FernUniversität in Hagen

Bachelorarbeit

Ein Hüllenoperator für komplexe Matroide

Author:
Paul-Christian Bürkner

Matrikelnummer:
8699402

Email-Adresse:
paul.buerkner@gmail.com

Betreuer:
Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Lehrstuhl:
Diskrete Mathematik und Optimierung

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Matroide und orientierte Matroide haben sich als wertvolle Werkzeuge im Umgang mit geometrischen und topologischen Objekten in Vektorräumen erwiesen [1]. In den vergangenen Jahren wurden verschiedene Versuche unternommen, eine Struktur zu finden, die für den $\mathbb{C}^n$ eine vergleichbare Rolle spielt, wie orientierte Matroide für den $\mathbb{R}^n$. Eine vielversprechende Antwort darauf gaben Anderson und Delucchi [1], aufbauend auf der Arbeit von Below et al. [2], mit ihrer Definition von *komplexen Matroiden*. Anderson und Delucchi [1] zeigten, dass für komplexe Matroide – in ähnlicher Weise wie für Matroide und orientierte Matroide – verschiedene kryptomorphe (d.h. sich gegenseitig determinierende) Axiomensysteme existieren.

Allerdings wurde die Frage nach der Existenz eines sinnvollen Hüllenoperators für komplexe Matroide bisher noch nicht beantwortet. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es deswegen, einige erste Befunde zu einem möglicherweise geeigneten Hüllenoperator zusammenzustellen und dabei auch auf einige generelle Eigenschaften von komplexen Matroiden einzugehen.

1.1 Matroide

Obwohl die vorliegende Arbeit die Thematik der komplexen Matroide behandelt, sollen zunächst einige Definitionen zu gewöhnlichen Matroiden gegeben werden, um vor diesem Hintergrund anschließend die Theorie der komplexen Matroide darzustellen. Es existieren verschiedene kryptomorphe Axiomensysteme für Matroide (siehe Kapitel 1 in [6]), von denen wir an dieser Stelle nur eines kurz vorstellen.

Definition (Kreis-Axiome für Matroide) Sei E eine endliche Menge. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{K}$ der Potenzmenge von E mit $\emptyset \notin \mathcal{K}$ ist das *Kreissystem eines Matroids M*, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

$$(\mathcal{K}\,1) \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}, X \subseteq Y : X = Y$$
$$(\mathcal{K}\,2) \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}, X \neq Y, f \in X \cap Y : \exists Z \in \mathcal{K} : Z \subseteq (X \cup Y) \backslash \{f\}.$$

Definition (Unabhängigkeitssystem) Sei $\mathcal{K}$ das Kreissystem eines Matroids M. Die Menge

$$\mathcal{U} := \{A \subseteq E \mid \nexists X \in \mathcal{K} : X \subseteq A\}$$

nennen wir *Unabhängigkeitssystem* von M und die Elemente von $\mathcal{U}$ heißen *unabhängige* Teilmengen von E. Eine unabhängige Teilmenge maximaler Kardinalität nennen wir *Basis* von M.

Definition (Rang und Korang) Sei M ein Matroid auf der Grundmenge E, $\mathcal{U}$ das Unabhängigkeitssystem von M und $A \subseteq E$. Dann definieren wir den *Rang* von A als

$$\mathrm{r}(A) = \max\{|B| \mid B \subseteq A, B \in \mathcal{U}\}$$

und den *Korang* von A als

$$\mathrm{cr}(A) = |E| - \mathrm{r}(A).$$

Weiterhin definieren wir den Rang von M als $\mathrm{r}(M) := \mathrm{r}(E) = \mathrm{r}(B)$ für jede Basis B von M.

Definition (Doppelkreis, modulares Paar) Sei $\mathcal{K}$ das Kreisystem eines Matroids M und seien $X, Y \in \mathcal{K}$. Die Menge $X \cup Y$ heißt *Doppelkreis*, wenn gilt:

$$\mathrm{r}(X \cup Y) = |X \cup Y| - 2.$$

Wir nennen X, Y ein *modulares Paar*, wenn gilt:

$$\mathrm{r}(X \cup Y) + \mathrm{r}(X \cap Y) = \mathrm{r}(X) \cup \mathrm{r}(Y).$$

Proposition 1.1 *Sei $\mathcal{K}$ das Kreissystem eines Matroids M und seien $X, Y \in \mathcal{K}$, dann ist $X \cup Y$ genau dann ein Doppelkreis, wenn X, Y ein modulares Paar ist.*

Beweis Auf Grund von ($\mathcal{K}$1) ist $X \cap Y$ eine unabhängige Menge und es gilt damit $\mathrm{r}(X \cap Y) = |X \cap Y|$. Weiterhin ist nach Definition der Rangfunktion $\mathrm{r}(X) = |X| - 1$ und $\mathrm{r}(Y) = |Y| - 1$. Dies bedeutet zusammengenommen:

$$\mathrm{r}(X) + \mathrm{r}(Y) - \mathrm{r}(X \cap Y) = |X| + |Y| - |X \cap Y| - 2 = |X \cup Y| - 2,$$

Es ist also

$$\mathrm{r}(X \cup Y) = \mathrm{r}(X) + \mathrm{r}(Y) - \mathrm{r}(X \cap Y) \Leftrightarrow \mathrm{r}(X \cup Y) = |X \cup Y| - 2,$$

was zu zeigen war. $\square$

Eine Erweiterung des Konzepts der Matroide stellen orientierte Matroide dar. Orientierte Matroide werden nicht mehr nur auf der Grundmenge E definiert, sondern auf der Menge $S^0 \times E$, wobei $S^0 := \{-1, 1\}$. Auf diese Weise bekommen die Elemente von E eine Art Vorzeichen zugewiesen. Orientierte Matroide haben sich als ein wichtiges Werkzeug im Umgang mit dem $\mathbb{R}^n$ herausgestellt. Auch für sie existieren verschiedene kryptomorphe Axiomensysteme [3]. Da der Fokus dieser Arbeit nicht auf orientierten Matroiden liegen soll, verzichten wir an dieser Stelle auf deren ausführliche Betrachtung.

1.2 Komplexe Matroide

Die grundlegende Idee der in dieser Arbeit betrachteten komplexen Matroide besteht darin, die Elemente von E nicht mit einem Vorzeichen wie bei orientierten Matroiden, sondern mit einer *Phase* zu versehen. Als Phasen bezeichnen wir die Elemente des komplexen Einheitskreises S^1, wobei wir S^1 formal wie folgt schreiben können:

$$S^1 := \{e^{i\lambda} \mid \lambda \in [0, 2\pi]\}.$$

Die Phase einer beliebigen komplexen Zahl $re^{i\lambda} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ definieren wir als

$$\mathrm{ph}(re^{i\lambda}) := e^{i\lambda}$$

sowie $\mathrm{ph}(A) := \{\mathrm{ph}(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ für $A \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Definition (Phasische Hülle) Die *Phasische Hülle* pconv einer endlichen Menge $S \subset S^1 \cup \{0\}$ wird definiert als

$$\mathrm{pconv}(S) := \{\alpha \in S^1 \cup \{0\} \mid \alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in S,\ b_i \in \mathbb{R}^+\ \}.$$

Um komplexe Matroide definieren zu können, benötigen wir noch etwas mehr Notation. In dieser Arbeit wird eine etwas andere Schreibweise als in [1] verwendet, da dadurch die Definition und Betrachtung von Mengenoperatoren auf komplexen Matroiden einfacher und intuitiver wird (siehe dazu auch [4, 5]).

Für eine Menge $A \subseteq S^1 \times E$ sei der *Support* von A definiert als

$$\mathrm{supp}(A) := \{f \mid (\alpha, f) \in A\}.$$

Weiterhin definieren wir für $\alpha \in S^1$ die Menge αA durch

$$\alpha A := \{(\alpha\beta, f) \mid (\beta, f) \in A\}.$$

Sei auch $B \subseteq S^1 \times E$, dann definieren wir den *Separator* von A und B durch

$$\mathrm{sep}(A, B) := \mathrm{supp}(A \cap -B).$$

Definition (Kreis-Axiome für komplexe Matroide) Sei E eine endliche Menge. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{C}$ der Potenzmenge von $S^1 \times E$ mit $\emptyset \notin \mathcal{C}$ ist das *Kreissystem eines komplexen Matroids* $\mathcal{M}$, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

($\mathcal{C}$ 1) $\forall X \in \mathcal{C}, \forall \alpha \in S^1 : \alpha X \in \mathcal{C}$ (Symmetrie)

($\mathcal{C}$ 2) $\forall X, Y \in \mathcal{C},\ \mathrm{supp}(X) = \mathrm{supp}(Y)\ \exists \alpha \in S^1 : X = \alpha Y$ (Unvergleichbarkeit)

($\mathcal{C}$ 3) $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ mit $\mathrm{supp}(X) \cup \mathrm{supp}(Y)$ ist ein Doppelkreis in $\{\mathrm{supp}(X) | X \in \mathcal{C}\}$, $\forall e, f \in \mathrm{supp}(X) \cup \mathrm{supp}(Y)$ mit $e \in \mathrm{sep}(X, Y), f \notin \mathrm{sep}(X, Y)\ \exists Z \in \mathcal{C}$:

- $f \in \mathrm{supp}(Z) \subseteq (\mathrm{supp}(X) \cup \mathrm{supp}(Y))\backslash e$
- $\forall(\alpha, g) \in Z$ mit $(\beta, g) \in X, (\gamma, g) \in Y : \alpha \in \mathrm{pconv}(\{\beta, \gamma\})$.

(Doppelkreiselimination)

Definition (Phirotope-Axiome für komplexe Matroide) Sei E eine endliche Menge. Eine Funktion $\varphi : E^d \to S^1 \cup \{0\}$ ist ein *Phirotope vom Rang d eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$*, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(φ1) φ ist nicht die Nullfunktion

(φ2) φ ist alternierend

(φ3) $\forall \{f_1, ..., f_{d+1}\}, \{e_1, ..., e_{d-1}\} \subseteq E$:
$$0 \in \operatorname{pconv}(\{(-1)^k \varphi(\{f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_{d+1}\})\varphi(\{f_k, e_1, ..., e_{d-1}\})\}).$$

Anderson und Delucchi [1] konnten zeigen, dass die Kreis-Axiome und die Phirotope-Axiome zueinander kryptomorph sind, d.h. beide Darstellungen ein und derselben Struktur sind, die wir als komplexes Matroid $\mathcal{M}$ bezeichnen.

Bemerkung Ist $\mathcal{C}$ das Kreissystem und φ das Phirotope eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$, dann ist die Menge $\{\operatorname{supp}(X) \mid X \in \mathcal{C}\}$ das Kreissystem eines Matroids $M_{\mathcal{C}}$ und der Träger von φ die Menge der Basen eines Matroids M_φ. Weiterhin gilt $M_{\mathcal{C}} = M_\varphi$ [1] und wir nennen $M := M_{\mathcal{C}} = M_\varphi$ auch das von $\mathcal{M}$ erzeugte Matroid.

Definition (Rang und Korang komplexer Matroide) Sei $\mathcal{M}$ ein komplexes Matroid auf der Grundmenge E und sei $A \subseteq S^1 \times E$. Dann definieren wir den *Rang* von A als

$$\mathrm{r}(A) := \mathrm{r}(\operatorname{supp}(A))$$

und den *Korang* von A als

$$\mathrm{cr}(A) := \mathrm{cr}(\operatorname{supp}(A)) = |E| - \mathrm{r}(\operatorname{supp}(A)).$$

Dabei bezeichne $\mathrm{r}(\operatorname{supp}(A))$ bzw. $\mathrm{cr}(\operatorname{supp}(A))$ den Rang bzw. Korang von $\operatorname{supp}(A)$ bezogen auf das von $\mathcal{M}$ erzeugte Matroid M. Weiterhin definieren wir den Rang von $\mathcal{M}$ durch $\mathrm{r}(\mathcal{M}) := \mathrm{r}(M)$.

Beispiel 1.2 Sei M eine komplexe Matrix mit n Zeilen und $m > n$ Spalten. Seien $v_1, ..., v_m$ die Spaltenvektoren von M und seien je n dieser Vektoren linear unabhängig (M hat also Rang n). Notwendigerweise sind $n+1$ paarweise verschiedene Vektoren $w_1, ..., w_{n+1} \in \{v_1, ..., v_m\}$ linear abhängig. Gibt es ein $A := (\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) \in (\mathbb{C}\backslash\{0\})^{n+1}$, sodass $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i w_i = 0$ gilt, so nennen wir

$$W := \{(\operatorname{ph}(\alpha_1), w_1), ..., (\operatorname{ph}(\alpha_{n+1}), w_{n+1})\} \subset S^1 \times E$$

einen Kreis von M. Die Menge aller möglichen Kreise von M bildet dann das Kreissystem $\mathcal{C}$ eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$, wie wir nun zeigen wollen.

Die Symmetrie ist erfüllt, denn es gilt für beliebiges $\alpha \in S^1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha\alpha_i w_i = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i w_i = \alpha 0 = 0.$$

Sei M_W die Matrix bestehend aus den Spaltenvektoren $w_1, ..., w_{n+1}$. Da je n paarweise verschiedene Vektoren aus $\{w_1, ..., w_{n+1}\}$ linear unabhängig sind, ist $\dim(\ker(M_W)) = 1$. Gäbe es eine Lösung $B = (\beta_1, ..., \beta_{n+1}) \in (\mathbb{C}\backslash\{0\})^{n+1}$ von $\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i w_i = 0$ mit $B \neq \alpha A$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$, so wäre offenbar $\dim(\ker(M_W)) > 1$, was nicht sein kann. Somit muss $B = \alpha A$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten und es folgt daraus die Unvergleichbarkeit.

Wir zeigen, dass auch die Doppelkreiselimination gilt. Seien dazu W_1, W_2 Kreise von M und $\operatorname{supp}(W_1) \cup \operatorname{supp}(W_2)$ ein Doppelkreis. Wegen $\operatorname{r}(\operatorname{supp}(W_1) \cup \operatorname{supp}(W_2)) = n$ gilt deswegen

$$|\operatorname{supp}(W_1) \cup \operatorname{supp}(W_2)| = n + 2.$$

Wegen $|\operatorname{supp}(W_1)| = |\operatorname{supp}(W_2)| = n + 1$ bedeutet dies, dass es paarweise verschiedene Spaltenvektoren $w_1, ..., w_n$ von M gibt mit

$$w_1, ..., w_n \in \operatorname{supp}(W_1) \cap \operatorname{supp}(W_2).$$

Sei v_1 das einzige Element von $\operatorname{supp}(W_1) \setminus \operatorname{supp}(W_2)$ und v_2 das einzige Element von $\operatorname{supp}(W_2) \setminus \operatorname{supp}(W_1)$. Da W_1, W_2 Kreise sind, gibt es $(\alpha_{v_1}, \alpha_1, ..., \alpha_n), (\beta_{v_2}, \beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sodass

$$\alpha_{v_1} v_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0 = \beta_{v_2} v_2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i.$$

Sei o.E. $w_1 \in \operatorname{sep}(W_1, W_2)$, dann gilt nach Definition $\operatorname{ph}(\alpha_1) = -\operatorname{ph}(\beta_1)$. Es ist also

$$\alpha_1 w_1 = -\frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|} \beta_1 w_1.$$

Nach Umformen und Einsetzen in die obere Gleichung ergibt sich

$$\alpha_{v_1} v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha_i + \frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|} \beta_i) w_i + \frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|} \beta_{v_2} v_2 = 0.$$

Wäre $\alpha_i + \frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|} \beta_i = 0$ für ein $i \in \{2, ..., n\}$, hätte dies wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, w_2, ..., w_{i-1}, w_{i+1}, ..., w_n, v_2$ zur Folge, dass (unter anderem) $\alpha_{v_1} = 0$ sein müsste, was nach Definition nicht sein kann. Dies bedeutet aber, dass

$$W_3 := \{(\operatorname{ph}(\alpha_{v_1}), v_1), (\operatorname{ph}(\alpha_2 + \frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|} \beta_2), w_2), ..., (\operatorname{ph}(\alpha_n + \frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|} \beta_n), w_n), (\operatorname{ph}(\frac{|\alpha_1|}{|\beta_1|} \beta_{v_2}), v_2)\}$$

ein Kreis von M ist. Weiterhin gilt insbesondere $w \in \operatorname{supp}(W_3)$ für alle $w \in \operatorname{supp}(W_1) \cup \operatorname{supp}(W_2)$ mit $w \notin \operatorname{sep}(W_1, W_2)$.

Wir sehen sofort, dass auch die letzte Forderung des Eliminationsaxioms für alle Elemente von W_3 erfüllt ist. Es gilt also die Doppelkreiselimination und damit ist $\mathcal{C}$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$. $\square$

Beispiel 1.3 Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, dann bilden die Kreise von G das Kreissystem $\mathcal{K}$ eines orientierten Matroids M [5]. Ein Element $X \in \mathcal{K}$ können wir auch schreiben als $X = \{(\alpha_1, f_1), ..., (\alpha_k, f_k) \in S^0 \times E\ \}$. Sei nun die Menge $\mathcal{C}$ definiert als

$$\mathcal{C} := \{\alpha X \mid X \in \mathcal{K}, \alpha \in S^1\ \},$$

so bildet $\mathcal{C}$ offensichtlich das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$. Außerdem sehen wir sofort, dass das Eliminationsaxiom sogar für alle Paare von Kreisen in $\mathcal{C}$ und nicht nur für alle Doppelkreise gilt. $\square$

1.3 Rephasierung komplexer Matroide

Bevor wir uns mit Hüllenoperatoren auf komplexen Matroiden beschäftigen, wollen wir zunächst noch eine Transformation komplexer Matroide betrachten, die für spätere Beweise über die Eigenschaften von Hüllenoperatoren relevant sein wird.

Definition (Rephasierung) Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem und φ das Phirotope eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ auf der Grundmenge E. Sei außerdem $A \subseteq S^1 \times E$ und $\psi : E \to S^1$ eine Abbildung. Dann definieren wir

$$A_\psi := \{(\psi(f)^{-1}\alpha, f) \mid (\alpha, f) \in A\}$$

und das Mengensystem $\mathcal{C}_\psi$ durch

$$X \in \mathcal{C} \Leftrightarrow X_\psi \in \mathcal{C}_\psi \,.$$

Außerdem definieren wir für $f_1, ..., f_d \in E$ die Funktion φ_ψ durch

$$\varphi_\psi(f_1, ..., f_d) := \prod_{i=1}^{d} \psi(f_i)\varphi(f_1, ..., f_d)$$

(siehe auch [2] für eine vergleichbare Definition der Rephasierung eines Phirotopes).

Bemerkung In Satz 1.6 wird sich zeigen, dass zwischen C_ψ und φ_ψ ein ganz enger Zusammenhang besteht, insofern als dass beide dasselbe komplexe Matroid erzeugen.

Proposition 1.4 *Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ auf der Grundmenge E und sei $\psi : E \to S^1$ eine Abbildung. Dann ist $\mathcal{C}_\psi$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_\psi}$.*

Beweis Ist $X \in \mathcal{C}$, so gilt $\alpha X \in \mathcal{C}$ für jedes $\alpha \in S^1$, denn $\mathcal{C}$ ist ein komplexes Matroid. Ist entsprechend $X_\psi \in \mathcal{C}_\psi$, so gilt wegen $\alpha X \in \mathcal{C}$ auch $\alpha X_\psi = (\alpha X)_\psi \in \mathcal{C}_\psi$ und damit ($\mathcal{C}\,1$).

Angenommen die Unvergleichbarkeit wäre für Kreise $X_\psi, Y_\psi \in \mathcal{C}_\psi$ nicht erfüllt, dann wäre sie nach Definition von $\mathcal{C}_\psi$ auch für $X, Y \in \mathcal{C}$ nicht erfüllt, was aber ausgeschlossen ist, da $\mathcal{C}$ ein komplexes Matroid ist. Also gilt auch ($\mathcal{C}\,2$).

Wir zeigen, dass auch die Doppelkreiselimination gilt. Offensichtlich ist $\mathrm{supp}(X_\psi) \cup \mathrm{supp}(Y_\psi)$ genau dann ein Doppelkreis, wenn $\mathrm{supp}(X) \cup \mathrm{supp}(Y)$ ein Doppelkreis ist. Wegen $(-X)_\psi = -X_\psi$ gilt für beliebiges $e \in E$ genau dann $e \in \mathrm{sep}(X_\psi, Y_\psi)$, wenn $e \in \mathrm{sep}(X, Y)$ ist.

Da der Support eines Kreises nicht von den Phasen der Elemente des Kreises abhängt, gilt es nur noch zu beweisen, dass die letzte Forderung des Eliminationsaxioms erfüllt ist. Nach Definition von C_ψ gilt $(\alpha, f) \in X$ genau dann, wenn $(\psi(f)^{-1}\alpha, f) \in X_\psi$ ist und für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in S^1$ gilt nach Definition von pconv:

$$\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\beta, \gamma\}) \Leftrightarrow \psi(f)^{-1}\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\psi(f)^{-1}\beta, \psi(f)^{-1}\gamma\}).$$

Erfüllt $Z \in \mathcal{C}$ die Voraussetzungen des Eliminationsaxioms für die Kreise $X, Y \in \mathcal{C}$, so erfüllt Z_ψ deswegen die Voraussetzungen des Eliminationsaxiom für die Kreise $X_\psi, Y_\psi \in \mathcal{C}_\psi$ und es gilt entsprechend ($\mathcal{C}\,3$). $\square$

Proposition 1.5 *Sei φ das Phirotope eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ auf der Grundmenge E und sei $\psi : E \to S^1$ eine Abbildung. Dann ist φ_ψ das Phirotope eines komplexen Matroids $\mathcal{M}_{\varphi_\psi}$.*

Beweis Da das Bild von ψ die Null nicht enthält, ist die Gültigkeit von (φ1) für φ_ψ unmittelbar klar. Auch die Alterniertheit (φ2) von φ_ψ ist offensichtlich, denn das Produkt $\prod_{i=1}^{d} \psi(f_i)$ hängt nicht von der Sortierung der f_i ab.

Es bleibt (φ3) zu zeigen. Da φ ein Phirotope ist, gilt für beliebige Teilmengen $\{f_1, ..., f_{d+1}\}, \{e_1, ..., e_{d-1}\} \subseteq E$ nach Definition von pconv:

$$
\begin{aligned}
0 &\in \prod_{i=1}^{d+1} \psi(f_i) \prod_{i=1}^{d-1} \psi(e_i)\, \mathrm{pconv}(\{(-1)^k \varphi(\{f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_{d+1}\})\varphi(\{f_k, e_1, ..., e_{d-1}\})\}) \\
&= \mathrm{pconv}(\{\prod_{i=1}^{d+1} \psi(f_i) \prod_{i=1}^{d-1} \psi(e_i)(-1)^k \varphi(\{f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_{d+1}\})\varphi(\{f_k, e_1, ..., e_{d-1}\})\}) \\
&= \mathrm{pconv}(\{(-1)^k \prod_{i=1}^{k-1} \psi(f_i) \prod_{i=k+1}^{d+1} \psi(f_i)\varphi(\{f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_{d+1}\}) \\
&\qquad\qquad \psi(f_k) \prod_{i=1}^{d-1} \psi(e_i)\varphi(\{f_k, e_1, ..., e_{d-1}\})\}) \\
&= \mathrm{pconv}(\{(-1)^k \varphi_\psi(\{f_1, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ..., f_{d+1}\})\varphi_\psi(\{f_k, e_1, ..., e_{d-1}\})\})
\end{aligned}
$$

Somit ist auch (φ3) für φ_ψ erfüllt. □

Satz 1.6 *Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem und φ das Phirotope eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ auf der Grundmenge E und sei $\psi : E \to S^1$ eine Abbildung. Dann ist $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_\psi} = \mathcal{M}_{\varphi_\psi}$.*

Beweis Da die Phirotope-Axiome kryptomorph zu den Kreis-Axiomen sind, reicht es offensichtlich zu zeigen, dass das durch φ_ψ induzierte Kreissystem $\mathcal{C}_{\varphi_\psi}$ gleich $\mathcal{C}_\psi$ ist.

Sei $X_{\varphi_\psi} \in \mathcal{C}_{\varphi_\psi}$ beliebig und seien $(\alpha_{\psi 0}, f_0), ..., (\alpha_{\psi k}, f_k) \in X_{\varphi_\psi}$ alle Elemente von X_{φ_ψ}. Sei weiterhin $\{f_1, ..., f_d\} \in E$ eine beliebige Basis des Matroids $\mathcal{M}_{\varphi_\psi}$, sodass $\mathrm{supp}(X_{\varphi_\psi}) \backslash f_0 \subseteq \{f_1, ..., f_d\}$. Dabei entsprechen die Elemente $f_1, ..., f_k$ aus $\mathrm{supp}(X_{\varphi_\psi})$ o.E. den Elementen $f_1, ..., f_k$ der gewählten Basis.

Nach Theorem A aus [1] sind dann die Phasen α_{ψ_i} für alle $i \in \{0, ..., k\}$ determiniert durch

$$\frac{\alpha_{\psi i}}{\alpha_{\psi 0}} = (-1)^i \frac{\varphi_\psi(f_0, ..., f_{i-1}, f_{i+1}, ..., f_d)}{\varphi_\psi(f_1, ..., f_d)}.$$

Da φ_ψ genau dann nicht Null ist, wenn φ nicht Null ist, erzeugen beide Phirotope das selbe Matroid M (siehe Bemerkung 2.5 in [1]).

Da $\mathcal{C}_{\varphi_\psi}$ und $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}$ die von φ_ψ und φ induzierten komplexen Kreissysteme sind, erzeugen auch $\mathcal{C}_{\varphi_\psi}$ und $\mathcal{C}$ das Matroid M (siehe Korollar 2.11 in [1]).

Damit gibt es ein $X \in \mathcal{C}$ mit $\operatorname{supp}(X) = \operatorname{supp}(X_{\varphi_\psi})$. Seien $(\alpha_0, f_0), ..., (\alpha_k, f_k) \in X$ alle Elemente von X. Wegen der Symmetrie von $\mathcal{C}$ können wir o.E. $\alpha_0 := \psi(f_0)\alpha_{\psi 0}$ wählen, wodurch X dann eindeutig bestimmt ist. Mit Hilfe der Definition von φ_ψ und Theorem A aus [1] erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{\psi i}}{\alpha_{\psi 0}} &= (-1)^i \frac{\varphi_\psi(f_0, ..., f_{i-1}, f_{i+1}, ..., f_d)}{\varphi_\psi(f_1, ..., f_d)} \\
&= (-1)^i \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \psi(f_j) \prod_{j=i+1}^{d} \psi(f_j) \varphi(f_0, ..., f_{i-1}, f_{i+1}, ..., f_d)}{\prod_{j=0}^{d} \psi(f_j)\varphi(f_1, ..., f_d)} \\
&= (-1)^i \frac{\psi(f_0)\varphi(f_0, ..., f_{i-1}, f_{i+1}, ..., f_d)}{\psi(f_i)\varphi(f_1, ..., f_d)} \\
&= \frac{\psi(f_i)^{-1}}{\psi(f_0)^{-1}} \frac{\alpha_i}{\alpha_0}.
\end{aligned}$$

Nach Wahl von α_0 ist $\alpha_{\psi 0} = \psi(f_0)^{-1}\alpha_0$, woraus $\alpha_{\psi i} = \psi(f_i)^{-1}\alpha_i$ für alle $i \in \{0, ..., k\}$ folgt. Dies bedeutet aber $X_{\varphi_\psi} = X_\psi$ und damit auch $\mathcal{C}_{\varphi_\psi} = \mathcal{C}_\psi$. □

2 Hüllenoperatoren für komplexe Matroide

Das zentrale Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Suche nach einem geeigneten Hüllenoperator für komplexe Matroide. Zu diesem Zweck werden wir verschiedene Mengenoperatoren und ihre Eigenschaften genauer betrachten. Besonderes Augenmerk wird darauf gelegt, welche dieser Operatoren bereits Hüllenoperatoren sind, beziehungsweise wie Hüllenoperatoren aus ihnen erzeugt werden können.

2.1 Defintionen

Definition Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ über der Grundmenge E und H ein Mengenoperator auf der Potenzmenge von $S^1 \times E$. Erfüllt H für beliebige Mengen $A, B \in S^1 \times E$ mit $A \subseteq B$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned}
&A \subseteq H(A) \qquad \text{(Extensivität)} \\
&H(A) \subseteq H(B) \qquad \text{(Monotonie)} \\
&H(H(A)) = H(A) \qquad \text{(Stabilität)},
\end{aligned}$$

so nennen wir H einen *Hüllenoperator*.

Definition Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ über der Grundmenge E und sei $A \subseteq S^1 \times E$ eine nichtleere Teilmenge, dann definieren wir

$$\begin{aligned}
\phi_1(A) &:= A \cup \{(\alpha, f) \in S^1 \times E \mid \exists X \in \mathcal{C} : (-\alpha, f) \in X \subseteq A \cup (-\alpha, f)\}, \\
\phi_2(A) &:= A \cup \{(\alpha, f) \in S^1 \times E \mid \exists (\beta, f), (\gamma, f) \in A : \alpha \in \operatorname{pconv}(\{\beta, \gamma\})\}
\end{aligned}$$

sowie $\phi_1(\emptyset) = \phi_2(\emptyset) := \emptyset$. Weiterhin definieren wir

$$\phi(A) := \phi_1(A) \cup \phi_2(A).$$

Gilt $\phi(A) = A$, so nennen wir A *konvex abgeschlossen* oder einfach *konvex.* Außerdem definieren wir $\operatorname{conv}(A)$ als die kleinste konvex abgeschlossene Menge mit $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$ und nennen $\operatorname{conv}(A)$ die *konvexe Hülle* von A. Dass diese Definition sinnvoll ist, zeigt sich in Proposition 2.3.

Bemerkung Der Operator ϕ_1 ist eine Verallgemeinerung des Hüllenoperators conv für orientierte Matroide aus [5].

Proposition 2.1 *Die Operatoren ϕ_1, ϕ_2 und ϕ sind extensiv und monoton, ϕ_2 ist zusätzlich stabil und damit ein Hüllenoperator.*

Beweis Die Extensivität und Monotonie sehen wir ϕ_1 und ϕ_2 unmittelbar an. Als Vereinigung monotoner und extensiver Operatoren ist ϕ monoton und extensiv. Die Stabilität von ϕ_2 folgt unmittelbar aus der Definition von pconv. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass ϕ_1 im Allgemeinen nicht stabil ist.

Beispiel 2.2 Wir benutzen das Beispiel 6.1 aus [1]. Sei dazu die komplexe Matrix M definiert durch

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & i & 1-i \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -i & 3+i \\ -i & 0 & -i & 0 & 2i & -i & -2i \\ -1 & 0 & 0 & -i & i+1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

wobei wir mit $v_1, ..., v_7$ die Spalten von M bezeichnen. Die Vektoren $(1,1,1,1,1,0,0)$ und $(-1,0,0,1,1,1,1)$ haben minimalen Support unter allen Vektoren aus $\ker(M)$, was bedeutet, dass

$$X := \{(1,v_1),(1,v_2),(1,v_3),(1,v_4),(1,v_5)\},$$
$$Y := \{(-1,v_1),(1,v_4),(1,v_5),(1,v_6),(1,v_7)\}$$

Kreise des durch M erzeugten komplexen Matroids $\mathcal{C}$ sind [1].

Wir definiern nun die Menge A durch

$$A := \{(1,v_2),(1,v_3),(1,v_4),(1,v_5),(1,v_6)\},$$

dann gilt nach Definition von ϕ_1, dass $(-1,v_1) \in \phi_1(A)$, denn

$$(1,v_1) \in X \subseteq (1,v_1) \cup A.$$

Daraus folgt wiederum, dass $(-1,v_7) \in \phi_1(\phi_1(A))$, denn

$$(1,v_7) \in Y \subseteq (1,v_7) \cup (-1,v_1) \cup A \subseteq (1,v_7) \cup \phi_1(A).$$

In jedem Fall ist $(-1,v_7) \notin A$ und es bleibt zu zeigen, dass auch $(-1,v_7) \notin \phi_1(A) \backslash A$ ist. Angenommen es wäre $(-1,v_7) \in \phi_1(A)\backslash A$, dann müsste es einen Kreis $Z \in \mathcal{C}$ geben mit

$$(1,v_7) \in Z \subseteq (1,v_7) \cup A$$

Dies würde nach Definition von A implizieren, dass die Phasen aller Elemente in Z reell sind und dass $v_1 \notin \operatorname{supp}(Z)$ ist, denn A enthält nur Elemente mit reellen Phasen und kein Element, in dem v_1 vorkommt. Anderson und Delucchi [1] führten in ihrem Beispiel alle möglichen Kreise mit einem Support aus $\{v_2, ..., v_7\}$ auf, wobei keiner dieser Kreise nur relle Phasen hatte. Dies bedeutet aber, dass ein $Z \in \mathcal{C}$ mit obiger Eigenschaft nicht existieren kann und es gilt demnach

$$(-1,v_7) \in \phi_1(\phi_1(A))\backslash\phi_1(A).$$

Das heißt aber nichts anderes, als dass ϕ_1 im Allgemeinen nicht stabil ist. $\square$

Proposition 2.3 *Der Operator* conv *ist wohldefiniert und ein Hüllenoperator.*

Beweis Sei $A \subseteq S^1 \times E$ beliebig gewählt. Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{conv}(A)$ wohldefiniert ist. Da die Menge $S^1 \times E$ offensichtlich konvex ist, gibt es immer eine konvexe Obermenge von A. Ist I eine Indexmenge und sind A_i mit $i \in I$ alle konvexen Obermengen von A, dann ist $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ und wegen der Monotonie von ϕ gilt weiterhin

$$\phi(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} \phi(A_i) = \bigcap_{i\in I} A_i.$$

Somit ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ die kleinste konvexe Obermenge von A und es ist demnach $\mathrm{conv}(A) = \bigcap_{i\in I} A_i$, was insbesondere bedeutet, dass $\mathrm{conv}(A)$ wohldefiniert ist.

Wir zeigen nun, dass conv ein Hüllenoperator ist. Nach Definition gilt $A \subseteq \mathrm{conv}(A)$ und damit die Extensivität. Auch die Stabilität ist trivial, denn nach Definition ist $\mathrm{conv}(A)$ bereits konvex abgeschlossen. Es bleibt also die Monotonie zu zeigen.

Sei dazu $B \subseteq S^1 \times E$ mit $A \subseteq B$ beliebig gewählt. Es ist $A \subseteq \mathrm{conv}(A)$ sowie

$$A \subseteq B \subseteq \mathrm{conv}(B).$$

Da $\mathrm{conv}(A)$ und $\mathrm{conv}(B)$ konvexe Mengen sind, ist auch $C := \mathrm{conv}(A) \cap \mathrm{conv}(B)$ konvex, wie wir bereits im Beweis der Wohldefiniertheit festgestellt haben. Wegen $C \subseteq \mathrm{conv}(A)$ muss nach Definition von $\mathrm{conv}(A)$ notwendigerweise $C = \mathrm{conv}(A)$ gelten, denn sonst wäre C eine kleinere konvexe Menge als $\mathrm{conv}(A)$, die A enthält. Folglich ist $\mathrm{conv}(A) \subseteq \mathrm{conv}(B)$, was bedeutet, dass conv auch monoton ist. $\square$

Wir wissen nun, dass conv ein Hüllenoperator ist. Doch noch ist für gegebenes $A \subseteq S^1 \times E$ unklar, wie $\mathrm{conv}(A)$ berechnet werden kann. Der folgende Satz gibt dazu einen ersten Anhaltspunkt.

Satz 2.4 *Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{C}$ über Grundmenge E, dann gibt es ein $S < \infty$, sodass ϕ^S stabil ist und es ist $\phi^S = \mathrm{conv}$.*

Beweis Sei $A \subseteq S^1 \times E$ eine beliebige Menge und sei für festes $f \in E$ die Menge $A_f \subseteq S^1 \times f$ definiert durch

$$A_f := \{(\alpha, f) \mid (\alpha, f) \in A\}.$$

Nach Definition von ϕ_2 gibt es (unter Umständen leere) Intervalle $I_1, I_2 \subseteq S^1$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, sodass die Menge P_f der Phasen von $\phi_2(A_f) = \phi_2(A)_f$ geschrieben werden kann als

$$P_f = I_1 \cup I_2,$$

wobei $I_1 \neq \emptyset \neq I_2$ genau dann gilt, wenn $A_f = \{(\beta, f), (-\beta, f)\}$ für ein $\beta \in S^1$. Ist nur eines der beiden Intervalle nicht leer und enthält es mehr als einen Punkt, so kann es entweder abgeschlossen, offen oder zu einer der beiden Seiten halboffen sein.

Die Menge $\phi_2(A)_f$ lässt sich also vollständig durch 4 Daten beschreiben, nämlich 2 Daten für die Grenzen des nichtleeren, mehr als einen Punkt enthaltenden Intervalls (wir wählen o.E. I_1), 1 Datum für die Information von welcher Form I_1 ist (abgeschlossen, offen oder zu einer der beiden Seiten halboffen) und 1 Datum für die binäre Information, ob der Spezialfall $I_1 \neq \emptyset \neq I_2$ eingetreten ist.

Die Grenzen von I_1 können für jedes $f \in E$ unterschiedlich sein und es gibt somit maximal $2|E|$ Daten für die Intervallgrenzen über die gesamte Menge $\phi_2(A)$. Berücksichtigen wir nun noch die Involutionen der Intervallgrenzen, ergeben sich $4|E|$ Daten. Offensichtlich können weder durch ϕ_1 noch durch ϕ_2 neue Daten hinzukommen, denn sämtliche Involutionen und alle Grenzen von vorkommenden Intervallen sind bereits berücksichtigt.

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist also die Anzahl an Zuständen z_f, die $\phi^n(\phi_2(A))_f$ annehmen kann, beschränkt durch

$$z_f \leq s := \binom{4|E|}{0} + \binom{4|E|}{1} + \binom{4|E|}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{1} = 1 + 4|E| + 8\binom{4|E|}{2},$$

denn nur dann, wenn $\phi^n(\phi_2(A))_f$ mehr als ein Element enthält, kann die Form von I_1 trotz identischer Grenzen variieren und der Spezialfall $I_1 \neq \emptyset \neq I_2$ eintreten.

Die Anzahl an Zuständen z, die $\phi^n(\phi_2(A))$ annehmen kann, ist damit beschränkt durch

$$z \leq s^{|E|},$$

also insbesondere endlich. Wegen $A \subseteq \phi(A)$ kann für $n_1 < n_2$ nur dann $\phi^{n_1}(\phi_2(A)) = \phi^{n_2}(\phi_2(A))$ gelten, wenn $\phi^{n_1}(\phi_2(A))$ bereits stabil ist. Da also jeder nicht stabile Zustand des Gesamtsystems nur für maximal ein $m \in \mathbb{N}$ durch $\phi^m(\phi_2(A))$ angenommen werden kann und die Anzahl der Zustände endlich ist, muss es also ein $T < \infty$ geben, sodass $\phi^T(\phi_2(A))$ stabil ist.

Wegen der Monotonie von ϕ_2 und ϕ und der Stabilität von $\phi^T(\phi_2(A))$ erhalten wir

$$\phi^{T+2}(A) \subseteq \phi^{T+2}(\phi_2(A)) = \phi^T(\phi_2(A)) \subseteq \phi^{T+1}(A).$$

Setzen wir $S := T + 1$, so ist also ϕ^S stabil.

Es bleibt zu zeigen, dass $\phi^S = \mathrm{conv}$ ist. Nach Definition von conv wissen wir $\mathrm{conv}(A) \subseteq \phi^S(A)$. Wegen $A \subseteq \mathrm{conv}(A)$ und der Konvexität von $\mathrm{conv}(A)$ gilt aber auch

$$\phi^S(A) \subseteq \phi^S(\mathrm{conv}(A)) = \mathrm{conv}(A)$$

und somit $\phi^S = \mathrm{conv}$. □

Das nun folgende Beispiel zeigt, dass für festes $S \in \mathbb{N}$ stets ein komplexes Matroid $\mathcal{C}_S$ existiert, sodass ϕ^S nicht stabil ist.

Beispiel 2.5 Wir identifizieren zur besseren Lesbarkeit des Beispiels S^1 mit $[0, 2\pi]$, wobei $0 = 2\pi$. Dies ist gerechtfertigt, denn $\alpha \in S^1$ lässt sich darstellen als $\alpha = e^{i\lambda}$ für genau ein $\lambda \in [0, 2\pi[$.

Sei $n := \lceil \frac{S}{2} \rceil$ und $E := \{f_i \mid i \in \{1, ..., 2n+1\}\}$, wobei die Elemente f_i wie im Graphen G angeordnet sind (siehe Abbildung 1).

Wir definieren die Mengen X_k für $k \in \{1, ..., n\}$ durch

$$X_k := \{(1, f_{2k-1}), (1, f_{2k}), (1, f_{2k+1})\}.$$

Sei $\mathcal{C}_S$ das Kreissystem des komplexen Matroids $\mathcal{M}_S$, welches durch die Kreise des Graphen G induziert wird, wenn wir zusätzlich noch $X_k \in \mathcal{C}_S$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$ fordern. Auf diese Weise ist dann $\mathcal{C}_S$ (und damit $\mathcal{M}_S$) eindeutig bestimmt und es gilt $\mathrm{cr}(\mathcal{M}_S) = n$.

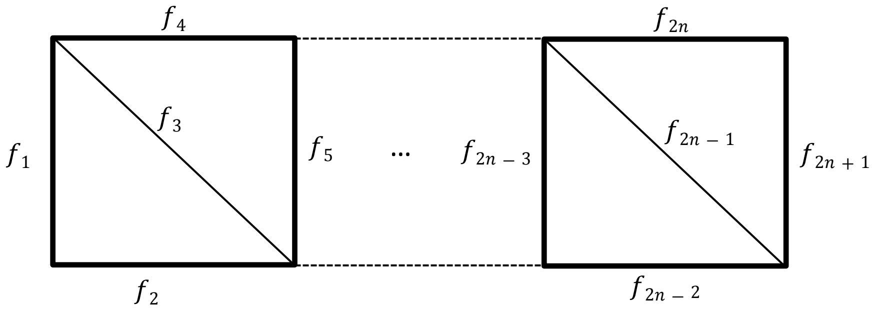

Abbildung 1: Veranschaulichung des Graphen G, auf dem das Kreissystem $\mathcal{C}_S$ basiert.

Definieren wir nun

$$\begin{aligned} A := \{(\frac{\pi}{2}, f_1)\} \ &\cup \ \{(\frac{1+(-1)^k}{2}\pi, f_{2k-1}) \mid k \in \{1, ..., n+1\}\} \\ &\cup \ \{(\frac{1+(-1)^k}{2}\pi + \frac{\pi}{2^{k+1}}, f_{2k}) \mid k \in \{1, ..., n\}\}, \end{aligned}$$

dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi^1(A) &= A \cup \{(\alpha, f_1) \mid \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]\} \qquad \text{(Definition von } \phi_2) \\ \phi^2(A) &= \phi^1(A) \cup \{(\pi + \frac{\pi}{4}, f_3)\} \qquad \text{(Definition von } \phi_1) \\ \phi^3(A) &= \phi^2(A) \cup \{(\alpha, f_3) \mid \alpha \in [\pi, \pi + \frac{\pi}{4}]\} \qquad \text{(Definition von } \phi_2) \end{aligned}$$

und allgemein für alle $k \in \{1, ..., n+1\}$:

$$\phi^{2k-1}(A) = \phi^{2k-2}(A) \cup \{(\alpha, f_{2k-1}) \mid \alpha \in [\frac{1+(-1)^k}{2}\pi, \frac{1+(-1)^k}{2}\pi + \frac{\pi}{2^k}]\}$$

sowie für alle $k \in \{1, ..., n\}$:

$$\phi^{2k}(A) = \phi^{2k-1}(A) \cup \{(\frac{1-(-1)^k}{2}\pi + \frac{\pi}{2^{k+1}}, f_{2k+1})\}.$$

Dies bedeutet insbesondere, dass $\phi^{2n}(A)$ nicht stabil ist. Wegen $n = \lceil \frac{S}{2} \rceil$ ist somit auch ϕ^S nicht stabil. $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch einige Worte zur Idee hinter dem Hüllenoperator conv verlieren. Dafür brauchen wir zunächst noch eine weitere Definition.

Definition Sei M eine komplexe Matrix vom Rang n wie in Beispiel 1.2 mit Spaltenvektoren $v_1, ..., v_k$. Sei $E := \{v_1, ..., v_k\}$ und $A \subseteq S^1 \times E$, dann definieren wir $\mathrm{conv}^*(A)$ durch

$$\mathrm{conv}^*(A) := \{(\alpha, w) \in S^1 \times E \mid \alpha w = \sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i w_i,\ n \in \mathbb{N},\ r_i \in \mathbb{R}^+,\ (\alpha_i, w_i) \in A\}.$$

Proposition 2.6 *Sei M eine komplexe Matrix vom Rang n wie in Beispiel 1.2 und sei E die Menge der Spaltenvektoren von M. Dann ist* conv^* *ein Hüllenoperator.*

Beweis Die Monotonie und Extensivität ist trivial und es bleibt die Stabilität zu zeigen. Sei dazu $A \subseteq S^1 \times E$ beliebig gewählt. Im Folgenden sind alle Variablen r_x (wobei x ein oder mehrere Indizes symbolisiert) als Elemente von $\mathbb{R}^+$ zu verstehen.

Angenommen es gäbe ein Element $(\alpha, w) \in \mathrm{conv}^*(\mathrm{conv}^*(A)) \setminus \mathrm{conv}^*(A)$. Dann gibt es nach Wahl von (α, w) Elemente $(\alpha_1, w_1), ..., (\alpha_N, w_N) \in \mathrm{conv}^*(A)$, sodass

$$\alpha w = \sum_{i=1}^{N} r_i \alpha_i w_i.$$

Seien o.E. $w_1, ..., w_m$ mit $m \leq N$ alle Elemente aus $\{(\alpha_1, w_1), ..., (\alpha_N, w_N)\}$, die sich in $\mathrm{conv}^*(A) \setminus A$ befinden. Dann gilt nach Definition von conv^* für alle $i \in \{1, ..., m\}$:

$$\alpha_i w_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} \alpha_{ij} w_{ij},$$

wobei $(\alpha_{ij}, w_{ij}) \in A$ ist für alle $i \in \{1, ..., m\}$ und alle $j \in \{1, ..., n_i\}$. Setzen wir dieses Resultat für alle $i \in \{1, ..., m\}$ in die obere Gleichung ein, so sehen wir sofort, dass $(\alpha, w) \in \mathrm{conv}^*(A)$ ist, im Widerspruch zur Annahme $(\alpha, w) \notin \mathrm{conv}^*(A)$. Folglich ist conv^* stabil. $\square$

Der Hüllenoperator conv^* lässt sich in dieser Weise nur für Matrizen und nicht für andere Strukturen definieren, die ebenfalls komplexe Matroide induzieren. Mithilfe von ϕ soll die Art der Hüllenbildung von conv^* nachgeahmt und auf alle komplexen Matroide ausgedehnt werden. Tatsächlich ist conv^* recht eng mit ϕ und damit auch mit conv verwandt, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 2.7 *Sei M eine komplexe Matrix vom Rang n wie in Beispiel 1.2 und sei E die Menge der Spaltenvektoren von M. Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem des durch M induzierten komplexen Matroids $\mathcal{M}$ und sei $A \subseteq S^1 \times E$. Dann gilt:*

(1) $\mathrm{conv}^*(A)$ *ist eine konvexe Obermenge von A.*

(2) *Es gilt* $\mathrm{conv}(A) \subseteq \mathrm{conv}^*(A)$.

Beweis Im Folgenden sind wieder alle Variablen r_x (wobei x ein oder mehrere Indizes symbolisiert) als Elemente von $\mathbb{R}^+$ zu verstehen.

(1) Wegen der Extensivität ist $\text{conv}^*(A)$ eine Obermenge von A und es bleibt die Konvexität zu zeigen. Angenommen es gäbe ein Element $(\alpha, w) \in \phi(\text{conv}^*(A)) \setminus \text{conv}^*(A)$.

Wäre $(\alpha, w) \in \phi_2(\text{conv}^*(A)) \setminus \text{conv}^*(A)$, so gäbe es Elemente $(\beta, w), (\gamma, w) \in \text{conv}^*(A)$ mit $\alpha \in \text{pconv}(\{\beta, \gamma\})$. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass (α, w) konisch kombiniert werden kann aus $(\beta, w), (\gamma, w)$ und folglich ist auch $(\alpha, w) \in \text{conv}^*(A)$.

Es muss also $(\alpha, w) \in \phi_1(\text{conv}^*(A)) \setminus \text{conv}^*(A)$ sein. Entsprechend der Definition der Kreise von $\mathcal{C}$ gibt es dann Elemente $(\alpha_1, w_1), ..., (\alpha_n, w_n) \in \text{conv}^*(A)$ sodass gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i w_i + (-r\alpha w).$$

Formen wir dies nach αw um, so wird sofort deutlich, dass (α, w) eine konische Kombination von $(\alpha_1, w_1), ..., (\alpha_n, w_n)$ ist. Dies bedeutet aber, dass $(\alpha, w) \in \text{conv}^*(A)$ gilt, im Widerspruch zur Annahme $(\alpha, w) \notin \text{conv}^*(A)$. Folglich ist $\text{conv}^*(A)$ konvex.

(2) Gemäß Satz 2.4 gibt es ein S sodass $\phi^S(A) = \text{conv}(A)$ stabil ist und folglich gilt

$$\text{conv}(A) = \phi^S(A) \subseteq \phi^S(\text{conv}^*(A)) = \text{conv}^*(A).$$

□

Intuitiv wäre wohlmöglich zu erwarten, dass $\text{conv} = \text{conv}^*$ für komplexe Matroide gilt, die durch eine komplexe Matrix induziert werden. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies jedoch im Allgemeinen nicht zutrifft.

Beispiel 2.8 Seien $v_1, ..., v_4$ die Spaltenvektoren der komplexen Matrix M definiert durch

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 1 \\ 1 & 0 & 1 & i \end{pmatrix},$$

$E := \{v_1, ..., v_4\}$ und $\mathcal{M}$ das durch M induzierte komplexe Matroid mit zugehörigem Kreissystem $\mathcal{C}$. Sei außerdem die Menge $A \subset S^1 \times E$ definiert durch

$$A := \{(\text{ph}(-1 - i), v_1), (\text{ph}(-1 - i), v_2), (1, v_3)\}.$$

Es gilt

$$-1v_4 = (-1 - i)v_1 + (-1 - i)v_2 + 1v_3$$

und folglich ist $(-1, v_4) \in \text{conv}^*(A) \setminus A$. Die Kreise aus $\mathcal{C}$ sind bis auf Multiplikation mit einem Skalar eindeutig bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -1v_1 - iv_2 + 1v_3 \\ 0 &= -iv_1 - 1v_2 + 1v_4 \\ 0 &= -2iv_1 + iv_3 + 1v_4 \\ 0 &= -2iv_2 + 1v_3 + iv_4. \end{aligned}$$

Für die Existenz eines Elements $(\alpha, w) \in \phi_1(A)\backslash A$, muss es nach Definition von ϕ_1 (und nach Wahl von $\mathcal{C}$) einen Kreis geben, in dem mindestens 2 Elemente aus A enthalten sind. Anhand der obigen Gleichungen ist jedoch nicht schwer einzusehen, dass kein solcher Kreis in $\mathcal{C}$ existiert und folglich ist $\phi_1(A) = A$.

Da offensichtlich auch $\phi_2(A) = A$ ist, folgt $\phi(A) = A$ und damit $\operatorname{conv}(A) = A$. Insbesondere bedeutet dies, dass im Allgemeinen $\operatorname{conv} \neq \operatorname{conv}^*$ gilt. □

Interessant am obigen Beispiel ist auch, dass für seine Korrektheit nicht die Doppelkreiselimination verantwortlich sein kann, denn für alle Kreise $X, Y \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ definiert wie im Beispiel) mit $\operatorname{supp}(X) \neq \operatorname{supp}(Y)$ ist $\operatorname{supp}(X) \cup \operatorname{supp}(Y)$ wegen $\operatorname{cr}(\mathcal{M}) = 2$ in jedem Fall ein Doppelkreis. Das heißt, dass $\operatorname{conv} = \operatorname{conv}^*$ im Allgemeinen selbst dann falsch ist, wenn das Eliminationsaxiom für alle Paare von Kreisen gilt.

2.2 Eingehende Betrachtung des Operators ϕ

Die in Satz 2.4 gewonnene Abschätzung bezüglich der Stabilität von ϕ ist noch nicht sehr genau und wir wollen im Folgenden versuchen, diese Abschätzung zu verbessern.

Proposition 2.9 *Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystems eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ über Grundmenge E und sei $A \subseteq S^1 \times E$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann hat ϕ folgende Eigenschaften (dabei ist $\phi^0(A) := A$):*

(1) *Ist $\phi_1(\phi^{n-1}(A))$ stabil unter ϕ_1 und*

$$(\alpha, f) \in \phi_1(\phi^n(A))\backslash\phi^n(A),$$

so gibt es einen Kreis $X \in \mathcal{C}$ mit $(-\alpha, f) \in X$, sodass

$$(\beta, g) \in \phi^n(A)\backslash\phi_1(\phi^{n-1}(A)) \subseteq \phi_2(\phi^{n-1}(A))\backslash\phi^{n-1}(A)$$

für ein $(\beta, g) \in X$ mit $(\beta, g) \neq (-\alpha, f)$ gilt.

(2) *Ist*

$$(\alpha, f) \in \phi_2(\phi^n(A))\backslash\phi^n(A),$$

so gibt es $(\alpha_1, f), (\alpha_2, f) \in \phi^n(A)$ mit $\alpha \in \operatorname{pconv}(\{\alpha_1, \alpha_2\})$ und es gilt

$$(\alpha_1, f) \in \phi^n(A)\backslash\phi_2(\phi^{n-1}(A)) \subseteq \phi_1(\phi^{n-1}(A))\backslash\phi^{n-1}(A).$$

(3) *Seien $(\beta_1, e), ..., (\beta_k, e) \in \phi_2(A)$. Ist $\alpha \in \operatorname{pconv}(\{\beta_1, ..., \beta_k\})$, so folgt*

$$(\alpha, e) \in \phi_2(A).$$

(4) *Sei E_u definiert als*

$$E_u = \{e \in E \mid \forall X \in \mathcal{C} : e \notin \operatorname{supp}(X)\},$$

dann können wir A eindeutig darstellen als $A = A_u \cup A_k$ mit $A_u \subseteq S^1 \times E_u$ und $A_k \subseteq S^1 \times (E\backslash E_u)$ und es gilt

$$\phi_1^n(A) \text{ stabil } \Leftrightarrow \phi_1^n(A_k) \text{ stabil,}$$
$$\phi^n(A) \text{ stabil } \Leftrightarrow \phi^n(A_k) \text{ stabil.}$$

Beweis

(1) Wegen $(\alpha, f) \in \phi_1(\phi^n(A))\backslash\phi^n(A)$ muss es nach Definition von ϕ_1 einen Kreis $X \in \mathcal{C}$ mit $(-\alpha, f) \in X$ geben, sodass $M := X\backslash\{(-\alpha, f)\} \subseteq \phi^n(A)$ ist.

Wäre $M \subseteq \phi_1(\phi^{n-1}(A))$, so würde gelten

$$\begin{aligned}(\alpha, f) &\in \phi_1(M)\\ &\subseteq \phi_1(\phi_1(\phi^{n-1}(A)))\\ &= \phi_1(\phi^{n-1}(A)) \qquad \text{(nach Voraussetzung ist } \phi_1(\phi^{n-1}(A)) \text{ stabil)}\\ &\subseteq \phi(\phi^{n-1}(A))\\ &= \phi^n(A)\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $(\alpha, f) \notin \phi^n(A)$. Es gibt also ein $(\beta, g) \in M \subset X$ mit

$$(\beta, g) \in \phi^n(A)\backslash\phi_1(\phi^{n-1}(A)) \subseteq \phi_2(\phi^{n-1}(A))\backslash\phi^{n-1}(A).$$

Außerdem ist $(\beta, g) \neq (-\alpha, f)$, denn $(-\alpha, f) \notin M$.

(2) Wegen $(\alpha, f) \in \phi_2(\phi^n(A))\backslash\phi^n(A)$ muss es nach Definition von ϕ_2 eine Menge $M := \{(\alpha_1, f), (\alpha_2, f)\} \subseteq \phi^n(A)$ geben, sodass $\alpha \in \operatorname{pconv}(\{\alpha_1, \alpha_2\})$ ist.

Wäre $M \subseteq \phi_2(\phi^{n-1}(A))$, so würde gelten

$$\begin{aligned}(\alpha, f) &\in \phi_2(M)\\ &= \phi_2(\phi_2(\phi^{n-1}(A)))\\ &= \phi_2(\phi^{n-1}(A))\\ &\subseteq \phi(\phi^{n-1}(A))\\ &= \phi^n(A)\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $(\alpha, f) \notin \phi^n(A)$. Es gibt also ein Element in M (dieses sei o.E. (α_1, f)) mit

$$(\alpha_1, f) \in \phi^n(A)\backslash\phi_2(\phi^{n-1}(A)) \subseteq \phi_1(\phi^{n-1}(A))\backslash\phi^{n-1}(A).$$

(3) Wir denken uns die (β_i, e) (mit $i \in \{1, ..., k\}$) so durchnummeriert, dass $(\beta_i, e) \in \phi_2(A)\backslash A$ für alle $i \leq k_1$ sowie $(\beta_i, e) \in A$ für alle $i > k_1$ gilt.

Für alle $(\beta_i, e) \in \phi_2(A)\backslash A$ existieren nach Definition von ϕ_2 Elemente $(\gamma_{i1}, e), (\gamma_{i2}, e) \in A$ mit $\beta_i \in \operatorname{pconv}(\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}\})$. Nach Definition von pconv bedeutet dies aber

$$\alpha \in \operatorname{pconv}(\{\beta_1, ..., \beta_k\}) \subseteq \operatorname{pconv}(\{\gamma_{11}, \gamma_{12}, ..., \gamma_{k_1 1}, \gamma_{k_1 2}, \beta_{k_1+1}, ..., \beta_k\})$$

und aus der Definition von ϕ_2 erhalten wir damit $(\alpha, e) \in \phi_2(A)$.

(4) Die eindeutige Darstellbarkeit von A als $A = A_u \cup A_k$ ist wegen $E_u \cup (E\backslash E_u) = E$ und $E_u \cap (E\backslash E_u) = \emptyset$ unmittelbar klar.

Wir zeigen zunächst die Stabilität von $\phi(A_u)$. Nach Definition von E_u ist $\phi_1(A_u) = A_u$ und auch $\phi_1(\phi_2(A_u)) = \phi_2(A_u)$, denn nach Definition von ϕ_2 ist $\phi_2(A_u) \subseteq S^1 \times E_u$. Dies bedeutet aber

$$\begin{aligned}
\phi^2(A_u) &= \phi_1(\phi_1(A_u) \cup \phi_2(A_u)) \cup \phi_2(\phi_1(A_u) \cup \phi_2(A_u)) \\
&= \phi_1(A_u \cup \phi_2(A_u)) \cup \phi_2(A_u \cup \phi_2(A_u)) \\
&= \phi_1(\phi_2(A_u)) \cup \phi_2(\phi_2(A_u)) \\
&= \phi_2(A_u) \cup \phi_2(A_u) \\
&= \phi_2(A_u) \\
&\subseteq \phi(A_u).
\end{aligned}$$

Seien nun $B_u \subseteq S^1 \times E_u$ und $B_k \subseteq S^1 \times (E \backslash E_u)$ beliebig gewählt. Wegen $E_u \cap (E \backslash E_u) = \emptyset$ ist offenbar $B_u \cap B_k = \emptyset$. Nach Definition von ϕ_2 und ϕ_1 folgt daraus

$$\phi_2(B_u \cup B_k) = \phi_2(B_u) \cup \phi_2(B_k)$$

sowie (unter Verwendung der Definition von E_u)

$$\phi_1(B_u \cup B_k) = \phi_1(B_u) \cup \phi_1(B_k).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\phi(B_u \cup B_k) = \phi(B_u) \cup \phi(B_k).$$

Wegen $\phi^n(A_u) \subseteq S^1 \times E_u$ und $\phi^n(A_k) \subseteq S^1 \times (E \backslash E_u)$ folgt daraus insbesondere

$$\begin{aligned}
\phi(\phi^n(A)) &= \phi(\phi^n(A_u \cup A_k)) \\
&= \phi(\phi^n(A_u) \cup \phi^n(A_k)) \\
&= \phi(\phi^n(A_u)) \cup \phi(\phi^n(A_k)).
\end{aligned}$$

Wegen der Stabilität von $\phi^n(A_u)$, ist damit bewiesen, dass

$$\phi^n(A) \text{ stabil } \Leftrightarrow \phi^n(A_k) \text{ stabil.}$$

Die Aussage

$$\phi_1^n(A) \text{ stabil } \Leftrightarrow \phi_1^n(A_k) \text{ stabil}$$

folgt unmittelbar aus $\phi_1(A_u) = A_u$ und $\phi_1(A_u \cup A_k) = \phi_1(A_u) \cup \phi_1(A_k)$. □

Proposition 2.10 *Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystems eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ über Grundmenge E und sei* $\mathrm{cr}(\mathcal{M}) = 1$. *Dann ist ϕ_1 stabil.*

Beweis Wegen Proposition 2.9 (4) können wir o.E. annehmen, dass

$$\forall f \in E \; \exists X \in \mathcal{C} : f \in \mathrm{supp}(X).$$

Sei X ein beliebiger Kreis in $\mathcal{C}$. Wegen $1 = \mathrm{cr}(\mathcal{M}) = |E| - r(\mathcal{M})$ gilt dann $\mathrm{supp}(X) = E$ aufgrund der Unvergleichbarkeit. Das Kreissystem $\mathcal{C}$ hat daher notwendigerweise die Form $\mathcal{C} = \{\alpha X \mid \alpha \in S^1\}$.

Angenommen es gäbe ein Element

$$(\alpha, e) \in \phi_1(\phi_1(A)) \backslash \phi_1(A),$$

dann gibt es nach Definition von ϕ_1 einen Kreis $X \in \mathcal{C}$ mit

$$(-\alpha, e) \in X \subseteq (-\alpha, e) \cup \phi_1(A).$$

Nach Wahl von (α, e) muss es mindestens ein Element $(\beta, f) \in X$ mit $f \neq e$ geben, sodass $(\beta, f) \in \phi_1(A) \backslash A$ ist, denn sonst wäre $(\alpha, e) \in \phi_1(A)$, was wir ausgeschlossen hatten.

Nach Definition von ϕ_1 muss es darum einen Kreis $Y \in \mathcal{C}$ geben mit

$$(-\beta, f) \in Y \subseteq (-\beta, f) \cup A.$$

Aufgrund der Definition von $\mathcal{C}$ und der Unvergleichbarkeit gilt wegen $(\beta, f) \in X$ und $(-\beta, f) \in Y$ notwendigerweise $Y = -X$. Aus $(-\alpha, e) \in X$ folgt damit $(\alpha, e) \in -X = Y$ und wegen $f \neq e$ ist dementsprechend $(\alpha, e) \in A$, im Widerspruch zur Annahme. Das bedeutet aber, dass ϕ_1 stabil ist. $\square$

Bemerkung Dem Beispiel 2.5 ist insbesondere zu entnehmen, dass ϕ im Gegensatz zu ϕ_1 im Allgemeinen nicht stabil ist, selbst wenn $\mathrm{cr}(\mathcal{M}) = 1$ gilt.

Proposition 2.11 *Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ auf der Grundmenge E. Sei außerdem $A \subseteq S^1 \times E$ und $\psi : E \to S^1$ eine Abbildung. Bezeichne ϕ_ψ den Mengenoperator ϕ bezüglich des Kreissystems C_ψ, so gilt*

$$\phi(A)_\psi = \phi_\psi(A_\psi).$$

Beweis Mit $\phi_{1\psi}$ bezeichnen wir den Mengenoperator ϕ_1 bezüglich des Kreissystems C_ψ. Da ϕ_2 nicht vom zu Grunde gelegten Kreissystem abhängt, ist diese Schreibweise für ϕ_2 überflüssig. Es gilt

$$\begin{aligned}
\phi_1(A)_\psi &= (A \cup \{(\alpha, f) \in S^1 \times E \mid \exists X \in \mathcal{C} : (-\alpha, f) \in X \subseteq A \cup (-\alpha, f)\})_\psi \\
&= A_\psi \cup \{(\alpha, f) \in S^1 \times E \mid \exists X \in \mathcal{C} : (-\alpha, f) \in X \subseteq A \cup (-\alpha, f)\}_\psi \\
&= A_\psi \cup \{(\psi(f)^{-1}\alpha, f) \in S^1 \times E \mid \exists X \in \mathcal{C} : (-\alpha, f) \in X \subseteq A \cup (-\alpha, f)\} \\
&= A_\psi \cup \{(\alpha, f) \in S^1 \times E \mid \exists X_\psi \in \mathcal{C}_\psi : (-\alpha, f) \in X_\psi \subseteq A_\psi \cup (-\alpha, f)\} \\
&= \phi_{1\psi}(A_\psi).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt nach Definition von pconv für beliebiges $\delta \in S^1$:

$$\alpha \in \mathrm{pconv}\{\beta, \gamma\} \Leftrightarrow \delta\alpha \in \mathrm{pconv}\{\delta\beta, \delta\gamma\},$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\phi_2(A)_\psi = \phi_2(A_\psi).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\phi(A)_\psi &= (\phi_1(A) \cup \phi_2(A))_\psi \\
&= \phi_1(A)_\psi \cup \phi_2(A)_\psi \\
&= \phi_{1\psi}(A_\psi) \cup \phi_2(A_\psi) \\
&= \phi_\psi(A_\psi),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\square$

Lemma 2.12 *Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ über Grundmenge E. Sei $k \in \mathbb{N} \cup 0$ vorgegeben und $i \in \{0, ..., k\}$. Seien $f_i, e \in E$ gegebene, paarweise verschiedene Elemente und seien $\beta, \gamma_{i1}, \gamma_{i2} \in S^1$ sowie $A \subseteq S^1 \times E$ ebenfalls gegeben. Gilt für jedes $i \in \{0, ..., k\}$:*

$$-\beta \in \operatorname{pconv}(\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}\}) \tag{1}$$

und außerdem

$$\begin{aligned}
&(\beta, e) \notin \phi(A), && (2)\\
&(-\beta, f_i) \notin \phi(A), && (3)\\
&(\gamma_{i1}, f_i) \notin \phi_2(A), && (4)\\
&(-\gamma_{i1}, f) \in \phi_2(A) \qquad (\forall f \neq f_i), && (5)\\
&(\gamma_{i2}, f_i) \in \phi_2(A), && (6)
\end{aligned}$$

so folgt

$$\exists j \in \{0, ..., k\} \quad \forall i \in \{0, ..., k\} : (\gamma_{j2}, f_i) \in \phi(A).$$

Beweis Nach (5) ist insbesondere $(-\gamma_{i1}, e) \in \phi_2(A)$ für alle $i \in \{0, ..., k\}$, denn die Elemente $e, f_i \in E$ sind nach Voraussetzung paarweise verschieden. Es muss also gelten, dass

$$\beta \notin \operatorname{pconv}(\{-\gamma_{01}, ..., -\gamma_{k1}\}), \tag{7}$$

denn sonst wäre $(\beta, e) \in \phi(A)$ nach Proposition 2.9 (3), was jedoch nach (2) nicht sein kann.

Wir zeigen, dass auch

$$-\beta \notin \operatorname{pconv}(\{-\gamma_{01}, ..., -\gamma_{k1}\}), \tag{8}$$

gelten muss, denn die Annahme $-\beta \in \operatorname{pconv}(\{-\gamma_{01}, ..., -\gamma_{k1}\})$ impliziert zunächst

$$-\beta \in \operatorname{pconv}(\{-\gamma_{01}, ..., -\gamma_{(i-1)1}, \gamma_{i2}, -\gamma_{(i+1)1}, ..., -\gamma_{k1}\}), \tag{9}$$

wie wir im Folgenden zeigen werden.

Ist

$$-\beta \in \operatorname{pconv}(\{-\gamma_{01}, ..., -\gamma_{(i-1)1}, -\gamma_{(i+1)1}, ..., -\gamma_{k1}\}), \tag{10}$$

so bleibt nichts weiter zu beweisen. Ist dies nicht der Fall, so muss ein $l \in \{0, ..., (i-1), (i+1), ..., k\}$ geben (wir wählen o.E. $l = 0$), sodass

$$-\beta \in \operatorname{pconv}(\{-\gamma_{01}, -\gamma_{i1}\}). \tag{11}$$

Mit $-\beta \in \operatorname{pconv}(\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}\})$ nach (1) erhalten wir unter Berücksichtigung von (11) (vgl. Abbildung 2 (a)):

$$-\beta \in \operatorname{pconv}(\{-\gamma_{01}, \gamma_{i2}\}).$$

Insgesamt erhalten wir demnach die Aussage (9).

Da die f_i nach Voraussetzung paarweise verschieden sind, gilt nach (5): $(-\gamma_{l1}, f_i) \in \phi_2(A)$ für alle $l \neq i$. Da aufgrund von (6) auch $(\gamma_{i2}, f_i) \in \phi_2(A)$ ist, können wir wegen (9) nach Proposition 2.9 (3) schließen, dass

$$(-\beta, f_i) \in \phi_2(A) \subseteq \phi(A), \tag{12}$$

im Widerspruch zu (3). Dies bedeutet aber, dass die Annahme $-\beta \in \mathrm{pconv}(\{-\gamma_{01}, ..., -\gamma_{k1}\})$ falsch sein muss und wir erhalten folglich $-\beta \notin \mathrm{pconv}(\{-\gamma_{01}, ..., -\gamma_{k1}\})$.

Außerdem gilt

$$\forall i, l \in \{0, ..., k\}, i \neq l : \gamma_{i1} \neq -\gamma_{l1}, \tag{13}$$

denn sonst würde wegen der paarweisen Verschiedenheit der Elemente f_i, f_l nach (5) gelten, dass $(\gamma_{i1}, f_i) = (-\gamma_{l1}, f_i) \in \phi_2(A)$, was nach (4) nicht sein kann.

Die Aussagen (7) und (8) ergeben zusammen $\pm\beta \notin \mathrm{pconv}(\{-\gamma_{01}, ..., -\gamma_{k1}\})$, was nach Definition von pconv äquivalent ist zu

$$\pm\beta \notin \mathrm{pconv}(\{\gamma_{01}, ..., \gamma_{k1}\}). \tag{14}$$

Da zusätzlich noch (13) gelten muss, folgt, dass alle γ_{i1} gemeinsam auf einer Seite einer gedachten Linie zwischen β und $-\beta$ auf dem komplexen Einheitskreis S^1 liegen müssen, denn alle anderen Alternativen stehen im Widerspruch zu (13) oder (14).

Nach (1) ist $-\beta \in \mathrm{pconv}(\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}\})$ und wir können deswegen schlussfolgern, dass alle γ_{i2} gemeinsam auf der genau *anderen* Seite der gedachten Linie zwischen β und $-\beta$ auf dem komplexen Einheitskreis S^1 liegen müssen (vgl. Abbildung 2 (b)).

Somit muss es ein $j \in \{0, .., k\}$ geben mit (vgl. Abbildung 2 (b)):

$$\forall i \in \{0, .., k\} : \gamma_{j2} \in \mathrm{pconv}(\{\gamma_{i2}, \beta\}) \tag{15}$$

(das Element γ_{j2} liegt von allen γ_{i2} am nächsten an β).

Nach Aussage (1) gilt insbesondere $-\beta \in \mathrm{pconv}(\{\gamma_{j1}, \gamma_{j2}\})$, was äquivalent ist zu $-\gamma_{j1} \in \mathrm{pconv}(\{\gamma_{j2}, \beta\})$ und zusammen mit (15) folgt deswegen (vgl. Abbildung 2 (c)):

$$\forall i \in \{0, .., k\} : \gamma_{j2} \in \mathrm{pconv}(\{\gamma_{i2}, -\gamma_{j1}\}). \tag{16}$$

Für $i = j$ gilt $(\gamma_{j2}, f_i) \in \phi(A)$ wegen (6) bereits nach Voraussetzung. Sei also $i \neq j$: Wegen (5) und (6) gilt $(-\gamma_{j1}, f_i), (\gamma_{i2}, f_i) \in \phi_2(A)$, denn es ist $f_i \neq f_j$. Aufgrund von (16) erhalten wir damit durch Anwendung von Proposition 2.9 (3), dass

$$(\gamma_{j2}, f_i) \in \phi_2(A) \subseteq \phi(A), \tag{17}$$

womit alles gezeigt wäre. $\square$

Satz 2.13 *Sei $\mathcal{C}$ das Kreissystem eines komplexen Matroids $\mathcal{M}$ über Grundmenge E und sei $\mathrm{cr}(\mathcal{M}) = 1$, dann ist ϕ^3 stabil.*

Beweis Wegen Proposition 2.9 (4) können wir o.E. annehmen, dass

$$\forall f \in E \; \exists X \in \mathcal{C} : f \in \mathrm{supp}(X).$$

Sei X ein beliebiger Kreis in $\mathcal{C}$. Wegen $1 = \mathrm{cr}(\mathcal{M}) = |E| - r(\mathcal{M})$ gilt dann $\mathrm{supp}(X) = E$ auf Grund der Unvergleichbarkeit der Kreise. Das Kreissystem $\mathcal{C}$ hat also notwendigerweise die Form $\mathcal{C} = \{\alpha X \mid \alpha \in S^1\}$. Wegen $\mathrm{cr}(\mathcal{M}) = 1$ ist ϕ_1 nach Proposition 2.10 in

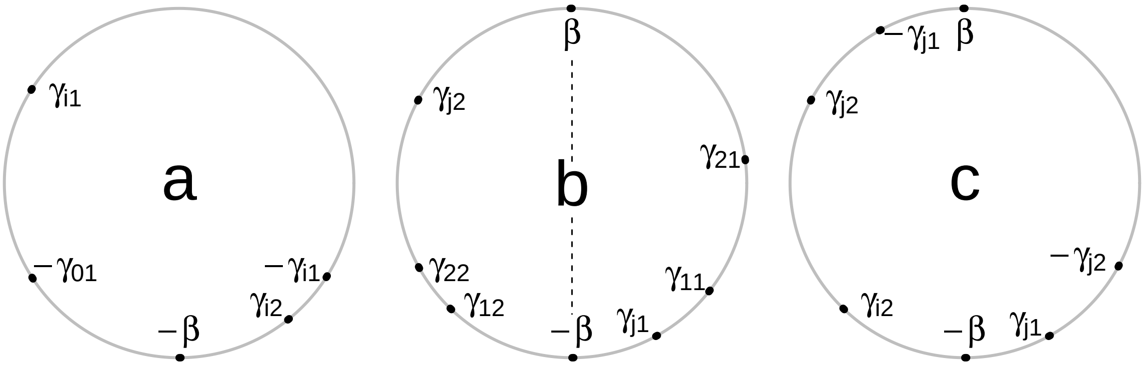

Abbildung 2: Veranschaulichung verschiedener Beweisschritte aus Lemma 2.12. Die Elemente $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ in der Grafik (b) stehen stellvertretend für alle γ_{i1}, γ_{i2} mit $i \neq j$. Die drei Grafiken sind jeweils unabhängig voneinander.

jedem Fall stabil.

Weiterhin können wir auf Grund der Definition von $\mathcal{C}$ ein $\psi : E \to S^1$ so wählen, dass für alle $X_\psi \in \mathcal{C}_\psi$ gilt:

$$(\alpha, e), (\beta, f) \in X_\psi \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Nach Proposition 1.4 ist $\mathcal{C}_\psi$ ein komplexes Matroid und nach Proposition 2.11 ist ϕ genau dann stabil bezüglich des Kreissystems $\mathcal{C}$, wenn ϕ stabil ist bezüglich des Kreissystems $\mathcal{C}_\psi$. Wir können also o.E. annehmen, dass alle Elemente eines Kreises die gleiche Phase haben.

Wir zeigen nun die Stabilität von ϕ^3. Sei $A \subseteq S^1 \times E$ gegeben. Ist $\phi^4(A) \backslash \phi^3(A) = \emptyset$, so bleibt nichts zu beweisen. Wir können also annehmen, dass es ein $(\alpha, e) \in \phi^4(A) \backslash \phi^3(A)$ gibt.

Abschnitt 1: Es wird gezeigt, dass $\phi_2(\phi^3(A)) \backslash \phi^3(A) = \emptyset$ für alle $A \subseteq S^1 \times E$.

Abschnitt 1.1: In diesem Abschnitt führen wir einige Elemente aus den Mengen $\phi^n(A)$ ($n \in \{0, ..., 4\}$) ein, die über den gesamten Abschnitt 1 hinweg wichtig sind.

Sei

$$(\alpha, e) \in \phi_2(\phi^3(A)) \backslash \phi^3(A), \tag{18}$$

dann gibt es nach Definition von ϕ_2 Elemente

$$(\beta_1, e), (\beta_2, e) \in \phi^3(A) \text{ mit} \tag{19}$$

$$\alpha \in \text{pconv}(\{\beta_1, \beta_2\}). \tag{20}$$

Aus Proposition 2.9 (2) angewandt auf (α, e) folgern wir

$$(\beta_1, e) \in \phi_1(\phi^2(A)) \backslash \phi^2(A). \tag{21}$$

Aus der Definition von ϕ_1 folgt nun

$$\forall f \neq e : (-\beta_1, f) \in \phi^2(A) \tag{22}$$

(wir erinnern daran, dass nach Annahme alle Elemente eines Kreises die gleiche Phase haben).

Wir betrachten nun alle $f \neq e$ mit

$$(-\beta_1, f) \in \phi_2(\phi(A)) \backslash \phi(A). \tag{23}$$

Aus Proposition 2.9 (1) angewandt auf (β_1, e) folgt, dass es mindestens ein Element mit Eigenschaft (23) geben muss und wir bennenen es mit f_0. Alle anderen f mit der Eigenschaft (23) nummerieren wir in beliebiger Reihenfolge durch (d.h. $f_1, f_2, ..., f_k$).

Für jedes f_i ($i \in \{0, ..., k\}$) existieren nach Definition von ϕ_2 Elemente

$$(\gamma_{i1}, f_i), (\gamma_{i2}, f_i) \in \phi(A) \text{ mit} \tag{24}$$

$$-\beta_1 \in \text{pconv}(\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}\}). \tag{25}$$

Proposition 2.9 (2) angewandt auf $(-\beta_1, f_i)$ liefert

$$(\gamma_{i1}, f_i) \in \phi(A) \backslash \phi_2(A) \subseteq \phi_1(A) \backslash A. \tag{26}$$

Dies bedeutet nach Definition von ϕ_1 wiederum

$$\forall f \neq f_i : (-\gamma_{i1}, f) \in A, \tag{27}$$

was insbesondere für $f = e$ gilt.

Wegen (24) gilt in jedem Fall $(\gamma_{i2}, f_i) \in \phi(A)$. Wäre

$$(\gamma_{i2}, f_i) \in \phi(A) \backslash \phi_2(A) \subseteq \phi_1(A) \backslash A, \tag{28}$$

so würde insbesondere $(-\gamma_{i2}, e) \in A$ nach Definition von ϕ_1 folgen. Wegen (27) gilt insbesondere auch $(-\gamma_{i1}, e) \in A$. Aus (25) und

$$-\beta_1 \in \text{pconv}(\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}\}) \Leftrightarrow \beta_1 \in \text{pconv}(\{-\gamma_{i1}, -\gamma_{i2}\}) \tag{29}$$

erhielten wir deswegen $(\beta_1, e) \in \phi(A)$ nach Definition von ϕ_2, was aber nach (21) nicht sein. Es folgt:

$$\forall i \in \{0, ..., k\} : (\gamma_{i2}, f_i) \in \phi_2(A). \tag{30}$$

Abschnitt 1.2: In diesem Abschnitt zeigen wir:

$$\exists j \in \{0, ..., k\} \quad \forall f \neq e : (\gamma_{j2}, f) \in \phi(A). \tag{31}$$

Wir betrachten zunächst alle f_i, wobei $i \in \{0, ..., k\}$. Nach Definition sind die Elemente e, f_i paarweise verschieden. Wir versuchen nun Lemma 2.12 anzuwenden auf $\beta := \beta_1$ und γ_{i1}, γ_{i2} wie gehabt. Es gilt für alle $i \in \{0, ..., k\}$:

$$\begin{aligned} -\beta_1 &\in \text{pconv}(\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}\}) && \text{(nach (25))},\\ (\beta_1, e) &\notin \phi(A) && \text{(nach (21))},\\ (-\beta_1, f_i) &\notin \phi(A) && \text{(nach (23))},\\ (\gamma_{i1}, f_i) &\notin \phi_2(A) && \text{(nach (26))},\\ \forall f \neq f_i : (-\gamma_{i1}, f) &\in \phi_2(A) && \text{(nach (27))},\\ (\gamma_{i2}, f_i) &\in \phi_2(A) && \text{(nach (30))}. \end{aligned}$$

Somit sind alle Voraussetzungen von Lemma 2.12 erfüllt und wir erhalten folglich

$$\exists j \in \{0,...,k\} \quad \forall i \in \{0,...,k\} : (\gamma_{j2}, f_i) \in \phi(A). \tag{32}$$

Jetzt müssen nur noch alle $f \in E$ mit $e \neq f \neq f_i$ betrachtetet werden. Wegen $f \neq f_i$ muss gelten

$$(-\beta_1, f) \notin \phi_2(\phi(A)) \backslash \phi(A), \tag{33}$$

denn sonst wäre $f = f_i$ für ein $i \in \{0,...,k\}$, nach Wahl der Elemente f_0 bis f_k. Nach (22) ist insbesondere $(-\beta_1, f) \in \phi^2(A)$, was zusammen mit (33) impliziert, dass für alle $f \neq e, f_i$ gilt:

$$(-\beta_1, f) \in \phi^2(A) \backslash (\phi_2(\phi(A)) \backslash \phi(A)). \tag{34}$$

Weiterhin ist für alle $f \neq e, f_i$:

$$(-\beta_1, f) \notin \phi_1(\phi(A)) \backslash \phi(A), \tag{35}$$
$$(-\beta_1, f) \notin \phi_1(A) \backslash A, \tag{36}$$

denn sonst würde nach Definition von ϕ_1 gelten, dass insbesondere $(\beta_1, e) \in \phi(A)$ ist, im Widerspruch zu (21). Da aber alle anderen Möglichkeiten ausgeschlossen wurden, folgt notwendigerweise:

$$\forall f \neq e, f_i : (-\beta_1, f) \in \phi_2(A). \tag{37}$$

Wegen (25) ist $-\beta_1 \in \text{pconv}(\{\gamma_{j1}, \gamma_{j2}\})$, was nach Definition von pconv äquivalent ist zu

$$\gamma_{j2} \in \text{pconv}(\{-\gamma_{j1}, -\beta_1\}). \tag{38}$$

Da nach (27) insbesondere auch $(-\gamma_{j1}, f) \in \phi_2(A)$ für alle $f \neq e, f_i$ ist, können wir Proposition 2.9 (3) anwenden und erhalten:

$$\forall f \neq e, f_i : (\gamma_{j2}, f) \in \phi_2(A) \subseteq \phi(A). \tag{39}$$

Aus (32) und (39) ergibt sich zusammen die Aussage (31) für alle $f \neq e$.

Abschnitt 1.3: Wir bringen nun die Annahme (18) zum Widerspruch.

Nach Definition von ϕ_1 erhalten wir aus (31), dass

$$(-\gamma_{j2}, e) \in \phi^2(A). \tag{40}$$

Wegen $-\beta_1 \in \text{pconv}(\{\gamma_{j1}, \gamma_{j2}\})$ nach (25) ist

$$\alpha \in \text{pconv}(\{\beta_1, \beta_2\}) \subseteq \text{pconv}(\{-\gamma_{j1}, -\gamma_{j2}, \beta_2\}). \tag{41}$$

Nach (19) gilt in jedem Fall $(\beta_2, e) \in \phi^3(A)$.

Fall 1: Ist

$$(\beta_2, e) \in \phi_1(\phi^2(A)) \backslash \phi^2(A), \tag{42}$$

so wiederholen wir die Beweisschritte aus Abschnitt 1.1 bis 1.3, wobei wir lediglich β_1 mit β_2 vertauschen. Wir erhalten dadurch:

$$\exists(\delta_1, e), (\delta_2, e) \in \phi^2(A) : \beta_2 \in \mathrm{pconv}(\{\delta_1, \delta_2\}) \tag{43}$$

Daraus folgt zusammen mit (41), dass

$$\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\beta_1, \beta_2\}) \subseteq \mathrm{pconv}(\{-\gamma_{j1}, -\gamma_{j2}, \delta_1, \delta_2\}). \tag{44}$$

Wegen (27), (40) und (43) sind

$$(-\gamma_{j1}, e), (-\gamma_{j2}, e), (\delta_1, e), (\delta_2, e) \in \phi^2(A) \tag{45}$$

und nach Definition von ϕ_2 erhalten wir $(\alpha, e) \in \phi^3(A)$ im Widerspruch zu (18).

Fall 2: Sei nun

$$(\beta_2, e) \in \phi^3(A)\backslash(\phi_1(\phi^2(A))\backslash\phi^2(A)) \subseteq \phi_2(\phi^2(A)). \tag{46}$$

Wegen (41) ist $\alpha \in \mathrm{pconv}(\{-\gamma_{j1}, -\gamma_{j2}, \beta_2\})$ und nach (27), (40) sowie (46) gilt

$$(-\gamma_{j1}, e), (-\gamma_{j2}, e), (\beta_2, e) \in \phi_2(\phi^2(A)). \tag{47}$$

Wir können also Proposition 2.9 (3) anwenden und erhalten

$$(\alpha, e) \in \phi_2(\phi^2(A)) \subseteq \phi^3(A) \tag{48}$$

erneut im Widerspruch zu (18).

Dies bedeutet aber zusammengenommen:

$$\forall A \subseteq S^1 \times E : \phi_2(\phi^3(A))\backslash\phi^3(A) = \emptyset. \tag{49}$$

Abschnitt 2: Es wird gezeigt, dass $\phi_1(\phi^3(A))\backslash\phi^3(A) = \emptyset$ für alle $A \subseteq S^1 \times E$.

Abschnitt 2.1: In diesem Abschnitt führen wir einige Elemente aus den Mengen $\phi^n(A)$ $(n \in \{0, ..., 4\})$ ein, die über den gesamten Abschnitt 2 hinweg wichtig sind.

Sei

$$(\alpha, e) \in \phi_1(\phi^3(A))\backslash\phi^3(A), \tag{50}$$

dann gilt nach Definition von ϕ_1:

$$\forall f \neq e : (-\alpha, f) \in \phi^3(A). \tag{51}$$

Wir betrachten nun alle $f \neq e$ mit

$$(-\alpha, f) \in \phi_2(\phi^2(A))\backslash\phi^2(A). \tag{52}$$

Nach Proposition 2.9 (1) angewandt auf (α, e) gibt es mindestens ein solches Element, was mir mit f_0 benennen. Alle anderen f mit der Eigenschaft (52) nummerieren wir in beliebiger Reihenfolge durch (d.h. $f_1, f_2, ..., f_{k_1}$).

Nach Definition von ϕ_2 gibt es für jedes f_i ($i \in \{0, ..., k_1\}$) Elemente

$$(\beta_{i1}, f_i), (\beta_{i2}, f_i) \in \phi^2(A) \text{ mit} \tag{53}$$

$$-\alpha \in \text{pconv}(\{\beta_{i1}, \beta_{i2}\}). \tag{54}$$

Aus Proposition 2.9 (2) angewandt auf $(-\alpha, f_i)$ ergibt sich für alle $i \in \{0, ..., k_1\}$:

$$(\beta_{i1}, f_i) \in \phi^2(A) \backslash \phi_2(\phi(A)) \subseteq \phi_1(\phi(A)) \backslash \phi(A). \tag{55}$$

Dies bedeutet nach Definition von ϕ_1 wiederum für alle $i \in \{0, ..., k_1\}$:

$$\forall f \neq f_i : (-\beta_{i1}, f) \in \phi(A), \tag{56}$$

was insbesondere für $f = e$ gilt.

Weiterhin stellen wir fest, dass für alle $i \in \{0, ..., k_1\}$ gilt:

$$\forall f \neq f_i : (-\beta_{i1}, f) \notin \phi_1(A) \backslash A, \tag{57}$$

denn sonst würde nach Definition von ϕ_1 gelten, dass $(\beta_{i1}, f_i) \in A$, im Widerspruch zu (55). Die Aussagen (56) und (57) ergeben zusammen für alle $i \in \{0, ..., k_1\}$:

$$\forall f \neq f_i : (-\beta_{i1}, f) \in \phi_2(A). \tag{58}$$

Wir betrachten nun alle $f \neq e$ mit

$$(-\alpha, f) \in \phi_2(\phi(A)) \backslash \phi(A) \tag{59}$$

und nummerieren die f mit der Eigenschaft (59) in beliebiger Reihenfolge durch (d.h. $f_{k_1+1}, f_{k_1+2}, ..., f_{k_1+k_2}$).

Nach Definition von ϕ_2 existieren für jedes f_i ($i \in \{k_1 + 1, ..., k_1 + k_2\}$) Elemente

$$(\beta_{i1}, f_i), (\beta_{i2}, f_i) \in \phi(A) \text{ mit} \tag{60}$$

$$-\alpha \in \text{pconv}(\{\beta_{i1}, \beta_{i2}\}). \tag{61}$$

Nach Proposition 2.9 (2) angewandt auf $(-\alpha, f_i)$ folgt für alle $i \in \{k_1 + 1, ..., k_2\}$:

$$(\beta_{i1}, f_i) \in \phi(A) \backslash \phi_2(A) \subseteq \phi_1(A) \backslash A. \tag{62}$$

Dies bedeutet nach Definition von ϕ_1 wiederum für alle $i \in \{k_1 + 1, ..., k_2\}$:

$$\forall f \neq f_i : (-\beta_{i1}, f) \in A, \tag{63}$$

was insbesondere für $f = e$ gilt.

Abschnitt 2.2: Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass

$$\forall i \in \{0, ..., k_1 + k_2\} : (\beta_{i2}, f_i) \in \phi_2(A). \tag{64}$$

Fall 1: Wäre

$$(\beta_{i2}, f_i) \in \phi_1(A) \backslash A \tag{65}$$

für ein $i \in \{0, ..., k_1 + k_2\}$, so müsste nach Definition von ϕ_1 gelten, dass

$$(-\beta_{i2}, e) \in A. \tag{66}$$

Wegen (58) und (63) wissen wir insbesondere auch

$$(-\beta_{i1}, e) \in \phi(A). \tag{67}$$

Nach (54) und (61) gilt $-\alpha \in \text{pconv}(\{\beta_{i1}, \beta_{i2}\})$ für alle $i \in \{0, ..., k_1 + k_2\}$, was äquivalent ist zu $\alpha \in \text{pconv}(\{-\beta_{i1}, -\beta_{i2}\})$. Wegen (66) und (67) erhalten wir daraus nach Definition von ϕ_2, dass $(\alpha, e) \in \phi^2(A)$ im Widerspruch zu (50).

An dieser Stelle ist (64) für alle $i \in \{k_1 + 1, ...k_1 + k_2\}$ bereits bewiesen, denn nach (60) ist in jedem Fall $(\beta_{i2}, f_i) \in \phi(A)$ für alle $i \in \{k_1 + 1, ...k_1 + k_2\}$. Wir müssen also im Folgenden nur noch $i \in \{0, ..., k_1\}$ weiter betrachten.

Fall 2: Die Möglichkeit

$$(\beta_{i2}, f_i) \in \phi_1(\phi(A)) \backslash \phi(A) \tag{68}$$

für ein $i \in \{0, ..., k_1\}$ kann auf analoge Weise wie Fall 1 direkt ausgeschlossen werden, da sonst nach Definition von ϕ_1 insbesondere

$$(-\beta_{i2}, e) \in \phi(A) \tag{69}$$

wäre und und dies zusammen mit $(-\beta_{i1}, e) \in \phi(A)$ und $\alpha \in \text{pconv}(\{-\beta_{i1}, -\beta_{i2}\})$ nach Definition von ϕ_2 implizieren würde, dass $(\alpha, e) \in \phi^2(A)$ im Widerspruch zu (50).

Fall 3: Ist

$$(\beta_{i2}, f_i) \in \phi_2(\phi(A)) \backslash \phi(A) \tag{70}$$

für ein $i \in \{0, ..., k_1\}$, so gibt es nach Definition von ϕ_2 Elemente

$$(\delta_{i1}, f_i), (\delta_{i2}, f_i) \in \phi(A) \text{ mit} \tag{71}$$

$$\beta_{i2} \in \text{pconv}(\{\delta_{i1}, \delta_{i2}\}) \tag{72}$$

und nach Proposition 2.9 (1) gilt

$$\forall f \neq f_i : (-\delta_{i1}, f) \in A. \tag{73}$$

Wegen (56) und (73) sind insbesondere $(-\beta_{i1}, e), (-\delta_{i1}, e) \in \phi(A)$ und wir können daraus schlussfolgern, dass

$$\alpha \notin \text{pconv}(\{-\delta_{i1}, -\beta_{i1}\}), \tag{74}$$

denn sonst wäre $(\alpha, e) \in \phi^2(A)$ nach Definition von ϕ_2, was nach (50) aber ausgeschlossen ist. Aussage (74) ist nach Definition von pconv äquivalent zu

$$-\alpha \notin \text{pconv}(\{\delta_{i1}, \beta_{i1}\}). \tag{75}$$

Nach (71) sind $(\delta_{i1}, f_i), (\delta_{i2}, f_i) \in \phi(A)$ und wir können daraus schlussfolgern, dass auch

$$-\alpha \notin \text{pconv}(\{\delta_{i1}, \delta_{i2}\}) \tag{76}$$

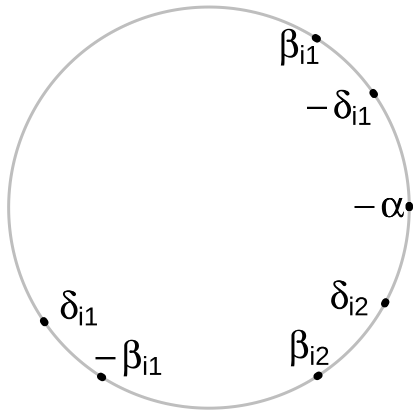

Abbildung 3: Veranschaulichung eines Beweisschritts aus Satz 2.13, Abschnitt 2.2.

gelten muss, denn sonst wäre $(-\alpha, f_i) \in \phi^2(A)$ nach Definition von ϕ_2 im Widerspruch zu (52). Berücksichtigen wir noch, dass $-\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\beta_{i1}, \beta_{i2}\})$ nach (54) gilt, so erhalten wir unter Zuhilfenahme von (75) und (76) (vgl. Abbildung 3):

$$-\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\beta_{i1}, \delta_{i2}\}). \tag{77}$$

Weiterhin muss ebenfalls gelten (vgl. Abbildung 3), dass

$$\delta_{i2} \in \mathrm{pconv}(\{-\delta_{i1}, -\beta_{i1}\}), \tag{78}$$

denn sonst, wäre $-\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\delta_{i1}, \beta_{i1}\})$, was wir jedoch in (75) ausgeschlossen hatten. Wegen (73) und (58) gilt

$$\forall f \neq f_i : (-\delta_{i1}, f), (-\beta_{i1}, f) \in \phi_2(A) \tag{79}$$

und wegen (78) können wir Proposition 2.9 (3) anwenden und erhalten

$$\forall f \neq f_i : (\delta_{i2}, f) \in \phi(A). \tag{80}$$

Da auch $(\delta_{i2}, f_i) \in \phi(A)$ nach (71) ist, erhalten wir somit

$$\forall f \in E : (\delta_{i2}, f) \in \phi(A) \tag{81}$$

für alle $i \in \{0, ..., k_1\}$, für die Fall 3 zutrifft. Die Definition von ϕ_1 liefert insbesondere

$$(-\delta_{i2}, e) \in \phi^2(A). \tag{82}$$

Zusätzlich ist nach (58) auch $(-\beta_{i1}, e) \in \phi^2(A)$. Wegen (77) gilt $-\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\beta_{i1}, \delta_{i2}\})$, was äquivalent ist zu $\alpha \in \mathrm{pconv}(\{-\beta_{i1}, -\delta_{i2}\})$ und es folgt nach Definition von ϕ_2, dass $(\alpha, e) \in \phi^3(A)$. Dies kann aber wegen (50) nicht sein.

Da wir auch die Fälle 2 und 3 ausschließen konnten und in jedem Fall $(\beta_{i2}, f_i) \in \phi^2(A)$ wegen (53) gilt, folgt $(\beta_{i2}, f_i) \in \phi_2(A)$ und damit die Aussage (64) auch für alle $i \in \{0, ..., k_1\}$.

Abschnitt 2.3: In diesem Abschnitt zeigen wir:

$$\exists j \in \{0, ..., k_1 + k_2\} \quad \forall f \neq e : (\beta_{j2}, f) \in \phi(A). \tag{83}$$

Wir betrachten zunächst alle f_i, wobei $i \in \{0, ..., k_1 + k_2\}$. Nach Definition sind die Elemente e, f_i paarweise verschieden. Wir versuchen nun Lemma 2.12 anzuwenden auf $\beta := \alpha$ und $\gamma_{i1} := \beta_{i1}, \gamma_{i2} := \beta_{i2}$. Es gilt für alle $i \in \{0, ..., k_1 + k_2\}$:

$$\begin{aligned}
-\alpha &\in \mathrm{pconv}(\{\beta_{i1}, \beta_{i2}\}) && \text{(nach (54) und (61))},\\
(\alpha, e) &\notin \phi(A) && \text{(nach (50))},\\
(-\alpha, f_i) &\notin \phi(A) && \text{(nach (52) und (59))},\\
(\beta_{i1}, f_i) &\notin \phi_2(A) && \text{(nach (55) und (62))},\\
\forall f \neq f_i : (-\beta_{i1}, f) &\in \phi_2(A) && \text{(nach (58) und (63))},\\
(\beta_{i2}, f_i) &\in \phi_2(A). && \text{(nach (64))}.
\end{aligned}$$

Da alle Voraussetzungen von Lemma 2.12 erfüllt sind, erhalten wir

$$\exists j \in \{0, ..., k_1 + k_2\} \quad \forall i \in \{0, ..., k_1 + k_2\} : (\beta_{j2}, f_i) \in \phi(A). \tag{84}$$

Jetzt müssen nur noch alle f mit $f \neq e, f_i$ betrachtetet werden. Für diese f gilt

$$(-\alpha, f) \notin \phi_2(\phi^2(A)) \backslash \phi^2(A) \text{ und } (-\alpha, f) \notin \phi_2(\phi(A)) \backslash \phi(A), \tag{85}$$

denn sonst wäre $f = f_i$ für ein $i \in \{0, ..., k_1 + k_2\}$ nach Wahl der Elemente f_0 bis $f_{k_1+k_2}$.

In jedem Fall ist $(-\alpha, f) \in \phi^3(A)$ nach (52). Für alle $f \neq e, f_i$ muss außerdem gelten

$$(-\alpha, f) \notin \phi_1(\phi^2(A)) \backslash \phi^2(A), \tag{86}$$
$$(-\alpha, f) \notin \phi_1(\phi(A)) \backslash \phi(A), \tag{87}$$
$$(-\alpha, f) \notin \phi_1(A) \backslash A, \tag{88}$$

denn sonst würde aus der Definition von ϕ_1 folgen, dass insbesondere $(\alpha, e) \in \phi^3(A)$ ist, im Widerspruch zu (50).

Entsprechend bleibt nur folgende Möglichkeit übrig:

$$\forall f \neq e, f_i : (-\alpha, f) \in \phi_2(A). \tag{89}$$

Wegen (54) und (61) ist insbesondere $-\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\beta_{j1}, \beta_{j2}\})$, was nach Definition von pconv äquivalent ist zu

$$\beta_{j2} \in \mathrm{pconv}(\{-\beta_{j1}, -\alpha\}) \tag{90}$$

und wegen $(-\beta_{i1}, f), (-\alpha, f) \in \phi_2(A)$ nach (58) und (89) können wir Proposition 2.9 (3) anwenden und erhalten insbesondere

$$\forall f \neq e, f_i : (\beta_{j2}, f) \in \phi(A). \tag{91}$$

Fassen wir (84) und (91) zusammen, so erhalten wir (83) für alle $f \neq e$.

Abschnitt 2.4: Wir bringen nun die Annahme (50) zum Widerspruch.

Wegen (83) ist $(\beta_{j2}, f) \in \phi(A)$ für alle $f \neq e$. Nach Definition von ϕ_1 erhalten wir daraus

$$(-\beta_{j2}, e) \in \phi^2(A). \tag{92}$$

Wegen (54) und (61) wissen wir insbesondere $-\alpha \in \mathrm{pconv}(\{\beta_{j1}, \beta_{j2}\})$, was äquivalent ist zu

$$\alpha \in \mathrm{pconv}(\{-\beta_{j1}, -\beta_{j2}\}). \tag{93}$$

Nach (58) und (92) gilt $(-\beta_{j1}, e), (-\beta_{j2}, e) \in \phi^2(A)$ und aus der Definition von ϕ_2 folgt deshalb, dass $(\alpha, e) \in \phi^3(A)$ im Widerspruch zu (50). Dies bedeutet aber:

$$\forall A \subseteq S^1 \times E : \phi_1(\phi^3(A)) \backslash \phi^3(A) = \emptyset. \tag{94}$$

Fassen wir (49) und (94) aus Abschnitt 1 und 2 zusammen, so folgt damit, dass ϕ^3 stabil ist. $\square$

An dieser Stelle ist es naheliegend, einen Induktionsbeweis über $\mathrm{cr}(\mathcal{M})$ durchzuführen und zu zeigen, dass $\phi^{3\,\mathrm{cr}(\mathcal{M})}$ stabil ist, denn der Induktionsanfang ist gerade Inhalt von Satz 2.13. Jedoch erweist sich der Induktionsschritt als deutlich schwerer als angenommen, sodass wir an dieser Stelle nur eine Vermutung äußern können.

Vermutung 2.14 *Sei $\mathcal{M}$ ein komplexes Matroid, dann ist $\phi^{3\,\mathrm{cr}(\mathcal{M})}$ stabil.*

Diese Vermutung stützt sich unter anderem auf in *R* programmierte Computersimulationen, bei denen keine Mengen gefunden wurden für die $\phi^{3\,\mathrm{cr}(\mathcal{M})}$ instabil war. Wohl aber fanden sich zumindest im Fall $\mathrm{cr}(\mathcal{M}) \leq 2$ instabile Mengen für $\phi^{3\,\mathrm{cr}(\mathcal{M})-1}$. Die Schranke $3\,\mathrm{cr}(\mathcal{M})$ könnte also tatsächlich die minimale Schranke darstellen.

Dies muss jedoch auch deswegen unter Vorbehalt betrachtet werden, als dass nur spezielle Typen von komplexen Matroiden untersucht wurden, bei denen das Eliminationsaxiom für alle Paare von Kreisen und nicht nur für Doppelkreise galt.

Literatur

[1] Laura Anderson and Emanuele Delucchi, *Foundations for a theory of complex matroids*, Discrete & Computational Geometry **48** (2012), no. 4, 807–846.

[2] Alexander Below, Vanessa Krummeck, and Jürgen Richter-Gebert, *Complex matroids phirotopes and their realizations in rank 2*, Discrete and computational geometry, Springer, 2003, pp. 203–233.

[3] Anders Björner, Michel Las Vergnas, Bernd Sturmfels, Neil White, and Günter M. Ziegler, *Oriented matroids*, no. 46, Cambridge University Press, 1999.

[4] Jon Folkman and Jim Lawrence, *Oriented matroids*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **25** (1978), no. 2, 199–236.

[5] Winfried Hochstättler and Jaroslav Nesetril, *Linear programming duality and morphisms*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **40** (1999), no. 3, 577–592.

[6] James G. Oxley, *Matroid theory*, Oxford University Press, New York, 1992.