1. Definitionen

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, auf dem für eine natürliche Zahl r eine Knotenfärbung $c : V \to \{1, ..., r\}$ definiert ist, wobei benachbarte Knoten mit der gleichen Farbe gefärbt sein dürfen. Zwei Knoten $v, w \in V$ sind **rainbow-knotenverbunden**, wenn ein v-w-Weg in G existiert, dessen innere Knoten alle unterschiedlich gefärbt sind. Die Färbung der beiden Randknoten v und w spielt dabei keine Rolle.

Gibt es für eine natürliche Zahl r eine Knotenfärbung $c : V \to \{1, ..., r\}$ auf G, sodass alle $v, w \in V$ rainbow-knotenverbunden sind, so nennt man c eine **Rainbow-Knotenfärbung**. Wir sagen dann auch G ist **rainbow-knotengefärbt**.

Die kleinste natürliche Zahl r, die eine Rainbow-Knotenfärbung $c : V \to \{1, ..., r\}$ erlaubt, wird **Rainbow-Knotenverbindungszahl** genannt und mit $rvc(G)$ bezeichnet. Für den vollständigen Graphen K_n definieren wir zusätzlich $rvc(K_n) := 0$.

1.2.2. Übersicht

Li und Sun haben in ihrem Buch *Rainbow Connections of Graphs* [12] einen Überblick über bisherige Resultate zusammengestellt (Stand 2012). Die Rainbow-Knotenverbindung wurde von Krivelevich und Yuster in [10] entwickelt, als analoges Konzept zur 2006 durch Chartrand, Johns, McKeon und Zhang in [5] eingeführten **Rainbow-Verbindung**. Dort ist ein kantengefärbter Graph **rainbow-verbunden**, wenn für je zwei Knoten $v, w \in V$ ein v-w-Weg existiert, dessen Kanten alle unterschiedlich gefärbt sind. Die kleinste Anzahl benötigter Farben r für eine gültige **Rainbow-Kantenfärbung** $c : E \to \{1, ..., r\}$ heisst **Rainbow-Verbindungszahl** $rc(G)$ von G.

Die Rainbow-Verbindung wurde von Chartrand et al. entwickelt, um den Informationsaustausch zwischen verschiedenen Nachrichtendiensten und Regierungsstellen der USA zu verbessern und die Sicherheit zu gewährleisten. Der Untersuchungsbericht zu den Terroranschlägen vom 11. September 2001 [1] ergab unter anderem gravierende Mängel beim Informationsaustausch (siehe Kapitel 11.4). Jeder Nachrichtendienst und jede Behörde hatte nur Zugang zur eigenen Datenbank. Welche Informationen anderen Diensten zukommen sollten, war Ermessensfrage. Die Kommission schlägt in Kapitel 13.3 eine horizontale Verteilung der Informationen über neue Netzwerke vor, die über die individuellen Agenturen hinausgehen. Die einzelnen Dienste hätten weiterhin eigene Datenbanken, diese wären aber von anderen Agenturen durchsuchbar. Die Informationen müssen aber nach wie vor geschützt werden, was über das Netzwerk-Design geschehen soll.

Und zwar sollen die Informationswege zwischen bestimmten Agenturen festgelegt werden, wobei allenfalls Vermittleragenturen zwischengeschaltet werden. Dies erfordert eine genügend grosse Anzahl unterschiedlicher Passwörter und Firewalls, die vor Eindringlingen schützen. Andererseits möchte man diese Zahl möglichst klein halten. Werden die Kommunikationswege zwischen den verschiedenen Dienststellen mit einem Graphen modelliert, so entspricht die Rainbow-Verbindungszahl der minimal erforderlichen Anzahl der unterschiedlichen Passwörter, sodass je zwei Dienststellen Informationen austauschen können, ohne dass ein Passwort auf dem Weg zweimal verwendet wird (siehe [12], Kapitel 1.2).

In [10] zeigen Krivelevich und Yuster, dass nicht von $rc(G)$ auf $rvc(G)$ oder umgekehrt geschlossen werden kann. $rvc(G)$ kann viel kleiner sein als $rc(G)$, wie beispielsweise im vollständig bipartiten Graphen $K_{1,n}$. Dort ist $rvc(K_{1,n}) = 1$, während $rc(K_{1,n}) = n$ gilt. Umgekehrt kann $rvc(G)$ grösser sein als $rc(G)$. Um dies zu zeigen, konstruieren sie folgenden Graphen: Man nehme $n \geq 5$ knotendisjunkte Dreiecke K_3 und zeichne je einen Knoten in jedem K_3 aus. Diese n Knoten werden durch einen vollständigen Graphen K_n alle miteinander verbunden. Damit erhält man n Schnittknoten, die unterschiedlich gefärbt werden müssen. Es gilt daher $rvc(G) \geq n$. (Tatsächlich ist $rvc(G) = n$.) Demgegenüber ist $rc(G) = 4$, wenn alle Kanten des K_n mit der Farbe **1** gefärbt werden und die jeweils drei Kanten in jedem K_3 mit den Farben **2,3,4**. Für $n > 4$ ist dann $rvc(G) > rc(G)$.

Proposition 1.2.1
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit n Knoten. Dann gilt:

(i) $rvc(G) \geq \operatorname{diam}(G) - 1$, *wobei Gleichheit gilt für* $\operatorname{diam}(G) = 1, 2$.

(ii) $rvc(G) \leq n - 2$ *für alle* G *mit* $n \geq 3$.

Beweis.

(i) Sei $\operatorname{diam}(G) = 0$. Es handelt sich bei G um den (vollständigen) Graphen K_1. Nach Definition ist $rvc(K_1) = 0$ und damit $rvc(G) > \operatorname{diam}(G) - 1$.

Sei $\operatorname{diam}(G) = 1$. Dann handelt es sich um den vollständigen Graphen K_n, für den wir $rvc(K_n) = 0$ definiert haben. Demnach ist $rvc(G) = \operatorname{diam}(G) - 1$.

Sei $\operatorname{diam}(G) = 2$. Für alle Knoten $v, w \in V$ führt der kürzeste v-w-Weg höchstens über einen inneren Knoten. Auch wenn alle Knoten in G mit derselben Farbe gefärbt sind, ist der Graph rainbow-knotengefärbt. Es reicht also bereits eine Farbe, womit $rvc(G) = \operatorname{diam}(G) - 1$ gilt.

Sei $\operatorname{diam}(G) \geq 3$. Sei P ein Weg in G mit der Länge $\operatorname{diam}(G)$. Auf diesem Weg müssen wir die $\operatorname{diam}(G) - 1$ inneren Knoten unterschiedlich färben. Dafür müssen uns aber mindestens $\operatorname{diam}(G) - 1$ Farben zur Verfügung stehen, also $rvc(G) \geq \operatorname{diam}(G) - 1$.

(ii) Jeder zusammenhängende Graph G hat einen aufspannenden Baum. In diesem Baum existiert genau ein Weg zwischen jeweils zwei Knoten. Der Baum hat mindestens zwei Knoten $v, w \in V$ mit $d(v) = d(w) = 1$. Die Färbung dieser Knoten spielt keine Rolle, da sie nur als Randknoten auf dem v-w-Weg auftauchen. Daher braucht es höchstens $n - 2$ Farben für eine gültige Rainbow-Knotenfärbung auf dem Graphen G.

□

Satz 1.2.2
Sei $G = (V, E)$ *ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Knoten, dann gilt* $rvc(G) < 11n/\delta(G)$.

Beweis. Siehe [10], Abschnitt 3. □

In ihrer Arbeit *On the rainbow vertex-connection* [11] zeigen Li und Shi die folgenden oberen Schranken für $rvc(G)$.

Satz 1.2.3
Sei $G = (V, E)$ *ein zusammenhängender Graph mit* $n \geq 2$ *Knoten und dem Minimalgrad* $\delta := \delta(G)$, *so ist*

(i) $rvc(G) \leq 3n/(\delta + 1) + 5$ *für* $\delta \geq \sqrt{n-1} - 1$ *und* $n \geq 290$

(ii) $rvc(G) \leq 4n/(\delta + 1) + 5$ *für* $16 \leq \delta \leq \sqrt{n-1} - 2$

(iii) $rvc(G) \leq 4n/(\delta + 1) + C(\delta)$ *für* $6 \leq \delta \leq 15$, *wobei* $C(\delta) = e^{\frac{3log(\delta^3+2\delta^2+3)-3(log3-1)}{\delta-3}} - 2$

(iv) $rvc(G) \leq n/2 - 2$ *für* $\delta = 5$

(v) $rvc(G) \leq 3n/5 - 8/5$ *für* $\delta = 4$

(vi) $rvc(G) \leq 3n/4 - 2$ *für* $\delta = 3$

Beweis. Siehe [11], Abschnitt 2. □

Weitere interessante Schranken beweisen Chen, Li und Liu im Artikel [6].

Der **Komplementärgraph** $\bar{G} = (V, \bar{E})$ eines schlichten Graphen $G = (V, E)$ besitzt dieselbe Knotenmenge V wie der Ausgangsgraph. Jedoch sind in $\bar{G}$ zwei verschiedene Knoten genau dann adjazent, wenn sie in G nicht adjazent sind.

Satz 1.2.4
Sei G *ein zusammenhängender Graph mit* $n \geq 5$ *Knoten. Wenn* $\bar{G}$ *zusammenhängend ist, dann gilt* $2 \leq rvc(G) + rvc(\bar{G}) \leq n - 1$.

Beweis. Siehe [6]. □

Chen, Li und Shi untersuchen in ihrer Arbeit [7] die Komplexität der Rainbow-Knotenfärbung. Sie zeigen, dass die Entscheidungsprobleme, ob für einen Graphen $rvc(G) = 2$ gilt oder ob ein Graph rainbow-knotengefärbt ist, NP-vollständig sind. Daraus folgt, dass die Berechnung von $rvc(G)$ NP-schwer ist.

2. Rainbow-Verbindungsspiel

Der Mathematiker Ernst Zermelo formalisierte die theoretische Untersuchung von Spielen erstmals 1913 in seiner Arbeit *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* [17]. Er zeigt darin, dass für Nullsummenspiele mit endlicher Zahl von Strategien und perfekter Information eine optimale Strategie existiert. Derartige Spiele sind neben Schach auch Mühle oder Dame. John von Neumann formulierte 1928 (*Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* [15]) das Minimax-Theorem, wonach beide Spieler die Minimierung der Maximalauszahlung des Gegners anstreben. Der Name von Neumann ist eng mit der frühen Entwicklung der Spieltheorie verbunden. Zusammen mit dem Ökonomen Oskar Morgenstern publizierte von Neumann 1944 das erste grundlegende Werk der Spieltheorie *Theory of Games and Economic Behavior* [16] (siehe auch [8]).

Nach [3], Kurseinheit 7, wird ein Spiel durch die folgenden Elemente charakterisiert:

Spieler Wer nimmt am Spiel teil?

Spielregeln Die Spielregeln legen die Handlungsmöglichkeiten und die damit verknüpften Konsequenzen fest. Dazu gehören insbesondere

- die **Strategien** (legen für jede Situation des Spiels fest, welche Wahl unter allen Optionen ein Spieler trifft/ treffen kann),
- die **Kooperationsform** (spielen alle gegeneinander oder sind Absprachen möglich?)
- und die **Spielergebnisse** (Konsequenzen/ Auszahlungen für die einzelnen Spieler aufgrund der gewählten Strategie und allenfalls der Absprachen).

Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten, Spiele nach unterschiedlichen Gesichtspunkten einzuteilen:

- *Zahl der Spieler:* **Ein-Personen-Spiele**, **Zwei-Personen-Spiele** und **n-Personen-Spiele**, bei denen mehr als zwei Personen spielen.
- *Zahl der Strategien:* In **endlichen Spielen** haben alle Spieler endlich viele Strategien, während in **unendlichen Spielen** die Zahl der Strategien unendlich ist.
- *Art der Kooperation:* In **kooperativen Spielen** sind Absprachen, Koalitionen, Bestechungen oder Kompensationsleistungen unter den Spielern möglich. All dies kommt in **unkooperativen Spielen** nicht vor.
- *Ergebnissummen:* Unterschieden werden **Spiele mit variabler Summe** und **Konstant-Summen-Spiele**. Die Summe der Einzelergebnisse ist variabel oder konstant, ein Spezialfall der Konstant-Summen-Spiele sind die **Nullsummenspiele**. (Die Auszahlung beträgt für den Sieger p, für den Verlierer $-p$.)

Eine weitere Möglichkeit der Einteilung ist nach der *Art der Information*. Bei **perfekter Information** kennen alle Spieler das bisherige Spielgeschehen. Beispiele dafür sind Schach oder Mühle. Ein Beispiel für **unvollständige Information** ist Poker.

Graphenfärbungsspiele

> „Games can be used to model situations where different parties have conflicting interests, or to model the „worst type of erroneous behavior of a system". In the latter case, we assume that an erroneous system is malicious and uses an intelligent strategy to try to prevent us from reaching our goal. If we are able to deal with this type of behavior, we are also able to deal with all weaker types of errors."

So leitet Bodlaender seine Untersuchungen zur Komplexität von Graphenfärbungsspielen in [4] ein. Er definiert dort erstmals das folgende Spiel: Gespielt wird mit einer endlichen Menge Farben auf einem schlichten Graphen $G = (V, E)$. Spieler 1 und 2 färben abwechselnd noch ungefärbte Knoten. Bei der Auswahl der Farbe muss der jeweilige Spieler darauf achten, dass nicht bereits ein Nachbar in derselben Farbe gefärbt ist. In einer Variante des Spiels verliert derjenige Spieler, der zuerst keinen gültigen Spielzug mehr machen kann, in einer anderen Variante des Spiels gewinnt Spieler 1 genau dann, wenn am Ende des Spiels alle Knoten gefärbt sind.

Unter einer **Gewinnstrategie** versteht man eine Strategie, die einen der Spieler auf jeden Fall zu einem Sieg führt.

In Graphenfärbungsspielen hat nur einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie. Es handelt sich daher um ein **Nullsummenspiel**: der eine gewinnt, was der andere verliert oder nach [8] „Des einen Freud, des andern Leid."

Bei Graphenfärbungsspielen handelt es sich also um **endliche, unkooperative Zwei-Personen-Nullsummenspiele mit perfekter Information**. Seit Bodlaender wurden viele weitere Untersuchungen zum vorstehenden Spiel und Varianten davon vorgenommen. Traditionell heisst Spieler 1 **Alice** und Spieler 2 wird **Bob** genannt.

Das **Rainbow-Verbindungsspiel** ist eine neue Art Graphenfärbungsspiel. Das Ziel der Untersuchungen ist es, für einen vorgelegten zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ die kleinste Anzahl Farben zu bestimmen, mit der Alice eine Gewinnstrategie hat, sodass der Graph am Ende des Spiels rainbow-knotengefärbt ist. Sofern eine solche Zahl existiert, nennen wir sie **Rainbowspielverbindungszahl** des Graphen G und bezeichnen sie mit $rvc_S(G)$.

2.1. Das Spiel

In diesem Kapitel wird das **Rainbow-Verbindungsspiel** definiert. **Spieler** sind auch hier Alice und Bob. Auch das Rainbow-Verbindungsspiel ist ein unkooperatives Zwei-Personen-Spiel mit perfekter Information.

2.1.1. Spielregeln

Alice und Bob färben abwechselnd jeweils einen Knoten eines ungefärbten zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit den zur Verfügung stehenden Farben $\{1,...,r\}$. Das Färben eines Knotens durch einen Spieler bezeichnen wir als **Spielzug**. Manchmal verwenden wir auch den Begriff **Spielrunde** und verstehen darunter zwei aufeinander folgende Spielzüge von Alice und Bob. Benachbarte Knoten dürfen die gleiche Farbe erhalten. Sie spielen ohne auszusetzen, bis alle Knoten gefärbt sind. Da sie nur auf endlichen Graphen spielen, sind die Strategien von Alice und Bob endlich, womit es sich um ein endliches Spiel handelt.

Gewinner des Spiels

Alice gewinnt, wenn der Graph G am Ende rainbow-knotengefärbt ist. Bob gewinnt, wenn es zwei Knoten $v, w \in V$ gibt, deren v-w-Wege alle mindestens zwei gleich gefärbte innere Knoten haben. Es kann nur einer der beiden gewinnen, der andere verliert. Es handelt sich also um ein Nullsummenspiel.

Gewinnstrategie für Alice

Es geht im Folgenden darum, die kleinste Anzahl Farben $r \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, mit der Alice eine Gewinnstrategie für das Spiel S hat. Diese Zahl wird mit $rvc_S(G)$ bezeichnet. Alice gewinnt mit $rvc_S(G)$ Farben immer, wenn sie sich an ihre Gewinnstrategie hält.

Gewinnstrategie für Bob

Gibt es keine natürliche Zahl r, sodass Alice mit mindestens r Farben eine Gewinnstrategie hat, dann hat Bob eine Gewinnstrategie. Es ist in einem solchen Fall $rvc_S(G) := \infty$ definiert. Bob gewinnt mit beliebig vielen Farben immer, wenn er sich an seine Gewinnstrategie hält.

2.1.2. Spielvarianten

Es gelten immer die vorstehenden Spielregeln. Zusätzlich werden Besonderheiten für das Spiel definiert. Daraus ergeben sich verschiedene Spielvarianten, die zum Teil zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Daher werden die Rainbowspielverbindungszahlen für die einzelnen Spielvarianten präzisiert.

S_A: Alice färbt den ersten Knoten. Alice und Bob dürfen bei jedem Spielzug eine beliebige Farbe $1, ..., r$ wählen. Die kleinste natürliche Zahl r, für die Alice eine Gewinnstrategie hat, sei definiert als $rvc_{S_A}(G)$.

S_B: Bob beginnt mit Färben. Beide dürfen bei jedem Spielzug eine beliebige Farbe $1, ..., r$ wählen. Die kleinste natürliche Zahl r, für die Alice eine Gewinnstrategie hat, sei $rvc_{S_B}(G)$.

2.2. Hinweise zur Schreibweise

Die Farben, die Alice und Bob verwenden, bezeichnen wir mit den Zahlen **1**, **2**, ... Grundsätzlich dürfen Alice und Bob in den Spielen S_A und S_B jede beliebige vorhandene Farbe wählen. Der Einfachheit halber beginnen wir mit Farbe **1** und erhöhen die Farbe jedes Mal um 1, wenn deutlich gemacht werden soll, dass eine neue Farbe verwendet werden muss.

Sobald die entscheidenden Knoten einer Gewinnstrategie gefärbt sind, schreiben wir „(...)“. Alice und Bob färben die verbleibenden Knoten beliebig weiter. Zu diesem Zeitpunkt des Spiels gibt es im Fall von Alices Gewinnstrategien entweder zwischen je zwei Knoten des Graphen einen Weg, dessen innere Knoten alle unterschiedlich gefärbt sind oder es gibt einen kürzesten Weg mit höchstens einem inneren Knoten, der noch ungefärbt sein darf. Im Fall von Bobs Gewinnstrategien gibt es bereits zwei Knoten v, w im Graphen, zwischen denen alle v-w-Wege über zwei mit gleicher Farbe gefärbte innere Knoten führen.

2.3. Erste Überlegungen zur Rainbowspielverbindungszahl

Was lässt sich ganz allgemein über die Rainbowspielverbindungszahl $rvc_S(G)$ beziehungsweise über die Gewinnstrategien von Alice und Bob sagen?

Proposition 2.3.1
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Untere Schranke für die Rainbowspielverbindungszahl $rvc_S(G)$ aller Spielvarianten S ist $rvc(G)$.

Beweis. Das ist klar. Mit weniger als $rvc(G)$ Farben ist eine Rainbow-Knotenfärbung gar nicht möglich. □

Proposition 2.3.2
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\operatorname{diam}(G) \leq 2$*. Dann ist $rvc_S(G) = 1$.*

Beweis. Bei $\operatorname{diam}(G) = 0$ ist G der vollständige Graph K_1. Ist $\operatorname{diam}(G) = 1$, so handelt es sich um den vollständigen Graphen K_n, mit $n \geq 2$. Gleichgültig, wie die Knoten des Graphen gefärbt werden, sie sind alle paarweise rainbow-knotenverbunden. Ist $\operatorname{diam}(G) = 2$ so liegt auf einem kürzesten Weg zwischen zwei beliebigen Knoten in G jeweils höchstens ein weiterer Knoten. Da es nur auf die inneren Knoten auf dem Weg zwischen zwei Knoten ankommt, kann der Graph beliebig gefärbt werden, er ist auf jeden Fall rainbow-knotengefärbt. Es reicht demnach in allen Fällen bereits eine Farbe für eine Rainbow-Knotenfärbung des Graphen. $\square$

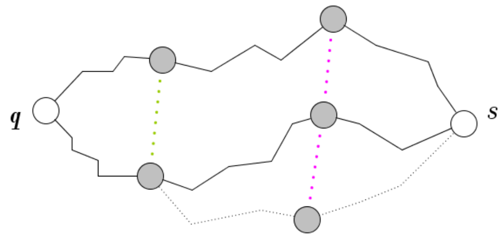
Und wie sieht es bei Graphen vom Durchmesser 3 und grösser aus? Zwei Knoten sollen jeweils rainbow-knoten*verbunden* sein - welche Rolle spielt neben der Verbindung die Trennung?

Idee für eine Gewinnstrategie von Bob

Wir skizzieren eine mögliche Gewinnstrategie von Bob: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit mindestens vier Knoten und $\operatorname{diam}(G) \geq 3$. Gibt es in G zwei (nicht-adjazente) Knoten q und s sowie zwei disjunkte, jeweils q und s trennende Knotenmengen $\tilde{T}_{q,s}$ und $\bar{T}_{q,s}$, so gewinnt Bob immer dann, wenn es ihm gelingt, alle Knoten der beiden Mengen $\tilde{T}_{q,s}$ und $\bar{T}_{q,s}$ mit einer einzigen Farbe zu färben.

Die Idee dahinter ist, dass jeder Weg zwischen q und s über einen Knoten einer q-s-trennenden Knotenmenge $\tilde{T}_{q,s}$ führt. Gäbe es nämlich einen weiteren q-s-Weg, der nicht über einen Knoten aus $\tilde{T}_{q,s}$ führt, so wäre $\tilde{T}_{q,s}$ nicht q-s-trennend. Wir nehmen an, diese Knoten seien alle mit Farbe **1** gefärbt. Gibt es nun eine zweite, disjunkte q-s-trennende Knotenmenge $\bar{T}_{q,s}$, so führen ebenfalls alle q-s-Wege über einen Knoten aus $\bar{T}_{q,s}$. Sind alle Knoten dieser Menge ebenfalls mit der Farbe **1** gefärbt, so gibt es auf allen q-s-Wegen jeweils mindestens zwei innere Knoten, die mit Farbe **1** gefärbt sind; und zwar je ein Knoten aus $\tilde{T}_{q,s}$ und einer aus $\bar{T}_{q,s}$. Damit sind q und s nicht rainbow-knotenverbunden und der Graph G ist nicht rainbow-knotengefärbt.

Beispiel 2.3.3
Das nachstehende Beispiel zeigt einen 2-knotenzusammenhängenden Graphen. Die Knoten q und s werden nach dem Satz von Menger 1.1.1 beziehungsweise 1.1.3 durch zwei Wege verbunden, deren innere Knoten disjunkt sind. Wir haben zwei q und s trennende Knotenmengen eingezeichnet. Die Knoten der trennenden Knotenmengen können, müssen aber nicht, durch Kanten verbunden sein. Die gepunkteten Kanten zwischen den Knoten der trennenden Knotenmengen sollen dies darstellen. Werden alle Knoten dieser beiden Knotenmengen mit der gleichen Farbe gefärbt, so ist eine Rainbow-Knotenfärbung des Graphen nicht mehr möglich.



2-knotenzusammenhängender Graph aus Beispiel 2.3.3

Beispiel 2.3.4
Im Beispiel 1.1.2 würde Bob bei einer Färbung c mit $c(v_2) = c(v_5)$ gewinnen. Eine weitere Möglichkeit wäre $c(v_3) = c(v_7) = c(v_4) = c(v_6)$.

Aber wie sieht Bobs Gewinnstrategie im konkreten Fall aus? Alice wird versuchen, zu verhindern, dass Bob die skizzierte Strategie durchziehen kann. Worauf muss Bob achten? Gibt es Fälle, für die man eindeutig voraussagen kann, dass Bob eine Gewinnstrategie hat? Wir beginnen damit, zusammenhängende Graphen $G = (V, E)$ mit $\kappa(G) = 1$ zu untersuchen. Ist $G \neq K_2$, so gibt es einen Knoten, der den Graphen trennt.

Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\kappa(G) = 1$ und $G \neq K_2$, so gibt es einen Knoten $v \in V$, sodass $G - v$ unzusammenhängend ist. Einen solchen Knoten v nennt man eine **Artikulation** von G.

Beispiel 2.3.5
Im Beispiel 1.1.2 sind die Knoten $\{v_2\}$ und $\{v_5\}$ Artikulationen.

Ein einfaches Spiel hat Bob im folgenden Fall:

Satz 2.3.6
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Die Menge aller Artikulationen in G sei $A := \{v \in V \mid G - v \text{ ist unzusammenhängend}\}$. Ist $|A| \geq 3$, so gilt

(a) $rvc_{S_A}(G) = \infty$ und (b) $rvc_{S_B}(G) = \infty$.

Beweis. Bob hat die folgenden Gewinnstrategien.

(a) Alice beginnt. Alice färbt einen beliebigen Knoten mit Farbe **1**. Hat sie eine Artikulation gefärt, so färbt Bob eine zweite Artikulation mit **1**. (...) Aber auch wenn Alice einen anderen Knoten gefärbt hat, (*) färbt Bob in seinem ersten Spielzug eine Artikulation mit **1**. Alice hat im nächsten Spielzug die Möglichkeit, einen Knoten mit beliebiger Farbe zu färben. Das kann auch eine Artikulation sein. Bob färbt nun mit

Farbe **1** eine weitere Artikulation, es hat ja mindestens drei davon. (...)

(b) Bob beginnt. Bob spielt wie in (a) ab (*) beschrieben.

Bei beiden Spielvarianten sind schliesslich zwei Artikulationen $t_i, t_j \in A$ mit Farbe **1** gefärbt. Für alle $t_k \in A$ ($k = \{1, ..., |A|\}$) gibt es Knoten q_k und s_k, die nach Entfernen von t_k nicht mehr zur selben Komponente gehören würden.

Nach dem Entfernen von t_i aus G gibt es mindestens zwei Komponenten, wobei in der einen Komponente q_i liegt. Die Knoten s_i und t_j sind nicht in dieser Komponente. Ebenso gibt es nach Entfernen von t_j aus G mindestens zwei Komponenten. Und zwar gibt es einen Knoten, der in $G - t_j$ nicht in derselben Komponente liegt wie t_i. Wir bezeichnen ihn mit s_j. Zudem gibt es einen Knoten q_j, der durch Entfernen von t_j von s_j getrennt wird.

Beide Artikulationen t_i und t_j trennen also jeweils q_i und s_j. Alle Wege zwischen q_i und s_j führen demnach über die beiden Knoten t_i und t_j. Gäbe es nämlich einen Weg, der q_i und s_j verbindet und nicht über die Knoten t_i oder t_j führt, so wäre t_i beziehungsweise t_j nicht q_i-s_j-trennend. Da t_i und t_j mit der gleichen Farbe gefärbt sind, sind q_i und s_j nicht rainbow-knotenverbunden und Bob gewinnt. □

Wir zeigen nun, dass Bob auch bei zwei Artikulationen oft gewinnt. Das hängt einerseits davon ab, ob die Knotenzahl gerade oder ungerade ist und andererseits davon, ob Alice oder Bob beginnt.

Satz 2.3.7
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit zwei Artikulationen $\{t_1, t_2\} =: A$. Abhängig von der Knotenzahl n gilt:

(a) Für gerade n ist $rvc_{S_A}(G) = \infty$.

(b) Für ungerade n ist $rvc_{S_B}(G) = \infty$.

Beweis. Wie wir in Satz 2.3.6 gesehen haben, gewinnt Bob, wenn er zwei Artikulationen gleich färben kann. Dies gelingt ihm ohne weiteres, sobald Alice eine der beiden Artikulationen gefärbt hat, indem er für die zweite Artikulation dieselbe Farbe wählt. Solange Alice aber noch keine Artikulation gefärbt hat, färbt auch Bob keine, da Alice sonst die zweite Artikulation mit einer anderen Farbe färbt. Alice und Bob färben deshalb alle übrigen Knoten, bis nur noch die beiden Artikulationen zu färben sind.

(a) Sei n gerade. Hat Alice mit Färben begonnen, so muss sie die erste Artikulation färben. Bob wählt für die zweite Artikulation die gleiche Farbe.

(b) Sei n ungerade. Diesmal muss Alice die erste Artikulation färben, falls Bob begonnen hat. Bob färbt die zweite Artikulation mit derselben Farbe wie Alice die erste.

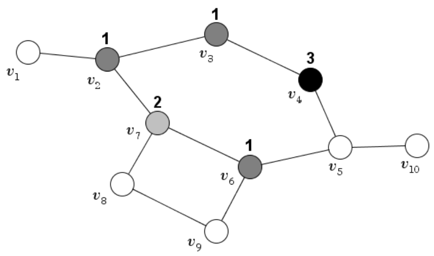
Auch hier trennt t_1 den Knoten t_2 und einen Knoten q, während t_2 den Knoten t_1 und einen Knoten s trennt. Die Knoten q und s liegen weder in $G - t_1$ noch in $G - t_2$ in derselben Komponente. Jeder q-s-Weg führt über die beiden Artikulationen t_1 und t_2, denn andernfalls wären q und s in $G - t_1$ oder $G - t_2$ verbunden. Sind t_1 und t_2 beide mit derselben Farbe gefärbt, so sind q und s nicht rainbow-knotenverbunden und Bob gewinnt. □

Man darf nun daraus leider nicht schliessen, dass Alice zum Beispiel bei gerader Knotenzahl n gewinnt, wenn Bob beginnt. Der Graph G aus Beispiel 1.1.2 liefert uns gerade ein Gegenbeispiel:

Beispiel 2.3.8
Bob beginnt damit, einen Knoten zu färben, der zu zwei v_1-v_{10}-trennenden Knotenmengen gehört. Er färbt v_3 mit Farbe **1**. Alice hat vier Möglichkeiten:

(1) Alice färbt eine Artikulation v_2 oder v_5 mit Farbe **1** oder **2**. Dann färbt Bob im nächsten Spielzug mit derselben Farbe eine weitere Artikulation. (...) (2) Alice färbt einen Knoten, der zur selben minimalen trennenden Menge wie v_3 gehört, also v_6 oder v_7 mit beliebiger Farbe. (3) Alice färbt einen Knoten, der zu einer anderen trennenden Menge gehört, beispielsweise v_4. (4) Alice färbt einen Knoten, der zu keiner trennenden Menge gehört. Das wären im Beispiel v_1 oder v_{10}.

In den Fällen (2) bis (4) färbt Bob nun v_6 oder v_7, je nachdem welcher Knoten noch ungefärbt ist, mit gleicher Farbe **1** wie v_3. Egal, wie Alice nun den nächsten Knoten färbt, wird Bob im nächsten Spielzug eine der Artikulationen v_2 oder v_5 mit Farbe **1** färben. In allen Fällen sind v_1 und v_{10} nicht rainbow-knotenverbunden und Bob gewinnt. (In der Abbildung ist der Fall (2) dargestellt.)



Gewinnt Bob auch auf Graphen G mit nur einer Artikulation? Und wie sieht es für Graphen G mit $\kappa(G) > 1$ aus? Im nächsten Kapitel präzisieren wir die auf Seite 15 skizzierte Gewinnstrategie für Bob.

2.4. Gewinnstrategien für Bob

Im Satz 2.4.2 werden wir zeigen, dass Bob auf zusammenhängenden Graphen tatsächlich immer gewinnt, wenn ihm die Färbung aller Knoten von zwei disjunkten q-s-trennenden Knotenmengen mit einer einzigen Farbe gelingt. Der Satz 2.4.14 liefert dann hinreichende Bedingungen an zusammenhängende Graphen $G = (V, E)$ mit $\kappa(G) = 1, 2, 3$, dass Bob gewinnt. Mit dem Beweis hat Bob eine konkrete Gewinnstrategie.

2.4.1. Trennende Knotenmengen im Graphen G

Die Proposition 2.4.1 und der Satz 2.4.2 verallgemeinern die letzten drei Absätze des Beweises von Satz 2.3.6 für trennende Knotenmengen, die (nicht zwingend) mehr als einen Knoten umfassen.

Proposition 2.4.1
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Gibt es in G zwei disjunkte trennende Knotenmengen T_1, T_2, so gibt es per Definition Knoten $q_1, s_1 \in V$ sowie $q_2, s_2 \in V$, die in $G - T_1$ beziehungsweise $G - T_2$ nicht in derselben Komponente liegen. Gilt für diese Knoten zudem

(i) $q_1, s_1 \notin T_2$ *sowie*

(ii) $q_2, s_2 \notin T_1$,

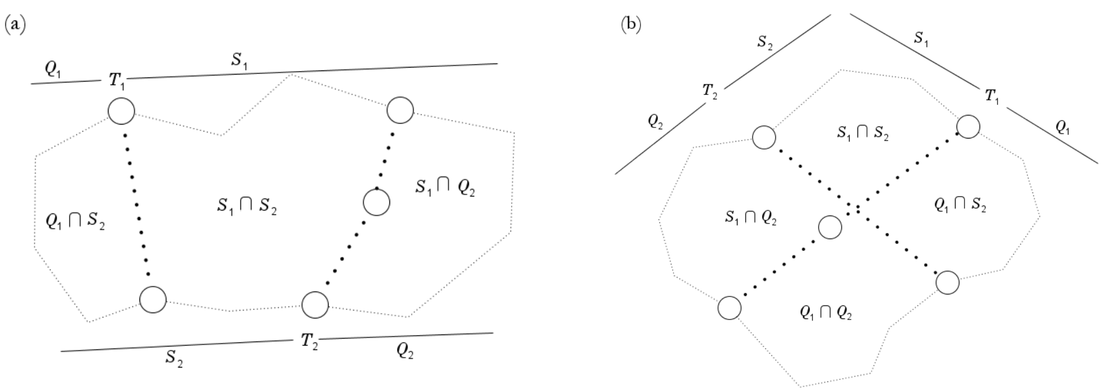
dann gibt es zwei Knoten $q, s \in \{q_1, q_2, s_1, s_2\}$, die durch beide Mengen T_1 und T_2 getrennt werden, das heisst q und s liegen weder in $G - T_1$ noch in $G - T_2$ in derselben Komponente.

Beweis. Wir definieren folgende Knotenmengen: Seien Q_1 und S_1 zwei Knotenteilmengen in V, deren Knoten durch Entfernen von T_1 voneinander getrennt worden sind, sodass zudem $Q_1 \cup T_1 \cup S_1 = V$ gilt. Q_1 oder S_1 sind nicht unbedingt zusammenhängend, nämlich wenn $G - T_1$ mehr als zwei Komponenten hat. Wir haben vorausgesetzt, dass die Menge T_1 insbesondere die Knoten q_1 und s_1 trennt. Wir benennen die beiden Knotenteilmengen gerade so, dass $q_1 \in Q_1$ gilt und $s_1 \in S_1$ gilt.

Auf die gleiche Art bestimmen wir zwei Knotenteilmengen Q_2 und S_2, sodass die Knoten aus Q_2 und aus S_2 in $G - T_2$ nicht durch Wege verbunden sind, wobei $Q_2 \cup T_2 \cup S_2 = V$ gelten soll. Da wir vorausgesetzt haben, dass T_2 die Knoten q_2 und s_2 trennt, vergeben wir auch hier die Bezeichnungen Q_2 und S_2 so, dass $q_2 \in Q_2$ respektive $s_2 \in S_2$ gilt. (Wir bemerken, dass möglicherweise $q_1 = q_2$, $s_1 = s_2$ oder $q_i = s_j$, $i, j \in \{1, 2\}$ ist.)

Nur die Knoten der Schnittmengen ($Q_1 \cap Q_2$ und $S_1 \cap S_2$) oder ($Q_1 \cap S_2$ und $S_1 \cap Q_2$) werden auf jeden Fall durch beide Knotenmengen T_1 und T_2 getrennt, denn die Knoten aus $Q_1 \cap Q_2$ und $S_1 \cap S_2$ liegen weder in $G - T_1$ noch in $G - T_2$ in derselben Komponente. Dasselbe gilt für $Q_1 \cap S_2$ und $S_1 \cap Q_2$. Für die übrigen Schnittmengen-Paare gilt dies nicht unbedingt: $S_1 \cap S_2$ und $S_1 \cap Q_2$ beispielsweise liegen in $G - T_1$ in derselben Knotenmenge S_1. Ist der von S_1 induzierte Untergraph zusammenhängend, werden $S_1 \cap S_2$ und $S_1 \cap Q_2$ nur durch T_2 getrennt. Bleibt zu zeigen, dass ($Q_1 \cap Q_2$ und $S_1 \cap S_2$) oder ($Q_1 \cap S_2$ und $S_1 \cap Q_2$) nichtleer sind.

Wir unterscheiden die beiden Fälle (a), wo sich die beiden disjunkten trennenden Knotenmengen T_1 und T_2 nicht gegenseitig trennen und (b), wo das der Fall ist.



(a) Da die Bezeichnungen Q_1 und S_1 sowie Q_2 und S_2 jeweils auch gerade vertauscht sein könnten, gibt es je vier Möglichkeiten, wie die Schnittmengen bezeichnet werden müssten. Damit der Beweis leserlich bleibt, halten wir uns an die Bezeichnungen in der Abbildung. Hier gilt $T_1 \subset S_2$ und $T_2 \subset S_1$. T_1 trennt S_2 in die beiden Schnittmengen $Q_1 \cap S_2$ und $S_1 \cap S_2$. In $Q_1 \cap S_2$ muss mindestens der Knoten q_1 liegen, den wir mit q bezeichnen. Ebenso trennt T_2 die Menge S_1 in die Schnittmengen $S_1 \cap S_2$ und $S_1 \cap Q_2$. Die Menge $S_1 \cap Q_2$ muss dann mindestens den Knoten q_2 enthalten. Wir bezeichnen diesen mit s.

(b) Da die Knotenmengen T_1 und T_2 disjunkt sind, liegen sie in diesem Fall vollständig in den Vereinigungen: $T_1 \subset Q_2 \cup S_2$ und $T_2 \subset Q_1 \cup S_1$. Da wir (i) $q_1, s_1 \notin T_2$ vorausgesetzt haben, liegt q_1 entweder in $Q_1 \cap Q_2$ oder $Q_1 \cap S_2$ und s_1 liegt entweder in $S_1 \cap S_2$ oder $S_1 \cap Q_2$. Ebenso folgt aus Voraussetzung (ii) $q_2, s_2 \notin T_1$, dass q_2 entweder in $Q_1 \cap Q_2$ oder $S_1 \cap Q_2$ und s_2 entweder in $S_1 \cap S_2$ oder in $Q_1 \cap S_2$ liegen. Es können demnach nicht alle vier Knoten in einer Schnittmenge liegen.

In beiden Schnittmengen ($Q_1 \cap Q_2$ und $S_1 \cap S_2$) oder ($Q_1 \cap S_2$ und $S_1 \cap Q_2$) muss je mindestens ein Knoten aus $\{q_1, q_2, s_1, s_2\}$ enthalten sein. Sind die Schnittmengen von einem der genannten Paare beide leer, so müssen die Knoten auf das andere Paar verteilt sein, da nicht alle Knoten nur in der einen Schnittmenge liegen können. Ist nur eine oder keine der vier Schnittmengen leer, so sind auf jeden Fall die beiden Schnittmengen von einem der genannten Paare nichtleer. Einen Knoten der einen Schnittmenge bezeichnen wir mit q, einen Knoten der anderen Schnittmenge mit s.

Insgesamt gibt es also zwei Knoten $q, s \in \{q_1, q_2, s_1, s_2\}$ für die gilt: ($q \in Q_1 \cap Q_2$ und $s \in S_1 \cap S_2$) oder ($q \in Q_1 \cap S_2$ und $s \in S_1 \cap Q_2$). Die Knoten q und s werden durch beide Mengen T_1 und T_2 jeweils getrennt. □

Satz 2.4.2
Sei $G = (V, E)$ ein knotengefärbter, zusammenhängender Graph. Gibt es in G zwei disjunkte q-s-trennende Knotenmengen T_1 und T_2, und sind alle Knoten aus T_1 und T_2 mit der gleichen Farbe gefärbt, dann ist G nicht rainbow-knotengefärbt.

In Proposition 2.4.1 haben wir gezeigt, dass es in G Knoten q und s gibt, die durch zwei disjunkte Knotenmengen T_1 und T_2 jeweils getrennt werden, wenn weder q noch s Knoten der Mengen T_1 oder T_2 sind.

Diesmal setzen wir voraus, dass zwei nicht-adjazente Knoten q und s durch zwei disjunkte Knotenmengen T_1 und T_2 jeweils getrennt werden. Demnach liegen q und s weder in $G - T_1$ noch in $G - T_2$ in derselben Komponente. Wir wollen zeigen, dass in G jeder q-s-Weg über je einen Knoten aus T_1 und einen Knoten aus T_2 führt.

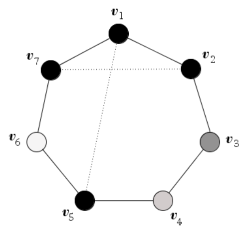
Beweis. Im zusammenhängenden Graphen G sind die Knoten q und s durch mindestens einen Weg verbunden. Da T_1 trennend ist, gibt in $G - T_1$ keinen Weg, der q und s verbindet, andernfalls wäre T_1 nicht trennend. Da in $G - T_1$ nur Knoten aus T_1 entfernt wurden, muss auf allen q-s-Wegen ein innerer Knoten $u \in T_1$ entfernt worden sein. In G gibt es demnach auf allen q-s-Wegen $P_{q,s}$ einen Knoten $u \in T_1$, sodass gilt $P_{q,s} = P_{q,u} \cup P_{u,s} = q...u...s$.

Betrachten wir die Wege $P_{q,u}$ und $P_{u,s}$ im Graphen $G - T_2$. Die Knoten q und s sind auch im Graphen $G - T_2$ nicht verbunden. Da T_1 und T_2 als disjunkt vorausgesetzt wurden, ist $u \notin T_2$. In $G - T_2$ sind demnach q und u verbunden, während u und s in verschiedenen Komponenten liegen, oder umgekehrt. Wir nehmen ohne Beschränkung den ersten Fall an. Da die Knoten u und s in G verbunden sind und in $G - T_2$ nicht, gibt es auf allen u-s-Wegen in G einen inneren Knoten $t \in T_2$.

Insgesamt gilt für alle q-s-Wege $P_{q,s}$ in G: Es gibt Knoten $u \in T_1$ und $t \in T_2$, die innere Knoten auf dem Weg $P_{q,s} = q...u...t...s$ sind. Sind alle Knoten aus T_1 und T_2 mit gleicher Farbe gefärbt, so auch die Knoten u und t. Dann führen alle q-s-Wege über zwei Knoten gleicher Farbe, womit G nicht rainbow-knotengefärbt ist. □

Beispiel 2.4.3
Dass die Bedingungen (i) und (ii) in Proposition 2.4.1 für den Satz 2.4.2 notwendig sind, zeigt die Abbildung. Der Graph ist hier der Kreis C_7.

Obwohl nach dem Spiel alle Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen $\{v_1, v_5\}$ und $\{v_2, v_7\}$ mit Farbe **1** gefärbt sind, ist der Graph rainbow-knotengefärbt. Und zwar liegt das daran, dass v_1 zu einer trennenden Knotenmenge gehört und zugleich die Rolle von q für die q-s-trennende Knotenmenge $\{v_2, v_7\}$ übernimmt. Das können wir verhindern, indem wir voraussetzen, dass es $q, s \in V$ gibt, die nicht Knoten von T_1 und T_2 sind.



Dass Bob auf Kreisen mit mindestens sieben Knoten trotzdem eine Gewinnstrategie hat, werden wir später sehen.

2.4.2. Färbung von trennenden Knotenmengen

In diesem Kapitel geht es jetzt darum, wann und wie Bob die Färbung aller Knoten *einer* trennenden Knotenmenge mit einer einzigen Farbe erreicht. Wir definieren die folgenden Bezeichnungen:

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Seien

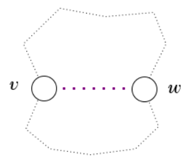
$$\mathcal{T}_i(G) :=\{T \subset V \mid T \text{ ist trennend und } |T| = i\} \text{ für ein } i \in \{\kappa(G), ..., n-2\},$$

die **Menge aller trennenden Knotenmengen in G mit i Knoten** und

$$\mathcal{T}(G) := \bigcup_{i=\kappa(G),...,n-2} \mathcal{T}_i(G)$$

die **Menge aller trennenden Knotenmengen in G**.

Beispiel 2.4.4
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Seien $v \neq w$ Knoten aus V und $T = \{v, w\}$ eine trennende Knotenmenge in G.

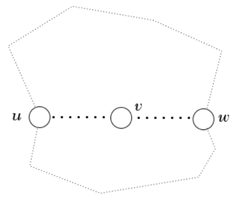


Falls Alice zuerst einen der beiden Knoten aus T im Beispiel 2.4.4 mit beliebiger Farbe färbt, färbt Bob im folgenden Zug den zweiten Knoten aus T mit derselben Farbe. Damit haben beide Knoten der trennenden Knotenmenge T die gleiche Farbe.

Falls Bob zuerst einen der beiden Knoten mit Farbe **1** färbt, wählt Alice darauf für den zweiten Knoten eine andere Farbe, falls eine zweite Farbe zur Verfügung steht. Damit sind die beiden Knoten der trennenden Knotenmenge T unterschiedlich gefärbt.

Das Beispiel 2.4.4 zeigt, dass Bob die Färbung aller Knoten der trennenden Knotenmenge $T \in \mathcal{T}_2(G)$ mit einer Farbe nur dann gelingt, wenn Alice zuerst einen der beiden Knoten aus T färbt. Im nächsten Beispiel kann Alice dies allerdings auch dann verhindern, aber nur, wenn mindestens zwei Farben zur Verfügung stehen.

Beispiel 2.4.5
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Seien $u, v, w \in V$ paarweise verschieden und $T = \{u, v, w\}$ eine trennende Knotenmenge in G.



Falls Alice einen der drei Knoten aus T im Beispiel 2.4.5 mit Farbe **1** färbt, färbt Bob einen weiteren Knoten aus T mit Farbe **1**. Alice färbt den verbleibenden Knoten aus T mit Farbe **2**. Es sind dann nicht alle Knoten aus T gleich gefärbt.

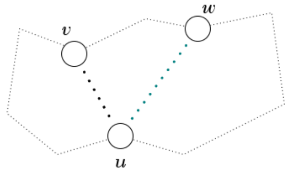
Falls Bob einen beliebigen Knoten aus T mit Farbe **1** färbt, wählt Alice für einen der beiden verbleibenden Knoten aus T die Farbe **2**. Damit sind bereits zwei Knoten unterschiedlich gefärbt.

Im Beispiel 2.3.8 hat Bob Alice in eine Art Zwickmühle gebracht, indem er ausgenützt hat, dass die Schnittmenge der trennenden Knotenmengen $\{v_3, v_6\}$ und $\{v_3, v_7\}$ nichtleer ist. Um alle Knoten einer trennenden Knotenmenge mit der gleichen Farbe zu färben, kommt es scheinbar nicht nur auf die einzelne trennende Knotenmenge an.

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Sei $U \subset V$ die Vereinigung von (nicht disjunkten) trennenden Knotenmengen $T \in \mathcal{T}(G)$. Idealerweise sind die trennenden Knotenmengen möglichst klein oder sogar minimal. Auf den nächsten Seiten zeigen wir Beispiele von solchen Knotenteilmengen $U \subset V$. Die zugehörigen Lemmata zeigen jeweils eine Strategie, mit der es Bob immer gelingt, die Knoten einer trennenden Knotenmenge $T \subset V$ mit einer Farbe zu färben, wenn es im Graphen G eine Knotenteilmenge U wie im entsprechenden Beispiel gibt. Unter (a) färbt jeweils Alice einen ersten Knoten in der Knotenteilmenge U, während bei (b) Bob damit beginnt. Danach fährt Alice beliebig weiter, wobei sie natürlich auch einen Knoten ausserhalb der Knotenteilmenge U färben kann. Wir beschränken uns bei den Mengen T auf Elemente aus $\mathcal{T}_2(G)$ und $\mathcal{T}_3(G)$. In den Abbildungen wird die Tatsache, dass die Knoten der trennenden Knotenmengen nicht zwingend durch Kanten verbunden sind, wieder durch gepunktete Kanten dargestellt. Die unterschiedlichen Farben dieser Kanten machen die einzelnen trennenden Knotenmengen unterscheidbar.

Beispiel 2.4.6
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Seien $u, v, w \in V$ paarweise verschieden und $T_1 = \{u, v\}$, $T_2 = \{u, w\} \in \mathcal{T}_2$ trennende Knotenmengen in G, wobei $T_1 \cap T_2 = \{u\}$ gelte.

Sei $U = T_1 \cup T_2$.



Lemma 2.4.7
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Falls es in G eine Knotenteilmenge U wie im Beispiel 2.4.6 gibt, so besitzt Bob eine Strategie, um alle Knoten einer trennenden Knotenmenge mit der gleichen Farbe zu färben, unabhängig davon, ob (a) Alice anfängt oder ob (b) Bob anfängt.

Beweis.

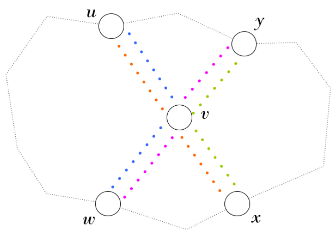
(a) Alice färbt einen beliebigen Knoten aus U. Ohne Beschränkung nehmen wir an, dass sie Knoten v mit Farbe **1** färbt. Bob färbt den Knoten u ebenfalls mit Farbe **1**.

(b) Bob versieht erst den Knoten u mit Farbe **1**. Egal, welchen Knoten Alice nun färbt, färbt Bob im nächsten Spielzug den noch ungefärbten Knoten v oder w mit Farbe **1**.

□

Beispiel 2.4.8
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Seien $u, v, w, x, y \in V$ paarweise verschieden und $T_1 = \{u, v, w\}$, $T_2 = \{u, v, x\}$, $T_3 = \{v, x, y\}$, $T_4 = \{v, w, y\} \in \mathcal{T}_3(G)$ trennende Knotenmengen in G, wobei $T_1 \cap T_2 = \{u, v\}$, $T_1 \cap T_4 = \{v, w\}$, $T_2 \cap T_3 = \{v, x\}$, $T_3 \cap T_4 = \{v, y\}$ und $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 = \{v\}$ gelte.

Sei $U = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$.



Lemma 2.4.9
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Falls es in G eine Knotenteilmenge U wie im Beispiel 2.4.8 gibt, so besitzt Bob eine Strategie, um alle Knoten einer trennenden Knotenmenge mit der gleichen Farbe zu färben, unabhängig davon, ob (a) Alice anfängt oder ob (b) Bob anfängt.

Beweis.

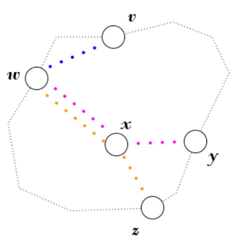
(a) Alice färbt entweder den Knoten v oder einen Knoten u, w, x, y mit Farbe **1**. Bob färbt im ersten Fall den Knoten u, im zweiten Fall den Knoten v mit Farbe **1**. Die beiden Knoten sind die Knoten einer Schnittmenge $T_i \cap T_j, i, j \in \mathbb{N}_4$. Unabhängig davon, welchen Knoten Alice mit Farbe **2** färbt, kann Bob den dritten Knoten einer trennenden Menge T_i oder T_j einheitlich mit Farbe **1** färben.

(b) Bob färbt den Knoten v, der in jeder trennenden Menge liegt, mit Farbe **1**. Alice färbt einen weiteren Knoten u oder y (beziehungsweise w oder x) mit Farbe **2**. Bob färbt jeweils den anderen Knoten der genannten Paare mit Farbe **1**. (Färbt Alice einen Knoten ausserhalb von U, so färbt Bob einen beliebigen Knoten aus U mit Farbe **1**.) Damit sind in zwei trennenden Knotenmengen jeweils zwei Knoten mit Farbe **1** gefärbt und jeweils ein Knoten ist ungefärbt. Es spielt keine Rolle, welchen Knoten Alice mit Farbe **2** färbt. Bob färbt den letzten Knoten einer trennenden Knotenmenge mit der Farbe **1**. Alle Knoten einer trennenden Menge sind einheitlich mit Farbe **1** gefärbt.

□

Beispiel 2.4.10
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Seien $v, w, x, y, z \in V$ paarweise verschieden und $T_1 = \{v, w\} \in \mathcal{T}_2(G)$ und $T_2 = \{w, x, y\}$, $T_3 = \{w, x, z\} \in \mathcal{T}_3(G)$ trennende Knotenmengen in G, wobei $T_1 \cap T_2 = \{w\}$, $T_1 \cap T_3 = \{w\}$, $T_2 \cap T_3 = \{w, x\}$ und $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \{w\}$ gelte.

Sei $U = T_1 \cup T_2 \cup T_3$.



Lemma 2.4.11
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Falls es in G eine Knotenteilmenge U wie im Beispiel 2.4.10 gibt, so besitzt Bob eine Strategie, um alle Knoten einer trennenden Knotenmenge mit der gleichen Farbe zu färben, unabhängig davon, ob (a) Alice anfängt oder ob (b) Bob anfängt.

Beweis.

(a) Alice beginnt.

  (1) Alice färbt den Knoten v oder w mit Farbe **1**. Bob färbt den anderen Knoten ebenfalls mit Farbe **1**. Die Knoten der trennenden Knotenmenge T_1 sind einheitlich gefärbt.

  (2) Alice färbt den Knoten x mit Farbe **1**. Bob färbt den Knoten w mit Farbe **1**. Alice färbt einen beliebigen Knoten mit Farbe **2**. In einer der Mengen T_2 oder T_3 sind zwei Knoten mit Farbe **1** gefärbt und der dritte Knoten ist noch ungefärbt. Bob färbt diesen Knoten mit Farbe **1**, womit alle Knoten einer trennenden Knotenmenge einheitlich gefärbt sind.

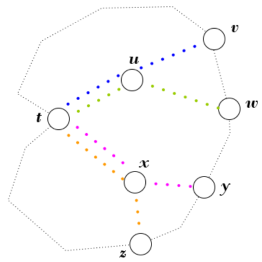
  (3) Alice färbt einen der Knoten y oder z mit Farbe **1**. Bob färbt den Knoten w mit Farbe **1**. (i) Färbt Alice als Nächstes nicht den Knoten v, so färbt ihn Bob mit Farbe **1**. T_1 ist dann einheitlich gefärbt. (ii) Färbt Alice den Knoten v mit Farbe **2**, so färbt Bob den Knoten x mit Farbe **1**, womit alle Knoten aus T_2 oder T_3 gleich gefärbt sind.

(b) Bob beginnt. Bob färbt den Knoten w mit Farbe **1**. (i) Färbt Alice nicht den Knoten v, so färbt ihn Bob mit Farbe **1**, womit T_1 einheitlich gefärbt ist. (ii) Färbt Alice den Knoten v mit Farbe **2**, so färbt Bob den Knoten x mit Farbe **1**. Egal, welchen Knoten Alice als Nächstes färbt, färbt Bob den noch ungefärbten Knoten y oder z mit Farbe **1**, womit alle Knoten einer Menge T_2 oder T_3 mit einer Farbe gefärbt sind.

□

Beispiel 2.4.12
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Seien $t, u, v, w, x, y, z \in V$ paarweise verschieden und $T_1 = \{t, u, v\}$, $T_2 = \{t, u, w\}$, $T_3 = \{t, x, y\}$, $T_4 = \{t, x, z\} \in \mathcal{T}_3(G)$ trennende Knotenmengen in G, wobei $T_1 \cap T_2 = \{t, u\}$, $T_3 \cap T_4 = \{t, x\}$ und $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 = \{t\}$ gelte.

Sei $U = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$.



Lemma 2.4.13
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Falls es in G eine Knotenteilmenge U wie im Beispiel 2.4.12 gibt, so besitzt Bob eine Strategie, um alle Knoten einer trennenden Knotenmenge mit der gleichen Farbe zu färben, unabhängig davon, ob (a) Alice anfängt oder ob (b) Bob anfängt.

Beweis.

(a) Alice beginnt.

(1) Alice färbt den Knoten t mit Farbe **1**. Bob färbt den Knoten u mit Farbe **1**. Egal, welchen Knoten Alice mit Farbe **2** färbt, färbt Bob den noch ungefärbten Knoten v oder w mit Farbe **1**. Alle Knoten einer trennenden Knotenmenge sind einheitlich gefärbt.

(2) Alice färbt den Knoten u (oder x) mit Farbe **1**. Bob färbt den Knoten t mit Farbe **1**. Gleichgültig, wie Alice den nächsten Knoten färbt, gibt es eine trennende Menge T_1 oder T_2 (beziehungsweise T_3 oder T_4), in der zwei Knoten mit Farbe **1** gefärbt sind und ein Knoten noch ungefärbt ist. Diesen färbt Bob auch noch mit Farbe **1**.

(3) Alice färbt einen der Knoten v oder w (beziehungsweise y oder z) mit Farbe **1**. Bob färbt den Knoten t mit Farbe **1**. (i) Färbt Alice den Knoten u (beziehungsweise x) mit Farbe **2**, so färbt Bob den Knoten x (beziehungsweise u) mit Farbe **1**. Damit sind in zwei Mengen T_3 oder T_4 (beziehungsweise T_1 oder T_2) zwei Knoten mit Farbe **1** gefärbt. Egal, wie Alice färbt, färbt Bob darauf den noch ungefärbten dritten Knoten einer der beiden Mengen mit Farbe **1**. (ii) Wenn Alice einen anderen Knoten färbt, dann färbt Bob den Knoten u (beziehungsweise x) mit Farbe **1**, womit alle Knoten einer Menge T_1 oder T_2 (beziehungsweise T_3 oder T_4) mit Farbe **1** gefärbt sind.

(b) Bob beginnt. Er färbt den Knoten t mit Farbe **1**. Alice färbt einen Knoten der Menge $\{u, v, w\}$ (oder $\{x, y, z\}$ oder einen Knoten, der nicht in U liegt) mit Farbe **2**. Bob färbt den Knoten x (beziehungsweise u) mit Farbe **1**. Gleichgültig, welchen Knoten

Alice als nächsten färbt, ist einer der Knoten y oder z (beziehungsweise v oder w) noch ungefärbt. Bob färbt ihn mit Farbe **1**, womit alle Knoten einer trennenden Knotenmenge einheitlich gefärbt sind.

$\square$

Bevor nun im Satz 2.4.14 gezeigt wird, wann Bob auf jeden Fall eine Gewinnstrategie hat, definieren wir vorab einige Begriffe, die uns die Schreibweise in den folgenden Beweisen erleichtern.

Seien $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $\mathcal{T}(G)$ die Menge aller trennenden Knotenmengen in G. Alle Knotenteilmengen $U \subset V$, die Vereinigungen von trennenden Knotenmengen aus $\mathcal{T}(G)$ sind wie in einem der Beispiele 2.4.6, 2.4.8, 2.4.10 oder 2.4.12 sowie alle Artikulationen in G fassen wir zur Menge $\mathcal{U}_B(G)$ zusammen.

Bob beginnt in den Beweisen der entsprechenden Lemmata jeweils mit dem Knoten, der in der Schnittmenge aller trennenden Knotenmengen liegt. Diesen Knoten u in Beispiel 2.4.6, v in Beispiel 2.4.8, w in Beispiel 2.4.10 und t in Beispiel 2.4.12 nennen wir im Folgenden den **strategisch wichtigen Knoten** der Knotenteilmenge $U \in \mathcal{U}_B(G)$ und bezeichnen ihn mit $swK(U)$.

2.4.3. Hinreichende Bedingungen an den Graphen G, dass Bob gewinnt

Satz 2.4.14
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\kappa(G) \in \mathbb{N}_3$. Gibt es in G drei Knotenteilmengen $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}_B(G)$, wobei

(i) die drei Knotenteilmengen U_1, U_2 und U_3 paarweise disjunkt sind,

(ii) die Knotenteilmenge U_1 nicht durch eine trennende Knotenmenge $\tilde{T}$ aus U_2 oder U_3 getrennt wird sowie

(iii) keine trennende Knotenmenge $\bar{T}$ aus U_1 eine der Mengen U_2 oder U_3 trennt,

dann gelten (a) $rvc_{S_A}(G) = \infty$ und (b) $rvc_{S_B}(G) = \infty$.

Beweis. Bob hat die folgende Gewinnstrategie. Nach seinem ersten Spielzug muss der strategisch wichtige Knoten der Knotenteilmenge U_1 mit Farbe **1** gefärbt sein. Das erreicht Bob folgendermassen:

(a) Alice beginnt.

(1) Alice färbt den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Bob färbt nun den Knoten $swK(U_2)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (**).

(2) Alice färbt einen anderen Knoten aus U_1 mit Farbe **1**. Bob färbt den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (*).

(3) Alice färbt den Knoten $swK(U_2)$ oder $swK(U_3)$ mit Farbe **1**. Darauf färbt Bob den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (**).

(4) Alice färbt einen anderen Knoten aus U_2 oder U_3 mit Farbe **1**. Bob färbt den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (*).

(5) Alice färbt einen beliebigen Knoten in G, der nicht aus U_1, U_2 oder U_3 ist, mit Farbe **1**. Dann färbt Bob den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (*).

(b) Bob beginnt.

(6) Bob färbt den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (*).

(*) Sobald Alice weitere Knoten aus U_1 färbt, färbt auch Bob in U_1 weiter. Und zwar verfolgt Bob die Strategie, wie sie im Beweis vom entsprechenden Lemma 2.4.7, 2.4.9, 2.4.11 oder 2.4.13 beschrieben ist. Damit erreicht er, dass die Knoten einer trennenden Knotenmenge in U_1 mit Farbe **1** gefärbt sind.

Im nächsten Schritt muss Bob nun dafür sorgen, dass zusätzlich einer der beiden strategisch wichtigen Knoten in U_2 oder U_3 gefärbt ist. (In den Fällen (1) und (3) ist dies bereits der Fall.) Wir unterscheiden:

In den Fällen (2), (5) und (6) sind noch alle Knoten aus U_2 und U_3 ungefärbt. Färbt Alice nun einen Knoten aus U_2 mit beliebiger Farbe, so färbt Bob den Knoten $swK(U_3)$ mit Farbe **1**. Andernfalls färbt Bob den Knoten $swK(U_2)$ mit **1**. Weiter bei (**).

Im Fall (4) ist bereits ein Knoten aus U_2 oder U_3 mit Farbe **1** gefärbt, und zwar nehmen wir ohne Beschränkung an, es sei ein Knoten aus U_2. Bekanntlich ist es nicht der strategisch wichtige Knoten. Wir unterscheiden: Färbt Alice einen weiteren Knoten aus U_2 mit beliebiger Farbe, dann färbt Bob den Knoten $swK(U_3)$ mit Farbe **1**. In allen anderen Fällen färbt Bob den Knoten $swK(U_2)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (**).

(**) Zu diesem Zeitpunkt sind von zwei Mengen aus $\mathcal{U}_B(G)$ mindestens die strategisch wichtigen Knoten mit Farbe **1** gefärbt. (Eventuell sind sogar bereits alle Knoten einer trennenden Knotenmenge in U_1 mit Farbe **1** gefärbt, und zwar wenn Alice und Bob bei (*) erst in U_1 weitergefärbt haben.) Bob hält sich jeweils an das Vorgehen, das wir in den Beweisen der entsprechenden Lemmata 2.4.7, 2.4.9, 2.4.11 und 2.4.13 vorgeschlagen haben und erreicht die einheitliche Färbung aller Knoten aus zwei trennenden Knotenmengen $\bar{T} \subset U_1$ und $\tilde{T} \subset U_2$ oder $\tilde{T} \subset U_3$ mit Farbe **1**.

Gemäss Voraussetzung (i) sind $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ disjunkt und aufgrund der Voraussetzungen (ii) und (iii) trennen sich $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ nicht gegenseitig. Damit entsprechen die beiden trennenden Knotenmengen dem Fall (a) in Proposition 2.4.1. Derzufolge gibt es Knoten q und s, die durch $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ getrennt werden.

Da alle Knoten aus $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ mit gleicher Farbe gefärbt sind, folgt mit Satz 2.4.2, dass der Graph G nicht rainbow-knotengefärbt ist. □

Bemerkung 2.4.15
Satz 2.3.6, wo mindestens drei Artikulationen vorausgesetzt wurden, ist ein Spezialfall von Satz 2.4.14.

Bemerkung 2.4.16
Falls die Knotenteilmengen U_2 und U_3 nicht disjunkt sind, kann es vorkommen, dass sobald Alice einen Knoten der nichtleeren Schnittmenge von U_2 und U_3 mit Farbe **2** färbt, Bob weder für U_2 noch für U_3 seiner Strategie im Beweis des entsprechenden Lemmas 2.4.7, 2.4.9, 2.4.11 oder 2.4.13 folgen kann. Er erreicht für keine der beiden Knotenteilmengen U_2 oder U_3 die Färbung aller Knoten einer trennenden Knotenmenge $T \subset U_2$ oder $T \subset U_3$ mit Farbe **1**.

In anderen Fällen gewinnt Bob aber auch dann, wenn die Knotenteilmengen U_2 und U_3 nicht disjunkt sind:

Korollar 2.4.17
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\kappa(G) \in \mathbb{N}_3$. Gibt es in G vier Knotenteilmengen $U_1, U_2, U_3, U_4 \in \mathcal{U}_B(G)$, wobei

(i) die Knotenteilmenge U_1 disjunkt zu den Knotenteilmengen U_2, U_3 und U_4 ist,

(ii) die Schnittmenge $U_2 \cap U_3 \cap U_4 = \emptyset$ ist,

(iii) die Knotenteilmenge U_1 nicht durch eine trennende Knotenmenge $\tilde{T}$ aus U_2, U_3 oder U_4 getrennt wird sowie

(iv) keine trennende Knotenmenge $\bar{T}$ aus U_1 eine der Mengen U_2, U_3 oder U_4 trennt,

dann gelten $rvc_{S_A}(G) = \infty$ und $rvc_{S_B}(G) = \infty$.

Beweis. Bob hält sich grundsätzlich an seine Strategie im Beweis zu Satz 2.4.14. Die Punkte (1), (2) und (6) werden von 2.4.14 übernommen, während (3), (4) und (5) etwas angepasst werden müssen:

(3) Färbt Alice den Knoten $swK(U_2)$, $swK(U_3)$ oder $swK(U_4)$ mit Farbe **1**, färbt

Bob darauf den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (**).

(4) Färbt Alice einen anderen Knoten aus U_2, U_3 oder U_4 mit Farbe **1**, so färbt Bob den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (*).

(5) Färbt Alice einen beliebigen Knoten in G, der nicht aus U_1, U_2, U_3 oder U_4 ist, mit Farbe **1**, dann färbt Bob den Knoten $swK(U_1)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (*).

(*) Die Knoten in U_1 färbt Bob wie im ersten Abschnitt von (*) in 2.4.14 beschrieben. Die Färbung von $swK(U_2)$, $swK(U_3)$ oder $swK(U_4)$ mit Farbe **1** erreicht Bob wie folgt:

In den Fällen (2), (5) und (6) sind noch alle Knoten aus U_2, U_3 und U_4 ungefärbt. Alice färbt beliebig. Da die Schnittmenge $U_2 \cap U_3 \cap U_4$ leer vorausgesetzt wurde, gibt es danach auf jeden Fall eine Knotenteilmenge U_2, U_3 oder U_4, in der immer noch alle Knoten ungefärbt sind. In dieser Menge färbt Bob den strategisch wichtigen Knoten mit Farbe **1**.

Im Fall (4) ist bereits ein Knoten aus U_2, U_3 oder U_4 mit Farbe **1** gefärbt (und zwar nicht der strategisch wichtige Knoten). Alice färbt einen Knoten mit beliebiger Farbe. Dieser Knoten kann aufgrund der Voraussetzung (ii) höchstens in zwei der drei Knotenteilmengen liegen. Es gibt dann eine Knotenteilmenge $U_{i(i\in\{2,3,4\})}$, in der entweder noch kein Knoten oder höchstens ein Knoten mit Farbe **1** gefärbt ist. In dieser Knotenteilmenge U_i färbt Bob den Knoten $swK(U_i)$ mit Farbe **1**. Weiter bei (**).

(**) Wie im Beweis von Satz 2.4.14.

Gemäss Voraussetzung (i) sind $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ disjunkt und aufgrund der Voraussetzungen (iii) und (iv) trennen sich $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ nicht gegenseitig. Damit entsprechen die beiden trennenden Knotenmengen dem Fall (a) in Proposition 2.4.1. Derzufolge gibt es Knoten q und s, die durch $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ getrennt werden.

Da alle Knoten aus $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ mit gleicher Farbe gefärbt sind, folgt mit Satz 2.4.2, dass der Graph G nicht rainbow-knotengefärbt ist. □

2.5. Rainbowspielverbindungszahl für spezielle Graphen

Wir wollen nun unsere bisherigen Resultate anwenden und die Rainbowspielverbindungszahl für einige bestimmte Graphen ermitteln. Schliesslich interessiert uns jeweils auch, ab welcher Grösse der Graphen Bob eine Gewinnstrategie hat.

2.5.1. Rainbowspielverbindungszahl für Bäume

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit den Bäumen. Zuerst definieren wir, was wir dafür zusätzlich brauchen.

Sei $B = (V, E)$ ein Baum. Ein Knoten $v \in V$ mit $d(v) = 1$ heisst **Blatt**. Die Anzahl der Blätter in B wird mit l beziffert. Damit ist $m = n - l$ die Anzahl **innerer Knoten** in B. Ein Baum mit nur einem inneren Knoten heisst **Stern**.

Proposition 2.5.1
Sei $B = (V, E)$ ein Baum mit m inneren Knoten. Dann gilt $rvc_S(B) \geq m$.

Beweis. In einem Baum gibt es zwischen zwei Knoten v und w genau einen Weg. Die inneren Knoten auf dem v-w-Weg sind in jedem Fall innere Knoten des Baums. Darum dürfen keine zwei inneren Knoten gleich gefärbt werden. Die Farbe der Blätter spielt keine Rolle. Demnach ist ist $rvc(B) = m$ und für alle Spielvarianten gilt mit Proposition 2.3.1 $rvc_S(B) \geq m$. □

Vereinbarung 2.5.2
Da für Bäume die Anzahl der inneren Knoten m und die der Blätter l im Folgenden entscheidend ist, bezeichnen wir die Klasse aller Bäume mit m inneren Knoten und l Blättern mit $\mathcal{B}_{m,l}$.

Satz 2.5.3
Für alle Sterne $B_{1,l} \in \mathcal{B}_{1,l}$ gilt $rvc_{S_A}(B_{1,l}) = 1$ und $rvc_{S_B}(B_{1,l}) = 1$.

Beweis. Bei $m = 1$ ist $\text{diam}(B_{1,l}) = 2$, unabhängig von l. Nach Proposition 2.3.2 gewinnt dann immer Alice mit einer Farbe. □

Sei $m \geq 2$. Die Knotenzusammenhangszahl von Bäumen ist $\kappa(B) = 1$, was wir in Kapitel 2.3 bereits untersucht haben. Jeder innere Knoten ist eine Artikulation, der Baum $B \in \mathcal{B}_{m,l}$ hat demnach m Artikulationen.

Satz 2.5.4
Für alle Bäume $B_{2,l} \in \mathcal{B}_{2,l}$ gilt für jede natürliche Zahl $j \geq 1$

(i) $rvc_{S_A}(B_{2,2j}) = \infty$, *(ii)* $rvc_{S_A}(B_{2,2j+1}) = 2$,
(iii) $rvc_{S_B}(B_{2,2j}) = 2$, *(iv)* $rvc_{S_B}(B_{2,2j+1}) = \infty$.

Beweis. Bei zwei inneren Knoten und beliebig vielen Blättern ist nach Proposition 2.5.1 $rvc_S \geq 2$, womit Bob gewinnt, wenn nur eine Farbe vorhanden ist.

(i): $rvc_{S_A}(B_{2,2j}) = \infty$ folgt aus Satz 2.3.7 (a).

(iv): $rvc_{S_B}(B_{2,2j+1}) = \infty$ folgt aus Satz 2.3.7 (b).

(ii) und (iii): Sobald Alice einen inneren Knoten färbt, färbt Bob den zweiten inneren Knoten mit derselben Farbe, womit $B_{2,l}$ nicht rainbow-gefärbt ist. Sobald andererseits Bob einen inneren Knoten färbt, färbt Alice den zweiten mit einer anderen Farbe, sofern eine solche zur Verfügung steht. Der Baum $B_{2,l}$ ist dann rainbow-knotengefärbt. Daher färben beide vorerst nur Blätter bis nur noch die beiden inneren Knoten ungefärbt sind.

Hat der Baum eine gerade (ungerade) Knotenzahl, so zählt der Baum auch eine gerade (ungerade) Anzahl Blätter. Diese werden von Alice und Bob abwechselnd gefärbt.

(ii) Bei *ungerader Knotenzahl* muss Bob den ersten inneren Knoten färben, wenn Alice begonnen hat.

(iii) Bei *gerader Knotenzahl* muss Bob den ersten inneren Knoten färben, wenn er selber begonnen hat.

Anschliessend färbt Alice den zweiten inneren Knoten mit einer anderen Farbe, womit alle Knoten in $B_{2,l}$ rainbow-knotenverbunden sind. □

Für alle $B_{m,l} \in \mathcal{B}_{m,l}$ mit $m \geq 3$ gewinnt gemäss Satz 2.3.6 immer Bob.

Damit sind die Untersuchungen für Bäume bereits abgeschlossen. Sobald ein Baum mehr als zwei innere Knoten hat, gewinnt immer Bob.

2.5.2. Rainbowspielverbindungszahl für Kreise

Es folgt die Untersuchung von Kreisen. Den Knoten, den Alice (oder Bob, wenn er beginnt) zuerst färbt, bezeichnen wir in den folgenden Beweisen mit v_1. Die übrigen Knoten werden im Uhrzeigersinn fortlaufend mit $v_2, ..., v_n$ bezeichnet. Dies ist wegen der Symmetrie des Kreises unbedenklich.

Satz 2.5.5
Für Kreise C_n mit $n \leq 5$ gilt $rvc_{S_A}(C_n) = 1$ und $rvc_{S_B}(C_n) = 1$.

Beweis. Diese Kreise haben Durchmesser $\mathrm{diam}(C_n) \leq 2$, und darauf gewinnt nach Proposition 2.3.2 immer Alice mit einer Farbe, unabhängig davon, ob sie oder Bob beginnt. □

Grundsätzlich kann Bob seine Gewinnstrategie aus Satz 2.4.14 auf Kreisen mit mindestens neun Knoten anwenden. Wir werden sehen, dass Bob aber auch auf Kreisen mit weniger Knoten fast immer gewinnt. Zudem kann er ausnutzen, dass es zwischen jeweils zwei Knoten eines Kreises genau zwei Wege gibt. Haben beide Wege mindestens zwei innere Knoten, so versucht Bob auf beiden Wegen zwei innere Knoten jeweils gleich zu färben.

Satz 2.5.6
Sei C_6 ein Kreis mit sechs Knoten. Dann gilt $rvc_{S_A}(C_6) = \infty$.

Beweis. Wir zeigen eine Gewinnstrategie für Bob im Spiel S_A auf C_6 mit beliebig vielen Farben. Alice färbt einen beliebigen Knoten v_1 mit Farbe **1**. Bob färbt nun den Knoten v_4 mit Farbe **1**. Färbt Alice einen der Knoten v_2 oder v_3 mit beliebiger Farbe **X**, so färbt Bob den anderen der beiden Knoten ebenfalls mit Farbe **X**. Färbt Alice einen der Knoten v_5 oder v_6 mit Farbe **Y**, so färbt Bob den anderen Knoten auch mit Farbe **Y**. Damit sind beide v_1-v_4-Wege nicht rainbow-knotenverbunden und Bob gewinnt. □

Satz 2.5.7
Sei C_6 ein Kreis mit sechs Knoten. Dann gilt $rvc_{S_B}(C_6) = 2$.

Beweis. Es gilt $\operatorname{diam}(C_6) = 3$. Mit den Propositionen 1.2.1 und 2.3.1 folgt, dass $rvc_{S_B}(C_6) \geq rvc(C_6) \geq \operatorname{diam}(C_6) - 1 = 2$ sein muss. Mit nur einer Farbe gewinnt demnach immer Bob. Wir zeigen nun, dass Alice mit zwei Farben eine Gewinnstrategie im Spiel S_B hat, wo Bob beginnt. Alice muss verhindern, dass auf den beiden Wegen zwischen zwei gegenüberliegenden Knoten die inneren Knoten mit je einer Farbe gefärbt werden.

Bob färbt einen Knoten v_1 mit Farbe **1**. Alice färbt v_2 mit Farbe **2**. Je nachdem, wie Bob seinen nächsten Knoten färbt, muss Alice reagieren:

(1a) Bob färbt den Knoten v_3 (oder v_5) mit Farbe **1**. Dann färbt Alice den Knoten v_4 (beziehungsweise v_6) mit Farbe **2**. (...)

(1b) Färbt Bob umgekehrt den Knoten v_4 (beziehungsweise v_6) mit Farbe **2**, dann färbt Alice den Knoten v_3 (beziehungsweise v_5) mit Farbe **1**. (...)

(2a) Bob färbt den Knoten v_3 (oder v_5) mit Farbe **2**. Dann färbt Alice den Knoten v_4 (beziehungsweise v_6) mit Farbe **1**.

(2b) Färbt Bob aber den Knoten v_4 (beziehungsweise v_6) mit Farbe **1**, so färbt Alice den Knoten v_3 (beziehungsweise v_5) mit Farbe **2**.

Bob färbt anschliessend beliebig. In den Fällen (2a) und (2b) darf Alice den letzten Knoten nicht mit der Farbe färben, die Bob zuletzt verwendet hat.

Alice erreicht eine Rainbow-Knotenfärbung mit mindestens zwei Farben. □

Es folgt die versprochene Gewinnstrategie für Bob auf Kreisen mit mindestens sieben Knoten.

Satz 2.5.8
Sei C_n ein Kreis mit $n \geq 7$ Knoten. Dann gilt $rvc_{S_A}(C_n) = \infty$.

Beweis. Im Spiel S_A auf Kreisen mit mindestens sieben Knoten hat Bob mit beliebig vielen Farben eine Gewinnstrategie. Er nutzt aus, dass in Kreisen (mit mindestens fünf Knoten) jeder Knoten strategisch wichtiger Knoten einer Knotenteilmenge U wie in Beispiel 2.4.6 ist. Alice färbt einen Knoten v_1 mit Farbe **1**. Dieser ist strategisch wichtiger Knoten der Menge $U_1 := \{v_1, v_4, v_5\} = \{v_1, v_4\} \cup \{v_1, v_5\}$. Nun färbt Bob den Knoten v_3, einen weiteren strategisch wichtigen Knoten, und zwar der Menge $U_2 := \{v_3, v_6, v_7\} = \{v_3, v_6\} \cup \{v_3, v_7\}$ mit Farbe **1**. (*) Alice färbt einen Knoten mit beliebiger Farbe. Dies kann der Knoten v_2 sein oder, falls der Kreis mehr als sieben Knoten hat, einer der Knoten $v_8, ..., v_n$. Oder aber auch ein Knoten der Mengen U_1 oder U_2. Spätestens wenn Alice einen Knoten aus U_1 mit beliebiger Farbe färbt, färbt Bob den dritten Knoten in U_1 mit Farbe **1**. Und spätestens wenn Alice einen Knoten aus U_2 mit beliebiger Farbe färbt, färbt Bob den letzten Knoten in U_2 mit Farbe **1**. (...)

Die Knoten v_1 und v_3 sind mit Farbe **1** gefärbt, zudem sind in $\{v_4, ..., v_7\}$ zwei Knoten v_i, v_j mit Farbe **1** gefärbt. Sind die beiden Knoten benachbart, so handelt es sich um v_5 und v_6. Damit führen beide v_4-v_n-Wege über zwei mit Farbe **1** gefärbte Knoten. Sind v_i und v_j jedoch nicht benachbart, so liegt ein Knoten q zwischen ihnen und auf beiden Wegen zwischen v_2 und q liegen je zwei mit **1** gefärbte Knoten. Der Kreis ist damit nicht rainbow-knotengefärbt. □

Satz 2.5.9
Sei C_n ein Kreis mit $n \geq 7$ Knoten. Dann gilt $rvc_{S_B}(C_n) = \infty$.

Beweis. Bob hat auch im Spiel S_B auf $C_{n\geq 7}$ eine Gewinnstrategie mit beliebig vielen Farben. Er färbt einen beliebigen Knoten v_1 mit Farbe **1**. Dieser ist auf jeden Fall ein strategisch wichtiger Knoten. Und zwar gibt es mindestens vier Knoten $(v_3, ..., v_{n-1})$, die jeweils mit v_1 eine minimal trennende Knotenmenge bilden. Alice hat nun zwei Möglichkeiten:

(1) Alice färbt einen Nachbarn von v_1 mit beliebiger Farbe. Wir nehmen an, sie habe v_2 gefärbt. Dann färbt Bob den anderen Nachbarn von dem von Alice gefärbten Knoten, hier also v_3, mit Farbe **1**. Damit haben wir die gleiche Situation wie im Satz 2.5.8, nach dem zweiten Spielzug. Dass hier zusätzlich v_2 gefärbt ist, spielt keine Rolle. Weiter bei (*) im Beweis von 2.5.8.

(2) Alice färbt einen der übrigen Knoten $v_{i(i\in\{3,...,n-1\})}$ mit Farbe **X** (**1** oder **2**). Wir markieren ihn mit u. Bob färbt einen Nachbarn von u, wobei er darauf achtet, dass dieser nicht zugleich Nachbar von v_1 ist, ebenfalls mit Farbe **X**. Wir bezeichnen diesen Knoten mit w. Alice färbt einen Knoten mit beliebiger Farbe. Bob wählt nun einen

Knoten, der nicht Nachbar von $\{u, w\}$ ist und färbt ihn mit Farbe **1**. Die beiden Nachbarn von $\{u, w\}$ sind durch zwei Wege miteinander verbunden, von denen einer natürlich über die mit Farbe **X** gefärbten Knoten u und w führt und der andere über zwei Knoten, die mit Farbe **1** gefärbt sind. Somit sind beide Wege nicht rainbow-knotengefärbt.

□

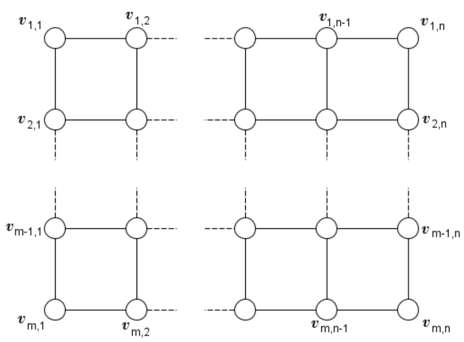
Damit ist auch die Untersuchung von Kreisen abgeschlossen. Egal, ob Alice oder Bob beginnt, gewinnt Bob immer auf Kreisen mit mindestens sieben Knoten.

2.5.3. Rainbowspielverbindungszahl für Rechteckgitter

In diesem Kapitel untersuchen wir $m \times n$-Rechteckgitter. Sie sind wie folgt definiert:

Für $m, n \geq 2$ ist das $m \times n$-**Rechteckgitter** $G_{m,n}$ definiert durch $G_{m,n} = (V, E)$, mit $V = \{v_{i,j} \mid i = 1, ..., m, j = 1, ...n\}$ und $E = \{\{v_{i,j}, v_{i',j'}\} \mid |i - i'| + |j - j'| = 1\}$.

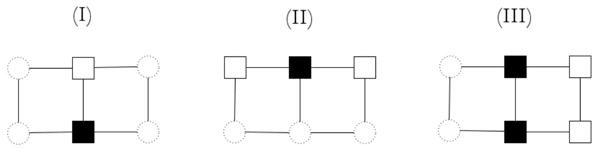
In den Beschreibungen der Gewinnstrategien sprechen wir vom Knoten $v_{i,j}$ und meinen damit den Knoten der i-ten Zeile und j-ten Spalte des Gitters. Die Knoten $v_{1,1}, v_{1,n}, v_{m,1}, v_{m,n}$ nennen wir oft **Eckknoten**. Wir nehmen an, dass für das Gitter $n \geq m$ gilt. Die Rechteckgitter sind also mindestens so breit wie hoch. Andernfalls betrachten wir das um 90° nach links gedrehte, neu nummerierte Gitter.



Da das Gitter zwei Symmetrieachsen hat (beziehungsweise für $m = n$ sind es sogar vier), können wir gerade für die Auswahl des ersten Knotens einzelne Knoten zu Knotenmengen zusammenfassen und die Gewinnstrategie für einen Vertreter der Menge zeigen. Für die übrigen Knoten der Menge wäre das Gitter zu drehen beziehungsweise an der entsprechenden Symmetrieachse zu spiegeln und neu zu nummerieren.

Wir untersuchen zuerst Rechteckgitter mit zwei Zeilen. Das kleinste Rechteckgitter, das wir untersuchen müssen, ist $G_{2,3}$. Kleiner ist nur das Gitter $G_{2,2}$. Das entspricht gerade dem Kreis C_4 und auf dem gewinnt gemäss Satz 2.5.5 immer Alice mit nur einer Farbe.

In 2×3-Rechteckgittern sind in den folgenden Situationen (I), (II) und (III) alle Knoten rainbow-knotenverbunden, unabhängig von der Färbung der übrigen Knoten. Die Symbole □ und ■ stehen für je eine von zwei beliebigen Farben.



Satz 2.5.10

Sei $G_{2,3}$ ein 2×3-Rechteckgitter. Dann gilt $rvc_{S_A}(G_{2,3}) = 2$.

Beweis. Für 2×3-Rechteckgitter gilt $\operatorname{diam}(G_{2,3}) = 3$. Mit den Propositionen 1.2.1 und 2.3.1 folgt, dass $rvc_{S_A} \geq 2$ sein muss. Mit nur einer Farbe gewinnt demnach immer Bob. Alice hat aber mit mindestens zwei Farben eine Gewinnstrategie.

Alice beginnt und färbt den Knoten $v_{1,1}$ mit Farbe **1**.

(1) Färbt Bob einen der Knoten $v_{1,2}$ oder $v_{2,2}$ mit beliebiger Farbe, so färbt Alice im nächsten Spielzug den anderen der beiden mit der zweiten zur Verfügung stehenden Farbe. Wir erhalten Situation (I).

(2) Färbt Bob zuerst den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe **1**, so färbt Alice den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **2**. Damit erhalten wir Situation (II).

Färbt Bob zuerst den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe **2**, so färbt Alice den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **1**. Färbt Bob danach nicht den Knoten $v_{2,2}$, färbt ihn Alice mit Farbe **2** (Situation (I)). Färbt Bob aber doch den Knoten $v_{2,2}$, und zwar mit Farbe **2**, so erhalten wir Situaton (I). Färbt er den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1**, dann färbt Alice den Knoten $v_{2,3}$ mit Farbe **2**. Die Färbung entspricht der Situation (III).

(3) Färbt Bob hingegen zuerst einen der Knoten $v_{2,1}$ oder $v_{2,3}$ mit beliebiger Farbe, dann färbt Alice den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **2**.

(3.1) Färbt Bob nun den Knoten $v_{1,3}$ oder den noch ungefärbten Knoten $v_{2,3}$ beziehungsweise $v_{2,1}$ mit beliebiger Farbe, so färbt Alice den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **1**, womit sie Situation (I) erreicht.

(3.2) Färbt Bob den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **1**, so gewinnt Alice (Situation (I)). Färbt er den Knoten $v_{1,2}$ aber mit Farbe **2**, so färbt Alice den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe **1**. Sie erreicht damit Situation (II).

In allen Fällen sind je zwei Knoten rainbow-knotenverbunden. □

Satz 2.5.11
Sei $G_{2,3}$ ein 2×3-Rechteckgitter. Dann gilt $rvc_{S_B}(G_{2,3}) = 2$.

Beweis. Wie in 2.5.10 bereits bemerkt, gewinnt auf 2×3-Rechteckgittern Bob mit nur einer Farbe. Wir zeigen eine Gewinnstrategie im Spiel S_B auf $G_{2,3}$ für Alice, wenn mindestens zwei Farben zur Verfügung stehen.

Färbt Bob einen der Knoten $v_{1,2}$ oder $v_{2,2}$ mit Farbe **1**, färbt Alice den anderen der beiden genannten Knoten mit Farbe **2**. Wir erhalten Situation (I).

Färbt Bob aber zuerst einen der übrigen Knoten mit Farbe **1**, färbt Alice einen mittleren Knoten einer Zeile mit Farbe **2**.

(1) Färbt Bob darauf den mittleren Knoten der anderen Zeile mit Farbe **1**, trifft Situation (I) ein.

    Färbt Bob hingegen den mittleren Knoten der anderen Zeile ebenfalls mit Farbe **2**, so gibt es eine Zeile in der bereits zwei Knoten unterschiedlich gefärbt sind. Alice färbt in dieser Zeile den dritten Knoten mit Farbe **1** und erreicht damit Situation (II).

(2) Färbt Bob nicht den mittleren Knoten der anderen Zeile des Gitters, so färbt ihn Alice mit Farbe **1**. Wir haben Situation (I).

Auch hier sind, gleichgültig wie die übrigen Knoten anschliessend gefärbt werden, jeweils zwei Knoten rainbow-knotenverbunden. Alice gewinnt, wenn ihr mindestens zwei Farben zur Verfügung stehen. □

Satz 2.5.12
Sei $G_{2,4}$ ein 2×4-Rechteckgitter. Dann gilt $rvc_{S_A}(G_{2,4}) = \infty$.

Beweis. Wir zeigen im Spiel S_A auf $G_{2,4}$ eine Gewinnstrategie für Bob bei beliebiger Anzahl an Farben.

Färbt Alice einen der Knoten $v_{1,1}$ oder $v_{2,1}$ mit beliebiger Farbe, dann färbt Bob den anderen dieser beiden Knoten beliebig.

Wenn Alice einen der Knoten $v_{1,4}$ oder $v_{2,4}$ mit beliebiger Farbe färbt, so färbt Bob den anderen der beiden genannten Knoten ebenfalls beliebig.

Wichtig ist, sobald Alice einen der Knoten $v_{1,2}$ oder $v_{1,3}$ beziehungsweise $v_{2,2}$ oder $v_{2,3}$ mit beliebiger Farbe färbt, färbt Bob den jeweils anderen Knoten der genannten Knotenpaare mit derselben Farbe wie Alice zuvor.

Alle Wege zwischen $v_{1,1}$ und $v_{1,4}$ führen entweder über die Knoten $v_{1,2}$ und $v_{1,3}$ oder über die Knoten $v_{2,2}$ und $v_{2,3}$. Bob erreicht mit seiner Strategie, dass beide Knoten der Paare

$\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ und $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ jeweils mit gleicher Farbe gefärbt sind. Jeder Weg zwischen $v_{1,1}$ und $v_{1,4}$ führt dann über zwei Knoten, die gleich gefärbt sind, womit $G_{2,4}$ nicht rainbow-knotengefärbt ist. □

Satz 2.5.13
Sei $G_{2,4}$ ein 2×4-Rechteckgitter. Dann gilt $rvc_{S_B}(G_{2,4}) = 4$.

Beweis. Für 2×4-Rechteckgitter gilt $\operatorname{diam}(G_{2,4}) = 4$. Mit den Propositionen 1.2.1 und 2.3.1 folgt, dass $rvc_{S_B} \geq 3$ sein muss. Mit höchstens zwei Farben gewinnt auf $G_{2,4}$ demnach immer Bob.

Wir zeigen, dass Bob auch mit drei Farben gewinnt.

Hinweis: Sobald Alice einen der Knoten der noch ungefärbten Paare $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ oder $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ färbt, färbt Bob den zweiten Knoten des entsprechenden Paares mit derselben Farbe wie Alice. In diesem Fall müsste eine vierte Farbe vorhanden sein, um den Weg zwischen den beiden Eckknoten dieser Zeile rainbow-knotenverbunden färben zu können.

Bob färbt den Knoten $v_{1,1}$ mit Farbe **1**. Nach dem Hinweis gehen wir davon aus, dass Alice keinen der Knoten $v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,2}, v_{2,3}$ färbt. Färbt Alice einen der Knoten $v_{1,4}$ oder $v_{2,1}$ mit beliebiger Farbe, dann färbt Bob den Knoten $v_{2,4}$ mit Farbe **1**. Färbt Alice danach einen weiteren Eckknoten, färbt Bob den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1**. Die gleiche Situation entsteht, wenn Alice in der ersten Spielrunde den Knoten $v_{2,4}$ mit Farbe **1** und Bob anschliessend den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1** färbt. (Zwar sind dann die beiden anderen Eckknoten noch ungefärbt, was aber keine Rolle spielt.) Um zu verhindern, dass Bob im nächsten Spielzug die Färbung aller Knoten von zwei trennenden Knotenmengen $\{v_{1,1}, v_{2,2}\}$ und $\{v_{1,3}, v_{2,4}\}$ mit Farbe **1** gelingt, färbt Alice den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe **2**. Dann färbt Bob den Knoten $v_{2,3}$ mit Farbe **1** oder den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **2**. Gemäss Hinweis gelingt Alice in dem Fall eine Rainbow-Knotenfärbung höchstens dann, wenn ihr eine vierte Farbe zur Verfügung steht.

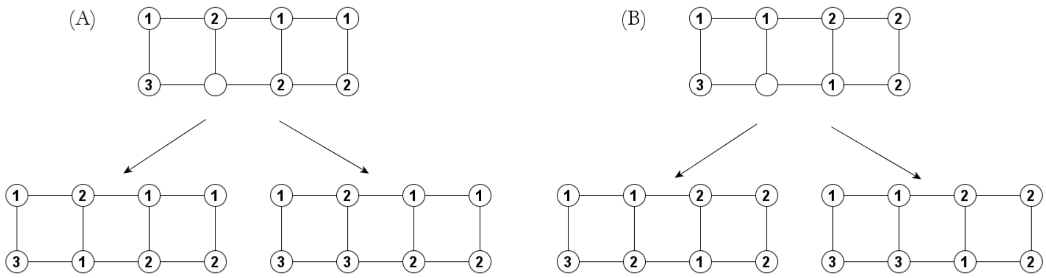
Daher dürfen wir davon ausgehen, dass Alice zuerst den Knoten $v_{2,4}$ mit Farbe **2** färben wird. Darauf färbt Bob den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe **3**. Aufgrund des Hinweises wird Alice den Knoten $v_{1,4}$ färben. Wählt sie dafür ebenfalls Farbe **3**, wird Bob den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **3** färben. (i) Färbt Alice als Nächstes nicht den Knoten $v_{1,3}$ so wird ihn Bob in seinem nächsten Spielzug mit Farbe **3** färben. Gemäss Hinweis bräuchte Alice dann eine vierte Farbe, die aber nicht zur Verfügung steht. (ii) Färbt Alice doch den Knoten $v_{1,3}$ mit anderer Farbe als **3**, färbt Bob darauf den Knoten $v_{2,3}$ mit **3**. Dann sind alle Knoten der beiden trennenden Knotenmengen $\{v_{1,2}, v_{2,1}\}$ und $\{v_{1,4}, v_{2,3}\}$ mit Farbe **3** gefärbt und damit ist kein $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Weg rainbow-knotengefärbt.

Alice wird also für den Knoten $v_{1,4}$ Farbe **1** oder **2** wählen. Womit wir eine der folgenden

Spielsituationen (A) und (B) haben:

Bob färbt in Situation (A) den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe **1** und in Situation (B) färbt er diesen Knoten mit Farbe **2**. Wir dürfen gemäss Hinweis davon ausgehen, dass Alice den Knoten $v_{1,2}$ färbt, und zwar nicht in derselben Farbe wie Bob den Knoten $v_{1,3}$. In beiden Situationen gilt: Falls Alice den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **3** färbt, so färbt Bob den Knoten $v_{2,3}$ mit Farbe **3**. Dann ist in beiden Fällen kein $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Weg rainbow-knotengefärbt.

Damit bleibt Alice für den Knoten $v_{1,2}$ in Situation (A) die Farbe **2** und in Situation (B) die Farbe **1**. Bob färbt den Knoten $v_{2,3}$ in (A) mit Farbe **2** und in (B) mit Farbe **1**. Die Färbungen sehen aktuell folgendermassen aus:



Alice muss den letzten Knoten $v_{2,2}$ färben. Sie wird dabei nicht die gleiche Farbe wie für den Knoten $v_{2,3}$ wählen.

(A) Färbt sie diesen Knoten mit Farbe **1**, dann ist keiner der $v_{2,1}$-$v_{1,4}$-Wege rainbow-knotengefärbt. Wenn sie ihn mit Farbe **3** färbt, so ist kein $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Weg rainbow-knotengefärbt.

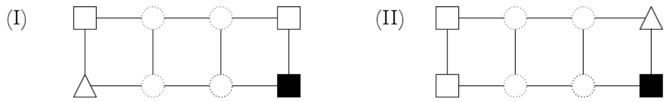
(B) Färbt sie den Knoten mit Farbe **2**, so ist kein $v_{2,1}$-$v_{1,4}$-Weg rainbow-knotengefärbt. Falls sie ihn mit Farbe **3** färbt, ist keiner der $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Wege rainbow-knotengefärbt.

Drei Farben reichen demzufolge nicht aus, um den Graphen $G_{2,4}$ rainbow-knotenverbunden zu färben. Steht aber eine vierte Farbe zur Verfügung, hat Alice eine Gewinnstrategie.

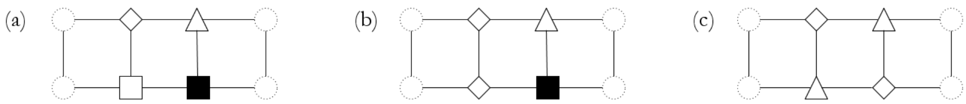
Grundsätzlich achtet Alice beim Färben darauf, dass die Knoten der Paare $\{v_{1,1}, v_{2,4}\}$, $\{v_{2,1}, v_{1,4}\}$, $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ und $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ unterschiedlich gefärbt sind. Sobald also Bob einen Knoten dieser Paare färbt, färbt Alice den anderen Knoten mit einer anderen Farbe.

Bei der Farbwahl schaut sie zusätzlich auf folgende Punkte:

Die Eckknoten färbt Alice folgendermassen: Bob färbt einen ersten Eckknoten mit Farbe $\square$. Alice färbt den entsprechenden Knoten mit Farbe $\blacksquare$. Abhängig davon, welche Farbe Bob für den dritten Eckknoten aussucht, färbt Alice den vierten wie folgt: Wählt Bob eine der bereits verwendeten Farben $\square$, so färbt Alice mit einer bisher noch nicht verwendeten Farbe $\triangle$. Färbt Bob allerdings bereits mit einer weiteren Farbe $\triangle$, so wählt Alice $\square$. Die Eckknoten sind dann wie folgt gefärbt:



Bei der Färbung des ersten Paares $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ oder $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ wählt Alice für ihren Knoten möglichst eine Farbe, die noch nicht verwendet wurde. Wir erinnern daran, dass Alice jeweils den zweiten Knoten des Paares färbt. Sind die Knoten des einen Paares $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ oder $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ bereits gefärbt und färbt Bob nun einen Knoten des zweiten Paares, kontert Alice wie folgt:



Bei (a) wählt Bob für einen Knoten des zweiten Paares eine dritte Farbe. Mit einer vierten Farbe erreicht Alice bereits, dass das 2×4-Gitter unabhängig von der Färbung der Eckknoten rainbow-knotengefärbt ist.

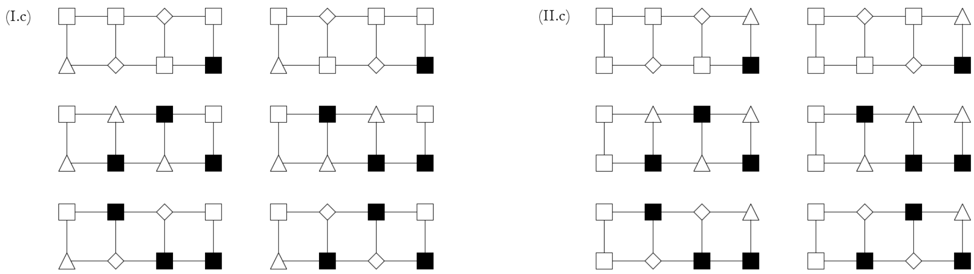
Bei (b) färbt Bob mit einer Farbe, die für das erste Paar bereits verwendet wurde. Er färbt einen Knoten so, dass in einer Spalte zwei Knoten $v_{1,2}$ und $v_{2,2}$ beziehungsweise $v_{1,3}$ und $v_{2,3}$ gleich gefärbt sind. Alice färbt mit einer dritten Farbe den noch ungefärbten Knoten dieser beiden Paare. Egal, wie die Eckknoten gefärbt sind oder noch gefärbt werden, das 2×4-Gitter ist rainbow-knotengefärbt.

Bei (c) färbt Bob auch mit einer Farbe, die für das erste Paar schon verwendet wurde. Er wählt aber einen Knoten so, dass eben gerade nicht zwei Knoten einer Spalte gleich gefärbt sind. Alice färbt den zweiten Knoten ebenfalls mit der gleichen Farbe, die sie für das erste Paar verwendet hat.

Ob die Gitter unter (I.c) oder (II.c) rainbow-knotengefärbt sind oder nicht, kommt auf die Eckknoten an. Für die Färbung der Paare $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ und $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ sind folgende Kombinationen möglich: $\square/\blacksquare$ ($\square/\triangle$ ist isomorph zu $\square/\blacksquare$ und wird daher nicht separat betrachtet), $\square/\lozenge$, $\triangle/\blacksquare$ und $\lozenge/\blacksquare$ ($\lozenge/\triangle$ ist isomorph zu $\lozenge/\blacksquare$). Daraus ergeben sich insgesamt die folgenden Möglichkeiten:

Diese Gitter sind nicht rainbow-knotengefärbt:

Hier sind die Gitter rainbow-knotengefärbt:



Das 2×4-Gitter kann also in den Fällen (I.c) und (II.c) nur dann rainbow-knotengefärbt sein, wenn die Farbkombination der Paare $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ und $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ nicht $\square/\blacksquare$ oder $\square/\triangle$ ist. Oder anders ausgedrückt, wenn sie nicht der Kombination entspricht, die für eines der Paare $\{v_{1,1}, v_{2,4}\}$ oder $\{v_{2,1}, v_{1,4}\}$ verwendet wurde. Alice färbt jeweils den zweiten Knoten der Paare $\{v_{1,1}, v_{2,4}\}$, $\{v_{2,1}, v_{1,4}\}$, $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ und $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$. Dabei achtet sie also besonders darauf, dass für die Paare $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ (also auch $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$), $\{v_{1,1}, v_{2,4}\}$ und $\{v_{2,1}, v_{1,4}\}$ drei unterschiedliche Farbkombinationen verwendet werden, was möglich ist, da vier Farben zur Verfügung stehen. $\square$

Bemerkung 2.5.14
Die letzte Abbildung zeigt, dass eine Färbung mit nur drei Farben durchaus möglich ist. Bob zwingt aber mit seiner Gewinnstrategie für drei Farben Alice dazu, die Knotenpaare $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ und $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ mit einer der Farbkombinationen zu färben, die bereits für eines der Paare $\{v_{1,1}, v_{2,4}\}$ oder $\{v_{2,1}, v_{1,4}\}$ verwendet wurde.

Satz 2.5.15
Auf $2 \times n$-Rechteckgittern $G_{2,n}$ mit $n \geq 5$ gilt $rvc_{S_A}(G_{2,n}) = \infty$ und $rvc_{S_B}(G_{2,n}) = \infty$.

Beweis. Die Knotenteilmengen $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}_B(G_{2,n})$,

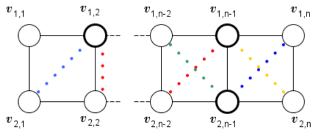
$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\} = \{v_{1,2}, v_{2,1}\} \cup \{v_{1,2}, v_{2,2}\},\\
U_2 &:= \{v_{1,n-1}, v_{2,n-2}, v_{2,n}\} = \{v_{1,n-1}, v_{2,n-2}\} \cup \{v_{1,n-1}, v_{2,n}\},\\
U_3 &:= \{v_{1,n-2}, v_{1,n}, v_{2,n-1}\} = \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}\} \cup \{v_{1,n}, v_{2,n-1}\},
\end{aligned}$$

mit den strategisch wichtigen Knoten $swK(U_1) := v_{1,2}$, $swK(U_2) := v_{1,n-1}$ und $swK(U_3) := v_{2,n-1}$ erfüllen die Voraussetzungen im Satz 2.4.14:

(i) U_1, U_2 und U_3 sind paarweise disjunkt.

(ii) Es gibt keine trennende Knotenmenge in U_2 oder U_3, die U_1 trennt.

(iii) Keine der trennenden Knotenmengen aus U_1 trennt eine der Mengen U_2 oder U_3.



Bob färbt gemäss seiner Strategie im Beweis von Satz 2.4.14. Die Knoten $v_{1,1}$ und $v_{1,n}$ (oder $v_{2,n}$) werden durch zwei Knotenmengen, deren Knoten alle mit Farbe **1** gefärbt sind, getrennt. Das $2 \times n$-Rechteckgitter ist mit Satz 2.4.2 nicht rainbow-knotengefärbt, womit Bob gewinnt. □

Die Gitter mit zwei Zeilen sind damit abschliessend untersucht. Wir widmen uns nun den Gittern mit drei Zeilen, wobei wir mit dem 3×3-Rechteckgitter beginnen.

Satz 2.5.16
Bob gewinnt beide Spielvarianten S_A und S_B des Rainbow-Verbindungsspiels auf 3×3-Rechteckgittern $G_{3,3}$, wenn höchstens drei Farben zur Verfügung stehen.

Beweis. Mit drei Farben hat Bob für die Spielvariante S_A folgende Gewinnstrategie.

Wir unterscheiden drei Möglichkeiten, mit welchem Knoten Alice beginnt: (1) mit einem Eckknoten $v_{1,1}, v_{1,3}, v_{3,1}, v_{3,3}$, (2) mit dem Knoten $v_{2,2}$ oder (3) mit einem Knoten aus der Menge $\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$.

(1) Alice färbt einen Eckknoten. Wir nehmen ohne Beschränkung an, sie färbe zuerst den Knoten $v_{1,1}$ mit Farbe **1**. Dann färbt Bob den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1**. Bob reagiert im Weiteren auf Alices Spielzüge wie folgt:

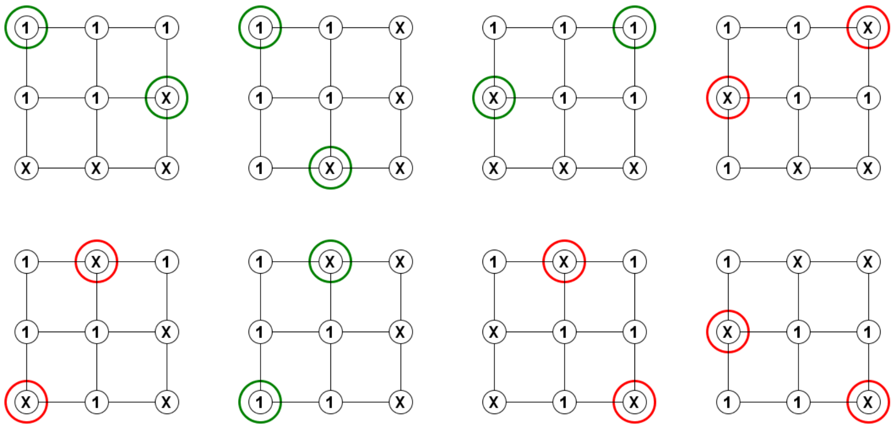
   (a) Alice färbt einen der Knoten $v_{1,2}$ oder $v_{3,2}$ beliebig. Bob färbt den zweiten der beiden genannten Knoten mit Farbe **1**.

   (b) Alice färbt einen der Knoten $v_{2,1}$ oder $v_{2,3}$ beliebig. Bob färbt den noch ungefärbten dieser beiden Knoten mit Farbe **1**.

   (c) Alice färbt einen der Knoten $v_{1,3}$ oder $v_{3,1}$ beliebig. Bob färbt den anderen der genannten Knoten mit Farbe **1**.

(d) Alice färbt den Knoten $v_{3,3}$ oder (später) einen Knoten, dessen in (a) bis (c) bezeichneter Partner bereits gefärbt ist. Bob färbt einen Knoten eines Paares aus (a), (b) oder (c), von dem noch beide Knoten ungefärbt sind, mit Farbe **1**.

Den letzten Knoten färbt Alice beliebig. Damit erhalten wir eine der folgenden Situationen:



Die jeweils beiden grün eingekreisten Knoten können in diesen Spielsituationen höchstens dann rainbow-knotenverbunden sein, wenn eine vierte Farbe zur Verfügung steht. Die beiden rot eingekreisten Knoten können auch mit vier Farben nicht rainbow-knotenverbunden sein, da es zwei Knotenmengen gibt, deren Knoten alle mit Farbe **1** gefärbt sind und die diese beiden Knoten trennen.

(2) Alice färbt den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1**. Darauf färbt Bob den Knoten $v_{1,1}$ mit Farbe **1**. Damit haben wir nach der ersten Spielrunde die gleiche Situation wie im Fall (1).

(3) Alice färbt einen Knoten aus der Menge $\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$. Ohne Beschränkung gehen wir davon aus, dass sie den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **1** färbt. Bob färbt den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1**.

Bob kontert Alices weitere Spielzüge wie folgt:

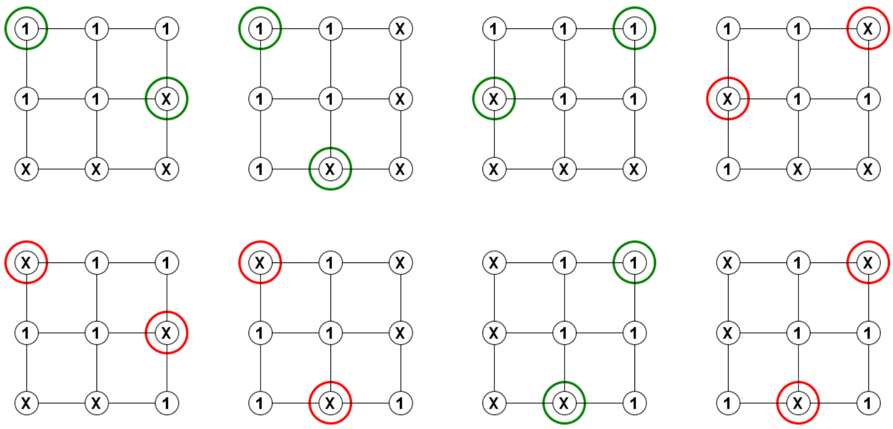
(e) Alice färbt einen der Knoten $v_{1,1}$ oder $v_{3,3}$ beliebig. Bob färbt den zweiten der beiden genannten Knoten mit Farbe **1**.

(f) Alice färbt einen der Knoten $v_{2,1}$ oder $v_{2,3}$ beliebig. Bob färbt den noch ungefärbten dieser beiden Knoten mit Farbe **1**.

(g) Alice färbt einen der Knoten $v_{1,3}$ oder $v_{3,1}$ beliebig. Bob färbt den anderen der genannten Knoten mit Farbe **1**.

(h) Alice färbt den Knoten $v_{3,2}$ oder (später) einen Knoten, dessen in (e) bis (g) bezeichneter Partner bereits gefärbt ist. Bob färbt einen Knoten eines Paares aus (e), (f) oder (g), von dem noch beide Knoten ungefärbt sind, mit Farbe **1**.

Den letzten Knoten färbt Alice beliebig. Die Färbung des Graphen entspricht einer der folgenden Spielsituationen, wobei für die eingekreisten Knoten dasselbe gilt wie bei (1):



Mit höchstens drei Farben gewinnt Bob das Spiel, wenn Alice beginnt.

Wir zeigen im Folgenden eine Gewinnstrategie für Bob mit drei Farben, wenn er beginnt. Er färbt zu Beginn den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1**. Auf Alices Spielzüge reagiert er danach wie folgt:

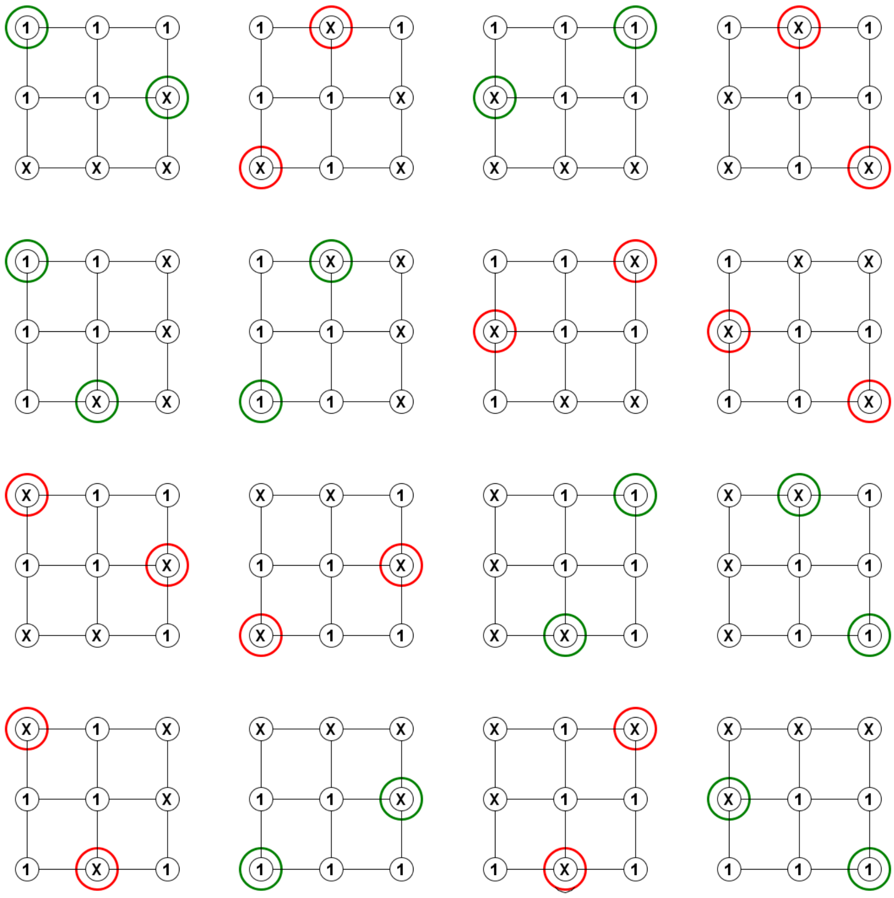
(a) Färbt Alice einen der Knoten $v_{1,1}$ oder $v_{3,3}$ beliebig, dann färbt Bob den anderen dieser Knoten mit Farbe **1**.

(b) Wenn Alice einen der Knoten $v_{1,3}$ oder $v_{3,1}$ beliebig färbt, so färbt Bob den anderen der genannten Knoten mit Farbe **1**.

(c) Alice färbt einen der Knoten $v_{2,1}$ oder $v_{2,3}$ beliebig. Bob färbt den noch ungefärbten dieser beiden Knoten mit Farbe **1**.

(d) Wenn Alice einen der Knoten $v_{1,2}$ oder $v_{3,2}$ beliebig färbt, färbt er den zweiten der beiden genannten Knoten mit Farbe **1**.

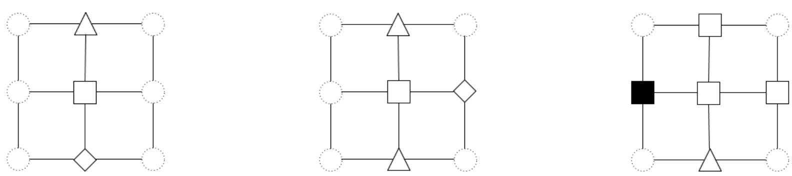
Sobald alle Knoten gefärbt sind, entsprechen die mit Farbe **1** gefärbten Knoten einer der nachstehenden Situationen:



Auch hier könnten die Wege zwischen den beiden grün eingekreisten Knoten höchstens dann rainbow-knotenverbunden sein, wenn eine vierte Farbe zur Verfügung stehen würde. □

Bevor wir gleich beweisen, dass Alice mit vier Farben gewinnt, zeigen wir vorab drei Situationen (I), (II) und (III), die das Spiel annehmen kann. Wieder muss das Gitter $G_{3,3}$ unter Umständen durch Spiegeln und/ oder Drehen in die jeweilige Position gebracht werden. Die Symbole □, △, ◇, ■ stehen für vier beliebige Farben. Sobald in einer der Teilstrategien (1), (2) und (3) eine Farbe einem Symbol zugewiesen worden ist, ist dies verbindlich. In den drei Teilstrategien können aber dem gleichen Symbol unterschiedliche Farben zugewiesen werden.

(I) (II) (III)

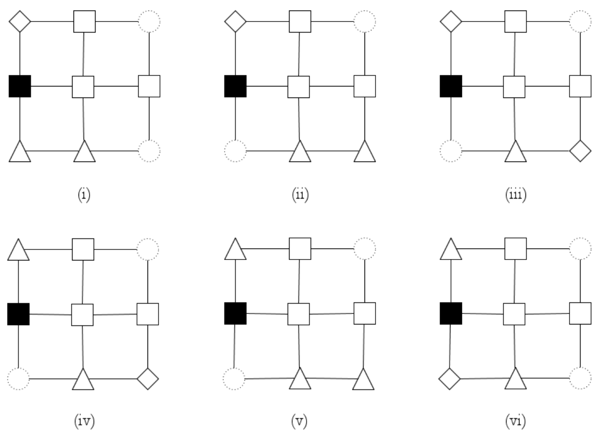


In den Situationen (I) und (II) werden - unabhängig von der weiteren Färbung - alle Knoten rainbow-knotenverbunden sein.

Während des Spiels kommt es immer wieder vor, dass die zweite Zeile oder die zweite Spalte des Graphen $G_{3,3}$ mit zwei Farben $\triangle$ - $\square$ - ... gefärbt ist. Ist Alice am Zug, erreicht sie mit einer dritten Farbe $\diamondsuit$ Situation (I). Ist Bob am Zug wird er dies wohl vermeiden wollen und wählt für den dritten Knoten eine der Farben $\square$ oder $\triangle$. Wählt er $\triangle$, wird Alice einen weiteren Knoten aus $\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$ (falls noch einer ungefärbt ist) wählen und ihn mit Farbe $\diamondsuit$ färben, womit wir Situation (II) haben. Wir gehen daher im Folgenden in dieser Lage immer davon aus, dass Bob den dritten Knoten mit Farbe $\square$ färbt. Wir haben dann bereits geprüft, ob noch einer der Knoten in $\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$ ungefärbt oder bereits mit Farbe $\diamondsuit$ gefärbt ist.

Ob der Graph $G_{3,3}$ in Situation (III) rainbow-knotengefärbt ist oder nicht, kommt zudem auf die Färbung der Eckknoten an. In den folgenden Situationen ist er es. Die Auswahl ist nicht abschliessend. In den Beweisen der beiden nächsten Sätze beziehen wir uns aber nur auf die folgenden sechs Situationen.

(III)



Dass Alice mit mindestens vier Farben immer eine der Situationen (I), (II) oder (i) - (vi) in (III) erreicht, wollen wir nun zeigen.

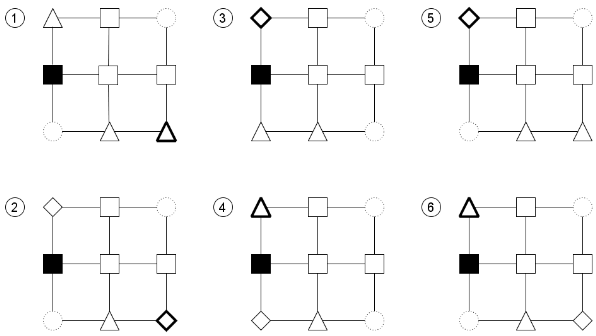
Satz 2.5.17
Sei $G_{3,3}$ ein 3×3-Rechteckgitter. Dann gilt $rvc_{S_A}(G_{3,3}) = 4$.

Beweis. Wir zeigen eine Gewinnstrategie für Alice im Spiel S_A auf $G_{3,3}$ mit vier Farben. Sie färbt zuerst den Knoten $v_{1,1}$ mit Farbe **1**. Wir unterscheiden, ob Bob (1) mit dem Knoten $v_{2,2}$, (2) mit einem Knoten aus $\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$ oder (3) mit einem der übrigen Eckknoten $v_{1,3}$, $v_{3,1}$ oder $v_{3,3}$ fortfährt.

(1) Bob färbt den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1** oder **2** (□). Alice färbt darauf den Knoten $v_{2,3}$ mit Farbe **3** (△). Die zweite Zeile ist dann △ - □ - ... gefärbt. Wir haben bereits gezeigt, dass Bob den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe □ färben wird, wenn er Situation (I) oder (II) vermeiden will. Alice färbt darauf den Knoten $v_{3,2}$ mit Farbe **4** (■). Egal, wie Bob den nächsten Knoten färbt, erhalten wir spätestens nach dem nächsten Spielzug von Alice eine der drei Situationen (I), (II) oder (III). Falls er den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe □ gefärbt hat, färbt Alice nun den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe ◇ (entspricht Farbe **1** oder **2**, je nachdem, wie Bob □ gewählt hat). Bob färbt beliebig. Alice färbt den letzten Knoten mit Farbe △, womit Situation (i) oder (ii) in (III) eintritt, in der alle Knoten rainbow-knotenverbunden sind.

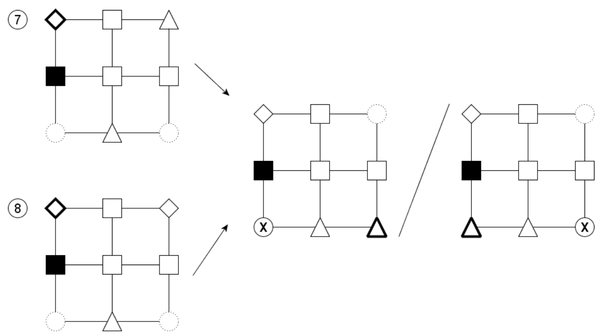
(2) Bob färbt zuerst einen der Knoten $v_{1,2}$, $v_{2,1}$, $v_{2,3}$ oder $v_{3,2}$ mit Farbe **1** oder **2** (△). Alice färbt darauf den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **3** (□). Eine Zeile oder Spalte ist damit mit △ - □ - ... gefärbt. Wenn Bob die Situationen (I) und (II) vermeiden will, färbt er den dritten Knoten dieser Zeile oder Spalte mit Farbe □. Alice färbt einen der beiden noch ungefärbten Knoten aus $\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$ mit Farbe **4** (■). Erneut ist eine Spalte oder Zeile mit ■ - □ - ... gefärbt. Färbt Bob nicht den dritten Knoten dieser Spalte oder Zeile mit Farbe □, entsteht spätestens nach Alices nächstem Zug Situation (I) oder (II). Färbt er aber diesen Knoten mit □, präsentiert sich der teilgefärbte Graph $G_{3,3}$ wie in einer der nachstehenden Abbildungen, wobei jedoch erst ein Eckknoten mit Farbe **1** gefärbt ist. Je nachdem, mit welcher Farbe Bob zuerst gefärbt hat, entspricht Farbe **1** entweder △ oder ◇.

Alice ist am Zug. Sie färbt den fett markierten Knoten mit der entsprechenden Farbe.



Die Situationen ① - ⑥ entsprechen anschliessend bereits einer der Situationen (i) - (vi) in (III).

In den Situationen ⑦ und ⑧ färbt Alice nach Bobs nächstem Spielzug den noch ungefärbten Knoten mit Farbe △, womit sie eine der Situationen (i) oder (ii) in (III) erreicht.



(3) Bob färbt zuerst einen der übrigen Eckknoten $v_{1,3}$, $v_{3,1}$ oder $v_{3,3}$ mit Farbe **1** oder **2** ($\diamondsuit$). Wir kennzeichnen ihn mit u.

(3.1) Handelt es sich bei u um $v_{1,3}$ oder $v_{3,1}$, so ist es Alices Ziel, dass der Knoten $v_{1,1}$ von $\square$-gefärbten Knoten „eingeschlossen“ wird. Das erreicht sie, indem sie darauf achtet, dass genau ein Nachbar von u mit Farbe $\square$ gefärbt ist und beide Nachbarn von $v_{1,1}$ mit Farbe $\square$.

(3.2) Handelt es sich bei u um den Knoten $v_{3,3}$, so will Alice erreichen, dass weder $v_{1,1}$ noch $v_{3,3}$ zwei mit $\square$ gefärbte Nachbarn hat. Sie muss also nur darauf achten, dass die beiden Knoten genau einen mit Farbe $\square$ gefärbten Nachbarn haben.

In beiden Fällen färbt Alice einen Nachbarn von u mit Farbe **3** ($\square$). Bei (3.1) wählt sie denjenigen Nachbarn, der zugleich Nachbar von $v_{1,1}$ ist.

Wir zeigen nun, warum Bob den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe $\square$ färben *muss*:

- Färbt Bob $v_{2,2}$ mit anderer Farbe als $\square$, sind in einer zweiten Zeile oder Spalte zwei Knoten unterschiedlich gefärbt. Mit einer dritten Farbe erreicht Alice Situation (I).

- Färbt Bob einen weiteren Eckknoten, so färbt Alice den zweiten Nachbarn von u mit Farbe **4** ($\blacksquare$). *(i)* Färbt Bob anschliessend den Knoten $v_{2,2}$ mit beliebiger Farbe, sind in einer zweiten Zeile oder Spalte zwei Knoten unterschiedlich gefärbt. Alice erreicht mit einer dritten Farbe Situation (I). *(ii)* Färbt Bob hingegen einen weiteren Eckknoten, färbt Alice den Knoten $v_{2,2}$ mit einer anderen Farbe als $\square$ oder $\blacksquare$. Damit sind in der zweiten Zeile und in der zweiten Spalte je zwei Knoten unterschiedlich gefärbt. Bob färbt beliebig. Alice erreicht mit einer weiteren Farbe Situation (I). *(iii)* Färbt Bob aber einen zweiten Randknoten der zweiten Zeile oder der zweiten Spalte, unterscheiden wir folgendes: Sind diese beiden Knoten gleich gefärbt (also mit $\square$ beziehungsweise $\blacksquare$), färbt Alice den Knoten $v_{2,2}$ mit $\triangle$. Damit hat sie Situation (II) erreicht. Hat Bob eine andere Farbe als $\square$ oder $\blacksquare$ gewählt, so färbt sie mit einer dritten Farbe den Knoten $v_{2,2}$ und erreicht Situation (I).

- Färbt Bob einen der übrigen Knoten, unterscheiden wir, ob dieser Knoten einen gemeinsamen Nachbarn mit dem bereits mit Farbe □ gefärbten Knoten hat oder ob er andernfalls zur gleichen Zeile beziehungsweise Spalte wie besagter Knoten gehört. Im ersten Fall färbt Alice anschliessend den Knoten $v_{2,2}$ mit einer weiteren Farbe. Damit sind in der zweiten Zeile sowie in der zweiten Spalte zwei Knoten unterschiedlich gefärbt. Bob kann nicht verhindern, dass Alice im nächsten Zug mit einer dritten Farbe Situation (I) erreicht. Auch im zweiten Fall färbt Alice den Knoten $v_{2,2}$ mit einer weiteren Farbe △. Damit sind entweder bereits alle Knoten einer zweiten Zeile oder Spalte unterschiedlich gefärbt (Situation (I)) oder die Zeile beziehungsweise Spalte ist □-△-□ gefärbt. Nach Bobs nächstem Zug ist auf jeden Fall ein Knoten der zweiten Spalte beziehungsweise Zeile noch ungefärbt. Diesen färbt Alice mit einer dritten Farbe, womit sie Situation (II) erreicht.

Wir dürfen also annehmen, dass Bob den Knoten $v_{2,2}$ färben wird. Wählt er eine andere Farbe als □, wird Alice den dritten Knoten dieser Zeile oder Spalte mit einer weiteren Farbe färben und wir erhalten Situation (I). Wählt er □, ist eine Zeile oder Spalte mit □ - □ - ... gefärbt, die wir mit Z kennzeichnen. Alice färbt nun nicht den dritten Knoten der Zeile oder Spalte Z, sondern den anderen Nachbarn von u mit Farbe **4** (■). Wir dürfen wieder annehmen, dass Bob den dritten Knoten in der ■ - □ - ... gefärbten Spalte oder Zeile mit Farbe □ färbt. Alice färbt nun den dritten Knoten in Zeile oder Spalte Z mit Farbe △, die der Farbe **1** oder **2** entspricht.

Im Fall (3.2) haben wir bereits eine der Situationen (ii) oder (iii) in (III), je nachdem ob Bob für ♢ Farbe **1** oder **2** gewählt hat.

Im Fall (3.1) färbt Alice nach Bobs nächstem Zug den letzten Knoten mit Farbe △. Damit erhalten wir Situation (i) oder (ii) in (III).

Alice gewinnt demnach, wenn ihr mindestens vier Farben zur Verfügung stehen. □

Satz 2.5.18
Sei $G_{3,3}$ ein 3×3-Rechteckgitter. Dann gilt $rvc_{S_B}(G_{3,3}) = 4$.

Beweis. Wir nehmen an, dass auch im Spiel S_B auf $G_{3,3}$ mindestens vier Farben zur Verfügung stehen und zeigen eine Gewinnstrategie für Alice. Dass mit weniger Farben immer Bob gewinnt, haben wir im Beweis von Satz 2.5.16 gezeigt.

Bob hat die Möglichkeit, (1) mit dem Knoten $v_{2,2}$, (2) mit einem der Eckknoten $v_{1,1}$, $v_{1,3}$, $v_{3,1}$ oder $v_{3,3}$ oder (3) mit einem Knoten aus $\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$ zu beginnen.

(1) Bob färbt den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **1** (□). Alice färbt dann den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe **2** (■). Wir nehmen auch hier an, dass Bob die Situationen (I) und (II) ver-

meiden will und den dritten Knoten in der mit ■ - □ - ... gefärbten Zeile mit Farbe □ färbt. Alice färbt darauf den Knoten $v_{3,2}$ mit Farbe **3** (△). Färbt Bob den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe ■ (oder mit Farbe **4** (◇)) oder mit △, erhalten wir Situation (I) beziehungsweise (II). Färbt er einen anderen Knoten, erreicht Alice Situation (I), indem sie den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe ■ oder ◇ färbt. Hat Bob aber den Knoten $v_{1,2}$ mit □ gefärbt, färbt Alice den Knoten $v_{1,1}$ mit Farbe **4** (◇). Bob färbt einen der übrigen Knoten beliebig. Alice färbt den noch ungefärbten Knoten $v_{3,1}$ oder $_{3,3}$ mit Farbe △. Damit erreicht sie Situation (i) beziehungsweise (ii) in (III).

(2) Bob färbt einen der Eckknoten mit Farbe **1** (◇). Ohne Beschränkung nehmen wir an, es handle sich um den Knoten $v_{1,1}$. Alice färbt den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **2** (□). Wir haben im Beweis von Satz 2.5.17 in Teilstrategie (3) gezeigt, weshalb Bob nun den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe □ färben muss, wenn er Situation (I) oder (II) vermeiden will. So ist es auch hier, obwohl in den Ausführungen in 2.5.17 ein Knoten mehr gefärbt ist, was aber keine Rolle spielt. Alice färbt darauf den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe **3** (■). Bob wird wohl den dritten Knoten der ■ - □ - ... gefärbten Zeile oder Spalte mit Farbe □ färben, um das Entstehen von Situation (I) oder (II) zu verhindern. Darauf färbt Alice den letzten Knoten der Menge $v_{3,2}$ mit Farbe **4** (△). Bob färbt einen beliebigen Knoten. Einer der Knoten $v_{3,1}$ oder $v_{3,3}$ muss noch ungefärbt sein. Diesen färbt Alice mit Farbe △. Damit erhalten wir eine der Situationen (i) oder (ii) in (III).

(3) Bob färbt einen der Knoten aus der Menge $\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$ mit Farbe **1** (△). Ohne Beschränkung nehmen wir an, er haben den Knoten $v_{1,2}$ gefärbt. Alice färbt den Knoten $v_{2,3}$ mit Farbe **2** (◇).

(3.1) Färbt Bob $v_{3,2}$ (oder $v_{2,1}$) mit △ (beziehungsweise ◇), so färbt Alice $v_{2,2}$ mit □ (Situation (II)).

(3.2) Färbt er $v_{3,2}$ (beziehungsweise $v_{2,1}$) mit anderer Farbe, so färbt Alice $v_{2,2}$ mit einer weiteren Farbe (Situation (I)).

(3.3) Färbt Bob hingegen einen Eckknoten, so färbt Alice den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **3** (□). Damit sind in der zweiten Zeile und der zweiten Spalte je zwei Knoten unterschiedlich gefärbt, womit Alice im nächsten Spielzug auf jeden Fall Situation (I) gelingt.

(3.4) Färbt Bob den Knoten $v_{2,2}$ mit beliebiger Farbe, so sind in der zweiten Spalte oder der zweiten Zeile zwei Knoten unterschiedlich gefärbt, womit Alice mit einer dritten Farbe ebenfalls Situation (I) herbeiführen kann.

Alice gewinnt also mit mindestens vier Farben. □

Satz 2.5.19
Auf 3×4*-Rechteckgittern* $G_{3,4}$ *ist* $rvc_{S_A}(G_{3,4}) = \infty$.

Beweis. Bob hat im Spiel S_A auf $G_{3,4}$ eine Gewinnstrategie mit beliebig vielen Farben.

Alle Wege zwischen Knoten der ersten und der vierten Spalte führen über zwei Knoten der gleichen Zeile der zweiten und dritten Spalte. Sobald Alice also einen Knoten der zweiten oder der dritten Spalte mit beliebiger Farbe färbt, färbt Bob den Nachbarn derselben Zeile in der dritten beziehungsweise der zweiten Spalte mit der gleichen Farbe, die Alice verwendet hat.

Solange Alice keine Knoten der zweiten oder dritten Spalte färbt, färbt auch Bob keine. Nach spätestens sechs Spielzügen ist Alice wieder an der Reihe und muss einen ersten Knoten der zweiten oder dritten Spalte färben. Bob färbt jeweils wie im ersten Abschnitt beschrieben. Damit führen im gefärbten Graphen alle Wege zwischen Knoten der ersten und der vierten Spalte über je zwei mit gleicher Farbe gefärbte Knoten, womit Bob gewinnt. □

Satz 2.5.20
Auf 3×4*-Rechteckgittern* $G_{3,4}$ *ist* $rvc_{S_B}(G_{3,4}) = \infty$

Beweis. Wir zeigen, dass Bob im Spiel S_B auf $G_{3,4}$ mit beliebig vielen Farben immer gewinnt. Bob beginnt und färbt den Knoten $v_{1,1}$ mit Farbe **1**. Alice hat elf Knoten zur Auswahl für ihren ersten Spielzug.

(1) Alice färbt zuerst einen der Knoten $v_{1,2}$ oder $v_{1,3}$ mit beliebiger Farbe $\mathbf{X}\leq\mathbf{2}$. Bob färbt den anderen dieser beiden Knoten ebenfalls mit Farbe **X**. Alice färbt einen beliebigen Knoten. Bob färbt im weiteren Spiel je einen Knoten der Paare $\{v_{2,1}, v_{2,2}\}$, $\{v_{2,3}, v_{2,4}\}$, $\{v_{3,1}, v_{3,2}\}$ und $\{v_{3,3}, v_{3,4}\}$ mit Farbe **X**. Das heisst, spätestens sobald Alice einen der beiden Knoten mit beliebiger Farbe färbt, färbt Bob den anderen Knoten des Paares mit Farbe **X**. (...) Damit sind alle Knoten von zwei $v_{1,1}$-$v_{1,4}$-trennenden Knotenmenge $T_1 \in \{\{v_{1,2}, v_{2,1}\}, \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}, \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}\}\}$ und $T_2 \in \{\{v_{1,3}, v_{2,4}\}, \{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,3}\}, \{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,4}\}\}$ mit Farbe **X** gefärbt. Mit Satz 2.4.2 führen alle $v_{1,1}$-$v_{1,4}$-Wege über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten.

(2) Färbt Alice in der ersten Spielrunde einen der Knoten $v_{3,2}$ oder $v_{3,3}$ mit beliebiger Farbe $\mathbf{X}\leq\mathbf{2}$, so färbt Bob den anderen dieser beiden Knoten ebenfalls mit Farbe **X**. Alice färbt beliebig. Bob färbt weiter je einen Knoten der Paare $\{v_{2,1}, v_{2,4}\}$, $\{v_{2,2}, v_{2,3}\}$ und $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$ mit Farbe **X**. (...) Alle Knoten von zwei q-s-trennenden Mengen T_1 und T_2 sind mit Farbe **X** gefärbt.

T_1	und	T_2	trennen	q	und	s
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,3}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,3}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,2}, v_{2,3}, v_{3,3}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,3}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{2,4}, v_{3,3}\}$		$\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{2,4}, v_{3,3}\}$		$\{v_{1,2}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{2,4}, v_{3,3}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,2}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{2,4}, v_{3,3}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$

Damit führt jeder $v_{3,1}$-$v_{3,4}$-Weg über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten.

(3) Alice färbt einen der Knoten $v_{2,2}$ oder $v_{2,3}$ mit beliebiger Farbe $\mathbf{X}\leq\mathbf{2}$. Bob färbt den anderen dieser beiden Knoten ebenfalls mit Farbe **X**. Spätestens wenn Alice einen Knoten der Paare $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$, $\{v_{2,1}, v_{3,1}\}$, $\{v_{3,2}, v_{3,3}\}$ und $\{v_{1,4}, v_{2,4}\}$ mit beliebiger Farbe färbt, färbt Bob jeweils den anderen Knoten des Paares mit Farbe **X**. (...) Damit sind alle Knoten einer Menge $T_1 \in \{\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\}, \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}, \{v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}\}, \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,1}\}\}$ sowie einer Menge $T_2 \in \{\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,2}\}, \{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,3}\}, \{v_{2,3}, v_{2,4}, v_{3,2}\}, \{v_{2,3}, v_{2,4}, v_{3,3}\}\}$ mit Farbe **X** gefärbt, womit jeder $v_{1,1}$-$v_{3,4}$-Weg über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten führt.

(4) Alice färbt einen der Knoten $v_{2,1}$ oder $v_{2,4}$ mit beliebiger Farbe $\mathbf{X}\leq\mathbf{2}$. Bob färbt den anderen dieser beiden Knoten ebenfalls mit Farbe **X**. Bob achtet weiter darauf, dass jeweils ein Knoten der Paare $\{v_{1,2}, v_{3,2}\}$ und $\{v_{1,3}, v_{3,3}\}$ mit Farbe **X** gefärbt wird. (...) Alle Knoten von zwei q-s-trennenden Mengen T_1 und T_2 sind mit Farbe **X** gefärbt.

T_1	und	T_2	trennen	q	und	s
$\{v_{1,2}, v_{2,1}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{1,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{2,4}, v_{3,3}\}$		$v_{3,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{1,2}, v_{2,1}\}$		$\{v_{2,4}, v_{3,3}\}$		$v_{1,1}$		$v_{3,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,4}\}$		$v_{3,1}$		$v_{1,4}$

Damit führt jeder q-s-Weg über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten.

(5) Alice färbt den Knoten $v_{3,1}$ mit beliebiger Farbe $\mathbf{X}\leq\mathbf{2}$. Bob färbt den Knoten $v_{1,2}$ ebenfalls mit Farbe **X**. Sobald Alice einen der Knoten $v_{2,1}$ oder $v_{2,2}$ färbt oder spätestens in seinem letzten Spielzug, färbt Bob den noch ungefärbten der beiden Knoten mit Farbe **X**, womit er alle Knoten einer trennenden Knotenmenge $T_1 \in \{\{v_{1,2}, v_{2,1}\}, \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}\}$ mit Farbe **X** gefärbt hat. Ansonsten gilt:

(5.1) Färbt Alice als Nächstes den Knoten $v_{2,3}$ mit beliebiger Farbe, färbt Bob den Knoten $v_{2,4}$ mit Farbe **X**. Spätestens wenn Alice einen der Knoten $v_{1,3}$ oder $v_{3,3}$ beliebig färbt, färbt Bob den anderen Knoten mit Farbe **X**. (...) Damit sind die Knoten einer zweiten trennenden Knotenmenge T_2 mit Farbe **X** gefärbt.

T_1	und	T_2	trennen	q	und	s
s.o.		$\{v_{1,3}, v_{2,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{1,4}$
s.o.		$\{v_{2,4}, v_{3,3}\}$		$v_{1,1}$		$v_{3,4}$

Alle $v_{1,1}$-$v_{1,4}$-Wege beziehungsweise $v_{1,1}$-$v_{3,4}$-Wege führen damit über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten.

(5.2) Färbt Alice nicht den Knoten $v_{2,3}$ färbt ihn Bob mit Farbe **X**. Alice färbt einen weiteren Knoten beliebig. Bobs nächster Zug hängt davon ab, welche beiden Knoten Alice zuletzt gefärbt hat:

(i) Hat Alice beide Knoten $v_{1,3}$ und $v_{1,4}$ gefärbt, so färbt Bob den Knoten $v_{3,2}$ mit Farbe **X**. Alice färbt einen der Knoten $v_{2,4}$, $v_{3,3}$ oder $v_{3,4}$ beliebig. Bob färbt einen noch ungefärbten Knoten, der nicht zu $v_{3,2}$ benachbart ist mit Farbe **X**. (...)

(ii) Hat Alice beide Knoten $v_{3,2}$ und $v_{3,3}$ gefärbt, so färbt Bob den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe **X**. Alice färbt einen der Knoten $v_{1,4}$, $v_{2,4}$ oder $v_{3,4}$ beliebig. Bob färbt einen noch ungefärbten Knoten, der nicht zu $v_{1,3}$ benachbart ist mit Farbe **X**. (...)

(iii) Andernfalls ist in den beiden Knotenmengen $\{v_{1,3}, v_{1,4}\}$ und $\{v_{3,2}, v_{3,3}\}$ mindestens ein Knoten ungefärbt. Bob färbt einen dieser Knoten mit Farbe **X**. Sind in einer der beiden Mengen beide Knoten ungefärbt, wählt Bob den Knoten „links“ $v_{1,3}$ beziehungsweise $v_{3,2}$. Diesen färbt Bob mit Farbe **X** und markiert ihn mit u. Alice färbt beliebig. Es sind noch zwei Knoten ungefärbt, die nicht beide zu u adjazent sein können. Bob färbt den Knoten, der nicht adjazent zu u ist mit Farbe **X**. (...)

Damit sind die Knoten einer zweiten trennenden Knotenmenge T_2 mit Farbe **X** gefärbt.

T_1	und	T_2	trennen	q	und	s
s.o.		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$		$v_{1,1}$		$v_{1,4}$
s.o.		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,3}\}$		$v_{1,1}$		$v_{1,4}$
s.o.		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{1,4}$
s.o.		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{2,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{1,4}$
s.o.		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,2}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
s.o.		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,3}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
s.o.		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
s.o.		$\{v_{2,3}, v_{2,4}, v_{3,2}\}$		$v_{1,1}$		$v_{3,4}$
s.o.		$\{v_{2,3}, v_{2,4}, v_{3,3}\}$		$v_{1,1}$		$v_{3,4}$
s.o.		$\{v_{2,3}, v_{3,2}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{3,3}$

Alle q-s-Wege führen über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten.

(6) Färbt Alice den Knoten $v_{1,4}$ mit Farbe $\mathbf{X}{\leq}\mathbf{2}$, färbt Bob den Knoten $v_{2,3}$ mit Farbe **X**.

(6.1) Wenn Alice in der zweiten Spielrunde einen der Knoten $v_{1,3}$, $v_{2,2}$, $v_{2,4}$ oder $v_{3,1}$ mit beliebiger Farbe $\leq\mathbf{3}$ färbt, dann färbt Bob den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe **X**. Spätestens wenn Alice einen Knoten der Paare $\{v_{1,2}, v_{3,2}\}$ und $\{v_{3,3}, v_{3,4}\}$ färbt, färbt Bob den anderen Knoten des Paares mit Farbe **X**. (...) Damit sind alle Knoten von zwei trennenden Knotenmengen T_1 und T_2 mit Farbe **X** gefärbt.

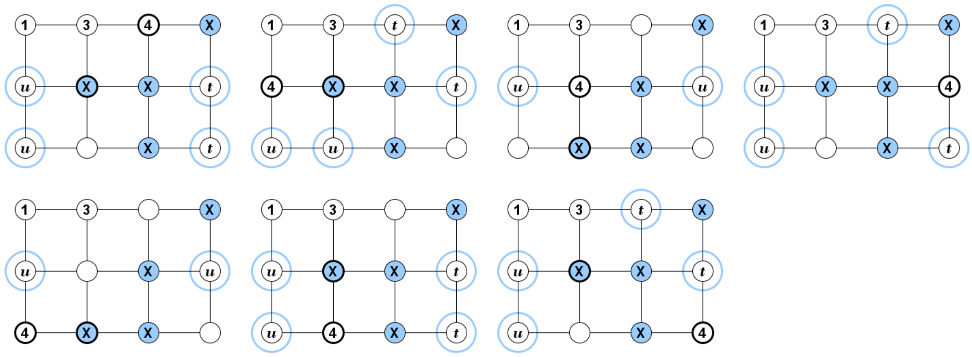
T_1	und	T_2	trennen	q	und	s
$\{v_{1,2}, v_{2,1}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,3}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{1,2}, v_{2,1}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,3}\}$		$v_{3,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{3,1}$		$v_{2,4}$

Demnach führt jeder q-s-Weg über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten.

(6.2) Färbt Alice in der zweiten Spielrunde einen der Knoten $v_{3,2}$, $v_{3,3}$ oder $v_{3,4}$ mit Farbe $\leq\mathbf{3}$, so färbt Bob den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **X**. Bob achtet darauf, dass weiter je ein Knoten der Mengen $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$, $\{v_{2,1}, v_{3,1}\}$ und $\{v_{3,2}, v_{3,3}, v_{3,4}\}$ mit Farbe **X** gefärbt wird. (...) Damit sind alle Knoten einer Menge $T_1 \in \{\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\}, \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}, \{v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}\}, \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,1}\}\}$ sowie einer Menge $T_2 \in \{\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,2}\}, \{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,3}\}, \{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}\}$ mit Farbe **X** gefärbt, womit jeder $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Weg über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten führt.

(6.3) Färbt Alice aber den Knoten $v_{2,1}$ mit einer Farbe $\leq\mathbf{3}$, dann färbt Bob den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **X**. Bob färbt im weiteren Spiel je einen Knoten der Paare $\{v_{1,2}, v_{1,3}\}$, $\{v_{3,1}, v_{3,2}\}$ und $\{v_{3,3}, v_{3,4}\}$ mit Farbe **X**. (...) Damit sind bereits alle Knoten von zwei $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-trennenden Knotenmengen $T_1 \in \{\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}, \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}\}, \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,1}\}, \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,2}\}\}$ sowie $T_2 \in \{\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,3}\}, \{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}\}$ mit Farbe **X** gefärbt, womit jeder $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Weg über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten führt.

(6.4) Färbt Alice in der zweiten Spielrunde den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe $\leq\mathbf{3}$, färbt Bob den Knoten $v_{3,3}$ mit Farbe **X**. Färbt Alice einen weiteren Knoten mit Farbe $\leq\mathbf{4}$, müssen wir für jeden Knoten überprüfen, ob es Bob tatsächlich gelingt, alle Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen mit Farbe **X** zu färben. Bob antwortet auf Alices Spielzug, indem er den markierten Knoten mit Farbe **X** färbt. Spätestens wenn Alice einen mit u bezeichneten Knoten beliebig färbt, färbt Bob den anderen mit u bezeichneten Knoten mit Farbe **X**. Dasselbe gilt für die mit t bezeichneten Knoten. (...)



In allen Fällen sind sämtliche Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen mit **X** gefärbt. In keinem Fall trennt eine der trennenden Knotenmengen die andere. Dies entspricht dem Fall (a) in Proposition 2.4.1, womit es zwei Knoten q und s gibt, die durch die beiden trennenden Knotenmengen jeweils getrennt werden. Gemäss Satz 2.4.2 führen alle q-s-Wege über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten.

(7) Alice färbt zuerst den Knoten $v_{3,4}$ mit Farbe $\mathbf{X}{\leq}\mathbf{2}$. Bob färbt dann den Knoten $v_{2,3}$ ebenfalls mit Farbe **X**.

(7.1) Färbt Alice in der zweiten Spielrunde einen der Knoten $v_{2,2}$, $v_{2,4}$, $v_{3,1}$ oder $v_{3,3}$ mit Farbe $\leq\mathbf{3}$, so färbt Bob den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe **X**. Alice färbt beliebig. Bob färbt weiter je einen Knoten der Paare $\{v_{1,2}, v_{3,2}\}$ und $\{v_{1,3}, v_{1,4}\}$ mit Farbe **X**. (...) Damit sind alle Knoten von zwei trennenden Knotenmengen T_1 und T_2 mit Farbe **X** gefärbt.

T_1	und	T_2	trennen	q	und	s
$\{v_{1,2}, v_{2,1}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{1,2}, v_{2,1}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{3,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{2,1}, v_{3,2}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{3,1}$		$v_{2,4}$

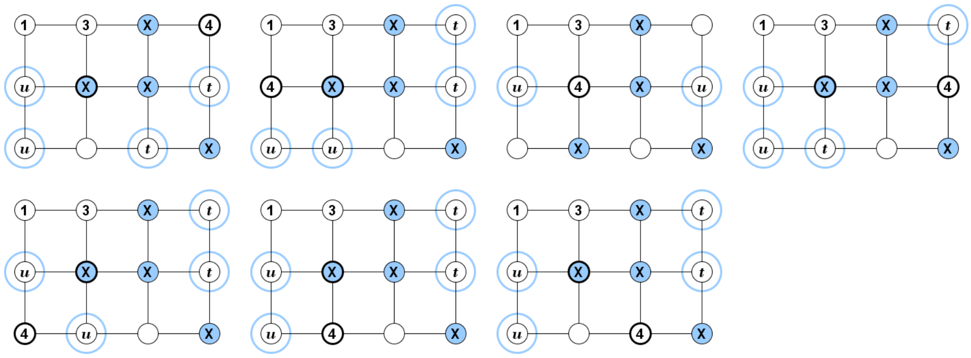
Demnach führt jeder q-s-Weg über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten.

(7.2) Alice färbt den Knoten $v_{3,2}$ mit Farbe $\leq\mathbf{3}$. Dann färbt Bob den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **X**. Bob färbt noch je einen Knoten der Paare $\{v_{1,2}, v_{3,3}\}$, $\{v_{2,1}, v_{3,1}\}$ und $\{v_{1,3}, v_{1,4}\}$ mit Farbe **X**. (...) Damit sind alle Knoten von zwei trennenden Knotenmengen T_1 und T_2 mit Farbe **X** gefärbt.

T_1	und	T_2	trennen	q	und	s
$\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{1,1}$		$v_{2,4}$
$\{v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,3}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{3,2}$		$v_{2,4}$
$\{v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,3}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{3,2}$		$v_{2,4}$
$\{v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,3}\}$		$\{v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{3,2}$		$v_{2,4}$
$\{v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,3}\}$		$\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$		$v_{3,2}$		$v_{2,4}$

Alle q-s-Wege führen über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten.

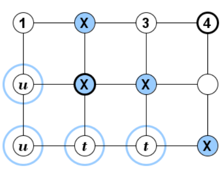
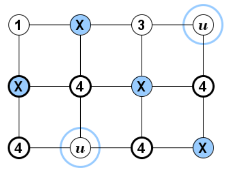
(7.3) Färbt Alice den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe $\leq$**3**, färbt Bob den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe **X**. Färbt Alice einen weiteren Knoten mit Farbe $\leq$**4**, müssen wir wieder auf die oben beschriebene Weise alle Knoten überprüfen. Bob färbt auch hier anschliessend den entsprechenden Knoten mit Farbe **X**.



In allen Fällen sind sämtliche Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen mit **X** gefärbt. In keinem Fall trennt eine der trennenden Knotenmengen die andere. Dies entspricht dem Fall (a) in Proposition 2.4.1, womit es zwei Knoten q und s gibt, die durch die beiden trennenden Knotenmengen jeweils getrennt werden. Gemäss Satz 2.4.2 führen alle q-s-Wege über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten.

(7.4) Färbt Alice den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe $\leq$**3**, färbt Bob den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **X**. Färbt Alice einen weiteren Knoten mit Farbe $\leq$**4**, müssen wir auch hier jeden Knoten prüfen.

(7.4.1) Färbt Alice den Knoten $v_{1,4}$ oder einen der Knoten $v_{2,2}$, $v_{2,4}$, $v_{3,1}$ oder $v_{3,3}$ mit Farbe $\leq$**4**, färbt Bob den markierten Knoten mit Farbe **X**. Spätestens wenn Alice einen mit u bezeichneten Knoten beliebig färbt, färbt Bob den anderen mit u bezeichneten Knoten mit Farbe **X**. Dasselbe gilt für die mit t bezeichneten Knoten. (...)

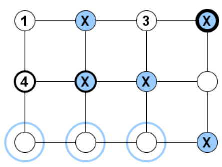
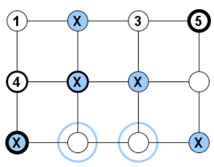



In allen Fällen sind sämtliche Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen mit **X** gefärbt. In keinem Fall trennt eine der trennenden Knotenmengen die andere. Dies entspricht dem Fall (a) in Proposition 2.4.1, womit es zwei Knoten q und s gibt, die durch die beiden trennenden Knotenmengen jeweils getrennt werden. Gemäss Satz 2.4.2 führen alle q-s-Wege über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten.

(7.4.2) Färbt Alice den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe $\leq$**4**, so färbt Bob den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **X**.

(i) Färbt Alice anschliessend nicht den Knoten $v_{1,4}$ mit Farbe $\leq$**5**, so färbt ihn Bob mit Farbe **X**. Nachdem Alice einen weiteren Knoten gefärbt hat, ist von den Knoten $v_{3,1}$, $v_{3,2}$ oder $v_{3,3}$ noch mindestens einer ungefärbt, den Bob mit Farbe **X** färbt. (...) Damit sind zwei $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-trennende Knotenmengen mit Farbe **X** gefärbt. Alle $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Wege führen über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten.

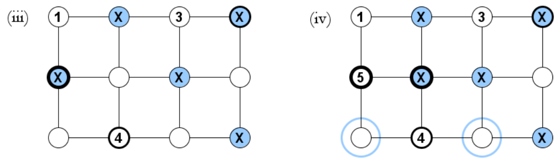
(ii) Färbt Alice allerdings doch den Knoten $v_{1,4}$ mit Farbe $\leq$**5**, dann färbt Bob den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe **X**. Nach Alices nächstem Spielzug ist mindestens einer der Knoten $v_{3,2}$ oder $v_{3,3}$ noch ungefärbt. Bob färbt ihn mit Farbe **X**. (...) Damit führen entweder alle $v_{1,1}$-$v_{3,3}$-Wege über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten der trennenden Mengen $\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}$ und $\{v_{2,3}, v_{3,2}, v_{3,4}\}$ oder es führen alle $v_{1,4}$-$v_{3,2}$-Wege über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten der trennenden Mengen $\{v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,3}\}$ und $\{v_{1,2}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$.

(i)

(ii)


(7.4.3) Färbt Alice den Knoten $v_{3,2}$ mit Farbe $\leq$**4**, so färbt Bob den Knoten $v_{1,4}$ mit Farbe **X**.

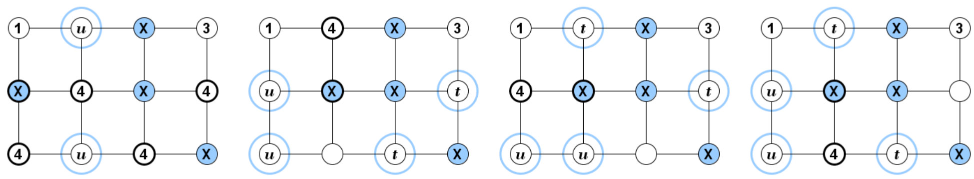
(iii) Färbt sie anschliessend nicht den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe $\leq$**5**, färbt ihn Bob mit Farbe **X**. (...) Damit führen alle $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Wege über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten der Mengen $\{v_{1,2}, v_{2,1}\}$ und $\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$.

(iv) Tut sie es doch, so färbt Bob den Knoten $v_{2,2}$ sowie im nächsten Spielzug den noch ungefärbten Knoten $v_{3,1}$ oder $v_{3,3}$, jeweils mit Farbe **X**. (...) Damit führen alle $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Wege über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten der trennenden Mengen $\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}$ oder $\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,3}\}$ und $\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$.



In allen Fällen sind sämtliche Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen mit **X** gefärbt. In keinem Fall trennt eine der trennenden Knotenmengen die andere. Dies entspricht dem Fall (a) in Proposition 2.4.1, womit es zwei Knoten q und s gibt, die durch die beiden trennenden Knotenmengen jeweils getrennt werden. Gemäss Satz 2.4.2 führen alle q-s-Wege über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten.

(7.5) Färbt Alice den Knoten $v_{1,4}$ mit Farbe $\leq$**3**, färbt Bob den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe **X**. Färbt Alice einen weiteren Knoten mit Farbe $\leq$**4**, überprüfen wir wieder jeden einzelnen Knoten. Hier können wir die Untersuchung für die Knoten $v_{2,2}$, $v_{2,4}$, $v_{3,1}$ und $v_{3,3}$ zusammenfassen.

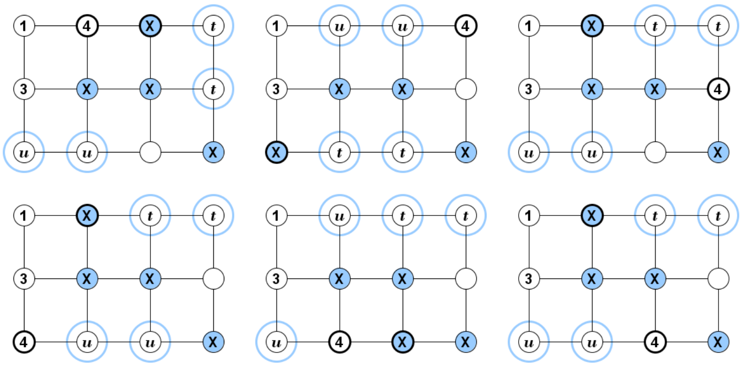


In allen Fällen sind sämtliche Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen mit **X** gefärbt. In keinem Fall trennt eine der trennenden Knotenmengen die andere. Dies entspricht dem Fall (a) in Proposition 2.4.1, womit es zwei Knoten q und s gibt, die durch die beiden trennenden Knotenmengen jeweils getrennt werden. Gemäss Satz 2.4.2 führen alle q-s-Wege über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten.

(7.6) Bleibt zu untersuchen, wenn Alice den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe $\leq$**3** färbt. Bob färbt dann den Knoten $v_{2,2}$ mit Farbe **X**. Auch hier untersuchen wir alle weiteren Knoten, die Alice mit Farbe $\leq$**4** färben kann.

(7.6.1) Färbt Alice einen der Knoten $v_{1,2}$, $v_{1,4}$, $v_{2,4}$, $v_{3,1}$, $v_{3,2}$ oder $v_{3,3}$ mit Farbe $\leq$**4**, dann färbt Bob den jeweils fett eingekreisten Knoten mit Farbe **X**. Wieder spätestens wenn Alice einen mit u oder t bezeichneten Knoten beliebig färbt,

färbt Bob den zweiten mit u beziehungsweise t bezeichneten Knoten mit Farbe **X**.

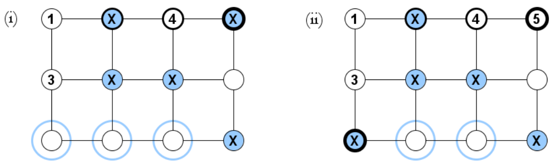


In allen Fällen sind sämtliche Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen mit **X** gefärbt. In keinem Fall trennt eine der trennenden Knotenmengen die andere. Dies entspricht dem Fall (a) in Proposition 2.4.1, womit es zwei Knoten q und s gibt, die durch die beiden trennenden Knotenmengen jeweils getrennt werden. Gemäss Satz 2.4.2 führen alle q-s-Wege über mindestens zwei gleich gefärbte Knoten.

(7.6.2) Färbt Alice den Knoten $v_{1,3}$ mit Farbe $\leq$**4**, so färbt Bob den Knoten $v_{1,2}$ mit Farbe **X**.

(i) Falls Alice anschliessend nicht den Knoten $v_{1,4}$ färbt, so färbt ihn Bob mit Farbe **X**. Nach Alices nächstem Spielzug ist noch mindestens ein Knoten der Menge $\{v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}\}$ ungefärbt. Diesen Knoten färbt Bob mit Farbe **X**. (...) Damit führen alle $v_{1,1}$-$v_{2,4}$-Wege über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten der trennenden Mengen $\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}$, $\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}\}$ oder $\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,3}\}$ und $\{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$.

(ii) Färbt sie aber $v_{1,4}$ mit Farbe $\leq$**5**, so färbt Bob den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe **X**. Alice färbt beliebig. Den noch ungefärbten Knoten $v_{3,2}$ oder $v_{3,3}$ färbt Bob anschliessend mit Farbe **X**. (...) Damit führen entweder alle $v_{1,1}$-$v_{3,3}$-Wege über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten der trennenden Mengen $\{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}$ und $\{v_{2,3}, v_{3,2}, v_{3,4}\}$ oder es führen alle $v_{1,4}$-$v_{3,2}$-Wege über mindestens zwei mit **X** gefärbte Knoten der trennenden Mengen $\{v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,3}\}$ und $\{v_{1,2}, v_{2,3}, v_{3,4}\}$.



Bob kann also auf dem 3×4-Gitter eine Rainbow-Knotenfärbung immer verhindern, auch wenn beliebig viele Farben zur Verfügung stehen. $\square$

Satz 2.5.21
Auf $3 \times n$-Rechteckgittern $G_{3,n}$ mit $n \geq 5$ gilt $rvc_{S_A}(G_{3,n}) = \infty$ und $rvc_{S_B}(G_{3,n}) = \infty$.

Beweis. Die Knotenteilmengen $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}_B(G_{3,n})$,

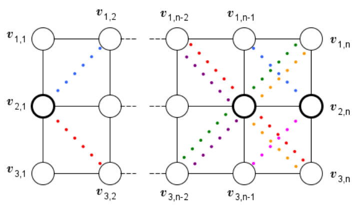
$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{3,2}\} = \{v_{1,2}, v_{2,1}\} \cup \{v_{2,1}, v_{3,2}\},\\
U_2 &:= \{v_{1,n-1}, v_{2,n}, v_{3,n-1}\} = \{v_{1,n-1}, v_{2,n}\} \cup \{v_{2,n}, v_{3,n-1}\},\\
U_3 &:= \{v_{1,n-2}, v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n-2}, v_{3,n}\}\\
&= \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{3,n-2}\} \cup \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \cup \{v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n-2}\} \cup \{v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\},
\end{aligned}$$

mit den strategisch wichtigen Knoten $swK(U_1) := v_{2,1}$, $swK(U_2) := v_{2,n}$ und $swK(U_3) := v_{2,n-1}$ erfüllen die Bedingungen im Satz 2.4.14:

(i) Die Knotenteilmengen U_1, U_2 und U_3 sind paarweise disjunkt.

(ii) Es gibt in U_1 keine trennende Knotenmenge, die durch eine der trennenden Knotenmengen aus U_2 oder U_3 getrennt wird.

(iii) Umgekehrt trennt keine der trennenden Knotenmengen U_1 eine trennende Knotenmenge aus U_2 oder U_3.



Bob folgt seiner Strategie im Beweis von Satz 2.4.14. Es gibt dann einen Knoten $q \in \{v_{1,1}, v_{3,1}\}$ sowie einen Knoten $s \in \{v_{1,n}, v_{2,n}, v_{3,n}\}$, die durch zwei mit Farbe **1** gefärbte Knotenmengen $T_1 \in U_1$ sowie $T_2 \in U_2$ oder $T_2 \in U_3$ getrennt werden. Mit Satz 2.4.2 folgt, dass $G_{3,n}$ nicht rainbow-knotengefärbt ist. $\square$

Damit sind alle Rechteckgitter mit drei Zeilen abgedeckt. Es folgen nun Rechteckgitter mit vier Zeilen. Da wir $m \leq n$ angenommen haben, haben diese Rechteckgitter mindestens vier Spalten.

Für die Beweise zu den folgenden zwei Sätze merken wir uns die benötigten Knotenteilmengen aus $\mathcal{U}_B(G_{4,n})$ und die halten die strategisch wichtigen Knoten fest.

$$
\begin{aligned}
U_1 &:= \{v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,1}\}\\
&= \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\} \cup \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \cup \{v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}\} \cup \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,1}\}\\
&\quad \text{mit } swK(U_1) := v_{2,2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_2 &:= \{v_{1,n-2}, v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{2,n}, v_{3,n}\}\\
&= \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{2,n}\} \cup \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \cup \{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{2,n}\} \cup \{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\}\\
&\quad \text{mit } swK(U_2) := v_{2,n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_3 &:= \{v_{2,1}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,2}, v_{4,3}\}\\
&= \{v_{2,1}, v_{3,2}, v_{4,2}\} \cup \{v_{2,1}, v_{3,2}, v_{4,3}\} \cup \{v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,2}\} \cup \{v_{3,1}, v_{3,2}, v_{4,3}\}\\
&\quad \text{mit } swK(U_3) := v_{3,2}
\end{aligned}
$$

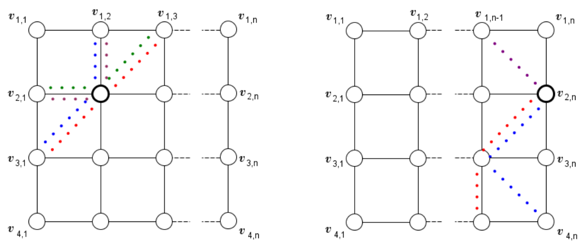
$$
\begin{aligned}
U_4 &:= \{v_{2,n}, v_{3,n-1}, v_{3,n}, v_{4,n-2}, v_{4,n-1}\}\\
&= \{v_{2,n}, v_{3,n-1}, v_{4,n-2}\} \cup \{v_{2,n}, v_{3,n-1}, v_{4,n-1}\} \cup \{v_{3,n-1}, v_{3,n}, v_{4,n-2}\} \cup \{v_{3,n-1}, v_{3,n}, v_{4,n-1}\}\\
&\quad \text{mit } swK(U_4) := v_{3,n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_5 &:= \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{4,2}\} = \{v_{3,1}, v_{4,2}\} \cup \{v_{1,1}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \cup \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\}\\
&\quad \text{mit } swK(U_5) := v_{3,1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_6 &:= \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{3,2}, v_{4,1}, v_{4,2}\} = \{v_{1,2}, v_{2,1}\} \cup \{v_{2,1}, v_{3,2}, v_{4,1}\} \cup \{v_{2,1}, v_{3,2}, v_{4,2}\}\\
&\quad \text{mit } swK(U_6) := v_{2,1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_7 &:= \{v_{1,n-1}, v_{2,n}, v_{3,n-1}, v_{4,n-1}, v_{4,n}\} = \{v_{1,n-1}, v_{2,n}\} \cup \{v_{2,n}, v_{3,n-1}, v_{4,n-1}\} \cup \{v_{2,n}, v_{3,n-1}, v_{4,n}\}\\
&\quad \text{mit } swK(U_7) := v_{2,n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_8 &:= \{v_{1,n-1}, v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n}, v_{4,n-1}\} = \{v_{3,n}, v_{4,n-1}\} \cup \{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \cup \{v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\}\\
&\quad \text{mit } swK(U_8) := v_{3,n}
\end{aligned}
$$



In den $4 \times n$-Rechteckgittern sind die Knotenteilmengen U_1 und U_7 eingezeichnet.

Satz 2.5.22

Sei $G_{4,n}$ ein $4 \times n$-Rechteckgitter mit $n \geq 4$. Dann gilt $rvc_{S_A}(G_{4,n}) = \infty$.

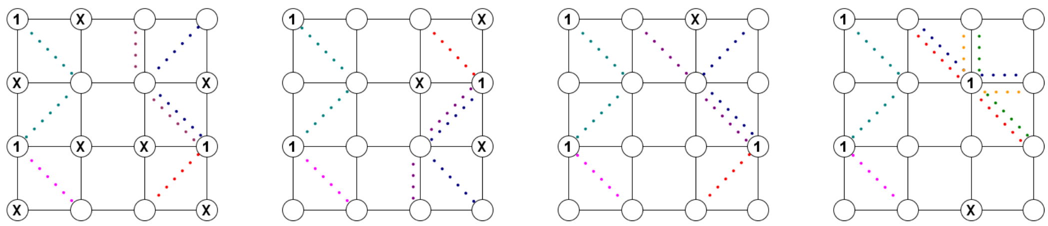
Beweis. Bob hat im Spiel S_A auf Rechteckgittern mit vier Zeilen und mindestens vier Spalten bei beliebiger Anzahl an Farben eine Gewinnstrategie. Wir müssen für den Anfang drei Fälle (1), (2) und (3) unterscheiden:

(1) Alice färbt einen der Knoten $v_{2,2}$, $v_{2,n-1}$, $v_{3,2}$ oder $v_{3,n-1}$ mit Farbe **1**. Wir nehmen an, sie färbe den Knoten $v_{2,2}$. Dann färbt Bob den Knoten $v_{3,n-1}$ mit Farbe **1**, womit er die Knoten $swK(U_1)$ und $swK(U_4)$ mit gleicher Farbe gefärbt hat. Er hält sich an die Strategie im Beweis von Lemma 2.4.9 und färbt so die Knoten von zwei disjunkten

$v_{1,1}$-$v_{4,n}$-trennenden Mengen mit Farbe **1**. (...) Mit Satz 2.4.2 ist $G_{4,n}$ nicht rainbow-knotengefärbt.

(2) Alice färbt einen der Eckknoten $v_{1,1}$, $v_{1,n}$, $v_{4,1}$ oder $v_{4,n}$. Wir nehmen an, sie habe $v_{1,1}$ mit Farbe **1** versehen. Bob färbt dann den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe **1**. Sobald Alice irgendwann während des Spiels einen der Knoten $v_{2,2}$ oder $v_{4,2}$ mit beliebiger Farbe färbt, färbt Bob den anderen dieser beiden Knoten mit Farbe **1**. Wir bezeichnen einen Knoten mit q wie folgt: Hat Bob $v_{2,2}$ gefärbt, definieren wir $q := v_{2,1}$, war es Knoten $v_{4,2}$, definieren wir $q := v_{4,1}$. Ansonsten unterscheiden wir:

(2.1) (2.2) (2.3) (2.4)



(2.1) Alice färbt einen der Knoten $v_{1,2}$, $v_{2,1}$, $v_{2,n}$, $v_{3,2}$, $v_{3,n-1}$, $v_{4,1}$, $v_{4,n}$ sowie für $n \geq 5$ Knoten der Spalten 3 bis $(n-2)$ mit beliebiger Farbe. Dann färbt Bob den Knoten $v_{3,n}$ mit Farbe **1**. Damit hat er den strategisch wichtigen Knoten der Knotenteilmenge U_8 gefärbt. Er folgt seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.11 und erreicht damit, dass entweder die Knoten der Menge $\{v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\}$, $\{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\}$ oder die der Menge $\{v_{3,n}, v_{4,n-1}\}$ mit Farbe **1** gefärbt sind. Im ersten und zweiten Fall definieren wir $s := v_{2,n}$, im dritten $s := v_{4,n}$. (...)

(2.2) Alice färbt einen der Knoten $v_{1,n}$, $v_{2,n-1}$ oder $v_{3,n}$ mit beliebiger Farbe. Dann färbt Bob den Knoten $v_{2,n}$, den strategisch wichtigen Knoten von Knotenteilmenge U_7, mit Farbe **1**. Auch hier folgt er seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.11 und färbt so die Knoten einer trennenden Knotenmenge mit einer Farbe. Dies ist entweder $\{v_{2,n}, v_{3,n-1}, v_{4,n-1}\}$, $\{v_{2,n}, v_{3,n-1}, v_{4,n}\}$ oder $\{v_{1,n-1}, v_{2,n}\}$. Im ersten und zweiten Fall definieren wir $s := v_{3,n}$, im dritten $s := v_{1,n}$. (...)

(2.3) Färbt Alice den Knoten $v_{1,n-1}$, so färbt Bob den Knoten $v_{3,n}$ mit Farbe **1**. Dies ist bekanntlich $swK(U_8)$. Bob folgt danach seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.11, und zwar für die Knotenteilmenge $U_8 \backslash \{v_{1,n-1}\} \cup \{v_{1,n-2}\}$. Er färbt so alle Knoten einer q-s-trennenden Knotenmenge $\{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\}$, $\{v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\}$ oder $\{v_{3,n}, v_{4,n-1}\}$ mit Farbe **1**, wobei entweder $s := v_{2,n}$ oder $s := v_{4,n}$ gilt. (...)

(2.4) Alice färbt den Knoten $v_{4,n-1}$. Bob färbt darauf den Knoten $v_{2,n-1}$ mit Farbe **1**. Dies ist der strategisch wichtige Knoten der Knotenteilmenge U_2, weshalb er danach der Strategie im Beweis von Lemma 2.4.9 folgt, wodurch alle Knoten einer trennnenden Menge $T \subset U_2$ gefärbt sind. Wir definieren $s := v_{1,n}$. (...)

(3) Alice färbt zuerst einen der Knoten $v_{1,2}$, $v_{1,n-1}$, $v_{2,1}$, $v_{2,n}$, $v_{3,1}$, $v_{3,n}$, $v_{4,2}$ oder $v_{4,n-1}$. Wir nehmen an, sie habe $v_{1,2}$ mit Farbe **1** gefärbt. Bob färbt dann den Knoten $v_{2,1}$ mit Farbe **1** und wir definieren $q := v_{1,1}$.

(3.1) Färbt Alice anschliessend den Knoten $v_{1,n-1}$, so färbt Bob den Knoten $v_{3,n-1}$ ($swK(U_4)$) mit Farbe **1** und hält sich an seine Strategie im Beweis von Lemma 2.4.9. Es gilt dann $s := v_{4,n}$. (...)

(3.2) Färbt sie hingegen den Knoten $v_{4,n-1}$, färbt Bob den Knoten $v_{2,n}$ mit Farbe **1** und färbt gemäss Beweis von Lemma 2.4.11 in der Knotenmenge $U_7 \backslash \{v_{4,n-1}\} \cup \{v_{4,n-2}\}$. In diesem Fall sei $s := v_{3,n}$ (...)

(3.3) Färbt Alice einen der Knoten $v_{1,1}$, $v_{2,2}$, $v_{2,n}$, $v_{3,1}$, $v_{3,2}$, $v_{3,3}$, $v_{4,1}$, $v_{4,2}$, $v_{4,n}$ oder bei ≥ 5 einen der Knoten der Spalten 3 bis $(n-2)$, hält er sich an die Angaben unter (2.1).

(3.4) Für die Knoten $v_{1,n}$, $v_{2,n-1}$ und $v_{3,n}$ folgt er (2.2).

(4) Startet Alice für $n \geq 5$ mit einem der übrigen Knoten (also Knoten der Spalten 3 bis $(n-2)$), so färbt Bob den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe **1**. Damit hat er den strategisch wichtigen Knoten der Knotenteilmenge U_5 gefärbt. Sobald Alice weitere Knoten der Menge U_5 färbt, färbt auch Bob Knoten dieser Menge, und zwar gemäss seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.11. Färbt Alice ansonsten einen anderen Knoten, so färbt Bob gemäss den vorgängig gezeigten Strategien (2.1) bis (2.4). Er erreicht schliesslich die einheitliche Färbung der Knoten von zwei q-s-trennenden Knotenmengen mit $q \in \{v_{2,1}, v_{4,1}\}$ und einem Knoten s in der n-ten Spalte.

Auch in den Fällen (2) bis (4) sind die Knoten von zwei q-s-trennenden Knotenmengen mit Farbe **1** gefärbt. Mit Satz 2.4.2 folgt, dass $G_{4,n}$ nicht rainbow-knotengefärbt ist. □

Satz 2.5.23
Sei $G_{4,n}$ ein $4 \times n$-Rechteckgitter mit $n \geq 4$. Dann gilt $rvc_{S_B}(G_{4,n}) = \infty$.

Beweis. Auch im Spiel S_B hat Bob ein Gewinnstrategie mit beliebig vielen Farben. Bob färbt den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe **1**. Wenn Alice in U_5 färbt, dann tut es auch Bob gemäss seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.11. Je nachdem, welchen Knoten Alice andernfalls färbt, hält sich Bob an die entsprechende Strategie im Beweis zu Satz 2.5.22, (2.1) bis (2.4). Alle Knoten zweier q-s-trennender Knotenmengen sind dann für die entsprechenden Knoten q und s mit Farbe **1** gefärbt. Mit Satz 2.4.2 folgt, dass das $4 \times n$-Rechteckgitter nicht rainbow-knotengefärbt ist, womit Bob gewinnt. □

Es folgt die Untersuchung der Gitter mit fünf Zeilen. Dort finden wir unter anderem die folgenden Knotenteilmengen, die Elemente von $\mathcal{U}_G(G_{5,n})$ sind, und die zugehörigen strategisch wichtigen Knoten.

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \\
&= \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\} \cup \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \cup \{v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}\} \cup \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \\
&\ \text{mit } swK(U_1) := v_{2,2}
\end{aligned}$$

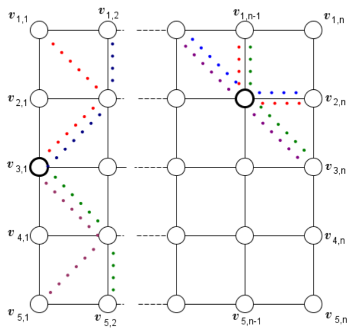
$$\begin{aligned}
U_2 &:= \{v_{1,n-2}, v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{2,n}, v_{3,n}\} \\
&= \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{2,n}\} \cup \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \cup \{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{2,n}\} \cup \{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \\
&\ \text{mit } swK(U_2) := v_{2,n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_3 &:= \{v_{3,1}, v_{4,1}, v_{4,2}, v_{5,2}, v_{5,3}\} \\
&= \{v_{3,1}, v_{4,2}, v_{5,2}\} \cup \{v_{3,1}, v_{4,2}, v_{5,3}\} \cup \{v_{4,1}, v_{4,2}, v_{5,2}\} \cup \{v_{4,1}, v_{4,2}, v_{5,3}\} \\
&\ \text{mit } swK(U_3) := v_{4,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_4 &:= \{v_{3,n}, v_{4,n-1}, v_{4,n}, v_{5,n-2}, v_{5,n-1}\} \\
&= \{v_{3,n}, v_{4,n-1}, v_{5,n-2}\} \cup \{v_{3,n}, v_{4,n-1}, v_{5,n-1}\} \cup \{v_{4,n-1}, v_{4,n}, v_{5,n-2}\} \cup \{v_{4,n-1}, v_{4,n}, v_{5,n-1}\} \\
&\ \text{mit } swK(U_4) := v_{4,n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_5 &:= \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{4,2}, v_{5,1}, v_{5,2}\} \\
&= \{v_{1,1}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \cup \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \cup \{v_{3,1}, v_{4,2}, v_{5,1}\} \cup \{v_{3,1}, v_{4,2}, v_{5,2}\} \\
&\ \text{mit } swK(U_5) := v_{3,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_6 &:= \{v_{1,n-1}, v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n}, v_{4,n-1}, v_{5,n-1}, v_{5,n}\} \\
&= \{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \cup \{v_{1,n}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \cup \{v_{3,n}, v_{4,n-1}, v_{5,n-1}\} \cup \{v_{3,n}, v_{4,n-1}, v_{5,n}\} \\
&\ \text{mit } swK(U_6) := v_{3,n}
\end{aligned}$$



Im Graphen $G_{5,n}$ sind die Knotenteilmengen U_2 und U_5 eingezeichnet.

Satz 2.5.24
Sei $G_{5,n}$ ein $5 \times n$-Rechteckgitter mit $n \geq 5$. Dann gilt $rvc_{S_A}(G_{5,n}) = \infty$.

Beweis. Bob hat im Spiel S_A auf Rechteckgittern mit fünf Zeilen und mindestens fünf Spalten eine Gewinnstrategie mit beliebig vielen Farben.

(1) Alice färbt einen der Knoten $swK(U_1)$ oder $swK(U_4)$ beziehungsweise $swK(U_2)$ oder $swK(U_3)$ mit Farbe **1**. Bob färbt den anderen der zusammen genannten Kno-

ten ebenfalls mit Farbe **1**. Die weiteren Knoten der entsprechenden Knotenteilmengen färbt Bob gemäss seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.9. Damit erzielt er die einheitliche Färbung der Knoten von zwei $v_{1,1}$-$v_{5,n}$- (beziehungsweise $v_{1,n}$-$v_{5,1}$-)trennenden Knotenmengen. Die jeweiligen Eckknoten sind mit Satz 2.4.2 nicht rainbow-knotenverbunden.

(2) Alice färbt einen der Knoten $v_{1,2}$, $v_{1,n-1}$, $v_{2,1}$, $v_{2,n}$, $v_{4,1}$, $v_{4,n}$, $v_{5,2}$ oder $v_{5,n-1}$ mit Farbe **1**. Wir nehmen an, sie habe den Knoten $v_{1,2}$ gefärbt. Bob färbt den Knoten $v_{2,1}$. Damit sind die Knoten einer trennenden Knotenmenge mit Farbe **1** gefärbt. Wir kennzeichnen $v_{1,1}$ mit q. Alice färbt einen beliebigen Knoten. Bob färbt den strategisch wichtigen Knoten einer noch ganz ungefärbten Knotenteilmenge U_2, U_3 oder U_4 und färbt anschliessend gemäss seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.9 weiter. Es gibt dann einen weiteren Eckknoten s sowie zwei disjunkte q-s-trennende Knotenmengen, deren Knoten alle mit Farbe **1** gefärbt sind. Mit Satz 2.4.2 folgt, dass die Knoten q und s nicht rainbow-knotenverbunden sind.

(3) Alice färbt einen Eckknoten $v_{1,1}, v_{1,n}, v_{5,1}$ oder $v_{5,n}$ mit Farbe **1**. Wir gehen davon aus, dass Alice den Knoten $v_{1,1}$ gefärbt hat. Bob färbt den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe **1**. Damit sind sogar schon zwei Knoten der Knotenteilmenge U_5 mit Farbe **1** gefärbt, wovon einer der Knoten $swK(U_5)$ ist. Färbt Alice in der Knotenteilmenge U_5 weiter, färbt auch Bob Knoten dieser Menge, entsprechend seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.13 und erreicht die einheitliche Färbung aller Knoten der Menge $\{v_{1,1}, v_{2,2}, v_{3,1}\}$ oder $\{v_{3,1}, v_{4,2}, v_{5,1}\}$ oder $\{v_{3,1}, v_{4,2}, v_{5,2}\}$. Im ersten Fall ist $q := v_{2,1}$, im zweiten und dritten $q := v_{4,1}$. Weiter (*) versucht Bob, möglichst den Knoten $swK(U_6)$ mit Farbe **1** zu färben und wie im Beweis von Lemma 2.4.13 eine trennende Menge in der Knotenteilmenge U_6 zu sichern. Färbt allerdings Alice den Knoten $v_{3,n}$ mit beliebiger Farbe, so färbt Bob den Knoten $v_{2,n}$ mit Farbe **1**. Falls Alice darauf nicht den Knoten $v_{1,n-1}$ färbt, dann färbt ihn Bob mit Farbe **1**, es sei dann $s := v_{1,n}$. (...) Andernfalls färbt Bob den Knoten $v_{3,n-1}$ mit Farbe **1**.

Färbt Alice nun nicht den Knoten $v_{4,n}$, so färbt ihn Bob mit Farbe **1**. Wir definieren $s := v_{3,n}$.

Färbt Alice allerdings den Knoten $v_{4,n}$ mit beliebiger Farbe, so färbt Bob den Knoten $v_{4,n-1}$ mit Farbe **1**. Nach Alices nächstem Spielzug sind noch mindestens zwei Knoten aus der Menge $\{v_{5,n-2}, v_{5,n-1}, v_{5,n}\}$ ungefärbt. Bob färbt einen mit Farbe **1**. (...) In diesem Fall sei $s := v_{3,n}$.

Die Knoten von zwei disjunkten q-s-trennenden Knotenmengen sind mit Farbe **1** gefärbt und mit Satz 2.4.2 ist der Graph nicht rainbow-knotengefärbt.

(4) Alice färbt einen der Knoten $v_{3,1}$ oder $v_{3,n}$ mit Farbe **1**. Bob färbt den noch ungefärbten der beiden genannten Knoten ebenfalls mit Farbe **1**. Damit sind die beiden

strategisch wichtigen Knoten der Knotenteilmengen U_5 und U_6 mit gleicher Farbe gefärbt. Bob folgt in beiden Mengen seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.13 und erreicht die einheitliche Färbung aller Knoten zweier disjunkter q-s-trennender Knotenmengen, wobei $q \in \{v_{2,1}, v_{4,1}\}$ und $s \in \{v_{2,n}, v_{4,n}\}$ gilt. (...) Mit Satz 2.4.2 sind q und s nicht rainbow-knotenverbunden.

(5) Alice färbt einen der übrigen Knoten. Bob färbt dann den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe **1** und die übrigen Knoten der Knotenteilmenge U_5 gemäss seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.13. Ansonsten weiter bei (3) ab (*).

Das Gitter $G_{5,n}$ ist in allen Fällen nicht rainbow-knotengefärbt, womit Bob mit beliebig vielen Farben immer gewinnt. □

Satz 2.5.25
Sei $G_{5,n}$ ein $5 \times n$-Rechteckgitter mit $n \geq 5$. Dann gilt $rvc_{S_B}(G_{5,n}) = \infty$.

Beweis. Auch im Spiel S_B hat Bob mit beliebig vielen Farben eine Gewinnstrategie. Bob färbt den Knoten $v_{3,1}$ mit Farbe **1**. Alice färbt einen beliebigen Knoten. Die Knoten der Menge U_5 färbt Bob gemäss seiner Strategie im Beweis von Lemma 2.4.13 weiter, während er die übrigen Knoten wie im Beweis von Satz 2.5.24 (3) ab (*) färbt. (...) Es gibt einen Knoten $q \in \{v_{2,1}, v_{4,1}\}$ und einen Knoten $s \in \{v_{1,n}, v_{2,n}, v_{3,n}, v_{4,n}\}$ sowie zwei q-s-trennende Knotenmengen, deren Knoten alle mit Farbe **1** gefärbt sind. Das Gitter $G_{5,n}$ ist mit Satz 2.4.2 nicht rainbow-knotengefärbt. □

Wir schliessen die Untersuchung der Rechteckgitter mit einem Satz ab, der zeigt, dass Bob auf allen Rechteckgittern mit mehr als fünf Zeilen und mehr als fünf Spalten gewinnt.

Satz 2.5.26
Auf $m \times n$-Rechteckgittern $G_{m,n}$ mit $m, n \geq 6$ gilt $rvc_{S_A}(G_{m,n}) = \infty$ und $rvc_{S_B}(G_{m,n}) = \infty$.

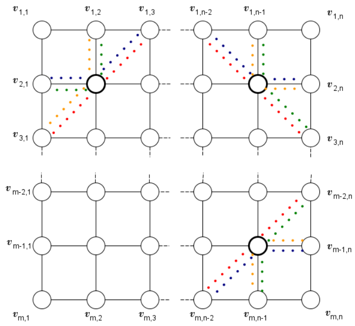
Beweis. Die Knotenteilmengen $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}_B(G_{m,n})$,

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \\
&= \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\} \cup \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \cup \{v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}\} \cup \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,1}\} \\
U_2 &:= \{v_{1,n-2}, v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{2,n}, v_{3,n}\} \\
&= \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{2,n}\} \cup \{v_{1,n-2}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \cup \{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{2,n}\} \cup \{v_{1,n-1}, v_{2,n-1}, v_{3,n}\} \\
U_3 &:= \{v_{m-2,n}, v_{m-1,n-1}, v_{m-1,n}, v_{m,n-2}, v_{m,n-1}\} \\
&= \{v_{m-2,n}, v_{m-1,n-1}, v_{m,n-2}\} \cup \{v_{m-2,n}, v_{m-1,n-1}, v_{m,n-1}\} \cup \{v_{m-1,n-1}, v_{m-1,n}, v_{m,n-2}\} \\
&\qquad \cup \{v_{m-1,n-1}, v_{m-1,n}, v_{m,n-1}\}
\end{aligned}$$

mit den strategisch wichtigen Knoten $swK(U_1) := v_{2,2}$, $swK(U_2) := v_{2,n-1}$ und $swK(U_3) := v_{m-1,n-1}$ erfüllen die Bedingungen im Satz 2.4.14:

(i) Die Knotenteilmengen U_1, U_2 und U_3 sind paarweise disjunkt.

(ii) und (iii) Keine der trennenden Knotenmengen aus einer der Knotenteilmengen U_1, U_2 oder U_3 trennt eine der beiden anderen Knotenteilmengen.



Bob färbt gemäss seiner Strategie im Beweis von Satz 2.4.14. Zuletzt sind alle Knoten zweier Knotenmengen $\tilde{T} \subset U_1$ und $\bar{T} \subset U_2$ oder $\bar{T} \subset U_3$, die den Knoten $v_{1,1}$ von einem der Knoten $v_{1,n}$ oder $v_{m,n}$ trennen, mit einer Farbe gefärbt. Mit Satz 2.4.2 ist das Rechteckgitter $G_{m,n}$ nicht rainbow-knotengefärbt und Bob gewinnt. □

Damit ist auch die Untersuchung der $m \times n$-Rechteckgitter für alle $m, n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Bob gewinnt also immer, wenn das Rechteckgitter mindestens drei Zeilen und vier Spalten hat.

3. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Rainbow-Knotenfärbung auf Graphen erklärt und spieltheoretisch untersucht. Wir haben hinreichende Bedingungen gezeigt, bei deren Erfülltsein Bob auf einem beliebigen Graphen G mit Knotenzusammenhangszahl $\kappa(G) \in \{1, 2, 3\}$ gewinnt. Die Suche nach den Rainbowspielverbindungszahlen rvc_{S_A} und rvc_{S_B} wurde auf Bäumen, Kreisen und Rechteckgittern abschliessend erledigt. Damit haben wir für Bäume, Kreise und Rechteckgitter die Grösse gefunden, ab der Bob immer gewinnt, unabhängig davon, ob er oder Alice beginnt. Wir haben für die untersuchten Graphen eine Gewinnstrategie in den Spielen S_A und S_B für Alice oder Bob angegeben.

Dabei konnten wir den Satz 2.4.14, der eine Gewinnstrategie für Bob liefert, erst ab einer gewissen Grösse anwenden. Auf kleineren Graphen hat uns der Satz 2.4.2 weitergeholfen, wonach Bob gewinnt, wenn es ihm gelingt, alle Knoten von zwei disjunkten q-s-trennenden Knotenmengen mit der gleichen Farbe zu färben. Wenn auch das auf manchen Graphen nicht möglich war, hatte Bob teilweise trotzdem eine Gewinnstrategie, die auf anderen Ideen beruhte.

3.1. Beobachtungen

Die Färbung eines Knotens wirkt sich nicht nur lokal aus, sondern hat Einfluss auf den ganzen Graphen. Dies zeigt sich eindrücklich bei der Färbung von Artikulationen. Wir haben gesehen, dass bereits zwei gleich gefärbte Artikulationen eine Rainbow-Knotenfärbung verunmöglichen. Dieser globale Einfluss erklärt auch, weshalb die Untersuchung des Graphen nicht in Teilprobleme aufgeteilt werden kann, sondern immer der ganze Graph betrachtet werden muss.

Die grösste Herausforderung war wohl die Niederschrift der Gewinnstrategien. Gerade weil immer der ganze Graph im Auge behalten werden muss, müssen nach jedem Zug von Alice und Bob alle Möglichkeiten des Gegners überprüft werden und dabei auch schon der weitere mögliche Spielverlauf berücksichtigt werden. Es hat sich gezeigt, dass dies am besten gelingt, wenn auf eine Endsituation „hingearbeitet“ wird. Das waren in den Strategien von Alice die unterschiedlichen Situation (I), (II), (III) und für Bob die gleich gefärbten Knoten von zwei trennenden Knotenmengen.

3.2. Weitere Ideen und Offene Fragen

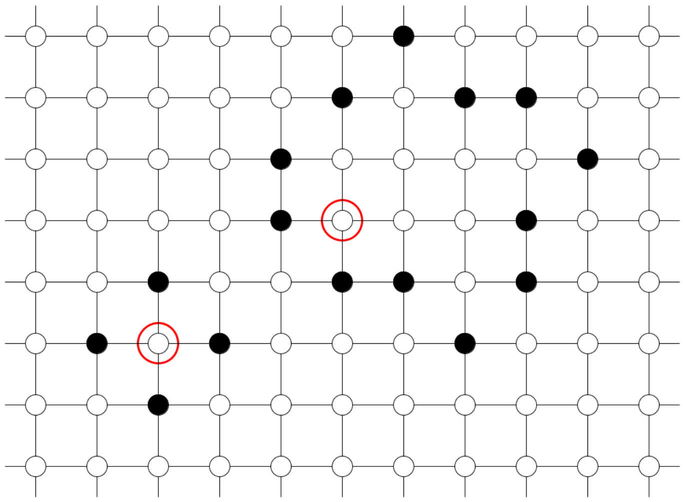
Als besonders kompliziert haben sich die „Grenzfälle“ $G_{3,3}$ sowie $G_{2,4}$ und $G_{3,4}$ (wenn Bob beginnt) erwiesen. Bei deren Untersuchung war manchmal ziemlich lange nicht klar, wer eine Gewinnstrategie hat.

Offene Frage 1 Gibt es im Spiel S_B auf dem Graphen $G_{3,4}$ eine einfachere Gewinnstrategie für Bob?

Auf Graphen ab einer gewissen Grösse scheint uns die Methode, Knoten von trennenden Mengen mit gleicher Farbe zu färben, am erfolgversprechendsten.

Dies führt zur Frage, ob es weitere Strategien für Bob gibt, die Knoten von trennenden Knotenmengen mit einer Farbe zu färben.

Auf den $m \times n$-Rechteckgittern $G_{m,n}$ konnten wir ab einer gewissen Grösse immer Knotenteilmengen aus $\mathcal{U}_B(G_{m,n})$ angeben. Darin waren immer Randknoten enthalten. Definieren wir ein unendliches Gitter G_∞ mit unendlich vielen Zeilen und unendlich vielen Spalten, so fehlen Randknoten. Hier wäre eine „Umzingelungstaktik" denkbar, ähnlich wie im Brettspiel Go. Und zwar versucht Bob im Gitter G_∞ die Knoten einer Knotenmenge T mit einer Farbe so zu färben, dass sie mindestens einen Knoten v einschliessen. Das heisst, das Gitter $G_\infty - T$ besteht dann aus zwei Komponenten, wobei eine Komponente endlich viele Knoten enthält, mindestens den Knoten v. Erreicht Bob die Färbung der Knoten einer zweiten solchen Knotenmenge, deren Knoten mit derselben Farbe gefärbt sind und die einen Knoten w einschliessen, so sind gemäss Satz 2.4.2 auf allen v-w-Wegen zwei Knoten gleich gefärbt.

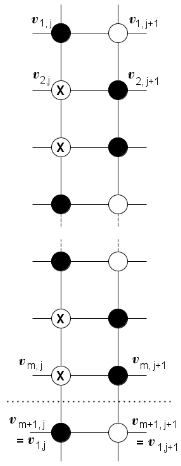


Offene Frage 2 Hat Bob mit der skizzierten Taktik auf einem unendlichen Gitter G_∞ tatsächlich eine Gewinnstrategie?

Werden im $(m+1) \times (n+1)$-Rechteckgitter erst die Knoten der ersten Zeile mit den Knoten der $(m+1)$-ten Zeile und dann die Knoten der ersten Spalte mit den Knoten der $(n+1)$-ten Spalte identifiziert, erhalten wir einen Torusgittergraphen $T_{m,n}$. Auch im Torusgittergraphen wird $\mathcal{U}_B(T_{m,n})$ leer sein.

Wir beschreiben grob eine ähnliche Taktik, mit der Bob eine Gewinnstrategie auf Torusgittergraphen $T_{m,n}$ hat:

Bob beginnt mit einem beliebigen Knoten der j-ten Spalte. Wenn möglich färbt er jeweils in der nächsten Zeile den Knoten der j-ten Spalte. Falls Alice diesen bereits gefärbt hat, färbt Bob in dieser Zeile den Knoten in der $(j+1)$-ten Spalte.



Ist in jeder Zeile ein Knoten der j-ten oder der $(j+1)$-ten Spalte mit gleicher Farbe gefärbt, wiederholt Bob das Ganze in zwei noch ungefärbten Spalten k und $(k+1)$, wobei er darauf achtet, dass mindestens eine Spalte zwischen der $(j+1)$-ten und der k-ten Spalte (beziehungsweise der $(k+1)$-ten und der j-ten Spalte) liegt. Damit hat er schliesslich die Knoten einer trennenden Knotenmenge $\bar{T}$ gefärbt, denn im Graphen $T_{m,n} - \bar{T}$ fehlen auch alle Kanten $e_{i,j} = \{v_{i,j}, v_{i,j+1}\}$ und $e_{i,k} = \{v_{i,k}, v_{i,k+1}\}$, $1 \leq i \leq m$, weshalb $T_{m,n} - \bar{T}$ zwei Komponenten hat.

Auf die gleiche Weise färbt Bob mit der gleichen Farbe eine zweite trennende Knotenmenge $\tilde{T}$ in der einen Komponente von $T_{m,n} - \bar{T}$.

Sobald Bob alle Knoten von zwei disjunkten trennenden Knotenmengen mit ein und derselben Farbe gefärbt hat, haben wir den Fall (a) in Proposition 2.4.1. Es gibt dann zwei Knoten q und s, die durch $\bar{T}$ und $\tilde{T}$ getrennt werden und mit Satz 2.4.2 nicht rainbow-knotenverbunden sind.

Offene Frage 3 Wie gross müssen m und n mindestens sein, damit Bob eine Gewinnstrategie auf dem Torusgittergraphen $T_{m,n}$ hat?

A. Anhang

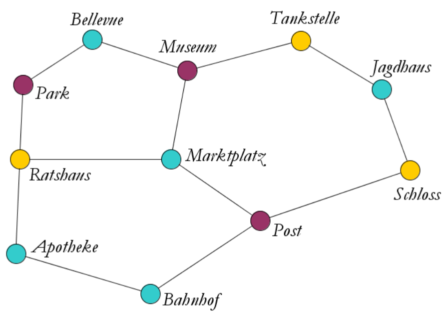
A.1. Zusammenstellung der Resultate

In dieser Arbeit wurden für die Graphen $G = (V, E)$ die nachstehend aufgelisteten Rainbowspielverbindungszahlen $rvc_{S_A}(G)$ und $rvc_{S_B}(G)$ gefunden.

	G	$rvc_{S_A}(G)$	Seite	$rvc_{S_B}(G)$	Seite
Bäume	$B_{1,l}, l \in \mathbb{N}$	1	32	1	32
	$B_{2,2j}, j \in \mathbb{N}$	∞	32	2	32
	$B_{2,2j+1}, j \in \mathbb{N}$	2	32	∞	32
	$B_{m,l}, m \geq 3, l \in \mathbb{N}$	∞	16	∞	16
Kreise	C_3, C_4, C_5	1	33	1	33
	C_6	∞	34	2	34
	$C_n, n \geq 7$	∞	35	∞	35
Rechteckgitter	$G_{2,3}$	2	37	2	38
	$G_{2,4}$	∞	38	4	39
	$G_{2,n}, n \geq 5$	∞	42	∞	42
	$G_{3,3}$	4	47	4	50
	$G_{3,4}$	∞	52	∞	52
	$G_{3,n}, n \geq 5$	∞	61	∞	61
	$G_{4,n}, n \geq 4$	∞	62	∞	64
	$G_{5,n}, n \geq 5$	∞	65	∞	67
	$G_{m,n}, m, n \geq 6$	∞	67	∞	67

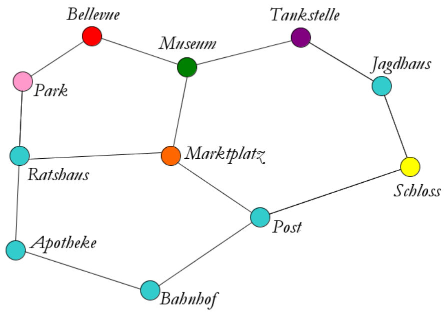
A.2. Lösung zur einleitenden Aufgabe

Charly hat für die Rainbow-Knotenfärbung der Strassenbahnnetz-Skizze drei Farben gebraucht:



Sicherheitshalber hat er noch einige weitere Sprüche getextet. Praktischerweise wurden die Plakate auf unterschiedlich farbiges Papier gedruckt. Würden Alice und Bob beide konstruktiv Plakate aufhängen, würden also Plakate in drei Farben ausreichen. Wie gehen die beiden vor?

Alice klebt ihr erstes blaues Plakat bei der Haltestelle *Apotheke* hin. Bob klebt darauf ebenfalls ein blaues Plakat beim *Rathaus* auf. Alice hängt dann bei der Haltestelle *Bellevue* ein rotes Plakat hin. Bob nimmt sich dann wieder ein blaues Plakat und hängt es beim *Bahnhof* auf. Alice hängt als Nächstes ein gelbes Plakat beim *Schloss* hin. Bob beklebt dann die Haltestelle beim *Jagdhaus* mit einem blauen Plakat. Alice klebt nun ein grünes Plakat bei der Haltestelle *Museum* hin, worauf Bob ein weiteres blaues Plakat bei der *Post* hinkleistert. Auch die übrigen Haltestellen *Park*, *Tankstelle* und *Marktplatz* erhalten ein Plakat. Hierfür wählt Bob beliebige Plakate, denn sein Ziel hat er erreicht: Alle Wege zwischen *Apotheke* und *Schloss* führen an zwei blauen Plakaten vorbei.



Leider ist es tatsächlich so, dass Charly unendlich viele Texte kreieren könnte - Bob hat unabhängig von der Anzahl unterschiedlicher Plakate immer die Möglichkeit, die auftragsgemässe Ausführung zu verhindern.

Wir untersuchen den Graphen auf Vereinigungen von trennenden Knotenmengen U, wie sie im Beispiel 2.4.6 vorkommen. Davon gibt es mehrere. Es gibt aber keine drei disjunkten Knotenteilmengen U_1, U_2 und U_3, die die Voraussetzungen im Satz 2.4.14 erfüllen. Wir finden aber vier Knotenteilmengen, die die Voraussetzungen im Korollar 2.4.17 erfüllen:

U_1 :=$\{$*Rathaus*, *Bellevue*, *Bahnhof*$\}$, U_2 :=$\{$*Tankstelle*, *Post*, *Schloss*$\}$, U_3 :=$\{$*Jadghaus*, *Museum*, *Post*$\}$ sowie U_4 :=$\{$*Schloss*, *Museum*, *Tankstelle*$\}$,

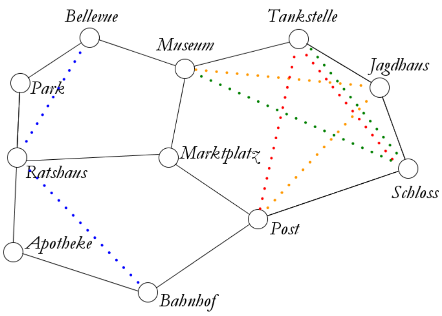
wobei die strategisch wichtige Haltestelle jeweils an erster Stelle steht.

(i) U_1 ist zu den Mengen U_2, U_3 und U_4 disjunkt,

(ii) die Schnittmenge $U_2 \cap U_3 \cap U_4$ ist leer,

(iii) keine der trennenden Knotenmengen $\{$*Rathaus*, *Bellevue*$\}$ oder $\{$*Rathaus*, *Bahnhof*$\}$ aus U_1 trennt eine der Mengen U_2, U_3 oder U_4,

(iv) keine der trennenden Knotenmengen aus U_2, U_3 oder U_4 teilt die Menge U_1.



Mit Korollar 2.4.17 hat Bob eine Strategie, die Plakate so aufzuhängen, dass Alice keine Chance hat, mit Bob den Auftrag ordentlich auszuführen - und zwar unabhängig davon, ob Alice oder Bob beginnt.

Literaturverzeichnis

[1] The 9/11 Commission Report, *www.9-11commission.gov/report/911Report.pdf*, abgerufen am 14. Oktober 2013.

[2] M. Aigner, *Diskrete Mathematik*, 6. Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.

[3] M. Bitz, *Finanzierungs- und entscheidungstheoretische Grundlagen der Betriebswirtschaft*, FernUniversität in Hagen, Kurs 00091, Version Wintersemester 2010/11.

[4] H.L. Bodlaender, *On the complexity of some coloring games*, Int. J. Found. Comput. Sci. **2**, no.2(1991), 133-147.

[5] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang, *Rainbow connection in graphs*, Math. Bohem. **133**(2008), 85-98.

[6] L. Chen, X. Li, M. Liu, *Nordhaus-Gaddum-type theorem for the rainbow vertex-connection number of a graph*, Util. Math. **86**(2011), 335-340.

[7] L. Chen, X. Li, Y. Shi, *The complexity of determining the rainbow vertex-connection of a graph*, Theoretical Computer Science, **412(35)**(2011), 4531-4535 .

[8] A. Diekmann, *Spieltheorie*, 2. Auflage, Rowohlt, 2010.

[9] R. Diestel, *Graphentheorie*, 4. Auflage, Springer, 2010.

[10] M. Krivelevich, R. Yuster, *The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree three*, Journal of Graph Theory **63(3)**(2009), 185-191.

[11] X. Li, Y. Shi, *On the rainbow vertex-connection*, Discuss. Math. Graph Theory **33(2)**(2013), 307-313.

[12] X. Li, Y. Sun, *Rainbow Connections of Graphs*, Springer, 2012.

[13] U. Seip, *Graphentheorie*, FernUniversität in Hagen, Kurs 01306, Version Wintersemester 2011/12.

[14] P. Tittmann, *Graphentheorie*, 2. Auflage, Hanser, 2011.

[15] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen, **100(1)**(1928), 295-320.

[16] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1944.

[17] E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, Proceedings of the Fifth International Congress Mathematics (1913), pp. 501-504.